

Alcune slide su [www.pi.infn.it/~baldini/](http://www.pi.infn.it/~baldini/).

Libri: primo parte del corso (cosmici):

- High Energy Astrophysics, Longair

fisica stellare (sole):

- Stellar structure and evolution, Kippenhahn, Weigert

neutrini (masse, oscillazioni):

- Massive neutrinos in physics and astrophysics, Mohapatra, Pal

cosmologia (seconda parte del corso):

- Cosmology and particle astrophysics, Bergström, Goobar

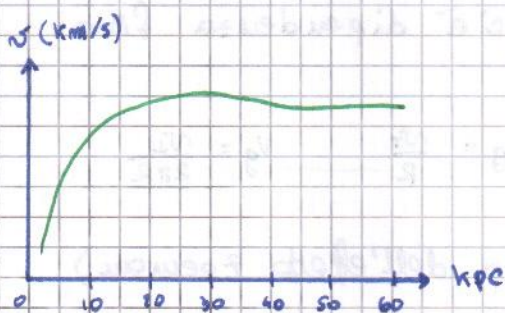
- Weinberg, Gravitation and Cosmology

Questo giovedì non c'è lezione, e la settimana prossima solo venerdì.

**Evidenza di materia oscura** → velocità radiale delle galassie.

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2(r)}{r} \Rightarrow v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Confrontando con i dati sperimentali si ottiene evidenza di un alone di materia invisibile: la distribuzione è piatta, non decresce come  $r^{-1/2}$ .



C'è un alone di materia uniformemente distribuita fino ai margini della galassia.

Fino agli anni '30 si credeva che i raggi cosmici fossero costituiti di fotoni.

Spettro dei raggi cosmici → fenomeni "shock", supernove.

$$10^{15} \text{ eV} = 1 \text{ PeV}$$

$$10^{18} \text{ eV} = 1 \text{ EeV}$$

$$10^{21} \text{ eV} = 1 \text{ ZeV}$$

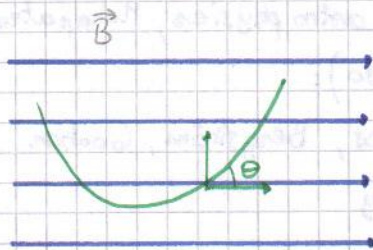
## Traiettorie in campi magnetici

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{ze}{c} \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\text{legge di Lorentz})$$

$$\vec{p} = m\gamma \vec{v} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + m\gamma \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Il primo termine non può essere  $\neq$  da 0, perché  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  non ha componenti parallele a  $\vec{v}$ .

Consideriamo un  $\vec{B}$  uniforme e costante:



$$v_{\perp} = v \sin\theta$$

$$m\gamma \frac{v_{\perp}^2}{R} = \frac{ze}{c} (\vec{v} \wedge \vec{B}) = \frac{ze}{c} v_{\perp} B$$

legge di Lorentz

$$R = \frac{m\gamma v_{\perp} c}{zeB} = \frac{m\gamma v \sin\theta c}{zeB}$$

$$\frac{m\gamma v}{ze} = \frac{p}{ze} \equiv \text{RIGIDITA'}$$

raggio di curvatura = giroraggio

Esempio: raggio massimo di curvatura per un protone da 1 TeV:

$$R_{\text{max}} (1 \text{ TeV}) = \frac{pc}{eB}$$

$$B \approx 10 \mu\text{G} = 10^{-5} \text{G} = 10^{-9} \text{T}$$

$$R_{\text{max}} = \frac{10^{12} \text{ eV} \cdot 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ erg/eV}}{4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-5}} [\text{cm}] \approx \frac{1}{3} \cdot 10^{15} \text{ cm} \approx 3 \cdot 10^{14} \text{ cm}$$

Distanza terra-sole = 150 Mkm =  $1.5 \cdot 10^{13}$  cm.

I protoni non vengono quasi deviati dal campo magnetico solare, ad energie molto elevate: c'è dipendenza fino a circa 1 GeV.

$\omega_g \equiv$  pulsazione del giroraggio

$$\omega_g = \frac{v_{\perp}}{R} \quad v_g = \frac{v_{\perp}}{2\pi R}$$

Nell'esempio di prima:

$$\omega_g = \frac{v_{\perp} zeB}{m\gamma v_{\perp} c} = \frac{ze}{m\gamma c} B$$

(analogo dell'effetto Zeeman)

$$\begin{cases} \omega_d = \frac{ze}{mc} B \\ \omega_p = \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{B}}{\hbar} = \frac{e}{2mc} B \hbar \end{cases}$$

La frequenza di giroraggio di un elettrone è  $v_g = \frac{eB}{2mc\hbar} = 29 \text{ GHz/Tesla}$

$\Rightarrow$  dall'analisi delle righe di oggetti situati nello spazio

si può risalire a quanti Tesla di campo magnetico ci sono in quella regione di spazio. Tipici valori sono  $10^{-9} \div 10^{-8} \text{T}$ .

Studio prof: INFN stanza 212. Email: [alessandro.baldini@pi.infn.it](mailto:alessandro.baldini@pi.infn.it)

$$R = \frac{m \gamma v_{\perp} c}{ze B}$$

Cosa succede se le particelle attraversano zone di campo magnetico variabile lentamente rispetto alla frequenza di girogaggio del moto elicoidale della particella?

$$v_g = \frac{1}{2\pi R} v_{\perp}$$

$$\frac{\Delta B}{B} \text{ piccolo in un tempo } T = v_g^{-1}$$

$$i \equiv \frac{ze}{T} = ze v_g = \frac{ze v_{\perp}}{2\pi R}$$

Il momento magnetico associato alla particella sarà:

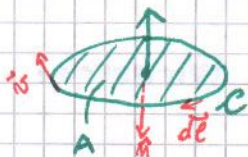
$$\mu = i \frac{A}{c} = i \frac{\pi R^2}{c} = \frac{ze v_{\perp}}{2\pi R c} \pi \frac{m^2 \gamma^2 v_{\perp}^2 c^2}{z^2 e^2 B^2} = \frac{1}{2} m \frac{v_{\perp}^2}{B} \gamma$$

$\frac{1}{2} m v_{\perp}^2$  è l'energia cinetica trasversa della particella:

$$\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \equiv W_T$$

Nel caso non relativistico:

$$\mu = \frac{W_T}{B}$$



$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{e} = -\frac{1}{c} \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

TEOREMA DI  
STOKES

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell})$$

Questa è la forza elettromotrice dovuta alla variazione di  $B$  attraverso la superficie  $A$  di singolo girogaggio. Se  $B$  è uniforme su  $A$  e la variazione nel tempo è piccola:

$$2\pi R \bar{E} = +\frac{1}{c} \frac{\Delta B}{\Delta t} A$$

Per ottenere il lavoro fatto da  $\vec{E}$  moltiplico per  $ze$ :  
(lavoro fatto in un giro sulla particella; il lavoro tocca solo la componente trasversa)

$$ze 2\pi R \bar{E} = \frac{ze}{c} \frac{\Delta B}{\Delta t} A = \Delta W_T \quad \frac{1}{T} = \frac{v_{\perp}}{2\pi R}$$

$$\Delta W_T = \frac{ze}{c} \frac{\Delta B v_{\perp}}{2\pi R} \pi R^2 = \frac{ze \Delta B v_{\perp}}{2c} \frac{m v_{\perp} c}{ze B} = \frac{\Delta B}{B} W_T$$

(siamo sempre nel caso non relativistico)

$$\mu = \frac{W_{\perp}}{B} \quad \Delta\mu = ?$$

Adesso conosciamo  $\Delta W_{\perp}(\Delta B)$ :

$$\Delta\mu = \frac{\Delta W_{\perp}}{B} - W_{\perp} \frac{\Delta B}{B^2} = W_{\perp} \frac{\Delta B}{B} - W_{\perp} \frac{\Delta B}{B} = 0$$

INVARIANTE  
ADIBATICO

$$\Delta\left(\frac{W_{\perp}}{B}\right) = 0$$

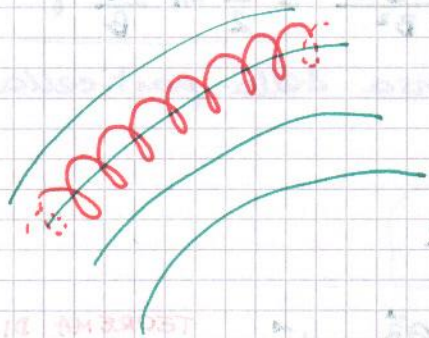
$$\Delta\left(\frac{P_{\perp}^2}{2m_0 B}\right) = 0 \Rightarrow \Delta\left(\frac{P_{\perp}^2}{B}\right)$$

$$P_{\perp} = \frac{ze}{c} BR \Rightarrow \Delta(BR^2) = 0$$

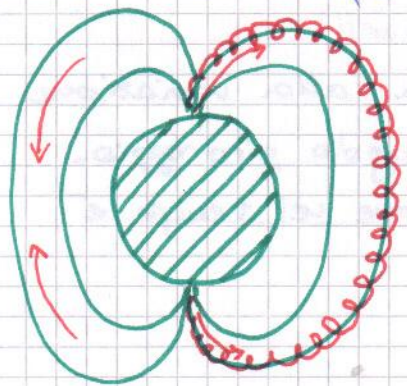
Queste sono tutte  
espressioni dell'invarianza  
adiabatica. - Nel suo  
moto, la particella ricopre  
sempre la stessa quantità

di linee del campo magnetico!

Nel caso relativistico vale anche:  $\Delta(\gamma\mu) = 0$



Nel caso di un campo magnetico tipo quello terrestre:



$$P^2 = P_{\perp}^2 + P_{\parallel}^2$$

$P_{\perp}^2$  aumenta  $\Rightarrow P_{\parallel}^2$  diminuisce.

Se  $B$  diventa troppo intensa,

$P_{\parallel}^2 \rightarrow 0$  e la particella si

"ferma". Basta un piccolissimo  
"colpetto" e  $P_{\parallel}$  s'inverte, e

la particella torna indietro - Poi rimbalza all'altro  
polo, ecc.  $\Rightarrow$  **SPECCHIO MAGNETICO**

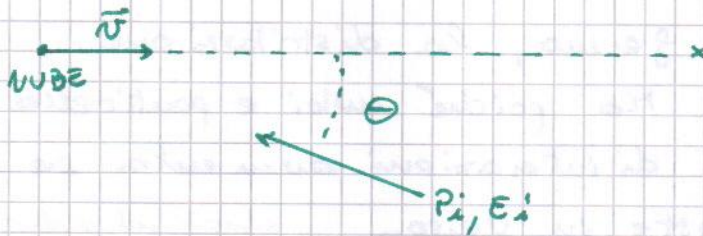
Sono state osservate particelle cariche intrappolate  
attorno alla terra.

Applichiamo la condizione di specchio magnetico a  
particelle cariche che attraversano zone di plasmi,  
ovvero nubi in moto di campi magnetici variabili.

Nube  $\equiv$  cosa enorme, con massa infinitamente

più grande di quella della particella. Consideriamo il

caso ultrarelativistico e vediamo la variazione di energia della particella dovuto allo scattering elastico nube-particella.



Mettiamoci nel s.d.r. dove la nube è ferma:

$$\left. \begin{aligned} E'_i &= \gamma_v (E_i + \beta_v c p_i \cos\theta) \\ c p'_{ix} &= \gamma_v (c p_i \cos\theta + \beta_v E_i) \end{aligned} \right\} \text{visti dal s.d.r. della nube}$$

( $\gamma_v, \beta_v$  della nube) Applichiamo lo specchio magnetico:

$$\begin{aligned} E'_f &= E'_i \\ p'_{fx} &= -p'_{ix} \end{aligned} \quad \text{inversione del moto nel s.d.r. della nube ferma}$$

Torniamo al sistema di riferimento iniziale:

$$\begin{aligned} \underline{E_f} &= \gamma_v (E'_f - \beta_v c p'_{fx}) = \gamma_v (E'_i + \beta_v c p'_{ix}) = \\ &= \gamma_v \left[ \gamma_v (E_i + \beta_v c p_i \cos\theta) + \beta_v c \frac{1}{c} \gamma_v (c p_i \cos\theta + \beta_v E_i) \right] = \\ &= \gamma_v \left[ \gamma_v E_i + \beta_v \gamma_v c p_i \cos\theta + \beta_v \gamma_v c p_i \cos\theta + \gamma_v \beta_v^2 E_i \right] = \\ &= \gamma_v^2 \left[ E_i + 2 \beta_v c p_i \cos\theta + \beta_v^2 E_i \right] = \\ &= E_i \gamma_v^2 \left[ 1 + 2 \beta_v c \frac{p_i}{E_i} \cos\theta + \beta_v^2 \right] = \\ &= E_i \gamma_v^2 \left[ 1 + 2 \beta_{nv} \beta \cos\theta + \beta_{nv}^2 \right] \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \beta_{nv} \rightarrow \text{nube} \\ \beta \rightarrow \text{particella} \end{array}$$

Si osserva che la velocità delle nubi magnetiche è piuttosto piccola. Sviluppiamo al secondo ordine:

$$\underline{\gamma_v^2} = \frac{1}{1 - \beta_v^2} \approx 1 + \beta_v^2 \quad (\beta_v \ll 1)$$

$$\begin{aligned} E_f &\approx E_i (1 + \beta_{nv}^2) (1 + 2 \beta_{nv} \beta \cos\theta + \beta_{nv}^2) = \\ &\approx E_i (1 + 2 \beta_{nv} \beta \cos\theta + 2 \beta_{nv}^2 + \dots) \quad \text{+ termini al 3° ordine + ...} \end{aligned}$$

$$E_f - E_i \approx E_i (2 \beta_{nv} \beta \cos\theta + 2 \beta_{nv}^2)$$

$$\boxed{\frac{\Delta E}{E} = 2 \beta_{nv}^2 + 2 \beta_{nv} \beta \cos\theta}$$

Nel caso ultrarelativistico  $\beta = 1$  e  $\frac{\Delta E}{E}$  dipende solo dalle caratteristiche della nube e dall'angolo d'impatto.

Supponiamo che tutti gli specchi magnetici all'interno della nube s. muovano con la stessa  $\beta_v$  (in modulo) la particella, attraversando la nube, subirà molte deflessioni.

Se la particella fosse ferma, la distribuzione in  $\cos\theta$  sarebbe piatta. Ma poiché nube e particella sono in moto, il rate di interazioni aumenta se le due velocità sono opposte in verso.

$$\frac{1}{\Delta t} \text{-rate} \propto \overset{\text{particella}}{c} + \overset{\text{nube}}{v} \cos\theta \Rightarrow 1 + \frac{v}{c} \cos\theta = 1 + \beta_v \cos\theta$$

isotropia nel s.d.r. a riposo  
bisogna mediare in questa distribuzione per vedere la deviazione media della particella in energia.

$$\langle \frac{\Delta E}{E} \rangle = \frac{\int_{-1}^1 (2\beta_v^2 + 2\beta_v \cos\theta)(1 + \beta_v \cos\theta) d\cos\theta}{\int_{-1}^1 (1 + \beta_v \cos\theta) d\cos\theta}$$

NB:  $\beta_{\text{particella}} \equiv 1$ .

Stiamo calcolando ordini di grandezza, i risultati vanno presi con una precisione di circa 30%.

$$\langle \frac{\Delta E}{E} \rangle = 2\beta_v^2 \frac{\int_{-1}^1 (2\beta_v x + \frac{2\beta_v x(1+\beta_v x)}{2}) dx}{\int_{-1}^1 (1 + \beta_v x) dx} = 2\beta_v^2 \int_{-1}^1 \frac{2\beta_v x(1+\beta_v x)}{2} dx = (\dots)$$

$$= \frac{8}{3} \beta_v^2$$

✓ urto elastico la particella aumenta la sua energia di  $\frac{8}{3} \beta_v^2 E$ . N.B.:  $\frac{\Delta E}{E}$  non dipende da  $E$ ! si riesce a ricostruire la distribuzione osservata  $\frac{dN}{dE} \propto E^{-2.7}$ ?

Consideriamo  $\beta_v$  costante  $\Rightarrow \beta_v^2$  costante.

$$\frac{8}{3} \beta_v^2 \equiv \xi \quad \Delta E = \xi E$$

$$E_1 - E_0 = \xi E_0 \quad E_1 = (1 + \xi) E_0 \quad \xi(1 + \xi) + 1 + \xi = \xi + \xi^2 + 1 + \xi = 1 + 2\xi + \xi^2 = (1 + \xi)^2$$

$$E_2 - E_1 = \xi E_1 = \xi(1 + \xi) E_0 \quad E_2 = (1 + \xi)^2 E_0$$

$$E_n - E_{n-1} = \xi E_{n-1} \Rightarrow E_n = (1 + \xi)^n E_0$$

Qual è la probabilità di fuga dalla zona di interazione?

$\equiv P_F \Rightarrow$  la probabilità che la particella faccia  $n$  urti è  $(1 - P_F)^n$ .

Se una particella ha subito un'accelerazione fino all'energia  $E_1$ , ha subito un numero di urti  $n = \frac{\log(E/E_0)}{\log(1 + \xi)}$ .

È la probabilità che l'energia raggiunta sia  $\geq \epsilon$  e uguale a:

$$P(E' \geq \epsilon) = (1 - P_F)^n + (1 - P_F)^{n+1} + (1 - P_F)^{n+2} + \dots$$

> probabilità di fare ESATTAMENTE n urti

$$\equiv \sum_{x \geq n} R^x = \frac{R^n}{1 - R} = \frac{(1 - P_F)^n}{P_F} =$$

$$\equiv \frac{1}{P_F} (1 - P_F)^{\frac{\log(E/E_0)}{\log(1+\beta)}}$$

Quindi il numero di particelle con  $E' \geq \epsilon$  sono

proporzionale a questa quantità.

$$N(E' \geq \epsilon) = \alpha P(E' \geq \epsilon) \Rightarrow \log N = \log \alpha + \log P$$

costante di proporzionalità

$$\log[N(E' \geq \epsilon)] = \frac{\log(E/E_0)}{\log(1+\beta)} \log(1 - P_F) + \log \alpha - \log P_F$$

$$\frac{\log(1 - P_F)}{\log(1 + \beta)} \equiv -\gamma \Rightarrow \log N = -\gamma \log(E/E_0) + \log \alpha - \log P_F$$

$$N(E' \geq \epsilon) = C \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{-\gamma}$$

$$\gamma \equiv - \frac{\log(1 - P_F)}{\log(1 + \beta)} = e^{(\log N_{\text{Tot}} - \log P_F)}$$

Questa è esattamente la distribuzione che osservo nei raggi cosmici.

$$N.B.: \alpha = N_{\text{Tot}} \text{ particelle}$$

$$\frac{dN}{d\epsilon} \propto \epsilon^{-(\gamma+1)}$$

Misurando la pendenza dello spettro si risale a  $\gamma$ .

Sia  $P_F$  che  $\beta$  sono numeri molto piccoli. Posso approssimare:

$$\gamma = - \frac{\log(1 - P_F)}{\log(1 + \beta)} = \frac{\log(1/P_F)}{\log(1 + \beta)} \approx \frac{\log(1 + P_F)}{\log(1 + \beta)} \approx \frac{P_F}{\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{d\epsilon} \propto \epsilon^{-(P_F/\beta + 1)}$$

$\beta$  è piccolo: tipici  $\beta_{\text{SR}}$  sono dell'ordine di  $10^{-6}$ .

Il problema è che  $P_F/\beta$  è un valore che dipende dalla porzione di galassia attraversata dalla particella: questa distribuzione è inadatta a spiegare lo spettro dei raggi cosmici che osserviamo.

Un modello più convincente è il meccanismo di accelerazione "shock" delle supernovae.

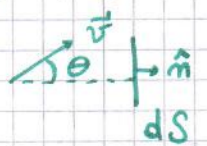
Ocorre prima introdurre della fluidodinamica.

FLUIDO DINAMICA

Fluido caratterizzato da una densità di massa  $\rho(\vec{r}, t)$ .

Quanto fluido esce da un volume  $V$  in un tempo?

Quantità di materia che attraversa una superficie  $ds$  nell'unità di tempo:



$$\frac{\rho |\vec{v}| \cos \theta dt ds}{dt} = \rho \vec{v} \cdot \hat{n} ds$$

$S \equiv$  superficie che racchiude il volume  $V$ .

$$\int_S ds \rho \vec{v} \cdot \hat{n} \quad (\text{variazione nell'unità di tempo della quantità di materia contenuta in } V)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S ds \rho \vec{v} \cdot \hat{n} \quad \text{EQUAZIONE DI CONTINUITA'}$$

Teor. di Gauss (o della divergenza)

$$\text{Teorema} \quad \int_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_V (\nabla \cdot \vec{v}) dV$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{s} = \vec{v} \cdot \hat{n} ds$$

$$\vec{v} \rightarrow \rho \vec{v}$$

$$\text{Teorema} \quad \nabla \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + \vec{a} \wedge (\nabla \wedge \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\nabla \wedge \vec{a})$$

Posso ricavare l'equazione di continuità:

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0$$

Non abbiamo mai specificato come deve essere  $V$ : questa equazione è **locale** e si può scrivere in modo generale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{Equazione di continuità}$$

Andiamo ora a vedere quale forza agisce sul fluido contenuto nella superficie  $S$ :

$$- \int_S p \hat{n} ds \quad (p \text{ pressione del fluido})$$

Anche  $p$  è una variabile locale:  $p = p(\vec{r}, t)$

Sappiamo che:



$$\int_S (\mu_x \cos \alpha + \mu_y \cos \beta + \mu_z \cos \gamma) dS = \int_V \left( \frac{\partial \mu_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu_y}{\partial y} + \frac{\partial \mu_z}{\partial z} \right) dV$$

Dove  $\cos \alpha, \beta, \gamma$  sono i coseni direttori della normale ad  $S$ . Segue:

$$\int_S \mu_x \cos \alpha dS = \int_V \frac{\partial \mu_x}{\partial x} dV \quad (\text{per un campo od una componente}).$$

Allora:

$$\int_S p \cos \alpha dS = \int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV$$

$$\begin{aligned} \hat{i} \int_S p \cos \alpha dS + \hat{j} \int_S p \cos \beta dS + \hat{k} \int_S p \cos \gamma dS &= \\ &= \hat{i} \int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV + \hat{j} \int_V \frac{\partial p}{\partial y} dV + \hat{k} \int_V \frac{\partial p}{\partial z} dV \end{aligned}$$

$$\int_S p \cdot \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} p dV \quad \text{Forza agente su un fluido contenuto all'interno di un volume } V.$$

Vogliamo scriverla in forma locale.

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Localmente:  $dm = \rho dV$

$$\rho dV \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p dV$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad \text{EQUAZIONE DI EULERO}$$

Vogliamo ora separare l'evoluzione temporale da quella spaziale.

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left( \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad \text{EQUAZIONE DI EULERO}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

Vogliamo calcolare l'energia totale (cinetica + interna) contenuta nel volume di fluido  $dV$ :

$$dV \rho \frac{v^2}{2} + U dV$$

Consideriamo di qui in avanti volumetti di massa unitaria:  $\rho V \equiv 1$

La densità di energia è data da  $\rho \frac{v^2}{2} + U$

$U$  è la densità di energia  $\Rightarrow$

$$U \equiv \frac{E}{V} = \epsilon \rho \quad [\epsilon] = [E]$$

Vogliamo vedere come diminuisce l'energia:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \rho \epsilon \right) dV$$

Localmente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \rho \epsilon \right)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} \right) = \frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{2}{2} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} =$$

$$= \frac{v^2}{2} (-\nabla \cdot (\rho \vec{v})) + \rho \vec{v} \cdot (-\nabla p - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p)$$

$$\nabla \cdot (\vec{v}^2) = 2(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + 2\vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v})$$

$$\vec{v} \cdot \nabla (\vec{v}^2) = 2\vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + 0$$

$$\vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \nabla (v^2)$$

Quindi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{v^2}{2} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot (\nabla v^2) - \vec{v} \cdot \nabla p$$

Consideriamo l'entalpia  $h \equiv \epsilon + pV$ , che è una variabile di stato (energia interna +  $p \cdot V$ ).

$$dh = d\epsilon + dpV + p dV$$

Per il 1° principio della termodinamica:  $d\epsilon = T ds - p dV$

$$dh = T ds - p dV + p dV + V dp = T ds + V dp$$

$$dp = \frac{dh}{V} - \frac{T}{V} ds = \rho dh - T \rho ds \quad \Rightarrow \quad \nabla p = \rho \nabla h - T \rho \nabla s$$

Sostituendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{v^2}{2} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot (\nabla \frac{v^2}{2}) - \vec{v} \rho \nabla h + T \rho \vec{v} \cdot \nabla s$$

( $S$  è l'entropia)

$$= -\frac{v^2}{2} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot \nabla \left( \frac{v^2}{2} + h \right) + T \rho \vec{v} \cdot \nabla s$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon) = \epsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t}$$

$$d(\rho \epsilon) = \epsilon d\rho + \rho d\epsilon = \epsilon d\rho + \rho(Tds - pdv) = \epsilon d\rho + \rho T ds - \rho p dv$$

$$v\rho = 1 \Rightarrow dv = d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{d\rho}{\rho^2}$$

$$d(\rho \epsilon) = \epsilon d\rho + \rho T ds + \rho \cancel{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2} = (\epsilon + pV) ds + \rho T ds =$$

$$= h ds + \rho T ds \quad \frac{1}{\rho} = v$$

Quindi:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon) = h \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$= -h \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \rho T \frac{\partial s}{\partial t}$$

Adesso dobbiamo introdurre una ipotesi in più.

Supponiamo il fluido perfetto:

- no viscosità
- no scambio di calore tra volumetti adiacenti  $\Rightarrow ds = 0$

N.B.:  $ds$  = differenziale totale dell'entropia.

$$ds = \frac{\partial s}{\partial t} dt + \frac{\partial s}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial y} dy + \frac{\partial s}{\partial z} dz = 0$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) s = 0 \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla) s$$

Quindi:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon) = -h \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \rho T (\vec{v} \cdot \nabla) s$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \rho \epsilon \right) = -\frac{v^2}{2} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot \nabla \left( h + \frac{v^2}{2} \right) + \cancel{T \rho \vec{v} \cdot \nabla s}$$

$$- h \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \cancel{\rho T (\vec{v} \cdot \nabla) s}$$

$$= - \left( h + \frac{v^2}{2} \right) \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot \nabla \left( h + \frac{v^2}{2} \right)$$

scalare  $\Rightarrow$  porta dentro la divergenza  $= - \nabla \cdot \left[ \rho \vec{v} \left( h + \frac{v^2}{2} \right) \right]$

$$\int_V dv \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \rho \epsilon \right) = \int_V - \nabla \cdot \left[ \rho \vec{v} \left( h + \frac{v^2}{2} \right) \right] dv = \int_S \rho \vec{v} \left( h + \frac{v^2}{2} \right) \cdot d\vec{s}$$

$\rho \vec{v} \left( h + \frac{v^2}{2} \right) \equiv$  densità di flusso d'energia

l'interpretazione che ne viene fuori è banale.

$$- \int_S \rho \vec{v} \left( h + \frac{v^2}{2} \right) d\vec{s} = - \int_S \rho \vec{v} \left( \frac{v^2}{2} + \epsilon \right) d\vec{s} - \int_S \rho \vec{v} \cdot pV d\vec{s}$$

Il primo termine rappresenta il rate di fuoriuscita dell'energia meccanica + interna -

Il secondo termine è il lavoro per unità di tempo compiuto sul volume, infatti:

$$-\int_S \rho v p \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\int_S p \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

$$F = -\int_S p \hat{n} \cdot d\vec{S} \quad p \rightarrow p v$$

$$\vec{J}_E \equiv \rho \vec{v} \left( h + \frac{v^2}{2} \right)$$

l'equazione che abbiamo scritto rappresenta quindi il secondo principio della termodinamica -

l'impulso del volume  $dV$  è  $\rho \vec{v}$ . Quanto vale  $\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v})$ ?

Facciamolo nel caso unidimensionale -

$$\vec{v} \equiv v_x \hat{x}$$

Le equazioni di Eulero e di continuità si scrivono:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -v \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{v \partial v}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Quindi:  $\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) = v \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial t}$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) = -v^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - 2 \rho v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2) - \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (p + \rho v^2) = \text{forza su } dV$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) dV = -\int_V \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho v^2) dV = -\int_S (p + \rho v^2) \hat{n} \cdot d\vec{S}$$

Questo valeva nel caso unidimensionale.

In generale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = -\int_V \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV$$

$$\Pi_{ik} \equiv p \delta_{ik} + \rho v_i v_k \quad \text{TENSORE ENERGIA - IMPULSO}$$

Nel passaggio attraverso un fronte di shock di una particella imporreemo la conservazione di energia, impulso e massa secondo queste leggi:-

## Onde sonore $\equiv$ perturbazioni adiabatiche di un fluido perfetto

Vediamo come si propagano.

Consideriamo una piccola perturbazione:

$$\rho \equiv \rho_0 + \rho' \quad p \equiv p_0 + p'$$

$\rho'$ ,  $p'$  piccoli.

Supponiamo piccola anche la velocità  $\vec{v}$ .

Imponiamo inoltre un'equazione di stato, cioè una equazione che lega pressione, energia e densità.

$$p = p(\rho) \Rightarrow p' = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho_0) \right|_{s = \text{costante}} \rho'$$

Imponiamo  $p = p(\rho)$  nell'eq. di Eulero ed in quello di continuità.

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho_0 + \rho') \vec{v}] = 0$$

Trascurando termini del secondo ordine, e avendo imposto  $\rho_0, p_0$  costanti:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \nabla p' \approx -\frac{\nabla p'}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p'$$

$$\rho' = \frac{p'}{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho_0)\right)_{s \text{ cost}}}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p'}{\partial t} + \left. \frac{\partial p(\rho_0)}{\partial \rho} \right|_s \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} \end{cases}$$

Imponiamo ora l'ansatz  $\vec{v} \equiv \nabla \varphi$ : dalla seconda ricaviamo

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p'$$

A parte costanti:  $p' = -\frac{\partial p}{\partial \rho} \rho_0$

Quindi:

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \rho_0 + \left. \frac{\partial p(\rho_0)}{\partial \rho} \right|_s \rho_0 \nabla^2 \varphi = 0$$

Definisco:  $c^2 \equiv \left. \frac{\partial p(\rho_0)}{\partial \rho} \right|_s$

Rimane:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

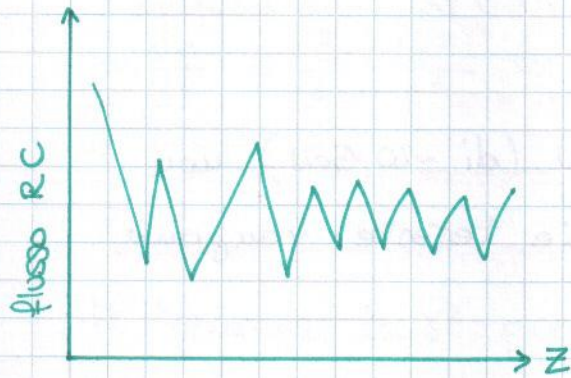
$$\varphi = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$$

Questa settimana, e una settimana a fine maggio, vediamo la parte sperimentale -

protoni = 90% cosmici primari

$\alpha$  = 9% cosmici primari

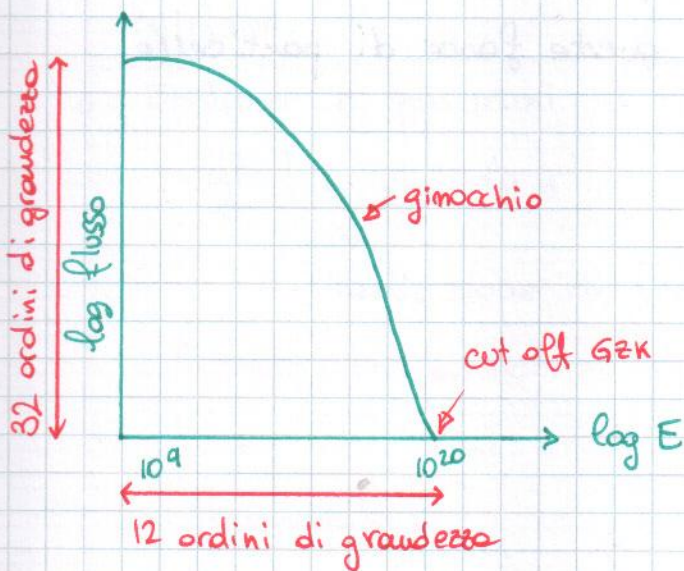
Gli elementi piú pesanti dell'elio sono soppressi -



Lo spettro ha questa forma per la stabilità di nuclei pari e dispari.

$e^+, e^-, \gamma$  = < 1% cosmici primari

### Regime di energia



domenico baldini  
@ pi.infn.it

Gli esperimenti possono essere collocati:

- fuori dall'atmosfera (in orbita)
- su pallone
- a terra
- sotto terra (o sott'acqua)

**Cut-off geomagnetico:** particelle cariche deflesse dal campo magnetico terrestre.

La terra si comporta come un dipolo magnetico con intensità  $\sim$  una frazione di Gauss.

Raggio di curvatura: 
$$R(m) = \frac{p(\text{GeV})}{0.3 B(T)}$$

$0.1 \text{ Gauss} \approx 0.00001 \text{ Tesla}$

Come ordine di grandezza.

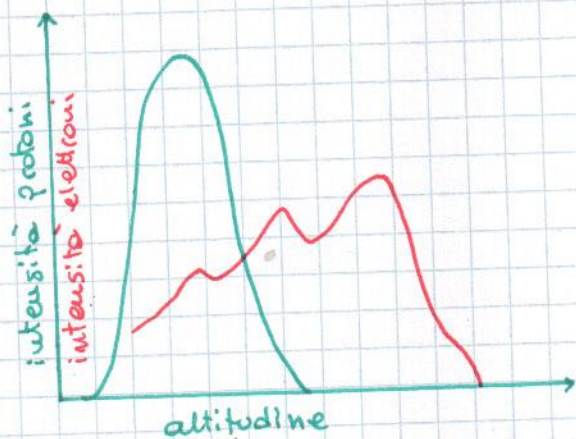
7000 km  $\sim$  atmosfera?

$p \sim 0.3 \cdot 10^{-5} \cdot 7 \cdot 10^6 \sim 20 \text{ GeV}$

Particelle di impulso minore del GeV (di  $\sim 20 \text{ GeV}$ ) non riescono a raggiungere la superficie terrestre: vengono completamente deflesse.

**Fasce di Van Allen:** effetto "bottiglia", cioè specchio magnetico che mantiene intrappolate le particelle cariche tra i poli.

L'interazione della ionosfera con queste fasce di particelle produce le aurore boreali.



**Asimmetria est-ovest:** a causa della rotazione terrestre, c'è un eccesso di particelle cariche positivamente da ovest, ed un eccesso di particelle negative da est.



Tramite questo effetto è possibile risalire alla composizione dei cosmici: la componente positiva è data soprattutto da  $p^+$  e nuclei, mentre gli  $e^\pm$  sono meno dell'1% dei primari.

## Perdita di energia

- o Particelle cariche pesanti: Bethe-Bloch

$$-\frac{dE}{dx} \propto \frac{Z}{A} \frac{Z^2}{\beta^2} \ln \gamma^2$$

$\frac{Z}{A}$  caratteristico dell'assorbitore  
 $\frac{Z^2}{\beta^2}$  → irrilevante per particelle relativistiche

\* permette di distinguere i vari nuclei

Il termine  $\ln \gamma^2$  prende il nome di **RISALITA RELATIVISTICA**.

Nel punto di minimo,  $-\frac{dE}{dx} \approx 1.5 \text{ MeV} \cdot \frac{g}{\text{cm}^3}$  (M.I.P.)

L'interazione è da considerarsi adiabatica:

$M \gg m \Rightarrow$  la particella mantiene la traiettoria iniziale.

- o Elettroni e positroni:

$$-\frac{dE}{dx} \Big|_{\text{ioniz}} \propto \frac{Z}{m\nu^2} \ln \gamma^2$$

radiazione di frenamento:

$$\text{Formola di Larmor} \Rightarrow -\frac{dE}{dx} \Big|_{\text{brems}} = E \frac{Z^2}{m_e^2}$$

Frenamento  $\propto$   
ionizzazione

$$\text{ENERGIA CRITICA} \quad \text{E t.c.} \quad \frac{dE}{dx} \Big|_{\text{brems}} = \frac{dE}{dx} \Big|_{\text{ion}} \sim \frac{800}{Z+1} \text{ MeV}$$

Alle energie che osserviamo, siamo ben al di sopra dell'energia critica.

- Fotoni: ad alte energie è rilevante solo la produzione di coppie (che può avvenire solo off-shell, cioè con il fotone all'interno di un campo nucleare).

$$\sigma_{\text{pair}} \sim Z(Z+1)$$

Combinando frenamento e coppie si formano gli sciame e.m.



N.B.: L'energia viene ceduta sostanzialmente alle particelle secondarie, e non agli atomi del materiale.

$$n_{\text{MAX}} = \frac{1}{\ln 2} \ln(E_0/E_c) \quad E_p(m) = \frac{E_0}{2^m}$$

$$E_c = E_p(n_{\text{MAX}})$$

Per  $E \leq E_c$  l'energia comincia ad essere ceduta al materiale.

**Sciame adronico**: urti anelastici tra la particella ed un nucleo dell'atmosfera, con produzione di particelle secondarie (per motivi di spazi delle fasi, principalmente  $\pi^\pm$  e  $\pi^0$ ).

I  $\pi^0$  danno poi luogo alla componente e.m. dello sciame ( $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ ).

Una percentuale di energia viene "persa":

- riassorbimento di neutroni, energia rilasciata in eccitazione nucleare
- $\mu$  e  $\nu$  prodotti dai decadimenti di  $\pi^\pm$  non vengono rilevati.

$\lambda_a$  = lunghezza di assorbimento per sciame adronici

In atmosfera,  $\frac{\lambda}{X_0} \sim 2$ .

Sciame adronici lunghi: il doppio di quelli e.m.

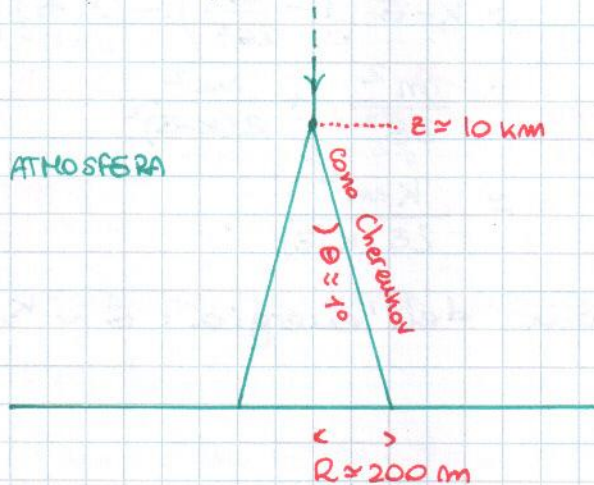
N.B.: lunghezza di traccia = somma delle lunghezze di tutte le tracce campionate.

(VEDI SLIDES)

La risoluzione ottenibile con un calorimetro adronico è  
 $\sim \frac{70\%}{\sqrt{E}} \Rightarrow$  calorimetri a doppio readout che misurano  
separatamente componente adronica e componente e.m.  
 $\Rightarrow$  risoluzione  $\sim \frac{30\%}{\sqrt{E}}$

Altri due metodi di rivelazione:

- effetto Cherenkov
- luce di fluorescenza



Luminescenza: chiamata anche "luce di fluorescenza", è dovuta all'eccitazione dell'azoto atmosferico, che riemette nell'ultravioletto.

EAS = extended air shower

L'atmosfera è sostanzialmente trasparente all'U.V., quindi la luce di fluorescenza riesce a propagarsi per lunghe distanze.

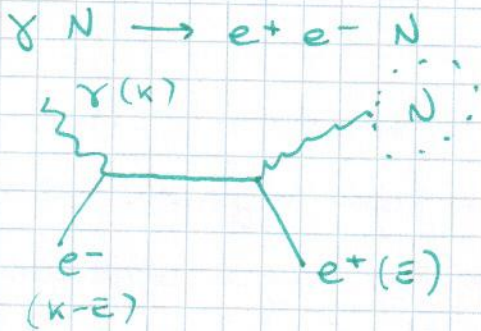
Per ovviare al problema del fondo, si "accoppiamo" i rivelatori a luminescenza con rivelatori indipendenti di altro tipo.

(vedi slides)

**Produzione fotonucleare**  $\gamma N \rightarrow N + \text{adroni}$

La produzione di coppie a  $\bar{E}_\gamma > 10^{14}$  eV è soppressa

dall' **effetto Landau - Pomeranchuk - Migdal** :



$$q_{||} = k - \sqrt{E^2 - m^2} - \sqrt{(k-\epsilon)^2 - m^2}$$

$$\approx k - \epsilon \left(1 - \frac{m^2}{2E^2}\right) - (k-\epsilon) \left(1 - \frac{m^2}{(k-\epsilon)^2}\right)$$

$$= \frac{m^2}{2E^2} + \frac{m^2}{2(k-\epsilon)^2}$$

$$\approx \frac{km^2}{2E(k-\epsilon)}$$

Approssimando la ripartizione dell'energia:  $\epsilon \sim k/2$

$$q_{||} \approx \frac{2m^2}{k}$$

All'aumentare di  $k$  (energia  $\gamma$  incidente) diminuisce l'impulso trasferito al nucleo  $\Rightarrow$  il principio di indeterminazione implica una delocalizzazione:

lunghezza di formazione  $l_f \approx \frac{k}{q_{||}} = \frac{\hbar k}{2m^2}$

L'interazione non è più puntiforme. Subentra un effetto di scattering multiplo:

$$\Theta_{MS} = \frac{E_S}{\delta_{PP}} \approx \sqrt{\frac{x}{x_0}} \quad \bar{E}_S \approx 13 \text{ MeV}$$

Dobbiamo confrontare  $\Theta_{MS}$  con la lunghezza associata alla produzione di coppie:

$$\Theta_{cr} = \frac{1}{\gamma} = \frac{m}{E} \quad \frac{m}{E} = \frac{\bar{E}_S}{E} \sqrt{\frac{l_f}{x_0}} \quad l_f = \left(\frac{m}{E_S}\right)^2 x_0 \approx \frac{10^{-2}}{4} x_0$$

$l_f$  è una lunghezza piccola ma non trascurabile rispetto alla lunghezza di radiazione.

Ad esempio:  $Pb \rightarrow x_0 = 6 \text{ mm}$

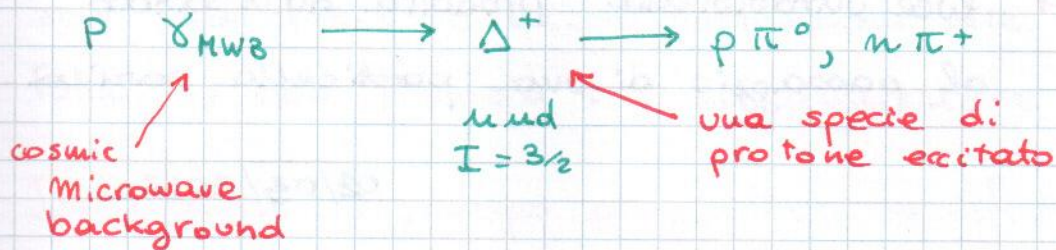
Ci interessa trovare  $k$ :

$$k \approx \frac{2m^4}{\hbar \epsilon_0^2} \quad X_0 \approx \frac{2(0.5)^4}{10^2} \frac{6 \text{ mm}}{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}} \frac{\text{MeV}^4}{\text{MeV}^2}$$

$$\approx \frac{3}{8} \frac{1}{10^4} 10^{12} \text{ MeV} \approx 10^8 \text{ MeV} = 10^{14} \text{ eV}$$

L'interazione perde coerenza e la sezione d'urto diminuisce.

Perché lo spettro dei cosmici finisce a  $10^{20}$  eV?



Questa reazione ha una soglia:

$$P_p \equiv (E_p, E_p, 0, 0)$$

$$P_\gamma \equiv (E_{\text{cmw}}, E_{\text{cmw}} \cos \theta, E_{\text{cmw}} \sin \theta, 0)$$

$$s = M_\Delta^2 = M_p^2 + 2 E_p E_{\text{cmw}} (1 + \cos \theta)$$

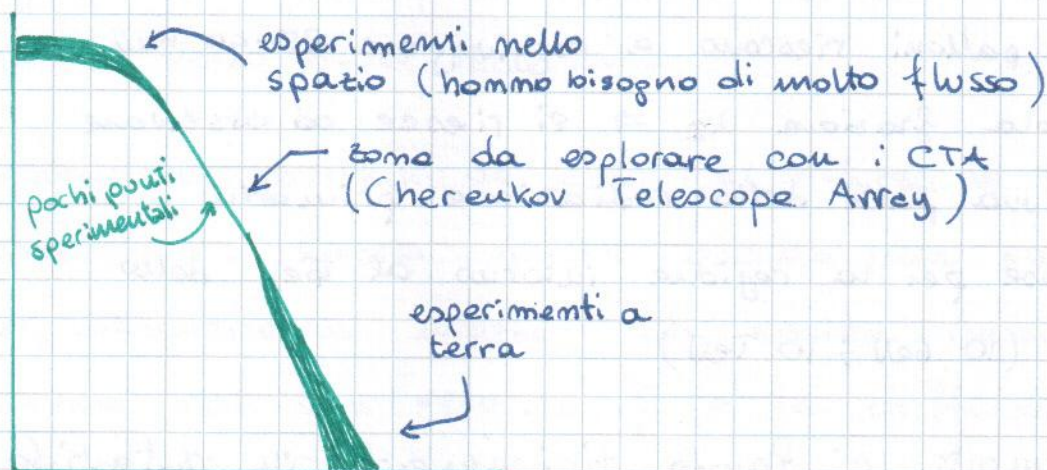
$$E_p \Big|_{\text{soglia}} = \frac{M_\Delta^2 - M_p^2}{4 E_{\text{cmw}}}$$

$$E_{\text{cmw}} = kT \quad T = 3 \text{ K} \quad k = 10^{-23} \text{ J/K} = 10^{-4} \text{ eV/K}$$

$$E_{\text{cmw}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$$

$$M_p \approx 1 \text{ GeV} \quad M_\Delta \approx 1.2 \text{ GeV}$$

$$\Rightarrow E_p \Big|_{\text{soglia}} = \frac{0.5 \cdot 10^{18} \text{ eV}^2}{4 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \text{ eV}} \approx 5 \cdot 10^{20} \text{ eV} \quad (\text{cut-off GZK})$$



Sciomi adronici in atmosfera: i pioni prodotti interagiscono o decadono?

$$L_{\tau} = \gamma \beta c \tau \longleftrightarrow \lambda_I$$

$$P_{\pi^+} = \frac{\lambda_I m}{c \tau}$$

oltre questo impulso, i pioni decadono piuttosto che interagire e lo sciame si ferma. In aria,  $P_{\pi^+} \approx 13 \text{ GeV}$ .

**Fluorescenza** → luce ultravioletta prodotta dall'azoto al passaggio di una particella carica.

02/03/2012

**Euso** → 4 modi di rivelazione

- luminescenza → trigger
- riflesso radiazione Cherenkov
- foto a infrarossi (stile autovelox)
- eccitazioni acustiche dell'atmosfera

Questa combinazione di tecniche permettono di raggiungere l'energia di cut-off  $6 \text{ Ek}$ .

La fisica delle alte energie è iniziata negli anni '50 con lo studio dei cosmici tramite esperimenti su pallone. Questi esperimenti sono tornati in auge negli anni '90:

- i nuovi palloni riescono a raggiungere 35-40 km  
⇒ piccola frazione  $\lambda_I$  ⇒ si riesce ad osservare anche una parte della radiazione primaria
- interesse per la regione intorno al  $10 \text{ TeV}$  dello spazio ( $10 \text{ GeV} = 10 \text{ TeV}$ )

22 Gli esperimenti si fanno tipicamente in antartide,

per questioni logistiche (c'è anche più flusso, ma solo ad energie più basse, dell'ordine del GeV, e questo tipo di esperimenti non scendono fino a quelle energie).

Es.: ATIC → calorimetro in BGO (bismuto di Germanio),  
è un calorimetro omogeneo.

A causa di peso e dimensioni, si riesce a portare su solo calorimetri e.m. ⇒ imprecisione nella misura di  $E_{\gamma}$ .  
Fotone → non rilascia hit nel tracciatore di silicio.

**Tracciatura in campo magnetico** ⇒  $\frac{\Delta p}{p} \propto p$

la misura viene fatta misurando la sagitta.

$$s = p - \sqrt{p^2 - L^2/q} \sim \frac{L^2}{8p} \quad q = p/eB$$

$$s = \frac{eBL^2}{8p} \quad \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta s}{s} = \frac{8}{eBL^2} \Delta s \quad p \propto p$$

la precisione che si raggiunge in rivelatori al silicio  $\sim 10 \mu\text{m}$  ;

$$B \sim 0.1 \text{ T}, \quad L \sim 1 \text{ m} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta p}{p} \sim 10^{-3} p(\text{GeV})$$

**Maximum detectable rigidity**  $\sim 60 \text{ GeV}$  (massimo impulso misurabile)

con un apparato migliore:  $\sim 1000 \text{ GeV}$

la tracciatura in campo magnetico permette di discriminare il segno della carica, a differenza di quello calorimetrico.

T.O.F. ⇒ verso della velocità.

Per discriminare positroni da protoni si utilizza la radiazione di transizione. Questa si ha quando una particella carica attraversa un mezzo. La carica immagina si muove con una velocità  $\frac{c}{n}$  e la differenza delle velocità produrrà **oscillazioni di plasma**.

$$\vec{\Pi} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{x} \quad \sigma = Ne e x$$

$$\vec{F} = -\frac{Ne e^2}{\epsilon_0} x \equiv m_e \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{Ne e^2}{m_e \epsilon_0} x = 0 \Rightarrow \omega_p = \sqrt{\frac{Ne e^2}{m_e \epsilon_0}} \sim 20 \text{ eV per materiali plastici}$$

frequenza di plasma

L'energia irradiata è  $\propto \gamma \omega_p \Rightarrow e^+$  hanno grande  $\gamma$  e si riesce a distinguerli dai protoni.

Gli esperimenti nello spazio sono la naturale evoluzione degli esperimenti su pallone:

- eliminati secondari ( $\pi$ )
- grande tempo d'esposizione

FERMI è un esperimento simile ai telescopi, non a quelli su pallone. (= GLAST)

Vedi: aumento % positroni all'aumentare dell'energia

→ neutrini

I  $\gamma$  sono bloccati dal plasma (ad es: vediamo solo i fotoni emessi dalla parte esterna di una supernova), i  $\nu$  no.



$$c^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_{P=P_0}$$

Consideriamo un fluido perfetto:

$$pV = \mu RT = nkT = \mu N_0 kT$$

$$R = N_0 k = 8.3 \cdot 10^7 \text{ erg/}^\circ\text{K}$$

A volume costante,

$$dQ = dU + p dV$$

Dalla definizione di calore specifico:

$$dQ = dU = \mu C_v dT \quad (\text{isobara})$$

Per un gas con un certo numero  $g$  di gradi di libertà, l'energia interna è:

$$U = \mu g \frac{kT}{2} \quad dU = \mu g \frac{k}{2} dT$$

$$nk = \mu R \Rightarrow dU = \frac{g}{2} \mu R dT$$

$$\cancel{\mu C_v dT} = \frac{g}{2} \cancel{\mu R dT} \Rightarrow C_v = \frac{g}{2} R$$

Infatti: gas monoatomico  $\Rightarrow C_v = 3/2 R$ ; gas biatomico  $\Rightarrow C_v = 5/2 R$ , ecc.

A pressione costante:

$$\mu C_p dT = dQ = dU + p dV = \mu C_v dT + p dV$$

$$pV = \mu RT \Rightarrow p dV = \mu R dT$$

$$\cancel{\mu C_p dT} = \mu C_v dT + \cancel{\mu R dT} \Rightarrow C_p = C_v + R$$

Si definisce:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v}$$

Gas monoatomico:  $\gamma = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ .

Gas biatomico:  $\gamma = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$ .

Vediamo il caso di un gas perfetto con trasformazioni adiabatiche.

$$dQ = 0 \Rightarrow dU = -p dV$$

$$\mu C_v dT = -p dV$$

Prendiamo l'eq. di stato per i gas perfetti.

$$pV = \mu RT \quad pdV + Vdp = \mu R dT = -\frac{R}{\gamma} p dV$$

$$P \left(1 + \frac{R}{\gamma}\right) dV + V dP = 0$$

$$P \gamma dV + V dP = 0$$

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0 \Rightarrow \gamma \log V + \log P = \text{costante}$$

$$PV^\gamma = \text{costante}$$

Quindi, dato che in queste unità  $\rho = 1/V$ ,

$$PV^\gamma = \text{costante} \Rightarrow P \rho^{-\gamma} = \text{costante} \Rightarrow P = \text{cost.} \cdot \rho^\gamma$$

Quindi, se  $c^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\text{adiab.}}$ , allora:

$$c^2 = \text{cost.} \cdot \gamma \rho^{\gamma-1} = \text{cost.} \times \rho^\gamma = \frac{\gamma}{\rho} = P \frac{\gamma}{P}$$

$$c = \sqrt{\frac{P \gamma}{\rho}}$$

Atmosfera  $\rightarrow O_2 + N_2$

$$O_2 \rightarrow 32 \text{ g/mol}$$

$$N_2 \rightarrow 28 \text{ g/mol}$$

Facciamo conto che sia una miscela al 50% - 50%

$$\Rightarrow \bar{M} \sim 30 \text{ g/mol}$$

$$\frac{P \gamma}{\rho} = P \gamma \frac{V}{\bar{M}} = \frac{\gamma}{\bar{M}} \mu RT$$

$$\frac{\mu}{\bar{M}} = \frac{1}{\bar{M}} [\gamma - 1] \quad T \sim 293 \text{ K}$$

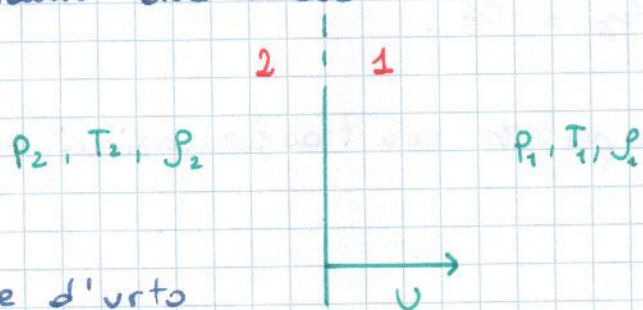
$$c = \sqrt{\frac{\gamma}{\bar{M}} RT} = \sqrt{\frac{7/5 \cdot 8.3 \cdot 10^7 \cdot 293}{30}} \approx \sqrt{\frac{7}{5} \cdot 8 \cdot 10^8} \approx \sqrt{12 \cdot 10^8}$$

$$c_{\text{aria}} \approx \frac{cm}{s} \quad 3.5 \cdot 10^4 \approx 350 \text{ m/s}$$

Che è all'incirca la velocità del suono in aria.

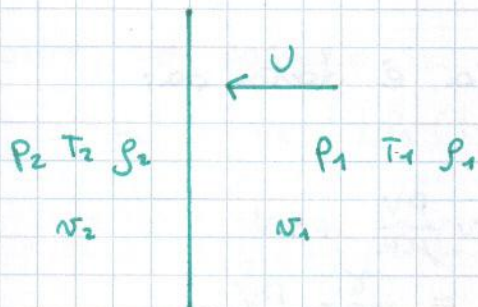
Cosa è un fronte di shock?

Consideriamo due mezzi:



Che energia acquista una particella che da 1 passa a 2 e poi rientra in 1?

Particella relativistica, mentre  $U$  tipiche  $\sim 10^3 \text{ km/s}$   
 $\sim 0.01 c \Rightarrow$  se la particella subisce scattering elastico in 2 ha la possibilità di raggiungere di nuovo il fronte d'urto e sorpassarlo.



Attraverso il fronte:

- $\rho v$  è costante (eq. di continuità, conservazione della massa)

$$\rho_2 v_2 = \rho_1 v_1$$

- $\rho_1 v_1 \left( \frac{1}{2} v_1^2 + h_1 \right) = \rho_2 v_2 \left( \frac{1}{2} v_2^2 + h_2 \right)$  (Conservazione dell'energia)

- Conservazione impulso:  $P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_2 + \rho_2 v_2^2$

Stiamo chiedendo che sul fronte non ci sia accumulo di carica e che non avvengano eccitazioni del fronte d'urto. Chiediamo anche che i gas siano perfetti.

Le onde sonore nel mezzo: non siamo nel caso adiabatico: la parte a destra non può sapere che le sta arrivando addosso un fronte d'urto.

Ci interessa stabilire i rapporti:

$$\frac{v_1}{v_2}, \frac{\rho_1}{\rho_2}, \frac{P_1}{P_2}, \dots$$

Dalla prima eq. ho:

$$n_1 p_1 = n_2 p_2 \equiv j$$

$$p_i = \frac{j}{V_i} \quad n_i = j V_i$$

Sostituisco nella terza:

$$P_1 + \frac{1}{V_1} j^2 V_1^2 = P_2 + \frac{1}{V_2} j^2 V_2^2 \Rightarrow j^2 (V_1 - V_2) = P_2 - P_1$$

$$j^2 = \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}$$

Sostituisco nella seconda. L'entalpia è data da:

$$h = \varepsilon + pV = \mu c_v T + pV$$

$$pV = \mu RT \Rightarrow T = \frac{pV}{\mu R} \Rightarrow h = \mu c_v \frac{pV}{\mu R} + pV$$

$$h = \left( \frac{c_v}{c_p - c_v} + 1 \right) pV = \left( \frac{1}{\gamma - 1} + 1 \right) pV = \frac{\gamma}{\gamma - 1} pV$$

Quindi l'equazione della conservazione dell'energia,

dato  $p_1 n_1 = p_2 n_2$ , diventa:

$$\frac{1}{2} j^2 V_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_1 V_1 = \frac{1}{2} j^2 V_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_2 V_2$$

$$j^2 = \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}$$

NB.: ho lo stesso gas, a sinistra e a destra.

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} (P_1 V_1 - P_2 V_2) = -\frac{1}{2} \frac{P_2 - P_1}{V_2 - V_1} (V_2 - V_1) (V_1 + V_2)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} (P_1 V_1 - P_2 V_2) = -\frac{1}{2} (P_2 - P_1) (V_1 + V_2)$$

Divido tutto per  $V_1$ :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ P_1 - P_2 \frac{V_2}{V_1} \right] = - (P_2 - P_1) (V_1 + V_2) \frac{1}{2V_1} = \frac{1}{2} (P_1 - P_2) \frac{V_2}{V_1} (P_1 - P_2)$$

$$\frac{1}{2} (P_2 - P_1) \frac{V_2}{V_1} - P_2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2} (P_1 - P_2) - \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_1$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2 (P_1 - P_2) (\gamma - 1) - \gamma P_1}{V_2 (P_2 - P_1) (\gamma - 1) - \gamma P_2}$$

$$\begin{aligned}
 j^2 &= \frac{P_2 - P_1}{V_1 (1 - v_2/v_1)} = \frac{P_2 - P_1}{V_1 \left( 1 - \frac{(P_1 - P_2)(\gamma - 1) - 2\gamma P_1}{(P_2 - P_1)(\gamma - 1) - 2\gamma P_2} \right)} \\
 &= \frac{P_2 - P_1}{V_1} \frac{(P_2 - P_1)(\gamma - 1) - 2\gamma P_2}{(P_2 - P_1)(\gamma - 1) - 2\gamma P_2 - (P_1 - P_2)(\gamma - 1) + 2\gamma P_1} \\
 &= \frac{P_2 - P_1}{V_1} \frac{(P_2 - P_1)(\gamma - 1) - 2\gamma P_2}{2(P_1 - P_2)} = \frac{1}{2V_1} [2\gamma P_2 + (\gamma - 1)(P_1 - P_2)] \\
 &= \frac{P_2 \gamma + P_1 \gamma - P_1 + P_2}{2V_1} = \frac{1}{2V_1} [P_2(1 + \gamma) + P_1(\gamma - 1)]
 \end{aligned}$$

Inoltre, ad esempio:

$$v_1^2 = j^2 v_1^2 = v_1 \frac{1}{2} [P_2(1 + \gamma) + P_1(\gamma - 1)]$$

$$v_2^2 = v_2^2 j^2 = \frac{v_2}{2} \frac{v_2}{V_1} [P_2(1 + \gamma) + P_1(\gamma - 1)] = \frac{v_2}{2} [P_1(1 + \gamma) + P_2(\gamma - 1)]$$

Come ci aspettavamo, le espressioni sono simmetriche negli indici.

Le velocità di propagazione di queste onde d'urto è circa  $10^3$  volte la velocità del suono nello stesso mezzo.

$$c_1^2 = \gamma \frac{P_1}{\rho_1}$$

Definisco quindi il **numero di Mach**:

$$M_1^2 = \left( \frac{v_1}{c_1} \right)^2 = \frac{v_1^2}{\gamma P_1} \frac{1}{V_1} = \frac{v_1^2}{\gamma P_1 V_1}$$

In termini di numero di Mach:

$$v_1^2 = \frac{V_1}{2} P_1 \left[ \frac{P_2}{P_1} (1 + \gamma) + (\gamma - 1) \right]$$

$$\frac{v_1^2}{\gamma V_1 P_1} = \frac{1}{2\gamma} \left[ \frac{P_2}{P_1} (1 + \gamma) + \gamma - 1 \right] = M_1^2$$

Il numero di Mach in prossimità di supernovae è molto grande. Supponiamo che nell'esplosione venga espulso idrogeno  $\rightarrow \gamma = 5/3$

$$\frac{P_2}{P_1} (1 + \gamma) = 2M_1^2 \gamma - \gamma + 1 \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma}{1 + \gamma}$$

A seconda del numero di Mach, la pressione può aumentare molto.

Posso fare lo stesso per  $\rho_1/\rho_2$ ,  $v_1/v_2$ :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(P_2 - P_1)(\gamma - 1) - 2\gamma P_2}{(P_1 - P_2)(\gamma - 1) - 2\gamma P_1} = \frac{\left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right)(\gamma - 1) - 2\gamma \frac{P_2}{P_1}}{\left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right)(\gamma - 1) - 2\gamma} =$$

$$= \frac{1 + \gamma}{(\gamma - 1) + 2/M_1^2}$$

A differenza di  $P_2/P_1$ , questo rapporto non diverge per  $M_1 \rightarrow \infty$ , ma tende a:

$$\lim_{M_1 \gg 1} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + 5/3}{5/3 - 1} = 4 \quad (\text{gas monoatomico})$$

Sappiamo che la massa deve conservarsi:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

Nel s.d.r. in cui il fronte d'urto è fermo, per numeri di Mach molto grossi:

$$M_1 = U \Rightarrow M_2 = U/4 \Rightarrow v_{rel} \equiv v = \frac{3}{4} U$$

Se invece considero fermo il mezzo a valle del fronte, ed  $U$  è la velocità del fronte d'urto, il gas fermo vede avvicinarsi il gas 2 con velocità  $v = \frac{3}{4} U$ .

Il risultato importante è che  $v$  è fissata, a seconda del tipo di gas.

Una particella passata a sinistra del fronte d'urto si isotropizza con urti elastici. Ma il sistema "del lab." è quello a destra  $\Rightarrow$  se vediamo arrivare il raggio cosmico allora sarà ripassata a destra.

$$E' = \gamma v (E + \beta v P \cos \theta c)$$

Per queste velocità,  $\gamma \approx 1$ , e:

$$E' - E \approx \beta v \cos \theta p_c$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E' - E}{p_c} \approx \beta v \cos \theta$$

(Abbiamo supposto che la particella sia relativistica in partenza) Dobbiamo mediare sui possibili  $\theta$ .

La distribuzione NON è isotropa: il rate di incidenza sono  $\propto S \cdot c \cos \theta \Delta t \propto \cos \theta$ .

$$\beta v = \frac{v}{c}$$

$$\langle \frac{\Delta E}{E} \rangle = \frac{v}{c} \int_0^1 \cos^2 \theta d \cos \theta \cdot \left( \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \right)^{-1} = \frac{2}{3} \frac{v}{c} = \frac{2}{3} \frac{3}{4} \frac{v}{c} = \frac{v}{2c}$$

→ uno viene da  $\Delta E$ , l'altro dalla distribuzione in  $\theta \propto \cos \theta$

Vediamo ora il ri-attraffamento del fronte di shock, ho un  $\langle \frac{\Delta E}{E} \rangle$  identico, perché la velocità relativa è identica. Quindi:

$$\langle \frac{\Delta E}{E} \rangle_{TOT} = \frac{v}{c}$$

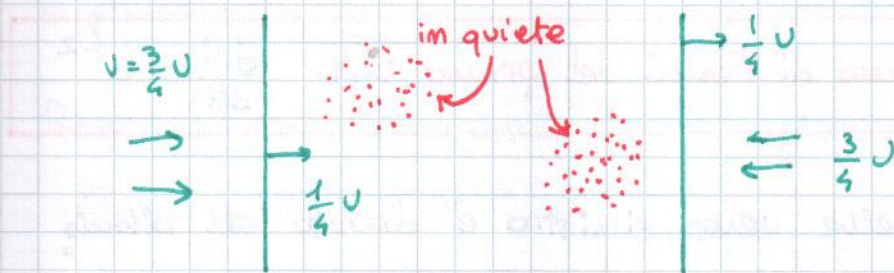
È del prim'ordine in  $v/c$ .

08/03/2012

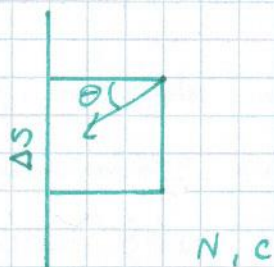
Abbiamo visto che nello schema di fronte d'urto:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{v}{c} = \frac{v}{c} \quad M = \frac{v}{v_s} \gg 1 \quad \frac{dN}{dE} \propto E^{-(\gamma+1)} \quad \gamma = \frac{P_{fluid}}{E}$$

la velocità relativa è sempre  $v$ :



Se ho una distribuzione isotropa di particelle, qual è la probabilità di attraversamento del fronte d'urto (che supponiamo fermo)? Se part. sono relativistiche  $\Rightarrow$  velocità  $c$



$$v \Delta s c \cos \theta = \frac{dN}{dt}(\theta)$$

In media:

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{dN}{dt}(\theta) d\cos\theta d\varphi =$$

$$= \frac{c}{2} N \Delta s \int_0^1 x dx = \frac{c}{4} N \Delta s$$

Supponiamo ora che il fronte d'urto si stia muovendo con  $v = \frac{1}{4} v$  verso destra. Avrà dunque una quantità di particelle che vengono attraversate dal fronte:

$$\frac{N \Delta s v}{4}$$

Ne entriamo  $\frac{Nc}{4}$ , ne perdiamo  $\frac{Nv}{4} \Rightarrow$  la

probabilità di fuga è

$$P_{fuga} = \frac{Nv/4}{Nc/4} = \frac{v}{c}$$

(Si è assunto che tutte le particelle che vengono accelerate vengono "rimbalzate" a destra e a sinistra del fronte.)

Allora:

$$\Delta E = \frac{v}{c} \quad P_{fuga} = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = 1$$

Meccanismo di Fermi del primo tipo  $\frac{dN}{dE} = E^{-2}$

La perdita di particelle verso sinistra è dovuto all'altissimo momento del fronte d'urto.

Questo avviene solo localmente: i fronti d'urto sono in realtà sferici, non infiniti e piatti.



N.B.: i fronti d'urto viaggiano a velocità supersonica, ma sempre  $v \ll c$ . Per cui:

- il rate di attraversamento è molto alto (ogni part. attraversa  $\sim 200$  volte)
- il singolo attraversamento dà poco  $\frac{\Delta E}{E}$  ( $\sim 3\%$ )
- la probabilità di fuga è bassa.

Si ottengono accelerazioni dell'ordine del PeV ( $10^5$  GeV,  $= 10^{14}$  eV).

**Problema dell'iniezione**  $\rightarrow$  come fanno le particelle ad essere già relativistiche in partenza? Basta l'agitazione termica? Questa cosa non è ancora stata risolta.

Se integriamo lo spettro dei cosmici otteniamo che l'energia media per unità di volume all'interno della galassia deve essere dell'ordine del MeV/m<sup>3</sup>:

$$E_{ce} \sim \frac{1 \text{ MeV}}{\text{m}^3}$$

Questo si spiega molto bene se si suppone che tutti i cosmici siano accelerati in meccanismi di supernovae.

Remnant di supernova  $\rightarrow$  energia a disposizione

$$E_{SN} \sim 10^{42} \div 10^{44} \text{ J}$$

Le particelle hanno una probabilità di fuga dalle galassia  $\rightarrow$  possiamo stimare un **tempo di contenimento**  
 $t_c \sim 10^7$  anni (vedremo poi)

Da qui si stima che avviene circa una supernova

ogni 30 anni. (Questo si osserva in realtà nelle altre galassie) -  $\tau_{SN} \sim 30$  anni

$$E_{SN} \sim 10^{42} \div 10^{44} \text{ anni}$$

En. ceduta dalle supernovae ai cosmici

$$\frac{E_{SN \rightarrow CE}}{\tau_{SN} V_{galassia}}$$

$$= \frac{E_{cr}}{t_c}$$

Conservazione dell'energia per unità di volume

Prendiamo come dimensioni della galassia:

$$R = 10 \text{ Kpc}$$

$$h = 700 \text{ pc}$$



(galassia ~ cilindrica)

$$E_{SN \rightarrow CE} = 10^{46} \text{ eV/m}^3 \cdot \frac{30 \text{ anni}}{10^7 \text{ anni}} \cdot 10 \cdot 10^3 \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 3 \cdot 10^9}_{1 \text{ pc}} \cdot \pi \cdot 7 \cdot 10^2 \cdot \underbrace{3 \cdot 10^{16} \text{ m}}_{\uparrow}$$

$$= 10^6 \cdot 5 \cdot 10^1 \cdot 10^{-26} \cdot 10^8 \cdot 10 \cdot 10^{32} \cdot 7 \cdot 10^{19} = 35 \cdot 10^{41}$$

$$= 3.5 \cdot 10^{42} \text{ J}$$

Che è una frazione dell'energia totale emessa da una supernova!

Questo meccanismo quindi porta:

- allo spettro giusto (fino a  $10^5$  GeV)
- alla densità giusta di energia dei RC

## PROBLEMI

- 1) Lo spettro va come  $E^{-2.7}$ , non come  $E^{-2}$ .
- 2) Perché  $t_c \approx 10^7$  anni?
- 3) Cosa succede per  $E > 10^5$  GeV?

Dobbiamo vedere più in dettaglio il trasporto dei R.C..

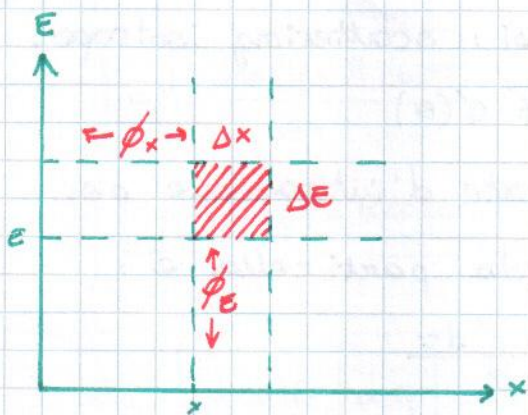
- 4) Inconsistenza nella distribuzione in numero atomico dei raggi cosmici.

## EQUAZIONE DI TRASPORTO DEI RAGGI COSMICI

Vogliamo scrivere:  $\frac{\partial m(\bar{E}, \bar{x}, t)}{\partial t}$  ( $m = \text{densità}$ )

Consideriamo uno spazio unidimensionale, poi generalizziamo.

Consideriamo un volumetto nello spazio delle fasi:



$$\frac{\partial m(E, x, t)}{\partial t} \Delta E \Delta x = [\phi_x(E, x, t) - \phi_x(E, x + \Delta x, t)] \Delta E + [\phi_E(E, x, t) - \phi_E(E + \Delta E, x, t)] \Delta x + Q(E, x, t) \Delta E \Delta x$$

contributo di una eventuale sorgente (supernova)

$$\frac{\partial m(E, x, t)}{\partial t} \Delta E \Delta x = -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \Delta E \Delta x - \frac{\partial \phi_E}{\partial E} \Delta x \Delta E + Q(E, x, t) \Delta E \Delta x$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \phi_E}{\partial E} + Q$$

Ma è vero anche che:

$$\phi_E = m \frac{dE}{dt} \quad dE = -b(E) dt$$

$b$  è una funzione del tipo della particella (possono perdere energia in molti modi) (es.: Bethe-Bloch).

$$\phi_E = -m b(E)$$

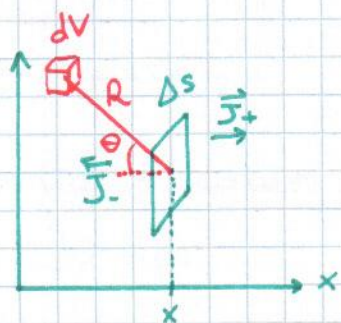
In un singolo shock:  $dE = \frac{v}{c} E$  (questo è un guadagno, non una perdita).

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial [m b(E)]}{\partial E} + Q(E, x, t)$$

Questa è una scrittura molto generale.

Consideriamo ora un caso particolare: diffusione di un gas di particelle.

$$\phi_x = -D \frac{\partial n}{\partial x}$$



Ipotesi: scattering isotropo.

$$\sigma \neq \sigma(\theta)$$

Il rate d'interazione per singola particella è:

$$\frac{dn}{dt}$$

$$-\frac{dn}{dt} = n n \sigma v_{rel} \Rightarrow -\frac{dn}{dx} = n n \sigma \equiv \frac{n}{\lambda}$$

lunghezza d'interazione  $\lambda$

Questo è il numero di urti per unità di volume.

$$\frac{dn}{dx} = -\frac{n}{\lambda} \Rightarrow n(x) = n_0 e^{-x/\lambda}$$

$$\frac{1}{n_0} dn = -\frac{n_0}{\lambda n_0} dx \cdot n = -\frac{1}{\lambda} \frac{n}{n_0} dx$$

RIVEDERE

$$\int_0^\infty e^{-x/\lambda} dx = \lambda$$

La probabilità di interagire tra 0 ed x è

$$P(0, x) = 1 - e^{-x/\lambda}$$

e la probabilità di NON interagire è:

$$\bar{P}(0, x) = e^{-x/\lambda}$$

Vogliamo imporre:

- passaggio attraverso  $ds \rightarrow \frac{ds \cos \theta}{4\pi r^2}$  angolo solido sotteso da  $ds$
- non interazione lungo  $R \rightarrow e^{-R/\lambda}$

Prob. che una particella scattersa in  $dV$  vada a finire in  $ds$ :

$$J_+ - J_- = \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} e^{-R/\lambda} \frac{\Delta s \cos\theta}{4\pi R^2} = \frac{1}{m} \frac{dm}{dx} v e^{-R/\lambda} \frac{\Delta s \cos\theta}{4\pi R^2}$$

Devo normalizzare al numero di particelle contenute in  $dV \rightarrow$  moltiplico per  $n$ .

Poi integro in  $dV$ :

$$J_+ - J_- = \int_V dV \frac{dm(x - R \cos\theta)}{dx} v e^{-R/\lambda} \frac{\Delta s \cos\theta}{4\pi R^2} =$$

perdiamo  
particelle da  
 $dV$  ma le  
guadagniamo  
in  $\Delta s$

$$= \int_V dV \left[ \cancel{\frac{m(x - R \cos\theta)}{\lambda}} v e^{-R/\lambda} \right] \frac{\Delta s \cos\theta}{4\pi R^2} =$$

$$= \Delta s \int d\cos\theta \int d\varphi \int dR \cancel{R^2} \frac{\cos\theta}{4\pi R^2} \frac{m(x - R \cos\theta)}{\lambda} v e^{-R/\lambda}$$

stiamo integrando  
sull'angolo ( $\equiv$   
su  $\Delta s$ )

$$= \frac{v \Delta s}{\lambda} \int_0^\infty dR \int_{-1}^1 \cos\theta d\cos\theta m(x - R \cos\theta) e^{-R/\lambda}$$

Supponiamo che  $m$  sia una funzione che dipende poco dal punto  $\Rightarrow$  sviluppo con Taylor

$$m(x - R \cos\theta) = m(x) - \frac{\partial m}{\partial x}(x) \cdot R \cos\theta$$

$$J_+ - J_- = \frac{v}{2\lambda} \int_0^\infty dR \int_{-1}^1 \left[ \cancel{m(x)} - \frac{\partial m(x)}{\partial x} R \cos\theta \right] \cos\theta d\cos\theta e^{-R/\lambda}$$

$$= - \frac{v}{3\lambda} \int_0^\infty dR \frac{\partial m(x)}{\partial x} R e^{-R/\lambda} = - \frac{v}{3\lambda} \frac{\partial m(x)}{\partial x} \int_0^\infty R e^{-R/\lambda} dR$$

$$= - \frac{v}{3} \frac{\partial m(x)}{\partial x}$$

$\equiv D$

L'equazione di trasporto è quindi:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = D \nabla^2 m + \frac{\partial}{\partial \epsilon} [m b(\epsilon)] + Q$$

Studiamo casi particolari di applicazione dell'equazione del trasporto.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n + \frac{\partial}{\partial E} [n b(E)] + Q$$

$$dE = -b(E)dt$$

Consideriamo una "scatola" di particelle: il coefficiente di diffusione diventa la **probabilità di fuga** dalla scatola, cioè la probabilità di uscire per urti successivi sulle pareti. -  $D \rightarrow \frac{n}{\tau_F}$  [modello LEAKY BOX]

Questo porterà a soluzioni del tipo:  $n(R,t) \propto \frac{1}{(\pi Dt)^{3/2}} e^{-R^2/4Dt}$

Consideriamo quindi un fronte d'urto sferico.

$$b(E) = -\alpha E \quad \alpha > 0 \quad (\text{acquisto di energia}).$$

Allora:

$$0 = \frac{\partial}{\partial E} (n b(E)) - \frac{n}{\tau_F} \Rightarrow -\alpha n - \alpha E \frac{\partial n}{\partial E} - \frac{n}{\tau_F} = 0$$

$$n \left( \alpha + \frac{1}{\tau_F} \right) = -\alpha E \frac{\partial n}{\partial E} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial E} = -\frac{n}{E} \left( 1 + \frac{1}{\alpha \tau_F} \right)$$

$$n \propto E^{-\gamma} \quad -\gamma E^{-(\gamma+1)} = -\frac{\delta n}{E} \quad \gamma = 1 + \frac{1}{\alpha \tau_F} = 1 + \frac{P_F}{S}$$

La distribuzione in numero atomico dei raggi cosmici differisce da quella locale del sistema solare. Se gli RC sono prodotti in supernova dovrebbero contenere picchi di C e Fe. Ma si osserva un eccesso di elementi più leggeri.

Si immagina che gli elementi più pesanti urtino su protoni e si spezzino in nuclei più leggeri (**SPALLAZIONE**).

Devo trovare un modello che interpreti questi processi in modo semplice  $\rightarrow$  lo faccio con

l'equazione del trasporto.

Approssimazione: i RC viaggiano dal punto di produzione al rivelatore attraversando un'e densità costante  $\rho$  di protoni; viaggiano a  $v=c$ ; viaggiano per lo stesso tempo.

$$S = \rho c t \quad [g/cm^2]$$

questa variabile tiene conto di tutto il materiale che il RC ha attraversato per arrivare fino a me.

Rimangono i termini:

$$\frac{\partial n}{\partial S} = - \frac{n}{S_F} - \frac{n}{S_{E,S}}$$

probabilità di perdere quell'elemento per spallazione

Consideriamo RC già prodotti e già accelerati  $\Rightarrow$  escludo i termini  $Q$  e  $\frac{\partial (nb(E))}{\partial S}$ .

Trascuriamo per il momento  $-\frac{n}{S_F}$ .

E'è anche la probabilità che l'elemento che sto considerando sia prodotto per spallazione da elementi più pesanti:

$$\frac{\partial n}{\partial S} = - \frac{n}{S_F} - \frac{n}{S_{E,S}} + \sum_{k \rightarrow A} \frac{n_k}{S_{k,S}} P(k \rightarrow A)$$

Considerando quindi solo il rimiscelamento degli elementi, vediamo se  $\exists$  soluzioni: - Si osserva:

$$L, B, Be \approx \frac{1}{4} C, N, O$$

↑ ↑ abbondanze → ↑

elementi leggeri  $n_L$       elementi massivi  $n_H$

$$\frac{\partial n_H(S)}{\partial S} = - \frac{n_H(S)}{S_{H,S}}$$

(gli elem. pesanti non vengono prodotti da quelli leggeri)

Questa è ovviamente una approssimazione fortissima.

$$\frac{\partial n_L(S)}{\partial S} = - \frac{n_L(S)}{S_{L,S}} + \frac{P(H \rightarrow L) n_H(S)}{S_M}$$

È un sist. di 2 eq. in 2 inc.. Dalla prima:

$$n_H(z) = n_H e^{-z/\lambda_H}$$

La seconda diventa:

$$\frac{\partial n_L(z)}{\partial z} = -\frac{n_L(z)}{\lambda_L} + P_{HL} \frac{1}{\lambda_H} n_H(0) e^{-z/\lambda_H}$$

Moltiplico per  $e^{z/\lambda_L}$  a destra e a sinistra.

$$e^{z/\lambda_L} \frac{\partial n_L}{\partial z} + e^{z/\lambda_L} \frac{n_L(z)}{\lambda_L} = P_{HL} \frac{n_H(0)}{\lambda_H} e^{-\left(\frac{z}{\lambda_H} - \frac{z}{\lambda_L}\right)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ e^{z/\lambda_L} n_L(z) \right] = P_{HL} \frac{n_H(0)}{\lambda_H} e^{-\left(\frac{z}{\lambda_H} - \frac{z}{\lambda_L}\right)}$$

La soluzione è:

$$n_L(z) = \frac{n_H(0) P_{HL} \lambda_L}{\lambda_L - \lambda_H} \left( e^{-z/\lambda_L} - e^{-z/\lambda_H} \right)$$

$$\frac{n_L(z)}{n_H(z)} = \frac{\lambda_L P_{HL}}{\lambda_L - \lambda_H} \left[ e^{z \left( \frac{1}{\lambda_H} - \frac{1}{\lambda_L} \right)} - 1 \right]$$

Posso confrontare questo rapporto con i dati sperimentali.

N.B.: le  $\lambda$  sono lunghezze d'interazione.

Le sezioni d'urto per spallazione sono dell'ordine di:

$$\sigma \propto A^{2/3}$$

$$\sigma_H \sim 280 \text{ mb}$$

$$\sigma_L \sim 200 \text{ mb}$$

$$P_{HL} \sim 0.3 \quad (30\%)$$

Posso quindi calcolare:

$$\begin{aligned} \lambda_H &= \rho e \tau_H = \rho \lambda_H = \rho \frac{1}{\sigma_H n} \\ &= \frac{1 \text{ g}}{6 \cdot 10^{23}} \frac{1}{280 \text{ mb}} \\ &\approx 6 \text{ g/cm}^2 \end{aligned}$$

gas interstellare ← densità  
centri scatteratori ←

$$\Rightarrow \frac{\rho}{n} = \text{massa del centro scatteratore} = m_p$$

$$\lambda_L = \frac{2.8}{2} \lambda_H \approx 8.5 \text{ g/cm}^2 = \text{quantità media di materiale}$$

che il nucleo L deve attraversare prima che, per spallazione, la sua quantità sia ridotta di  $\frac{1}{e}$ .



Confronto con i dati sperimentali ( $\frac{n_L}{n_H} = \frac{1}{4}$ ) e  
 otteugo:  $\xi = 5 \text{ g/cm}^2$  materiale attraversato da tutti i RC.

Questa quantità va bene anche per il ferro?

Fe  $\rightarrow$  Ce, Vd (vanadio)

Facciamo esattamente lo stesso ragionamento.

N.B.: ovviamente stiamo parlando di RC primari.

N.B.: stiamo trascurando anche le interazioni con i campi magnetici generati dal plasma stesso.

Supponiamo che anche Fe, Ce e vanadio attraversino  $5 \text{ g/cm}^2$  di idrogeno (protoni).

L'abbondanza del ferro è depressa da un fattore  $e^{-\xi/\xi_F}$ ;  $P_{K \rightarrow L} (P_{Fe \rightarrow Ce, V}) \approx 100\%$

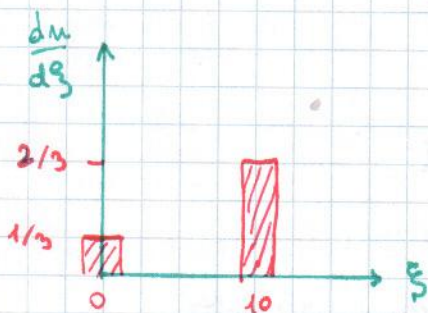
$$\xi_{Fe} = \frac{2.8}{7.6} \xi_H \sim 2 \text{ g/cm}$$

Con questi valori dovei avere:

$$Ce, V \sim 10 \cdot Fe \left( \frac{Ce \rightarrow V}{Fe} = \frac{1 - e^{-\xi/\xi_{Fe}}}{e^{-\xi/\xi_{Fe}}} \sim 10 \right)$$

Ma osservo:  $Ce, V \sim 1.5 \cdot Fe$

Facciamo un esempio:



Cioè  $2/3$  dei RC attraversano  $10 \text{ g/cm}^2$  e  $1/3$  attraversano 0.

Calcolo:

$$\frac{n_L(\xi)}{n_H(\xi)} = 0.6 \text{ per } \xi = 10 \text{ g/cm}^2$$

$$\Rightarrow \frac{n_L(\text{qui})}{n_H(\text{qui})} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0.6 \cdot e^{-10/6}}{\frac{2}{3} \cdot e^{-10/6} + \frac{1}{3}} \sim 0.2 \sim 0.25$$

E nel caso del ferro?

$$\frac{Ce \rightarrow V}{Fe} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} \sim 2 \sim 1.5$$

⇒ introducendo una distribuzione di materiale attraverso  
si ottengono risultati molto plausibili.

Ora consideriamo il fatto che i RC possono uscire  
dalla galassia. Avevamo introdotto anche  $\tau_F \sim 10^7$  anni.

$$-\frac{m_L}{\tau_L} + \frac{P_{HL} m_H}{\tau_H} - \frac{m_L}{\tau_F} \equiv 0 \quad \rightarrow \text{stiamo considerando il caso stazionario (no dip. del tempo)}$$

Risolvendo:

$$m_L \left( \frac{1}{\tau_L} + \frac{1}{\tau_F} \right) = P_{HL} m_H \frac{1}{\tau_H} \Rightarrow \frac{m_L}{m_H} = \frac{P_{HL} / \tau_H}{\left( \frac{1}{\tau_L} + \frac{1}{\tau_F} \right)}$$

A posteriori verificheremo che  $\tau_{spall.} \gg \tau_F$ . Per ora  
supponiamolo. Allora:

$$\frac{m_L(E)}{m_H(E)} \sim \frac{P_{HL}}{\tau_H} \tau_F(E)$$

Più grande è l'energia, più piccolo sarà il tempo di  
fuga. È stato misurato che:

$$\tau_F(E) = E^{-\delta} \quad \delta = 0.6$$

Cosa comporta questo per i nuclei pesanti?

$$-\frac{m_H}{\tau_H} - \frac{m_H}{\tau_F} + Q(E) = 0$$

Stavolta consideriamo anche la produzione.

$$\tau_H = \tau_{H,s} \gg \tau_F$$

$$\Rightarrow m_H \simeq Q(E) \tau_F$$

$$\text{Abbiamo visto che: } Q(E) \sim E^{-(1+r)} = E^{-2}$$

$$\Rightarrow m_H \simeq E^{-2} E^{-0.6} = \underline{E^{-2.6}}$$

Questo è quanto si riesce ad ottenere con questo  
modello fortemente approssimato.

Abbiamo ottenuto QUASI lo spettro  $E^{-2.7}$ .

N.B.: tutto questo può costituire ad esempio il fondo  
per osservazioni di materia oscura ecc.

Come faccio a misurare  $T_F \sim 10^7$  anni? Devo usare marker radioattivi come,  $^{10}\text{Be}$ , con un rapporto di produzione isotopico ben preciso (è prodotto per spallazione dal carbonio) -

12/03/2012

Non sempre le supernove sono sferiche (vedi slides).

### Stima di $T_F$



Si studia la composizione isotopica:

$$\frac{^{10}\text{Be}}{^{10}\text{Be} + ^9\text{Be} + ^7\text{Be}} = 10\% \text{ in lab}$$

$$= 2.8\% \text{ nei cosmici}$$

Sappiamo che possiamo avere:

- spallazione del nucleo  $i$ -esimo
- produzione del nucleo  $i$ -esimo per spallazione di nuclei più pesanti
- fuga del nucleo  $i$ -esimo con probabilità dipendente non dal nucleo ma dalla sua energia
- decadimento del nucleo  $i$ -esimo, se è radioattivo.

In condizioni di equilibrio:

$$-\frac{M_i}{T_{S_i}} + \sum_{k>i} P_{ki} \frac{M_k}{T_{S_k}} - \frac{M_i}{T_F} - \frac{M_i}{T_{D_i}} = 0$$

$$\sum_{k>i} P_{ki} \frac{M_k}{T_{S_k}} \equiv c_i$$

$$c_{^{10}\text{Be}} = M_{^{10}\text{Be}} \left( \frac{1}{T_{S_{^{10}\text{Be}}}} + \frac{1}{T_F} + \frac{1}{T_{D_{^{10}\text{Be}}}} \right)$$

$$\Rightarrow M_{^{10}\text{Be}} = \frac{c_{^{10}\text{Be}}}{\frac{1}{T_{S_{^{10}\text{Be}}}} + \frac{1}{T_F} + \frac{1}{T_{D_{^{10}\text{Be}}}}}$$

$$M_{^7,^9\text{Be}} = \frac{c_{^7,^9\text{Be}}}{\frac{1}{T_{S_{^7,^9\text{Be}}}} + \frac{1}{T_F}}$$

$$0.028 = \frac{m_{10Be}}{m_{10Be} + m_{7Be} + m_{9Be}} = \frac{C_{10Be}}{\left(\frac{1}{T_F} + \frac{1}{T_D}\right)} \cdot \left[ \frac{C_{10Be}}{\left(\frac{1}{T_F} + \frac{1}{T_D}\right)} + \frac{C_{7Be} + C_{9Be}}{1/T_F} \right]$$

Semplifico:

$$\frac{m_{10Be}}{m_{7Be} + m_{9Be}} = \frac{C_{10Be}}{\left(\frac{1}{T_F} + \frac{1}{T_D}\right) T_F (C_{7Be} + C_{9Be})} \approx \frac{C_{10Be}}{C_{7Be} + C_{9Be}} \cdot \frac{1}{T_F \left(\frac{1}{T_D} + \frac{1}{T_F}\right)}$$

|||  
R<sub>H</sub>

$$0.028 = \frac{m_{10}}{m_{10} + m_7 + m_9} = \frac{R_H}{R_H + 1} \Rightarrow R_H \approx 0.029$$

Quindi:

$$R \frac{1/T_F}{1/T_D + 1/T_F} = 0.029$$

Ma sappiamo che:

$$\frac{C_{10}}{C_{10} + C_7 + C_9} = \frac{R}{R+1} = 0.1 \Rightarrow R \approx 0.11$$

Oppure:

$$\frac{0.029}{0.11} = \frac{1}{1 + \frac{T_F}{T_D}} \Rightarrow T_F = -T_D \left(1 - \frac{0.11}{0.029}\right)$$

$$T_F = T_D \left(\frac{0.11}{0.029} - 1\right) \sim 2T_D \sim 8 \cdot 10^6 \text{ anni} \sim 10^7 \text{ anni}$$

Dobbiamo a questo punto verificare se  $T_{sp} \gg T_F$ , come avevamo supposto.

$$\text{Avevamo stimato: } \langle \xi \rangle = 5 \text{ g/cm}^2 = \langle \rho c T_s \rangle$$

( $\xi$  è il materiale che il R.C. attraversa dalla produzione fino a noi).

$$\rho c T_F \ll 5 \text{ g/cm}^2 \quad \rho \ll \frac{5 \text{ g/cm}^2}{c T_F} = \frac{5 \text{ g/cm}^2}{3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot 10^7 \pi \cdot 10^9 \text{ s}} = 5 \cdot 10^{-26} \text{ g/cm}^3$$

Abbiamo anche supposto che si tratti di nuclei d'idrogeno:

La densità di centri scatteratori attraversati deve essere

$$m \ll 5 \cdot 10^{-26} \cdot 6 \cdot 10^{23} / \text{cm}^3 = 0.3 \text{ cm}^{-3}$$

Inoltre:

$$T_s = \frac{\lambda_s}{c} = \frac{1}{m\Omega c} \Rightarrow \frac{1}{0.33 \cdot 10^{10} \cdot 200 \cdot 10^{-27}} \Delta = \frac{1}{2} 10^{15} \text{ s} \sim 10^8 \text{ anni}$$

c.v.d.

Il meccanismo di Fermi non spiega come accelerare raggi cosmici ad energie maggiori di  $10^{19}$  eV. Lo spettro che si misura arriva fino ad energie di  $10^{20}$  eV.

L'altra domanda è: l'anisotropia dei raggi cosmici, piccola ( $\sim 1\%$ ) fino a  $E = 10^{19}$  eV, perché cresce per  $E > 10^{19}$  eV?

Il raggio di Larmor dei cosmici in funzione della rigidità:

$R(V)$	giroraggio $\left(\frac{pc}{ZeB}\right)$
$10^{15}$	0.36 pc
$10^{19}$	3.6 kpc
$10^{21}$	360 kpc.

Se la galassia è  $\sim 10^4 \cdot 700$  pc:

$$T_f \sim 10^7 \text{ anni}$$

$$t_{\text{attraversamento galassia}} = c \cdot (1 \text{ kpc} \div 10 \text{ kpc}) \approx (3 \div 30) 10^3 \text{ anni!}$$

C'è un forte fenomeno di flussivo (un sacco di urti). Per  $E \geq 10^{19}$  eV il giroraggio è dell'ordine della dimensione della galassia. Fino a  $10^{15}$  eV il giroraggio è molto piccolo  $\Rightarrow$  il RC è contenuto nella galassia. A grandi energie il RC non "sente" più la galassia, rispetto alla curvatura data dal campo magnetico!

Dal modello leaky box,

$$D \nabla^2 n = n / \tau_F$$

Approssimo  $\nabla^2 n$  con  $n/L^2$ , con  $L =$  spessore della galassia  $\cdot \frac{1}{2}$

$$D = \frac{n}{\tau_F} \frac{L^2}{n} = \frac{L^2}{\tau_F}$$

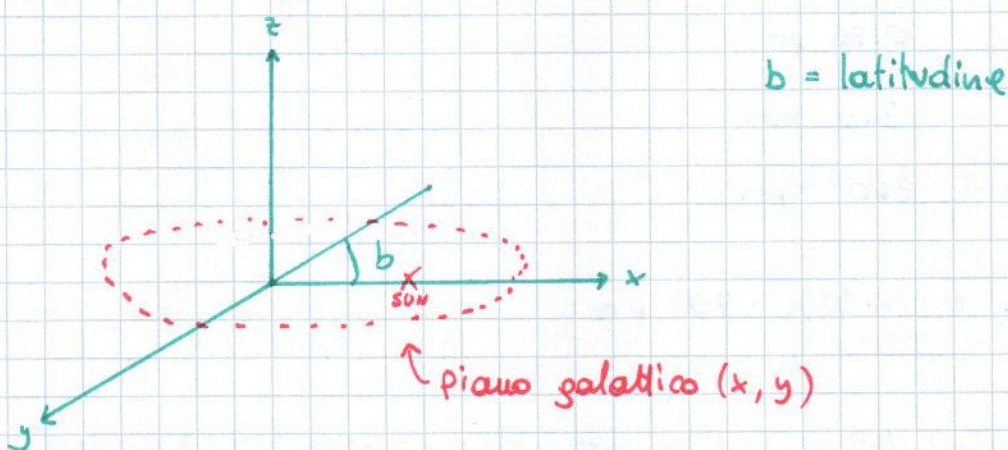
Avevamo anche scritto:  $D = \frac{1}{3} c \lambda$

$$\frac{L^2}{\tau_F} = \lambda \frac{c}{3} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3}{c} \frac{L^2}{\tau_F} \sim 3 \cdot 10^{12} \text{ cm} = 0.1 \text{ pc}$$

Ho un fenomeno diffusivo causato da urti successivi  
distanti tra loro una frazione di parsec.

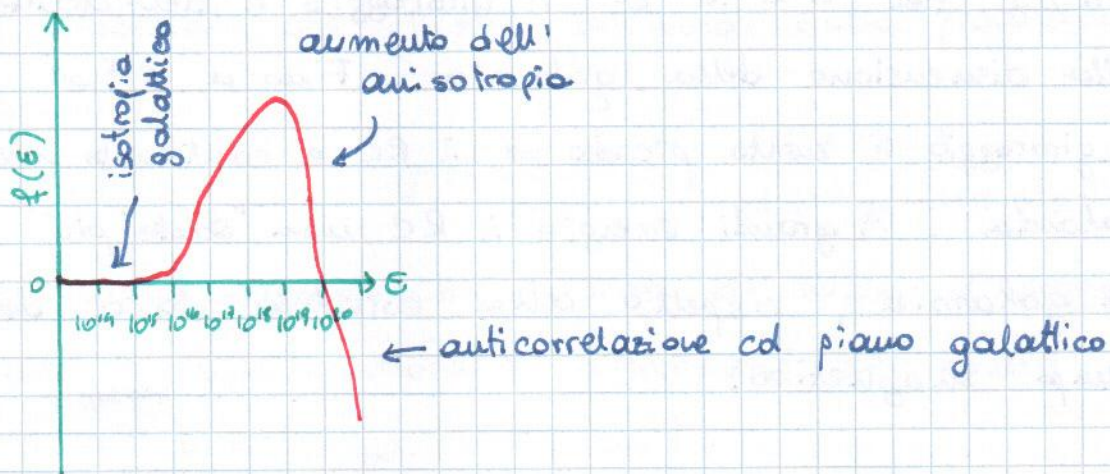
Isotropizzazione del segnale fino a  $10^{15}$  eV. Sopra,  
aumenta il raggio di Larmor e diventa dominante  
rispetto alla lunghezza di scattering.

Coordinate galattiche:



La distribuzione dei cosmici si fitta con funzioni  
del tipo:  $I(b) = I_0 [(1 - f(\epsilon)) f(\epsilon) e^{-b^2}]$

con:

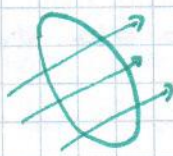


Uno dei possibili modi di produzione di cosmici è legato alla presenza delle pulsar. Questi sono oggetti che si pensano essere stelle di neutroni, od esempio formatesi in seguito a supernove, in rotazione. N.B.: basta un piccolissimo momento angolare perché la superficie abbia una velocità tangenziale altissima ( $\propto R^2!$ ) - Ora, le pulsar sono:

- della massa dell'ordine  $\sim M_{\text{SUN}}$
- con periodi di rotazione  $\tau \sim \text{ms}$
- con campi magnetici la cui asse NON coincide con l'asse di rotazione
- campi magnetici superficiali  $\sim 10^8 \div 10^9 \text{ T}$

Se:  $R_i \sim 10^5 \text{ km}$      $R_f \sim 10 \text{ km}$      $B \sim 10^8 \text{ G}$

e se il mezzo circostante è un plasma (particelle sostanzialmente libere, mezzo superconduttore), posso schematizzarlo con una spira di autoinduttanza  $L$ :



$L \frac{di}{dt} + R_i = - \frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt}$  - superconduttore

$\Rightarrow \frac{d}{dt} (iL + \phi_{\text{ext}}) = 0$

(Argomento di Syrovatskii)

La massima f.e.m. indotta può essere:

$\frac{1}{e} \frac{B \Delta x}{c} = e \approx 4.8 \times 10^{-10} \text{ eV} \Rightarrow \text{f.e.m. massimo} \sim B \sim 10^8 \text{ T!}$

Possiamo quindi stimare l'accelerazione:

$eEL = 4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^8 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 6 \cdot 10^{11} \text{ eV} = 3 \cdot 10^{19} \text{ eV}$

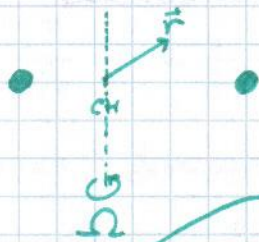
↓  
10 km, siamo nelle "vicinanze" della pulsar

Stavolta però lo spettro è imprevedibile: questa è solo

una ipotesi:

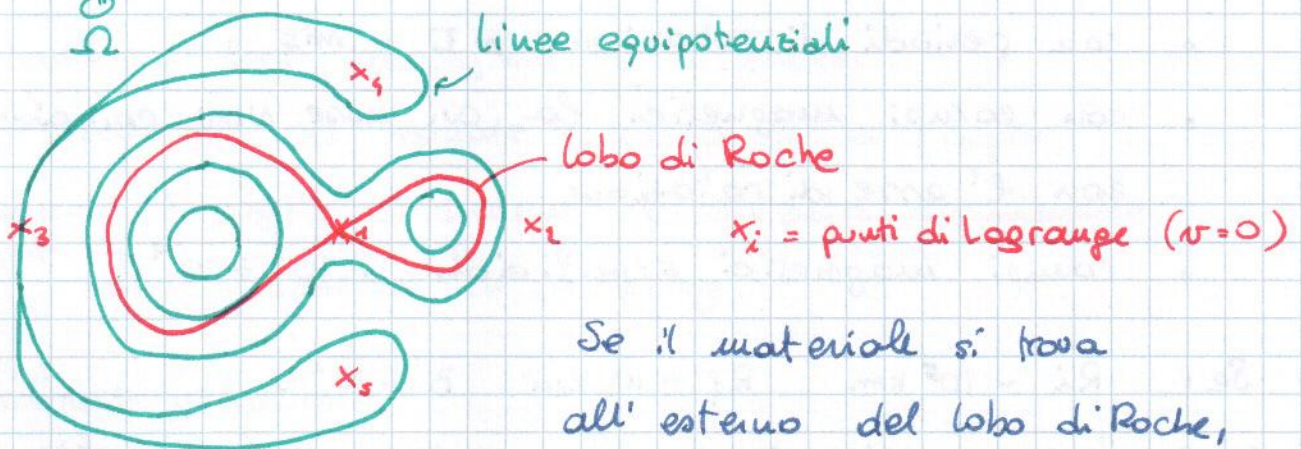
Un altro meccanismo di accelerazione potrebbe trovarsi all'interno dei nuclei galattici.

Sistema binario  $\rightarrow$  può avvenire un fenomeno di trasporto di materiale da un oggetto all'altro.



Il potenziale gravitazionale è del tipo:

$$\phi(r) = \Omega^2 r^2 - \frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2}$$



Se il materiale si trova all'esterno del lobo di Roche, è "in condivisione" tra i due

oggetti.

$$x = \frac{m v_f^2}{2} - \frac{GMm}{R_f}$$

$$\frac{m}{2} v_f^2 = \frac{GMm}{R_f} \equiv P \quad (\text{materiale che piove addosso alla stella piccola})$$

$$R_{\text{Schw.}} \equiv \frac{2MG}{c^2} \Rightarrow P = \frac{1}{2} \frac{2GM}{R_f c^2} m c^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{R_s}{R_f} m c^2 \quad \text{energia cinetica} \rightarrow \text{potenza di accelerazione}$$

$$\sim 0.1 \text{ per } R_f \sim 10 \text{ km} \\ M \sim 1 M_\odot$$



15/03/2012

I raggi cosmici di alte energie sono principalmente protoni. Viaggiando nell'universo incontrano la radiazione cosmica di fondo, costituita da fotoni di corpo nero.

$$n_\gamma \approx 400 / \text{cm}^3$$

Avviene la reazione:



Calcoliamo l'energia di soglia per questa reazione.

$$(P + P_\gamma)^2 = (m_p + m_\pi)^2$$

$$P^2 + P_\gamma^2 + 2(P_\mu P_\gamma^\mu) = m_p^2 + m_\pi^2 + 2m_p m_\pi$$

$$m_p^2 + 0 + 2(E_p E_\gamma - P_p E_\gamma \cos\theta) = m_p^2 + m_\pi^2 + 2m_p m_\pi$$

Supponiamo che i protoni siano MOLTO relativistici:

$$c \approx 1 \Rightarrow 2E_p E_\gamma - 2c P_p E_\gamma \cos\theta = (2m_p m_\pi + m_\pi^2) c^4$$

$$2E_p E_\gamma (1 - \cos\theta) = (2m_p m_\pi + m_\pi^2) c^4 \quad (P_p c \approx E_p)$$

$$E_p = \frac{(2m_p m_\pi + m_\pi^2) c^4}{2E_\gamma (1 - \cos\theta)} \gg \frac{(2m_p m_\pi + m_\pi^2) c^4}{4E_\gamma}$$

Trascurando  $m_\pi$  rispetto ad  $m_p$ :

$$E_p \gg \frac{m_\pi m_p c^4}{E_\gamma}$$

Ad una temperatura dell'universo  $T \approx 2.7 \text{ K}$ ,  $E_\gamma \approx \frac{3}{12000} \text{ eV}$ .

Allora:

$$E_p \gg \frac{140 \cdot 10^6 \cdot 10^9}{3} \cdot 12 \cdot 10^3 \text{ eV} \approx 560 \cdot 10^{18} \text{ eV} \approx 5.6 \cdot 10^{20} \text{ eV}$$

Se un protone ha energia superiore a questo, di sicuro può produrre  $\Delta^{++}$  con una  $\sigma \sim 0.1 \text{ mb}$ .

Conosco la densità dei fotoni  $\rightarrow$  posso calcolare la lunghezza d'interazione di questi protoni, che non possono viaggiare quindi indisturbati a causa della presenza della radiazione cosmica di fondo (cut-off **62K**, da Greisen - Zatsepin - Kuzmin).

$$\lambda = \frac{1}{0.1 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \cdot 4 \cdot 10^2} \text{ cm}^3 = \frac{10^{28}}{4 \cdot 10^2} = 2.5 \cdot 10^{25} \text{ cm}$$

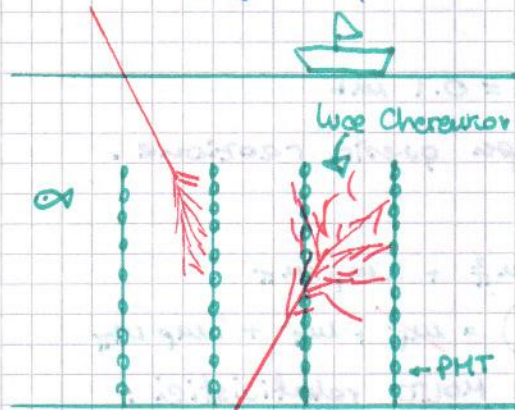
Un parsec è  $3 \cdot 10^{18} \text{ cm} \Rightarrow \lambda \approx 10^7 \text{ pc} = 10 \text{ Mpc}$ .

Ci sarà un'attenuazione esponenziale. Inoltre, la  $\Delta^{++}$  può decadere in protone:  $\Delta^{++} \rightarrow p\pi$ , perdendo solo una  $\Delta E \approx m_\pi$ . Entro 100 Mpc darei riuscire ancora a ricostruire direzioni di provenienza per protoni che hanno interagito. Ad es.: Auger  $\rightarrow$  ricostruzione direzione. 49

protoni di alta energia. In 3 anni di presa dati  $\rightarrow$  69 evi di protoni di energia  $> E_{GR}$ .

[vedi slides]

Si possono studiare gli AGN anche studiando i  $\nu$  di alta energia provenienti da sorgenti puntiformi ( $p\gamma \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow N\pi, \pi \rightarrow \mu\nu$ ) -



$\mu, e, \pi$  dovuti ad una interazione di corrente carica del  $\nu$ .

### PRODUZIONE DI $\nu$ SOLARI

Vediamo la fusione di protoni in nuclei di deuterio e poi di  ${}^4\text{He}$ .



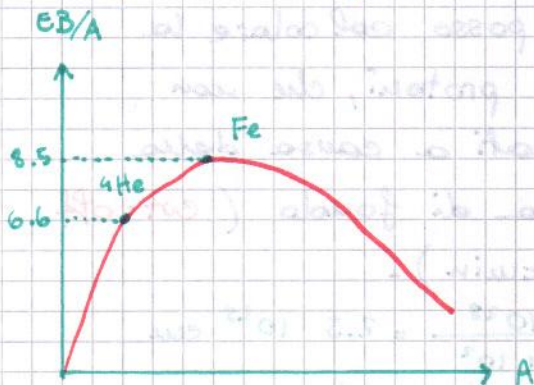
$\Delta E = 26.5 \text{ MeV}$

La % di energia che si trasforma in radiazione è

$\frac{26.5 \text{ MeV}}{4 \text{ GeV}} = 7 \text{ ‰}$

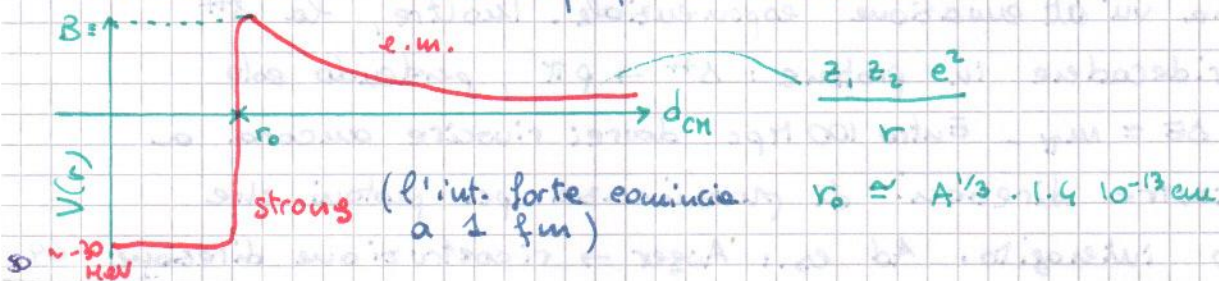
Se ho un nucleo  $A, Z: E_B = [(A-Z)m_n + Zm_p - M]$ .

L'energia a disposizione si divide tra tutti i nucleoni -



La principale differenza di massa l'abbiamo con la produzione di He (e ne produce molto di più rispetto al ferro, che ha il valore di picco di  $EB/A$ ).

Consideriamo il sistema p-p in onda s -



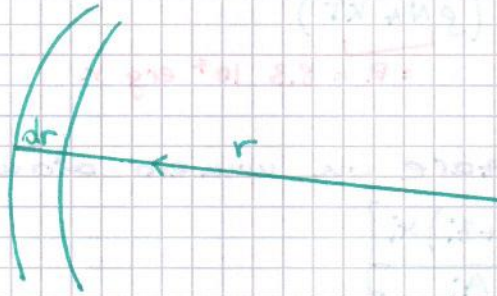
Come faccio a entrare nella buca di potenziale (cioè a fare fusione)?

$$B \approx z_1 z_2 \frac{(4.8 \cdot 10^{-10})^2 \text{ erg}}{10^{-13}} = 25 \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^{11} \text{ eV} = 1.5 \text{ MeV}$$

Dato sapere come si distribuisce la temperatura al centro del sole.

$$P(\epsilon \sim \text{MeV}) \sim e^{-\frac{1 \text{ MeV}}{kT_c}}$$

Equilibrio: l'espansione è bilanciata dall'attrazione gravitazionale - **Equilibrio idrostatico**.



La massa contenuta nell'elemento di corona sferica è  $dm = \rho dr$  con  $\rho$  densità superficiale. La forza agente è:  $-\rho dr \frac{m(r)G}{r^2}$

è la pressione:

$$F_p = P(r) - P(r+dr) = -\frac{dP(r)}{dr} dr$$

La pressione di radiazione è trascurabile.

$$\frac{dP(r)}{dr} dr = \rho dr \frac{m(r)G}{r^2} \quad \text{EQUILIBRIO IDROSTATICO}$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\rho \frac{m(r)G}{r^2}$$

Suppongo:  $P(r)$  decresce linearmente.

$$dP(r) = -\rho \frac{m(r)G}{r^2} \frac{dr}{4\pi r^2} = -\frac{G m dm}{4\pi r^4}$$

Approssimazione (forte):  $\frac{dP}{dm} = -\frac{P_c}{M_0}$   $P_c$  pressione al centro del sole. Quindi:

$$\frac{P_c}{M_0} = \frac{m(r)G}{4\pi r^4} \quad m(r) \equiv M_0/2; \quad r \equiv \frac{R_0}{2}$$

$$\frac{P_c}{M_0} = \frac{M_0/2 \cdot G}{4\pi (R_0/2)^4} \Rightarrow P_c \approx \frac{2M_0^2 G}{\pi R_0^4} = 4 \cdot 10^{16} \text{ Pascal} \approx 10^{11} \text{ Patm}$$

$P_c$  è una stima della pressione al centro del sole.

Vogliamo arrivare al rateo di produzione di neutrini.

La pressione di radiazione di corpo nero contribuisce:

$$P = \frac{1}{3} a T^4 \quad a = 8 \cdot 10^{-15} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ K}^4} \quad P = \frac{1}{3} a T^4 \quad (\text{legge di Stefan - Boltzmann})$$

(fare il conto)

Supponiamo il sole un gas perfetto - Per un gas perfetto ionizzato (nel conto delle particelle entrano separatamente elettroni e nuclei)

$$P = (n_e + \sum_i n_i) kT$$

↑ densità ↑

Voglio passare in densità di peso:  $\rho, \rho_i$   $x_i = \rho_i / \rho$

$$n_i = \frac{\rho_i}{A_i [g]} N_A = \frac{x_i \rho N_A}{A_i [g]}$$

$$P = \left( n_e + \sum_i \frac{x_i \rho N_A}{A_i} \right) kT = \sum_i \left[ \frac{x_i \rho N_A z_i}{A_i} + \frac{x_i \rho N_A}{A_i} \right] \cdot kT$$

$$= \sum_i \left[ (1 + z_i) x_i A_i^{-1} \right] \cdot (\rho N_A kT)$$

$= R = 8.3 \cdot 10^7 \text{ erg K}$

Per un gas ionizzato con

molti elementi posso utilizzare un numero atomico medio:

$$P = \frac{\rho R T}{\bar{A}} \quad \frac{1}{\bar{A}} = \sum_i \left[ \frac{(1+z_i) x_i}{A_i} \right]$$

Al centro del sole è "solo" idrogeno  $\rightarrow \bar{A}_H = 0.5g$

$$P_c = \frac{\rho_c R T_c}{\bar{A}_H} \Rightarrow T_c = \frac{P_c \bar{A}_H}{\rho_c R}$$

Metto una stima di  $\rho_c$ :  $\rho_c > \frac{M_0}{\frac{4}{3} \pi R_0^3}$

Quindi:

$$T_c < \frac{P_c \bar{A}_H}{R M_0} \cdot \frac{4}{3} \pi R_0^3 = \frac{2 M_0^2 G}{\pi R_0^4} \cdot \frac{\bar{A}_H}{R M_0} \cdot \frac{4}{3} \pi R_0^3 = \frac{8}{3} \frac{M_0 G \bar{A}_H}{R_0 R}$$

Risulta:

$$T_c < \frac{8}{3} \frac{2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 7 \cdot 10^{-11} \cdot 0.5g}{7 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot 8} = 3 \cdot 10^7 \text{ K}$$

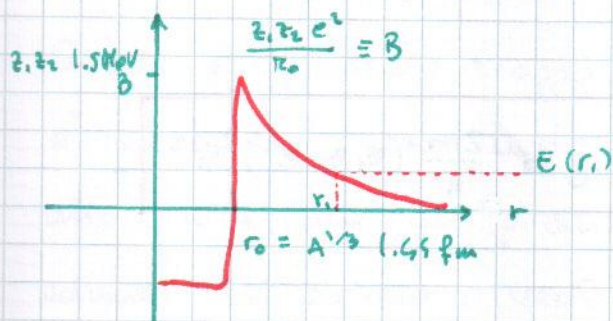
$$kT_c \sim 4 \text{ keV} \Rightarrow P(E \sim \text{keV}) \sim e^{-1000} = 10^{-400}$$

Ma il numero di nuclei all'interno del sole è circa

$$N_0 = 2 \cdot 10^{30} \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{23} \approx 1.2 \cdot 10^{57}$$

La reazione avviene solo per effetto tunnel!

Abbiamo visto che:



Dobbiamo pensare in MQ e calcolare la probabilità di passaggio al di là della barriera di potenziale per effetto tunnel. Si ottiene:

$$P = e^{-2 \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [V(r) - E]} dr}$$

Fisso una certa energia della particella  $\Rightarrow$  fisso  $r_1$ .

Nel nostro caso:

$$\begin{aligned} & \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left( \frac{z_1 z_2 e^2}{r} - \frac{z_1 z_2 e^2}{r_1} \right)} dr = \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\frac{2m z_1 z_2 e^2 x}{\hbar^2 r_1} \sqrt{\frac{r_1}{r} - 1}} d\left(\frac{r}{r_1}\right) \\ & \equiv \int_{\frac{r_0}{r_1}}^1 \sqrt{\frac{1}{x} - 1} dx \cdot c = c \int_{\frac{r_0}{r_1}}^1 \frac{1-x}{x} dx = c \int_{\frac{r_0}{r_1}}^1 \frac{1-x}{x(1-x)} dx = \\ & = c \int_{\frac{r_0}{r_1}}^1 \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - x}{x(1-x)} dx = c \left\{ \frac{1}{2} \int_{\frac{r_0}{r_1}}^1 \frac{1}{x(1-x)} dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{r_0}{r_1}}^1 \frac{1-2x}{x(1-x)} dx \right\} \end{aligned}$$

Tenendo conto che:  $\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,

$$= \left[ -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x(1-x)} \right]_{\frac{r_0}{r_1}}^1 \cdot c$$

$E \sim \text{keV}$     $B \sim \text{MeV} \Rightarrow r_0/r_1 \sim 10^{-3} \equiv 0$

$$= \left[ -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x(1-x)} \right]_0^1 c = \frac{\pi}{2} c$$

$$= \sqrt{\frac{2m z_1 z_2 e^2 r_1}{\hbar^2}} \frac{\pi}{2}$$