

Quindi la proprietà di transizione :

$$r_1 = \frac{z_1 z_2 e^2}{E} \sim \frac{z_1 z_2 e^2}{kT}$$

$$P = e^{-\pi \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left( \frac{z_1 z_2 e^2}{E} \right)^2}}$$

Definisco

$$\text{ENERGIA DI GAMOW } E_G \equiv \frac{2m}{\hbar^2} (z_1 z_2 e^2)^2 \pi^2$$

Quindi:

$$P = e^{-\sqrt{E_G/E}}$$

$$\text{N.B.: } E_G = 2mc^2 \left( \frac{z_1 z_2 e^2}{\hbar c} \pi \right)^2 = 2mc^2 (z_1 z_2 \pi \alpha)^2$$

N.B.:  $m$  è la massa ridotta del sistema! In questo caso,  $\mu = \frac{1}{2} m_p$ .

$$P = \exp\left[-\sqrt{\frac{1 \text{ GeV}}{1 \text{ keV}} \frac{\pi}{137}}\right] = \exp\left(-\frac{1000}{40}\right) \approx e^{-25} \sim 10^{-10}$$

N.B.: questa probabilità dipende in modo forte da  $T$ ,  $z_1$  e  $z_2$ !

All'inizio avrò solo fusione di idrogeno, poi, con la contrazione dello stello, inizierà a fondersi il litio ecc.

Devo ancora considerare la sezione d'urto dell'interazione.

$$\frac{dN}{dt dV} \propto n_1 n_2 \sigma v_r$$

$$\text{Nel nostro caso (p-p): } \frac{dN}{dt dV} \propto \frac{n^2}{2} \sigma v$$

devo i v contarsi  
due p DIVERSI  
siamo nel c.m.:  
 $v = v_r$

Diamo una stima di  $\sigma$ .

$$\frac{dN}{dt dV} = \frac{n^2}{2} \sigma v f(E) e^{-\sqrt{\frac{E_G}{E}}}$$

Con  $f(E)$  distribuzione di Maxwell.

N.B. Abbiamo fatto il conto in onda s. Perché?



$$p_b = \hbar k \quad b = e \frac{\hbar}{p} = \lambda \pi$$

La sezione d'urto massima è quella geometrica.



$$\sigma_{\text{geom}} = \pi [b^2(\ell+1) - b^2(\ell)] = \pi \lambda^2 [(\ell+1)^2 - \ell^2] = \pi \lambda^2 (2\ell+1)$$

$$\sigma_{\text{geom}}^{\text{TOT}} = \pi \lambda^2 \sum_{\ell} (2\ell+1)$$

Questo è un conto troppo classico. Se la particella è un'onda, non vede solo una superficie pari alla proiezione sul piano trasverso al moto del volume del protone: vede TUTTA la superficie della sfera.  $\pi R^2 \rightarrow 4\pi R^2$ .

$$\sigma^{\text{TOT}} = \pi \lambda^2 4 \sum_{\ell} (2\ell+1) \sin^2 \delta_0$$

$$b = \ell \lambda \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \sim 2 \cdot 10^{-11} \text{ em} \quad \text{per } E \sim kT \sim \text{keV}$$

Se  $b \gg r_0$  le particelle non fanno mai interazione forte! Occorre  $b \leq r_0$ .

$$\ell \lambda \leq r_0 \quad 10^{-11} \ell \leq 10^{-13} \Rightarrow \ell \approx 0$$

La fusione avviene solo in onda s.

$$\sigma^{\text{TOT}} = 4\pi \frac{\hbar^2}{2mE} \sin^2 \delta_0$$

Si scrive tipicamente:  $\sigma = \frac{S(E)}{E}$

Ad es. se si hanno risonanze  $S(E)$  diventa una Lorentziana  $\left( \frac{1}{(E-E_R)^2 + \Gamma^2/4} \right)$ .

$S(E)$  si dice **fattore astrofisico**. Lo si misura e si cerca di estrapolarlo a basse energie (è difficile studiare p-p a 1 keV). Da decenni ci sono esperimenti che cercano di misurare  $S(E)$ : si riesce a misurarlo bene per  $E > 100 \text{ keV}$ .

Sono misure di scattering nucleare. Si usano anche appositi acceleratori elettrostatici (Krocft - Walton).



Torniamo alla sezione d'urto: il punto fondamentale è un altro.

Abbiamo supposto una  $f(\epsilon)$  maxwelliana.

$$f(\epsilon) d\epsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\epsilon}}{(kT)^{3/2}} e^{-\epsilon/kT} d\epsilon$$

È il prodotto di 3 distribuzioni:

$$\frac{dn}{dn_x dn_y dn_z} \propto e^{-\alpha v_x} e^{-\alpha v_y} e^{-\alpha v_z} \quad (\dots ?)$$

Calcoliamo:

$$R(T) = \int_0^{\infty} \sigma(\epsilon) v f(\epsilon) e^{-\frac{\sqrt{\epsilon_G}}{\epsilon}} d\epsilon = \int_0^{\infty} \frac{S(\epsilon)}{\epsilon} v f(\epsilon) e^{-\frac{\sqrt{\epsilon_G}}{\epsilon}} d\epsilon$$

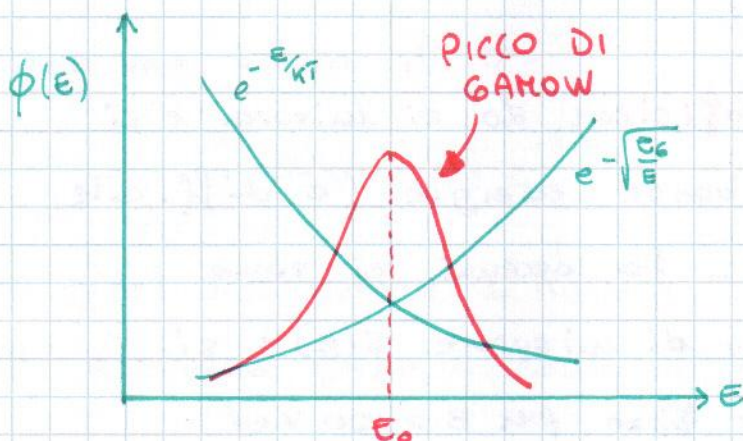
$$\epsilon = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\epsilon}{m}} \Rightarrow$$

$$R(T) = \int_0^{\infty} \frac{S(\epsilon)}{\epsilon} \sqrt{\frac{2\epsilon}{m}} e^{-\frac{\sqrt{\epsilon_G}}{\epsilon}} \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{\epsilon}}{(kT)^{3/2}} e^{-\frac{\epsilon}{kT}} d\epsilon$$

$$= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{m}} (kT)^{-3/2} \int_0^{\infty} d\epsilon S(\epsilon) e^{\phi(\epsilon)}$$

con:  $\phi(\epsilon) = -\left(\frac{\epsilon}{kT} + \sqrt{\frac{\epsilon_G}{\epsilon}}\right)$

Com'è fatta  $\phi(\epsilon)$ ?



Se  $\phi(\epsilon)$  esponenziato è una funzione molto  
piccata, confondiamo  $S(\epsilon)$  con  $S(\epsilon_0)$ , e



sviluppiamo al second'ordine  $\phi(\epsilon)$  attorno ad  $\epsilon_0$ .

La dipendenza piú forte dall'energia sta in questo fattore esponenziale.

$$\phi(\epsilon) = - \left( \frac{\epsilon}{kT} + \sqrt{\frac{\epsilon_g}{\epsilon}} \right)$$

Cerco il punto di minimo:

$$\frac{d\phi(\epsilon)}{d\epsilon} = - \frac{1}{kT} + \frac{\sqrt{\epsilon_g}}{2\epsilon^{3/2}} \equiv 0$$

Questo corrisponderá al massimo di  $e^{\phi(\epsilon)}$ .

$$\frac{\sqrt{\epsilon_g}}{2\epsilon_0^{3/2}} = \frac{1}{kT} \Rightarrow \epsilon_0^{3/2} = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_g} kT$$

$$\epsilon_0 = \epsilon_g^{1/3} \left( \frac{kT}{2} \right)^{2/3} \quad (\text{posizione del picco di Gauss})$$

$$\begin{aligned} \phi(\epsilon_0) &= - \left( \frac{\epsilon_0}{kT} + \frac{\sqrt{\epsilon_g}}{\sqrt{\epsilon_0}} \right) = - \left( \frac{\epsilon_0^{3/2} + kT\sqrt{\epsilon_g}}{kT\epsilon_0^{1/2}} \right) = - \left( \frac{\epsilon_0^{3/2} + 2\epsilon_0^{3/2}}{kT\epsilon_0^{1/2}} \right) \\ &= - \frac{3\epsilon_0^{3/2}}{kT\epsilon_0^{1/2}} = - \frac{3\epsilon_0}{kT} \equiv -\tau \end{aligned}$$

$$e^{\phi(\epsilon_0)} = e^{-\tau}$$

Sviluppo al second'ordine.

$$\left. \frac{d^2\phi(\epsilon)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=\epsilon_0} = - \frac{3}{4} \sqrt{\epsilon_g} \epsilon^{-5/2} \Big|_{\epsilon=\epsilon_0} = - \frac{3}{4} \sqrt{\epsilon_g} \epsilon_0^{-5/2}$$

$$\sqrt{\epsilon_g} = 2\epsilon_0^{3/2} \frac{1}{kT} \quad \tau = \frac{3\epsilon_0}{kT}$$

$$\left. \frac{d^2\phi(\epsilon)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=\epsilon_0} = - \frac{3}{4} \frac{2\epsilon_0^{3/2}}{kT} \epsilon_0^{-5/2} = \frac{-3}{2kT\epsilon_0} = - \frac{3\epsilon_0}{kT} \frac{1}{2\epsilon_0^2} = - \frac{\tau}{2\epsilon_0^2}$$

Quindi, nei dintorni di  $\epsilon_0$ ,

$$\phi(\epsilon) \approx -\tau - \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0)^2 \frac{\tau}{2\epsilon_0^2}$$

Se sostituisco  $S(\epsilon_0)$  ad  $S(\epsilon)$ , la dipendenza da  $\epsilon$  sta solo in  $e^{\phi(\epsilon)}$ . Devo integrare solo questo.



$$R(T) \propto \int_0^{\infty} e^{-\phi(E)} dE$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau} e^{-\frac{(E-E_0)^2}{4E_0^2} \frac{\tau}{E_0}} dE \propto \int_0^{\infty} dE e^{-\frac{(E-E_0)^2}{4E_0} \frac{\tau}{E_0}}$$

$$\xi^2 \equiv \frac{(E-E_0)^2 \tau}{4E_0^2} \Rightarrow \xi = \frac{(E-E_0)\sqrt{\tau}}{2E_0} \Rightarrow d\xi = \frac{dE \sqrt{\tau}}{2E_0}$$

L'integrale diventa:

$$e^{-\tau} \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{\tau}}^{\infty} \frac{2E_0}{\sqrt{\tau}} e^{-\xi^2} d\xi$$

$-\frac{1}{2}\sqrt{\tau}$  è approssimabile con 0?

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\frac{3E_0}{kT}}$$

$\frac{E_0}{kT}$  varia tra 5 e 15  $\Rightarrow \sqrt{\tau}$  è "abbastanza" piccolo.

D'altra parte ci interessa solo la dipendenza da T.

$$\int \dots = \sqrt{\pi}$$

$$\begin{aligned} R(T) &= \text{cost.} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \frac{2E_0}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} \\ &= \text{cost.} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \frac{\tau kT}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} \\ &= \text{cost.} \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{kT}} e^{-\tau} \end{aligned}$$

$$E_0 \propto (kT)^{2/3} \Rightarrow \tau \propto \frac{(kT)^{2/3}}{kT} = (kT)^{-1/3} \Rightarrow kT \propto \tau^3$$

$$R(\tau) \propto \tau^2 e^{-\tau}$$

Il rate varia con la temperatura  $\Rightarrow$  la massima produzione di neutrini si ha al centro del sole.

Vogliamo arrivare a scrivere:  $R(T) \propto T^{\nu}$

Dovremo approssimare l'esponenziale: in realtà

$\nu$  avrà una piccola dipendenza da T.

$$\log R = c + \nu \log T$$



$$\Rightarrow \nu = \frac{\partial \log R}{\partial \log T}$$

$$R \propto T^{-2/3} e^{-\tau} \Rightarrow \ln R = c + \left(-\frac{2}{3}\right) \ln T - \tau$$

$$\nu = -\frac{2}{3} - \frac{\partial \tau}{\partial \log T}$$

$$d \log x = \frac{dx}{x} \Rightarrow \partial \tau \equiv \tau \partial \log \tau$$

$$\tau \propto T^{-1/3} \Rightarrow \ln \tau = c - \frac{1}{3} \ln T$$

$$\nu = -\frac{2}{3} - \tau \frac{\partial \log \tau}{\partial \log T} = -\frac{2}{3} + \frac{\tau}{3}$$

Quindi:

$$R(\tau) \propto T^{\nu} \quad \text{con } \nu = \frac{\tau}{3} - \frac{2}{3}$$

$\tau$  varia tra 5 e 15, a  $T$  fissa (con dipendenza da  $z_1$  e  $z_2$ ).

A parità di temperatura:

$$\text{protone - protone} \quad R \propto T^{4.6}$$

$${}^3\text{He} - {}^4\text{He} \quad R \propto T^{15}$$

L'errore che commetto nello stimare il rate di produzione è

$$\frac{\Delta R}{R} = \nu \frac{\Delta T}{T}$$

Ad esempio, per avere una precisione del 10% su  $R$ :

$$pp \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} \approx 2\%$$

$${}^3\text{He} - {}^4\text{He} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} \approx 7\%$$

Ci riusciamo?

Vedi slides  $\rightarrow$  i primi  $\nu$  solari misurati erano quelli del decadimento del boro, più energetici - La  $\sigma$  d'interazione dei neutrini va con la loro energia  $\Rightarrow$  non riesco a misurare  $E_{\nu} \leq 0.5 \text{ MeV}$  (il  $\nu$  non riesce a produrre un leptone).



19/03/2012

Ci interessa studiare i neutrini solari "rivelabili", ovvero di energia sufficiente per partecipare a reazioni misurabili ( $\beta$  inverso, conversione in leptoni)  $\rightarrow$  esperimento di Bechall et. al (su idea di Pontecorvo).

$\sim 8$  neutrini attesi al giorno per quell'energia, ma se ne misurano circa  $\frac{1}{3}$  di quanto predetto.

N.B. Per fare quella predizione occorre conoscere all'190 il rate di produzione dei  $\nu$  nel sole, e all'inizio questo non si sapeva fare.

N.B.: Problemi di natura chimica nell'esperimento (efficienza di estrazione).

Anni '90  $\rightarrow$  si passa ad un altro esperimento, con soglia più bassa (233 keV)  $\Rightarrow$  rate atteso 128 SNU. Produzione di  $^{76}\text{Ge}$ , radioattivo  $\Rightarrow$  rivelabile e riconoscibile tramite la sua vita media.

$128^{+9}_{-7}$  SNU attesi       $77.5^{+7.6}_{-7.8}$  SNU

In entrambi gli esperimenti si misuravano le scorie, ma di energia diversa.

Altro esperimento: Super-Kamiokande (Giappone), diventato un osservatorio per neutrini dopo aver "visto" quelli prodotti dalla supernova del 1987.

È un rivelatore Cherenkov. La particella emette luce a  $42^\circ$  con simmetria cilindrica attorno all'asse dell'impulso  $\Rightarrow$  dai "cerchi" visti ricostruisco la direzione. So anche se la particella esce o "uovore" dentro al riv.:



non  
esce



esce

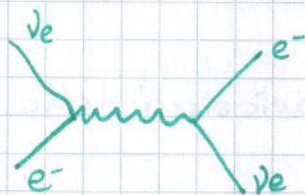


Integrando la luce raccolta dai fotomoltiplicatori si risale anche all'energia dell'evento.

Tramite l'effetto Cherenkov posso studiare solo particelle cariche  $\Rightarrow$  vedo le interazioni di scattering elastico tipo



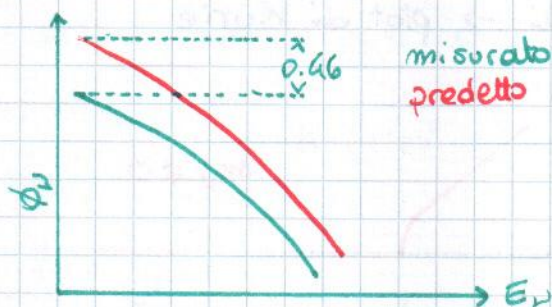
Questo processo avviene anche con  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$  ma è soppresso di 7 volte; può avvenire in corrente neutra ( $Z^0$ ) o in corrente carica ( $W^\pm$ ), ma è favorita la corrente carica.



L'esperimento è solitamente schermato dai cosmici ed  $e^-$  d'acqua per schermare i neutroni ( $\sigma(np \rightarrow np)$  molto grande, i  $n$  si "fermano" subito).

Risultato: misurati il 41% dei  $\nu$  predetti.

La calibrazione dello scala in energia era stata fatta immettendo  $e^-$  accelerati (con un LINAC) nel rivelatore.



3 esperimenti su 3 hanno osservato un deficit di neutrini solari, di varie energie.

Ponte-corvo aveva suggerito questi esperimenti perché aveva sospettato che potesse  $\exists$  oscillazione dei  $\nu$ .

Facciamo un conto per 2 famiglie di  $\nu$ , anche se la misura di  $\Gamma(Z_0)$  fatta al LEP assicura che, almeno all'energia  $M_{Z_0}$ , le famiglie sono 3.



autostati di massa  $\rightarrow$   $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$   
 autostati di flavour  $\rightarrow$   $\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$$

$U$  è una matrice di rotazione (implementa un cambio di base).

Istante  $t \equiv 0 \Rightarrow \nu_e$  al centro del sde.

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nu_e = \cos\theta \nu_1 - \sin\theta \nu_2$$

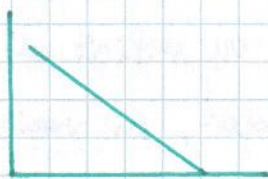
Supponiamo  $\nu_e$  ad impulso  $P$ ;  $\nu_{1,2}$  autostati della matrice di massa.

Nella 2 l'interazione è data da  $\gamma^M \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5)$ , a seconda che la particella sia RH o LH. Ma gli autostati di elicità possono non essere autostati di massa.

$$\nu_e(t) = \cos\theta \nu_1 e^{-\frac{i E_1 t}{\hbar}} - \sin\theta \nu_2 e^{-\frac{i E_2 t}{\hbar}}$$

$$E_i = \sqrt{P^2 c^2 + m_i^2 c^4}$$

Problema:  $m_s$  molto piccolo. Fermi  $\rightarrow$  plot di Kurie



$m_\nu = 0$



$m_\nu \neq 0$

(decadimento  $\beta H \Leftrightarrow @$  molto basso)

- Si trova:
- $m_{\nu_e} < 1 \text{ eV}$
  - $m_{\nu_\mu} < 100 \text{ keV}$
  - $m_{\nu_\tau} < 100 \text{ MeV}$

La massa del neutrino è molto piccola rispetto agli

62 impulsi tipici  $\Rightarrow$  sviluppo:



$$E_1 = pc \sqrt{1 + \frac{m_1^2 c^4}{p^2 c^2}} \approx pc \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2 c^4}{p^2 c^2}\right) = pc + \frac{1}{2} \frac{m_1^2 c^4}{pc}$$

$m_1, m_2$  diverse  $\Rightarrow$  le componenti  $\nu_1$  e  $\nu_2$  all'istante  $t$  si trovano sfasate. Questo perché, nel tempo, evolvono in modo diverso.

$$\nu(t) = \cos\theta [\cos\theta \nu_e + \sin\theta \nu_\mu] e^{-\frac{i E_1 t}{\hbar}} + \sin\theta [\sin\theta \nu_e - \cos\theta \nu_\mu] e^{-\frac{i E_2 t}{\hbar}}$$

Calcoliamo la probabilità che, dato  $\nu(0) = \nu_e$ ,  $\nu$  (sulla terra) sia ancora un  $\nu_e$ .

$$|\langle \nu(t) | \nu_e \rangle|^2 = \left| \cos^2\theta e^{-\frac{i E_1 t}{\hbar}} + \sin^2\theta e^{-\frac{i E_2 t}{\hbar}} \right|^2$$

$$|\langle \nu(t) | \nu_\mu \rangle|^2 = \left| \cos\theta \sin\theta e^{-\frac{i E_1 t}{\hbar}} - \cos\theta \sin\theta e^{-\frac{i E_2 t}{\hbar}} \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{2} \sin(2\theta) \left[ e^{-\frac{i E_1 t}{\hbar}} - e^{-\frac{i E_2 t}{\hbar}} \right] \right|^2 =$$

$$= \left( \frac{\sin(2\theta)}{2} \right)^2 \left| -e^{-\frac{i(E_2 - E_1)t}{\hbar}} - e^{\frac{i(E_2 - E_1)t}{\hbar}} + 2 \right|^2 =$$

$$= \frac{\sin^2(2\theta)}{4} \left( 2 - 2 \cos\left(\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}\right) \right) =$$

$$= \frac{\sin^2(2\theta)}{4} \sin^2\left(\frac{(E_2 - E_1)t}{2\hbar}\right)$$

Sostituendo le energie:

$$E_2 - E_1 \approx \frac{(m_2^2 - m_1^2) c^4}{2pc}$$

$$|\langle \nu(t) | \nu_\mu \rangle|^2 = \frac{\sin^2(2\theta)}{4} 2 \sin^2\left[\frac{(m_2^2 - m_1^2) c^4 t}{4\hbar pc}\right]$$

Definisco:

$$m_2^2 - m_1^2 \equiv \Delta m^2 \quad [eV^2 \cdot c^{-4}]$$

$$pc \quad [MeV]$$

$$ct \quad [m]$$

$$\hbar \quad [MeV \cdot s]$$

$$c \quad [m/s]$$

$\Rightarrow$  rende adimensionale l'argomento del seno

$$\Rightarrow \frac{\Delta m^2 c^4 ct}{4\hbar pc} = 1,27 \cdot \frac{\Delta m^2 [eV]^2 \cdot L [m]}{E [MeV]}$$

Se un  $\nu_e$  ha energia  $< 106$  MeV e diventa un  $\nu_\mu$ , non è più misurabile in corrente carica! Lo sarebbe in corrente neutra (soglia molto più bassa), ma le correnti neutre sono difficilissime da misurare.



Quello che si misura negli esperimenti è

$$P_{ee} = 1 - P_{e\mu}$$

Per vedere qualcosa occorre  $P_{e\mu} \neq 0 \Rightarrow 1.27 \frac{\Delta m^2 L}{E} \gtrsim 1$   
(se  $\bar{e} < 1$  non vedo "nulla").

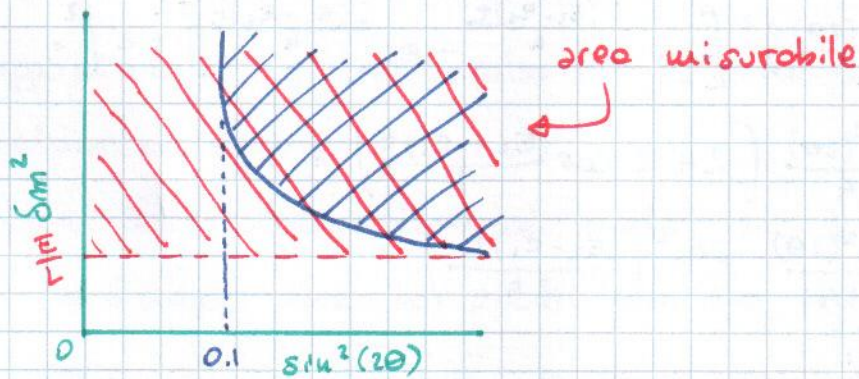
$\Rightarrow$  la sensibilità che si ha è

$$\Delta m^2 \gtrsim \frac{E}{L} \cdot 1.27$$

Nel caso di  $\nu$  solari:

$$\Delta m^2 \gtrsim \frac{1 \text{ MeV}}{150 \cdot 10^6 \cdot 10^3} = \frac{1}{15} 10^{-11} \text{ eV}^2$$

Questa è una misura di interferenza.



Se invece  $\Delta m^2$  è grande, il  $\sin^2$  varia molto  $\Rightarrow$  media ad  $\frac{1}{2}$  e quello che sto misurando è  $\frac{1}{2} \sin^2(2\theta)$ .

Se  $\Delta m^2$  è piccolo  $\Rightarrow \sin^2(\Delta m^2) \approx \Delta m^2$  e la sensibilità dipende da  $\Delta m^2 \sin^2(2\theta)$ .

Esempio: neutrini CERN - Gran Sasso:

$$E_\nu \approx 1 \text{ GeV} \quad L \approx 700 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \Delta m_{\text{MIN}}^2 \sim \frac{1}{700} \sim 10^{-3} \text{ eV}^2$$

In realtà  $E_\nu \gtrsim 1 \text{ GeV} \Rightarrow$  la probabilità di oscillazione è un po' più bassa e  $\Delta m_{\text{MIN}}^2$  un po' più alto ( $10^{-3} \div 10^{-2} \text{ eV}^2$ ).

Posso spiegare con l'oscillazione dei  $\nu$  gli esperimenti sul flusso?

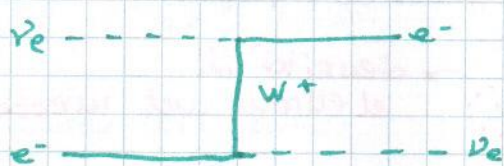


$$\Delta m^2 \gg 10^{-11} \Rightarrow P_{\mu\mu} \sim \frac{1}{2} \sin^2(\theta \cdot 2) \sim \frac{1}{2} \Rightarrow P_{ee} \sim \frac{1}{2}$$

Se invece che 2  $\nu$  ne ho 3  $\Rightarrow P \sim \frac{1}{3}$ .

$$P_{ee} = \frac{1}{3}$$

Quando il  $\nu_e$  passa attraverso il Sole, può fare scattering elastico tramite un  $W^+$ , mentre  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$  non possono:



(nel sole ci sono solo  $e^-$ , non  $\mu$  e  $\tau$ ).

Devo tenere conto di questo quando studio la propagazione dei  $\nu_e$ . Devo entrare nella matrice di trasporto dei neutrini.

Stime:  $\Delta m_{12}^2 \sim 10^{-5} \text{ eV}^2$   
 $\Delta m_{23}^2 \sim 10^{-3} \text{ eV}^2$

Per la prima volta, il 7/03/2012 è stata misurata anche l'oscillazione  $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$ , tramite il  $\sin^4(e \leftrightarrow \tau)$ .

Imponiamo il conto nel caso di 2 neutrini.

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & \\ & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad \text{autostati di massa}$$

L'eq. di Schrödinger si scrive:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + \frac{m_1^2}{2p} & \\ & p + \frac{m_2^2}{2p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

Voglio aggiungere un termine d'interazione che è diagonale nella base  $\nu_e, \nu_\mu$ .

Allora:

$$i \frac{d}{dt} U \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + \frac{m_1^2}{2p} & \\ & p + \frac{m_2^2}{2p} \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$$



$$U^{-1} i \frac{d}{dt} U \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} P + \frac{m_1^2}{2P} & \\ & P + \frac{m_2^2}{2P} \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$$

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} P + \frac{m_1^2}{2P} & \\ & P + \frac{m_2^2}{2P} \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} G_F n_e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$$

Abbiamo aggiunto il termine che tiene conto dello scattering elastico subito dal neutrino elettronico. Infatti:

$$\sigma \left( \begin{array}{c} \bar{\nu}_e^- \\ e^- \end{array} \begin{array}{c} \nu_e^+ \\ \bar{\nu}_e^- \end{array} \right) \propto \sqrt{2} G_F n_e \quad \text{densità di elettroni nel mezzo}$$

Definisco:

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= U^{-1} \begin{pmatrix} P + \frac{m_1^2}{2P} & 0 \\ 0 & P + \frac{m_2^2}{2P} \end{pmatrix} U + \begin{pmatrix} \sqrt{2} G_F n_e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \left( P + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4P} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4P} \cos(2\theta) + \sqrt{2} G_F n_e & \frac{\Delta m^2}{4P} \sin(2\theta) \\ \frac{\Delta m^2}{4P} \sin(2\theta) & \frac{\Delta m^2}{4P} \cos(2\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si vede che è la differenza di massa a causare il mixing. Se diagonalizzo  $\tilde{H}$ , gli autovalori sono:

$$E_\alpha = P + \frac{\tilde{m}_\alpha^2}{2P} \quad \alpha = 1, 2$$

$$\tilde{m}_\alpha^2 = \frac{1}{2} \left[ m_1^2 + m_2^2 + 2P\sqrt{2} G_F n_e \mp \sqrt{(\Delta m^2 \cos 2\theta A)^2 + (\Delta m^2 \sin 2\theta)^2} \right]$$

$$A = 2P\sqrt{2} G_F n_e$$

L'ampiezza di scattering in avanti influenza il trasporto dei  $\nu$  nello materiale, a prescindere che ci siano oscillazioni o meno.

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \tilde{H} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad \text{equivalente a:}$$

$$i \frac{d}{dt} \tilde{U}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_e \\ \tilde{\nu}_\mu \end{pmatrix} = \tilde{H} \tilde{U}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_e \\ \tilde{\nu}_\mu \end{pmatrix}$$

↳ possiamo portare questa a sinistra della derivata



temporale solo se me ha una variazione adiabatica lungo il cammino all'interno del sole.

22/12/2012

Abbiamo scritto un'Hamiltoniana di trasporto di neutrini elettronici:

$$\tilde{H} = \left( p + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4p} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2p} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{2} \cos 2\theta + \sqrt{2} G_F n_e 2p & \frac{\Delta m^2}{2} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{2} \sin 2\theta & \frac{\Delta m^2}{2} \cos 2\theta \end{pmatrix}}_{\equiv A}$$

Gli autovalori sono:

$$E_{\alpha} = p + \frac{\tilde{m}_{\alpha}^2}{2p} \quad \equiv M$$

con una "massa effettiva"  $\tilde{m}_{\alpha}$ :

$$m_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \left[ (m_1^2 + m_2^2) + A \mp \sqrt{(\Delta m^2 \cos 2\theta - A)^2 + (\Delta m^2 \sin 2\theta)^2} \right]$$

La densità elettronica del mezzo non è costante nel tempo.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix} = \tilde{U}(t) \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_{\mu} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t) i \frac{d}{dt} \left[ \tilde{U}^{-1}(t) \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \right] &= \tilde{U}(t) \tilde{H} \tilde{U}^{-1}(t) \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \\ &= i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} + i \left[ \tilde{U}(t) \frac{d}{dt} \tilde{U}^{-1}(t) \right] \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \left[ \tilde{U}(t) \tilde{H} \tilde{U}^{-1}(t) - i \tilde{U}(t) \frac{d}{dt} \tilde{U}^{-1}(t) \right] \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

Definiamo:

$$\tilde{U} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{c} & -\tilde{s} \\ \tilde{s} & \tilde{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & -\sin \tilde{\theta} \\ \sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix}$$

Diagonalizziamo:

$$\begin{pmatrix} \tilde{c} & -\tilde{s} \\ \tilde{s} & \tilde{c} \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} \tilde{c} & \tilde{s} \\ -\tilde{s} & \tilde{c} \end{pmatrix} =$$

Notazione:  $\cos 2\theta \equiv c$      $\sin 2\theta \equiv s$      $\Delta m^2 \equiv \delta$

Quindi:



$$= \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{2} \tilde{c} c + A \tilde{c} - \frac{\tilde{s} \delta s}{2} & \frac{\delta}{2} s \tilde{c} - \frac{\tilde{s} \delta c}{2} \\ -\frac{\delta}{2} c \tilde{s} + A \tilde{s} + \frac{\tilde{c} \delta s}{2} & \frac{\delta}{2} \tilde{s} s + \frac{\delta}{2} \tilde{c} c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c} & \tilde{s} \\ -\tilde{s} & \tilde{c} \end{pmatrix}$$

Va diagonalizzato  $\Rightarrow$  impongo nulli i termini fuori diagonale.

$$-\frac{\delta}{2} \tilde{c} \tilde{s} c + A \tilde{c} \tilde{s} - \frac{\delta}{2} \tilde{s}^2 s + \frac{\delta}{2} \tilde{c}^2 s - \frac{\delta}{2} \tilde{c} \tilde{s} c = 0$$

$$\frac{\delta}{2} s (\underbrace{\tilde{c}^2 - \tilde{s}^2}_{=\cos 2\tilde{\theta}}) - \frac{\delta}{2} c \underbrace{2\tilde{c}\tilde{s}}_{=\sin 2\tilde{\theta}} + A \underbrace{\tilde{c}\tilde{s}}_{=\frac{1}{2}\sin 2\tilde{\theta}} = 0$$

Ricavo l'angolo di rotazione  $\tilde{\theta}$ :

$$\frac{\delta s}{2} \cos 2\tilde{\theta} - \frac{\delta c}{2} \sin 2\tilde{\theta} + \frac{A}{2} \sin 2\tilde{\theta} = 0$$

$$\delta s \cos 2\tilde{\theta} + (A - \delta c) \sin 2\tilde{\theta} = 0$$

$$\tan 2\tilde{\theta} = \frac{\delta s}{\delta c - A} = \frac{\delta m^2 \sin 2\theta}{\delta m^2 \cos 2\theta - A}$$

Facciamo un altro pezzo:  $\tilde{U}(t) \frac{d}{dt} \tilde{U}^{-1}(t)$

(abbiamo diagonalizzato l'altro termine).

$$\begin{pmatrix} \tilde{c} & -\tilde{s} \\ \tilde{s} & \tilde{c} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{c} & \tilde{s} \\ -\tilde{s} & \tilde{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{c}\dot{\tilde{c}} + \tilde{s}\dot{\tilde{s}} & \tilde{c}\dot{\tilde{s}} - \tilde{s}\dot{\tilde{c}} \\ \tilde{s}\dot{\tilde{c}} - \tilde{c}\dot{\tilde{s}} & \tilde{s}\dot{\tilde{s}} + \tilde{c}\dot{\tilde{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\tilde{c}\tilde{s}\dot{\tilde{\theta}} + \tilde{s}\tilde{c}\dot{\tilde{\theta}} & \tilde{c}^2\dot{\tilde{\theta}} + \tilde{s}^2\dot{\tilde{\theta}} \\ -\tilde{c}^2\dot{\tilde{\theta}} - \tilde{s}^2\dot{\tilde{\theta}} & -\tilde{c}\tilde{s}\dot{\tilde{\theta}} + \tilde{s}\tilde{c}\dot{\tilde{\theta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\tilde{\theta}} \\ -\dot{\tilde{\theta}} & 0 \end{pmatrix}$$

Ma già conosciamo gli autovalori:

$$-i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix} = \left[ \tilde{U}(t) \tilde{H} \tilde{U}^{-1}(t) - i \tilde{U}(t) \frac{d}{dt} \tilde{U}^{-1}(t) \right] \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\tilde{m}_1^2}{2p} & -i\dot{\tilde{\theta}} \\ +i\dot{\tilde{\theta}} & \frac{\tilde{m}_2^2}{2p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}$$

Vediamo come cambia nel tempo  $\tilde{\theta}$ .

$$\frac{d}{dt} (\tan 2\tilde{\theta}) = \frac{2\dot{\tilde{\theta}}}{\cos^2 2\tilde{\theta}}$$

$$\cos x = (1 + \tan^2 x)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \cos 2\tilde{\theta} = \frac{\delta c - A}{\sqrt{(\delta c - A)^2 + \delta^2 s^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (\tan 2\tilde{\theta}) = 2\dot{\tilde{\theta}} \frac{(\delta c - A)^2 + \delta^2 s^2}{(\delta c - A)^2}$$

Ma l'unica cosa che varia nel tempo è  $m_e$  (in  $A$ ),

quindi:



$$\frac{d}{dt} (\tan 2\tilde{\Theta}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta s}{\delta c - A} \right) = \frac{\delta \dot{s}}{(\delta c - A)^2} \dot{A}$$

Ricavo  $\dot{\tilde{\Theta}}$  confrontando le due espressioni di  $\frac{d}{dt} (\tan 2\tilde{\Theta})$ .

$$2\dot{\tilde{\Theta}} [(\delta c - A)^2 + \delta^2 s^2] = \delta \dot{s} \dot{A}$$

$$\dot{\tilde{\Theta}} = \frac{\delta \dot{s} \dot{A}}{2[(\delta c - A)^2 + \delta^2 s^2]} = \frac{\delta \dot{s} 2\sqrt{2} G_F P N_e}{(\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2)}$$

Questa H si risolve o con tecniche computazionali o facendo delle approssimazioni.

### Approssimazione adiabatica

$$\frac{\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2}{2P} \gg |\dot{\tilde{\Theta}}| \Rightarrow \text{transcuro i termini fuori diagonale}$$

Ovvero:

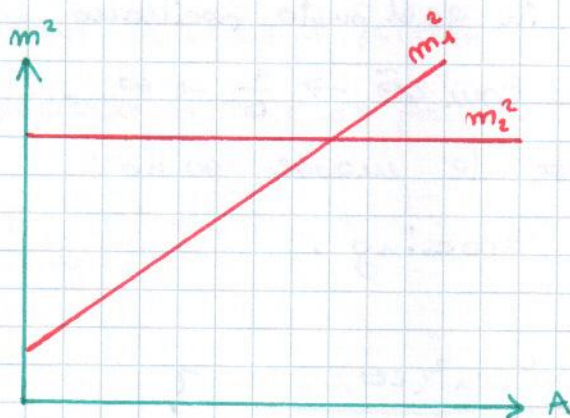
$$\frac{\delta \dot{s} 2\sqrt{2} G_F P N_e}{(\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2)^2} \ll \frac{(\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2)}{2P}$$

E' una condizione su  $N_e$ :

$$N_e \ll \frac{(\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2)^3}{4\sqrt{2} P^2 \delta s G_F}$$

NB.: le  $\tilde{m}$  sono l'energia che entra nell'evoluzione temporale dei  $\tilde{\nu}$  se  $\dot{\tilde{\Theta}} = 0$ .

Se vale questa condizione, sappiamo che gli autovalori variano in questo modo in funzione della densità di elettroni:



Se, come abbiamo supposto,  $m_2^2 \gg m_1^2$ , c'è crossing -

$$E_2 = P + \frac{m_2^2}{2P} \quad E_1 = P + \frac{(m_1^2 + A)}{2P} \quad (1=e, 2=\mu)$$

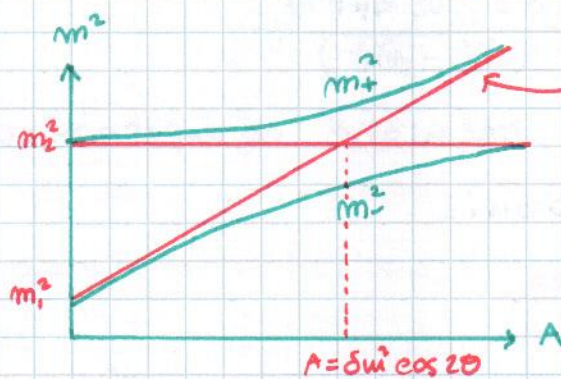


Questo nel caso non ci sia oscillazione - Nel caso ci sia:

$$m^2_{\pm} \equiv \frac{1}{2} \left[ (m_1^2 + m_2^2) + A \pm \sqrt{(\delta m^2 \cos 2\theta - A)^2 + (\delta m^2 \sin^2 2\theta)^2} \right]$$

$\exists$  oscillazione  $\Leftrightarrow \delta m^2 \neq 0 \wedge \theta \neq 0$ .

In fatti:  $P_{\mu} = \sin^2 2\theta \sin^2 \left[ 1.27 \frac{\delta m^2 L}{E} \right]$



se non ci fossero oscillazioni, questo sarebbe un  $\nu_e$  -

OSCILLAZIONE DI RISONANZA

(effetto MSW)

$A \rightarrow 0$ :

$$m^2_{-} = \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 - |m_1^2 - m_2^2|) = m_1^2$$

$A \rightarrow \infty$ :

$$m^2_{-} = \frac{1}{2} \left( m_1^2 + m_2^2 + A - A \sqrt{1 - \frac{2\delta c}{A} + \underbrace{\frac{\delta^2 c^2}{A^2} + \frac{\delta^2 s^2}{A^2}}_{= \delta^2 / A^2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left( m_1^2 + m_2^2 + A - A \left( 1 - \frac{\delta c}{A} \right) \right) = \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + \delta m^2 \cos 2\theta)$$

supponendo  $\delta m^2$  e  $\theta$  piccoli:

$$= \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 - m_1^2 + m_2^2) = m_2^2$$

Vediamo se vale l'approssimazione adiabatica.

Alla risonanza ( $A = \delta m^2 \cos^2 \theta$ ):

$$\Delta m^2_{\alpha} = \delta m^2 \sin^2(2\theta)$$

N.B.: si dice risonanza perché in quel punto oscillano a prescindere dal valore di  $\theta$ :  $\tan 2\tilde{\theta} \rightarrow \frac{1}{0} \rightarrow \infty$ .

N.B.: questo non funziona se le masse sono inventite: non ci sarebbe più crossing.

Alla risonanza:

$$N_e \ll \frac{\delta^3 (\sin 2\theta)^3}{4\sqrt{2} \delta \sin 2\theta G_F} = \frac{\delta^2 \sin^2(2\theta)}{4\sqrt{2} G_F} \quad ?$$

Se non vale questa condizione, dobbiamo risolvere esattamente l'equazione di Schrödinger.



Ci sono altri metodi approssimati. - Ad esempio:

$$P_{\nu_{es}} = \exp \left\{ -\frac{\pi}{4} \frac{\sin^2 \theta \sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} \frac{d(\log N_e)}{dx} \right\}_{\text{risonanza}}$$

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = \sin^2 \theta + P_{\nu_e} \cos 2\theta$$

(variazione lineare di  $N_e$ )

Vedi slides  $\rightarrow$  modello solare verificato con precisione al 10%  
 $\left( \frac{\Phi_{CC}}{\Phi_{NC}} \sim 0.3 \pm 0.02 \right)$ .

23/03/2012

Prossima lezione  $\rightarrow$  19 Aprile

Matrice PMNS = analogo della matrice Kobayashi-Maskawa,  
 per i neutrini.

Anni '60 Reines  $\rightarrow$  prima osservazione del  $\nu$  ( $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ )  
 ( $\rightarrow$  nobel)

Kamland  $\rightarrow \nu_e \rightarrow \nu_\mu$   $10^{-3} \text{ eV}^2$   $\sin^2(2\theta) \approx 1$

Verificato da SNO.

Daya Bay, 7/03/12  $\Rightarrow$  composizione  $N_e$ : c'è un 10% di  $\nu_3$ !

Altro metodo per osservare  $\nu$  a grande distanza:

**SUPERNOVAE**

SK  $\rightarrow$  11 evt in 10 s (1987)

Equilibrio idrostatico stella:  $\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{\rho(r)M(r)}{r^2} G$

Moltiplicando a dx e sx per  $4\pi r^3$  ed integrando:

$$\begin{aligned} 4\pi \int_0^R r^3 \frac{dP(r)}{dr} dr &= -4\pi \int_0^R r^3 G \frac{\rho(r)M(r)}{r^2} dr = \\ &= - \int_0^M G \frac{M(r)}{r} dm = E_G \end{aligned}$$

( $4\pi r^2 dr = dv$ ). A sinistra ho:

$$P(r) 4\pi r^3 \Big|_0^R - \int_0^R P(r) 12\pi r^2 dr$$



$P(r)$  in superficie  $\approx 0 \Rightarrow$  il primo addendo è nullo.

Rimane:

$$-\int_0^R P(r) 12\pi r^2 dr = E_G$$

Considero processi adiabatici:  $PV^\gamma = \text{cost.}$

$$P \propto V^{-\gamma}$$

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V}$$

$$d(PV) = VdP + PdV$$

$$VdP = -\gamma PdV$$

$$\Rightarrow d(PV) = -(\gamma-1)PdV$$

$$-PdV = \frac{d(PV)}{\gamma-1}$$

gas perfetto in trasformazione adiabatica

Per un gas perfetto:

$$dU = -PdV = \frac{d(PV)}{\gamma-1}$$

Trasf. adiabatica  $\Rightarrow U = \frac{PV}{\gamma-1}$  !

Energia per unità di volume:  $\epsilon = \frac{P}{\gamma-1}$

$$\Rightarrow P = \epsilon(\gamma-1)$$

Quindi:

(Teorema del viriale)

$$-3 \int_0^R (\gamma-1) \epsilon dV = -3\epsilon_i (\gamma-1) \equiv E_G$$

L'energia totale sarà:

$$E_T = E_G + E_i = -3\epsilon_i (\gamma-1) + E_i = E_i (4-3\gamma)$$

( $E_i$  = energia interna)

Per un gas monoatomico:  $E_T = -E_i$

L'energia totale è negativa  $\Rightarrow$  la stella è stabile. Se aggiungo energia,  $|E_T|$  diminuisce.

$\Rightarrow$  diminuisce anche l'energia interna, che in

un gas è funzione monotona della temperatura

( $U \propto NkT$ ).



$$+\Delta Q \Rightarrow -\Delta t$$

$\Rightarrow$  il calore specifico della stella è negativo -

$$C_s = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

Se dà energia ad una stella, essa si espande -

- stella di  $8 M_{\odot}$ : brucia fino a creare un nucleo di carbonio
- massa nucleo  $\sim 1.4 M_{\odot} \Rightarrow$  la stella "frena" e non brucia più. Comincia a dominare la pressione degli  $e^-$  (principio di esclusione di Pauli).

Possiamo calcolare la pressione a questo punto, considerando gli  $e^-$  un gas di Fermi -

Isotropia  $\Rightarrow$  integrale sulla parte angolare  $\Rightarrow 4\pi$ .

$$2 \frac{4\pi p^2 dp dV}{h^3} \quad \text{densità di } e^- \text{ nello spazio delle fasi}$$

$g_s = -\frac{1}{2}$     $g_s = +\frac{1}{2}$

Supponiamo di conoscere la densità di elettroni  $n_e$  -

$$2 \int_0^{p_F} \frac{4\pi p^2 dp dV}{h^3} = n_e dV$$

$$\frac{8}{3} \pi p_F^3 h^{-3} dV = n_e dV \quad \Rightarrow \frac{dn}{dp} \propto p^2$$

$$p_F \propto \sqrt[3]{n_e}$$

Temperatura:

- basta per fondere il carbonio
- alta tale che gli  $e^-$  siano relativistici.

Vogliamo calcolare la pressione -

$$P = \frac{F}{S} = \frac{N(\theta) \Delta p \cos \theta}{S \Delta t} \cdot \frac{v \cos \theta}{v \cos \theta}$$

num. particelle



$v \cos \theta \Delta t S =$  volume efficace di particelle che attraversano



$$s. \Rightarrow P_e = \int_p \int_{\theta, \varphi} \frac{dn}{dp d\Omega} p \cos\theta \, v \cos\theta$$

Suppongo isotropia  $\Rightarrow$

$$= \int_p \int_{\varphi, \cos\theta} \frac{dn}{dp} p \cos\theta \, v \cos\theta \frac{d\cos\theta d\varphi}{4\pi}$$

Conosco  $dn/dp$ :

$$\begin{aligned} P_e &= \int_0^{P_F} \int_{\Omega} \frac{8\pi p^2}{h^3} p \, v \cos^2\theta \, d\cos\theta \, dp \, d\varphi = \\ &\approx \int_0^{P_F} \int_{d\cos\theta} 2\pi \frac{8\pi p^2}{h^3} p \, v \cos^2\theta \, d\cos\theta \, dp = \\ &= \int_0^{P_F} 8\pi \frac{p^3}{h^3} v \, dp \int_{-1}^1 \cos^2\theta \, d\cos\theta = \frac{1}{4} 8\pi \frac{c}{h^3} 2\pi P_F^4 \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$P_e = \frac{8}{3} \pi^2 \frac{P_F^4}{h^3} e \propto \rho^{4/3} \quad (P_F \propto \sqrt[3]{n_e})$$

Se aggiungo energia (ad esempio arriva materiale da altre stelle) l'energia va a 0  $\Rightarrow$  sistema instabile. Inizia ad aumentare la temperatura.

Un po' di energia è portata via da emissione di neutrini - Punto critico: massa troppo grande  $\Rightarrow$  i  $\nu$  non escano più (interagiscono).

Fonde il nucleo di carbonio  $\Rightarrow$  la stella detona (supernovae di tipo uno  $\Leftrightarrow$  CARBON FLASH)

Massa critica: 1.39  $M_{\odot}$  (nane bianche)

$e^- + p \rightarrow n + \nu \Leftrightarrow E > 1 \text{ MeV} \Rightarrow$  il nucleo centrale non si regge più sotto la pressione di radiazione degli elettroni  $\Rightarrow$  si forma una stella di neutroni e la parte esterna viene spazzata via (tipo 2) -

$$1 \text{ MeV} \sim 10^{10} \text{ K}$$



Quando abbiamo calcolato la pressione nelle stelle abbiamo modellizzato il gas degenerato di elettroni con:

$$P = \text{cost.} \cdot \int_0^{p_F} p^3 v dp \quad p_F \propto \sqrt[3]{m_e}$$

con l'approssimazione relativistica  $\beta \approx 1$ .

Se vogliamo fare il calcolo "esatto":

$$\beta = p/c \Rightarrow P = \text{cost.} \cdot \int_0^{p_F} \frac{p^3 p}{\sqrt{p^2 + m_e^2}} dp \rightarrow \int_0^x \frac{t^3}{t^2 + 1} dt$$

con  $x = \frac{p_F}{m_e}$ . L'approssimazione che abbiamo fatto è

$$x \gg 1 \Leftrightarrow p_F \gg m_e$$

Ma l'impulso di Fermi è  $\propto \sqrt[3]{m_e} \Rightarrow$  la condizione si traduce in una condizione sulla densità, calcolabile.

In questa approssimazione,

$$P \sim p_F^4 \sim m_e^{4/3}$$

Se la massa del nocciolo è  $>$  della massa di C.S., c'è collasso e deleptonizzazione ( $e^- p \rightarrow n \nu_e$ ) della stella, si forma un nucleo di neutroni (pulsar) o un buco nero.

## SUPERNOVA DI TIPO 2

Nella supernova di tipo 1  $\exists$  formazione di un nucleo compatto, né emissione di  $\nu$ . La supernova di tipo 1 avviene per masse ben precise della stella ( $1.39 M_\odot$ )  $\Rightarrow$  la quantità di luce emessa da una supernova di tipo 1 è sempre la stessa, e posso usare la luminosità apparente per misurare la distanza.

Tipo 2: il nucleo di ferro non può più fondere e collassa.



$$M \sim M_{\odot} \Rightarrow N_n \approx 2 \cdot 10^{30} \cdot 10^8 \cdot 6 \cdot 10^{22} = 1.2 \cdot 10^{57} \text{ neutroni}$$

Stella compatta  $\Rightarrow$  distanza tra neutroni dell'ordine del femmi  $\Rightarrow$  ogni n occupa  $1 \text{ fm}^3$ . Quindi:

$$R \sim 1 \text{ fm} \sqrt[3]{N_n} = 10^{-15} \text{ cm} \cdot 10^{19} = 10^6 \text{ cm} = 10 \text{ km}$$

Lo stello rimane estremamente piccola.

Supponiamo che sia una sfera di densità costante. L'energia gravitazionale a distanza  $r$  dal centro vale:



$$\begin{aligned} E_G &= -G \int_0^R \frac{1}{r} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \cdot 4 \pi r^2 dr \rho = -G 3 \left( \frac{4}{3} \pi \right)^2 \rho^2 \frac{R^5}{5} \\ &= -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R} \end{aligned}$$

Il raggio iniziale della stella è  $10^5$  volte più grande  $\Rightarrow$  l'energia gravitazionale iniziale è  $10^5$  volte più piccola.

$$E_M + E_G = -G \frac{3}{5} \frac{M_{\odot}^2}{R_i} \quad E_M - \frac{3}{5} G \frac{M_{\odot}^2}{R_f} \cong 0$$

$$-\frac{3}{5} G \frac{M_{\odot}^2}{R_f} \approx 3.5 \frac{10^{-11} (2 \cdot 10^{30})^2}{10^4} = 3.5 \frac{4 \cdot 10^{49}}{10^4} \text{ J} = 1.4 \cdot 10^{46} \text{ J}$$

Questa stella è legata con un'energia di legame di  $10^{46} \text{ J} \Rightarrow E_M (\text{finale}) = -10^{46} \text{ J}$

$\Rightarrow$  c'è stata una espulsione di  $10^{46} \text{ J}$  di energia meccanica.

Osservando i SNR si riesce a misurare un'energia di  $10^{44} \text{ J}$ , l'1% di quella che serve per poter formare una pulsar. Cosa manca?

Mentre la stella si sta contraendo (energia  $> \text{MeV}$ ), accadono anche le reazioni:





Il modo piú semplice di perdere energia, per una stella, è l'emissione dei neutrini.

I neutrini se ne escano dalla stella, portando con sé il 99% dell'energia emessa dalla stella.

Il raffreddamento della SN del 1987 è stato osservato

$$\text{con: } \Delta t \approx 10 \text{ s} \quad E_\nu \approx 10 \text{ MeV}$$

compatibile con questo processo.

La distribuzione angolare  $E_\nu - \Theta_\nu$  è quasi piatta, infatti:

la sezione d'urto dominante per neutrini di qualche

$$\text{decina di MeV su } \text{H}_2\text{O} \text{ è } \sigma(\bar{\nu}_e p \rightarrow n + e^-) = 10^{-43} \text{ cm}^2 \cdot (E_\nu [\text{MeV}])^2$$

("interazione quasi elastica") (non può fare  $\nu_e n \rightarrow p e^-$

su ossigeno, perché il nucleo di O è legato

con  $B.E. \approx 8 \text{ MeV}$ ).

Il nucleo bersaglio è molto piú pesante del  $\nu$  e dell' $e^-$

$\Rightarrow$  l' $e^-$  è emesso isotropicamente.

Ha senso il calcolo di bilancio energetico che abbiamo fatto?

$$\sigma(\bar{\nu}_e p \rightarrow n + e^-) \approx 10^{-41} \text{ cm}^2$$

$$10^{46} \text{ J} = 10^{53} \text{ erg}$$

Se voglio calcolare il numero di interazioni nel mio rivelatore:

$$\frac{dN}{dt dV} = \rho_\nu \rho_B N_R \sigma \quad \Rightarrow \quad N = \int_0^{10 \text{ s}} dt \int dV \rho_B \rho_\nu N_R \sigma$$

$$N_R = C$$

$\phi$  = incognita

frazione di nuclei liberi

$$\text{Kamiokande} \rightarrow \int \rho_B dV = 10^3 10^3 10^3 6 \cdot 10^{23} \cdot \frac{2}{10}$$

Conoscendo  $N$  e  $\sigma \Rightarrow$  ricavo  $\phi$ .

$$N(10 \text{ s}) = 10$$

$$\phi_{\bar{\nu}_e} = \frac{10}{10^{-41} 6 \cdot 10^{23} \cdot 10} \leftarrow \text{secondi}$$

In realtà vengono prodotti tutti i tipi di neutrini  $\Rightarrow$

$$\phi = 6 \cdot \phi_{\bar{\nu}_e} = 10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$



La densità è questo numero integrato sul tempo (10 s):

$$\rho_\nu = 10^{11} \nu/\text{cm}^2$$

Per sapere quanti neutrini ha emesso la stella integriamo (moltiplichiamo per) su tutta la superficie della sfera di raggio la distanza tra noi e la supernova:

$$R = 50\,000 \text{ pc} = 150\,000 \text{ anni luce} = 150\,000 \pi \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$N_\nu = 4\pi (150 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^{10})^2 10^{11} \approx 12 (1.5 \cdot 10^{23})^2 10^{11}$$

$$\approx 24 \cdot 10^{11} \cdot 10^{46} = 2.4 \cdot 10^{58} \text{ neutrini emessi}$$

L'energia associata è

$$E_\nu \approx 2.4 \cdot 10^{58} \cdot 10^7 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ erg} = 4 \cdot 10^{53} \text{ erg}$$

Otteniamo esattamente lo stesso ordine di grandezza atteso ( $10^{53}$  erg) -

Tutto questo avendo a disposizione solo 10 eventi!

I neutrini sono arrivati tutti insieme in 10 s.

Se hanno una massa  $\neq 0$ , supponendo che siano emessi istantaneamente (dà un limite peggiorativo su quello che posso dire su  $m_\nu$ , nel 1987 non si avevano ancora osservazioni sulle oscillazioni e si cercava di stabilire solo se  $m_\nu \neq 0$  o  $m_\nu = 0$ ):

$$\Delta t_{\text{max}} = 10 \text{ s} = \Delta \left( \frac{L}{v} \right)_{\text{max}}$$

$$v = c \frac{p}{E} \quad \frac{L}{v} = \frac{L}{c} \frac{E}{p}$$

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} \approx p \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{p^2} \right) = p + \frac{1}{2} \frac{m^2}{p}$$

$$\frac{L}{v} \approx \frac{L}{c} \left( p + \frac{1}{2} \frac{m^2}{p} \right) = \frac{L}{c} \left( 1 + \frac{m^2}{2p^2} \right)$$

$$\Delta t \approx \Delta \left( \frac{L}{c} \left( 1 + \frac{m^2}{2p^2} \right) \right) = \frac{m^2 L}{2c} \Delta \left( \frac{1}{p^2} \right)$$

Lo spettro temporale è allargato di una quantità  $\propto m^2$  rispetto allo spettro in impulso.



$$\Delta t \sim \frac{m^2 L}{2c} \approx \frac{\Delta p}{p^3} \quad \Delta p \approx 10 \text{ MeV} \quad p \sim 10 \text{ MeV}$$

$$\Delta t \sim \frac{m^2 L}{2c} \approx \frac{1}{p^2} < 10 \text{ s} \Rightarrow m^2 < \frac{c}{L} p^2 \cdot 10$$

$$m < \left[ \frac{3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s} \cdot 10}{180 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ cm}} \cdot (10^7)^2 \right]^{1/2} \text{ eV}$$

$$1 \text{ pc} = 3 \cdot 10^{16} \text{ m}$$

$$m < \sqrt{2 \cdot 10^{-12}} \cdot 10^7 \text{ eV} = 14 \text{ eV}$$

Il limite di massa al tempo era superiore a 20 eV.

Inoltre, 3 ore <sup>dopo</sup> c'erano stati picchi di osservazioni nel visibile (fotoni).

$$\left| \frac{L}{c_\gamma} - \frac{L}{c_\nu} \right| \leq 3 \text{ h} \approx 10^4 \text{ s}$$

I fotoni arrivano dopo perché ci mettano di più ad uscire dal nucleo ( $\sigma_\gamma > \sigma_\nu$ )

Per quanti secondi viaggiamo  $\gamma$  e  $\nu$ ? 150 k anni:

$$\frac{\Delta c}{c} \leq \frac{10^4 \text{ s}}{150 \cdot 1000 \text{ anni}} \approx \frac{10^4}{5 \cdot 10^{12}} \approx 2 \cdot 10^{-9}$$

A meno di 2 parti su un miliardo, la velocità di  $\bar{\nu}_e$  di 10 MeV è uguale a quella dei fotoni.

Nel caso dell'esperimento OPERA:

$$\Delta t = 60 \text{ ns} \quad T_{\text{gierra-grausosso}} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ s} \Rightarrow \frac{\Delta c}{c} = 3 \cdot 10^5$$

Allora l'effetto avrebbe avuto dipendenza dal tipo di neutrino (erano  $\nu_\mu$ ), dall'energia ecc.

Ma era sbagliato.

## Relatività generale

Ref.: pochi paragrafi del Weinberg

Arriveremo a scrivere le equazioni di Friedman e dell'evoluzione dell'universo.

RED SHIFT:  $\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \equiv z$

(diff. relativa tra alcune righe misurate sulla terra e viste in una galassia)



$$v = H_0 d$$

$$H_0 \cong 70 \text{ km s}^{-1} (\text{Mpc})^{-1} \quad \text{Costante di Hubble}$$

Al prim'ordine,  $z$  è dato dall'effetto Doppler:

$$z \approx \frac{v}{c} = \frac{H_0 d}{c}$$

$\Rightarrow$  la misura di  $z$  è, al prim'ordine, una misura di distanza (una volta che conosciamo la costante di Hubble):

$$d = \frac{z c}{H_0}$$

Ad esempio:

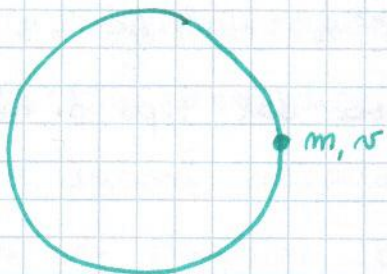
$$cz \cong 10000 \text{ km/s} \Rightarrow d = \frac{10^4 \text{ km/s}}{70 \text{ km/s}} \text{ Mpc} = 1.3 \cdot 10^2 \text{ Mpc}$$

### PRINCIPIO COSMOLOGICO

L'universo è isotropo e omogeneo (uniforme)

20/04/2012

Assumeremo valido il principio cosmologico. Questo vuol dire che l'universo è una distribuzione uniforme di massa.



Calcoliamo la velocità di fuga di una particella di massa  $m$  di universo. Egualiamo a 0 la sua energia meccanica e chiamiamo  $\rho_0$  la densità

di massa tale che:  $\frac{m v^2}{2} - \frac{m M G}{r} = 0$

$\rho_0$  si dice **DENSITA' CRITICA**.

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{m \rho_0}{r} G = 0$$

Implementiamo  $v = H_0 r$ :

$$\frac{H_0^2 r^2}{2} - \frac{4}{3} \pi r^2 G \rho_0 = 0$$

$$\frac{4}{3} \pi G \rho_0 = \frac{H_0^2}{2}$$

$$\rho_0 = \frac{3}{8\pi} \frac{H_0^2}{G}$$



Conosciamo sia  $H_0$  che  $G \Rightarrow \rho_0$  è calcolabile e vale

$$\rho_0 = 10^{-29} \text{ g/cm}^3$$

Si osserva che la densità attuale dell'universo è vicino a  $\rho_0$ .  
Le equazioni della cosmologia dipendono essenzialmente da 3 parametri:

- $\Omega_M = \frac{\rho_M}{\rho_0}$   $\rho_M$  densità attuale di materia
- $\Omega_\Lambda$  (costante cosmologica dovuta alla rel. gen.)
- curvatura dell'universo

Abbiamo visto che:

$$v = H_0 d \quad H_0 = 70 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} = \left[ \frac{1}{T} \right] = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \text{ cm s}^{-1}}{10^6 \cdot 3 \cdot 240^2 \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ cm}} \approx 2 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

Quindi:

$$H_0^{-1} \approx \frac{1}{2} 10^{18} \text{ s} = 5 \cdot 10^{17} \text{ s} \approx 1.5 \cdot 10^{10} \text{ anni} = 15 \text{ mld anni}$$

Se immaginiamo un universo che si espande, la distanza tra due oggetti cambia nel tempo.

Se varia linearmente:

$$d(t_0) \equiv l \Rightarrow d(t) = \frac{t}{t_0} l$$

$$v = \frac{l}{t_0} = H_0 \frac{t}{t_0} l \Rightarrow H_0 = \frac{1}{t}$$

$H_0^{-1}$  è l'età dell'universo (in un modello lineare).

L'orizzonte dell'universo visibile ha un raggio che vale  $c \cdot t$  e l'età dell'universo:

$$R = 1.5 \cdot 10^{28} \text{ cm}$$

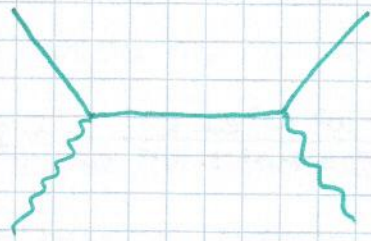
Uno dei motivi per cui si pensa che valga il principio cosmologico è la presenza della radiazione cosmica di fondo.

$$T \approx 2.7 \text{ K} \quad \frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$$

Lo spettro è una distribuzione di Bose-Einstein perfetta



(corpo nero), e la radiazione è perfettamente isotropa.  
 Supponiamo che la r.e.f. sia stata emessa durante il big bang - L'isotropia significa che l'universo è isotropo adesso o che lo era al momento del big bang? Potrei fare questa ultima affermazione se avessi motivo di ritenere che la radiazione non abbia interagito prima di arrivare fino a me.  
 In che modo può interagire un fotone da 3 K?



$$\sim \frac{\alpha^2}{p + m}$$

$p$  è piccolissimo.  
 $m_p \gg m_e \Rightarrow$  domina lo scattering su  $e^-$ .

$$\sigma \sim \frac{\alpha^2}{m_e^2} \sim 7 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad \text{sezione d'urto Thompson}$$

Posso calcolare la lunghezza d'interazione -  
 la densità di elettroni è cambiata nel tempo  $\Rightarrow$   
 diamo solo una stima rozza.

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n_e}$$

Supponiamo  $\rho \approx \rho_0 \Rightarrow \rho_e < \rho_0$  (gli  $e^-$  non saranno tutti ionizzati, e c'è anche altra materia, soprattutto protoni).

$$n_e < \frac{\rho_0}{m_p} \Rightarrow \lambda > \frac{m_p}{\sigma \rho_0} = \frac{1}{7 \cdot 10^{-25} \cdot 10^{-29} \cdot 6 \cdot 10^{23}} \text{ cm}$$

$$\lambda \gtrsim 2.5 \cdot 10^{29} \text{ cm}$$

che è maggiore del raggio dell'universo visibile.

La misura dell'isotropia della radiazione cosmica di fondo è qualcosa che riguarda l'universo di "allora", non quello di ora.



Il modello cosmologico è costruito sulla base della relatività generale.

Partiamo dal principio di equivalenza:

||  $\forall$  campo gravitazionale,  $\forall$  porzione di spazio,  $\exists$  localmente un sistema di riferimento all'interno del quale le leggi della fisica sono quelle della relatività ristretta. Significa che  $\forall$  punto esiste un piccolo intorno per il quale una adeguata scelta di un sistema di riferimento iniziale annulla totalmente gli effetti del campo gravitazionale.

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^i dx^i = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Cambiare sistema di riferimento significa:

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu})$$

$$dx'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \quad dx'^{\mu} \text{ CONTRAVARIANTE}$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^1} dx^1 + \dots$$

$$dx'_{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} dx^{\nu} \quad dx'_{\mu} \text{ COVARIANTE}$$

$dx'_{\mu}$  trasforma con l'inverso della funzione con cui trasformo  $dx'^{\mu}$ .

•  $dx'^{\mu} dx'_{\mu}$  è un'invariante - infatti:

$$dx'^{\mu} dx'_{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} dx_{\alpha} \quad (\text{sommato su } \mu, \nu \text{ e } \alpha)$$

L'ordine con cui faccio le somme non è rilevante.

$$= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} dx_{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\nu} dx^{\nu} dx_{\alpha} = dx^{\alpha} dx_{\alpha}$$



Scriviamo in un sistema di riferimento arbitrario le leggi del moto di una particella.

Anche se muovono la particella, conosco quali leggi soddisfa nel s.d.r. dato dal principio di equivalenza. In questo sistema, chiamiamo le variabili  $\xi^\mu$ . Sappiamo che:

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad \text{con } \tau \text{ tempo proprio (tempo misurato nel s.d.r. del principio di eq.)}$$

Come passo al sistema di riferimento "vero"?

$$d\xi^\mu = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad \frac{d\xi^\mu}{d\tau} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = 0$$

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$

Questo non è ancora una equazione del moto.

È nella forma  $\partial^2 + \partial \partial = 0$

Moltiplichiamo tutto per  $\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\mu}$  e contraiamo:

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \delta_\nu^\sigma + \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \boxed{\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\alpha}} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0$$

$\Gamma_{\sigma\alpha}^\sigma$

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma_{\sigma\alpha}^\sigma \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

Equazione Geodetica



$\Gamma_{\alpha}^{\sigma}$  è detta **CONNESSIONE METRICA** e dipende solo dal cambiamento del sistema di riferimento - Vedremo come scriverlo in maniera "furba" - Nel sistema di riferimento dove vale la relatività ristretta:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^{\mu} d\xi^{\nu}$$

che in un altro s. d. r. diventa:

$$ds^2 = \left[ \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \right] dx^{\alpha} dx^{\beta}$$

$$\equiv g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$$

$g_{\alpha\beta} \equiv$  **TENSORE METRICO**

$g_{\alpha\beta}$  è un tensore. Trasforma con:

$$g'_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\beta}} = \underbrace{\eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\delta}}}_{g_{\gamma\delta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{\beta}}$$

$g_{\alpha\beta}$  trasforma con il prodotto di due trasformazioni covarianti, e.v.d..

$ds^2$  deve godere delle proprietà di simmetria del s. d. r. "vero" -

Scriviamo la connessione metrica in termini del tensore metrico. Definiamo prima l'inverso del tensore metrico:

$$g^{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}}$$

Questo è un tensore contravariante su entrambi gli indici -

N.B.:  $\eta_{\mu\nu}$  è una matrice, non importa se gli indici sono alti o bassi, assume sempre i soliti valori -



$$g'^{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial s^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial s^{\nu}} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial s^{\mu}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial s^{\nu}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}}$$

$$= g^{\gamma\delta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}}$$

Verifichiamo che  $g'^{\alpha\beta}$  è l'inverso di  $g'_{\alpha\beta}$ :

$$g'^{\alpha\beta} g'_{\beta\gamma} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial s^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial s^{\nu}} \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial s^{\rho}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial s^{\sigma}}{\partial x^{\gamma}}$$

$$= \eta_{\mu\rho} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial s^{\mu}} \eta_{\sigma\gamma} \frac{\partial s^{\sigma}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial s^{\mu}} \frac{\partial s^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} = \delta^{\alpha}_{\gamma} \quad \text{c.v.d.}$$

Siamo adesso in grado di dimostrare che:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right)$$

23/04/2012

Vediamo l'espressione delle **connessioni metriche** in termini di **tensore metrico**.

N.B.:

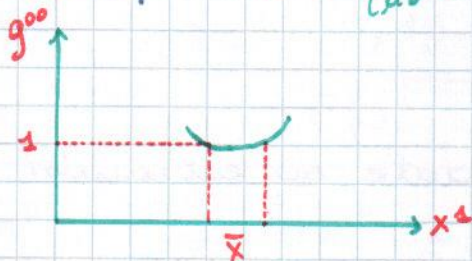
$$g_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial s^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial s^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} = \eta_{\nu\mu} \frac{\partial s^{\nu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial s^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} = g_{\sigma\rho}$$

Il tensore metrico è un tensore covariante **simmetrico**.

Il principio di equivalenza considera intorno

"sufficientemente piccoli" - quanto "sufficientemente"?

Nell'intorno,  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$ .



Se chiamo  $\bar{x}$  il punto

dettato dal principio di

equivalenza, la condizione

sull'intorno diventa:



$$\frac{\partial g^{\mu\nu}(\bar{x})}{\partial x^\rho} = 0$$

La derivata prima del tensore metrico deve essere una osservabile che vale 0 in un punto.

Facciamo il conto impostato l'altra volta. Vogliamo dimostrare che:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left( \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right) \equiv \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu \nu \end{matrix} \right\}$$

Vediamo come trasformano i vari termini.

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\prime\sigma} = \frac{\partial x^{\prime\sigma}}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\prime\mu} \partial x^{\prime\nu}} = \frac{\partial x^{\prime\sigma}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial}{\partial x^{\prime\mu}} \left( \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\prime\nu}} \right)$$

C'è la derivata di un prodotto  $\Rightarrow$  avremo due termini.

$$= \frac{\partial x^{\prime\sigma}}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\prime\mu} \partial x^{\prime\nu}} \right) \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\prime\nu}}$$

l'indice  $\alpha$  trasforma in modo contravariante

$\Gamma_{\rho\beta}^\alpha$

gli indici  $\rho$  e  $\beta$  trasformano in modo covariante

$$+ \frac{\partial x^{\prime\sigma}}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\prime\mu} \partial x^{\prime\nu}} \right) \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{\prime\mu} \partial x^{\prime\nu}}$$

$$= \frac{\partial x^{\prime\sigma}}{\partial x^\alpha} \Gamma_{\rho\beta}^\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\prime\nu}} + \frac{\partial x^{\prime\sigma}}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{\prime\mu} \partial x^{\prime\nu}}$$

Vediamo come trasformano le derivate del tensore metrico.

$$\frac{\partial}{\partial x^{\prime\kappa}} g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\tau}{\partial x^{\prime\kappa}} \frac{\partial}{\partial x^\tau} \left( g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\prime\nu}} \right)$$

$$= \frac{\partial x^\tau}{\partial x^{\prime\kappa}} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\prime\nu}} +$$





$$+ g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\kappa \partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} + g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\kappa \partial x'^\nu}$$

Quindi:

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\kappa} + \frac{\partial g'_{\kappa\nu}}{\partial x'^\mu} - \frac{\partial g'_{\mu\kappa}}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} +$$

$$+ g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\kappa \partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} + g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\kappa \partial x'^\nu} +$$

$$+ \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} + g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\kappa \partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} +$$

$$+ g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} - \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa}$$

$$- g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa} - g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\kappa \partial x'^\nu}$$

$$= \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \left( \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x^\sigma} \right)$$

$$+ 2 g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\kappa \partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}$$

Devo ancora moltiplicare per  $\frac{1}{2} g^{\rho\sigma}$  (che so come trasformo):

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \kappa \end{matrix} \right\}' = \frac{1}{2} g'^{\lambda\nu} \left( \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\kappa} + \frac{\partial g'_{\kappa\nu}}{\partial x'^\mu} - \frac{\partial g'_{\mu\kappa}}{\partial x'^\nu} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\delta} g^{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \right]$$

\*  $\delta^\sigma_\rho$

$$\cdot \left( \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x^\sigma} \right) + 2 g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\kappa \partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}$$

$$= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \tau \sigma \end{matrix} \right\}$$

← questo è il modo giusto di trasformare di un tensore

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} 2 g^{\alpha\beta} g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\kappa \partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}$$

\*  $\delta^\sigma_\rho$



$g^{\alpha\sigma} g_{\beta\sigma} = \delta_{\beta}^{\alpha}$ , quindi:

$$\begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu \kappa \end{Bmatrix} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \tau \beta \end{Bmatrix} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\kappa} \partial x'^{\mu}}$$

Quindi:

$$T_{\nu\beta}^{\mu} \equiv \Gamma_{\nu\beta}^{\mu} - \begin{Bmatrix} \mu \\ \nu \beta \end{Bmatrix}$$

$$T'^{\mu}_{\nu\beta} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} T_{\beta\delta}^{\alpha}$$

$T'_{\nu\beta}^{\mu}$  trasforma come un "buon" tensore.

$T'_{\nu\beta}^{\mu}$  è la differenza tra  $\Gamma_{\nu\beta}^{\mu}$  ed il simbolo di

**Cristoffel**.

Ma, nel sistema di riferimento dettato dal principio di equivalenza, tutte le derivate prime del tensore metrico sono nulle  $\Rightarrow$  tutte le componenti di  $T_{\beta\gamma}^{\alpha}$  sono nulle  $\Rightarrow$  comunque le trasformi, restano nulle  $\Rightarrow T'^{\mu}_{\nu\beta}$  è nullo  $\Rightarrow \Gamma_{\nu\beta}^{\mu} = \begin{Bmatrix} \mu \\ \nu \beta \end{Bmatrix}$ . (c.r.d.)

Prendiamo un s.d.r. nel campo gravitazionale terrestre.

$$\phi = - \frac{GM}{r} \quad (\text{limite Newtoniano})$$

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = - \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

In relatività generale l'equazione del moto è invece la geodetica:

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\sigma}^{\mu} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} c^2 = 0$$

Impongo che:  $|dx^i| \ll c dt = dx^0$  (cioè, velocità molto piccole rispetto a  $c$ ). La geodetica diventa:



$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = 0$$

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left( 2 \frac{\partial g_{\sigma 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} \right)$$

Seconda assunzione: campo statico (indipendente dal tempo)  $\Rightarrow \frac{\partial g_{\sigma 0}}{\partial x^0} = 0$ .

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} \quad \text{con } \sigma = 1, 2, 3 \text{ (solo comp. spaziali)}$$

Terza assunzione: il campo è **debole**. Ovvero:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}, \quad h^{\mu\nu} \ll 1 \quad \forall \mu, \nu$$

Quindi:

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu i} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} = -\frac{1}{2} (\eta^{\mu i} + h^{\mu i}) \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}$$

Al prim'ordine:

$$\Gamma_{00}^\mu \approx -\frac{1}{2} \eta^{\mu i} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}$$

In particolare:  $\eta^{0i} = 0 \Rightarrow \Gamma_{00}^0 = 0$

Prima equazione del moto:

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \text{costante}$$

Prendiamo la parte spaziale:  $\eta^{ji} = -\delta_{ij} \Rightarrow \Gamma_{00}^j = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^j}$

Quindi, la seconda equazione del moto:

$$\frac{d^2 x^j}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^j} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0$$

$dt/d\tau$  è una costante  $\Rightarrow$  moltiplicando per il suo inverso otteniamo:



$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 \frac{d^2 x^j}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

$\Rightarrow h_{00} = 2\phi + \text{costante}$  (condizione al contorno: a grande distanza  $h$  è nullo)

Nel caso di campo debole, statico, a  $v \ll c$ ,

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} = -2 \frac{GM}{rc^2}$$

Ad esempio sulla superficie del sole:

$$M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad R = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$|h_{00}| = 2 \cdot 7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \frac{1}{7 \cdot 10^8 (3 \cdot 10^8)^2} \approx 0.5 \cdot 10^{-5}$$

che è molto piccolo rispetto a 1. (c.v.d.)

Nel caso dell'universo:

$$M \approx \frac{4}{3} \pi r_v^3 \rho_{co}$$

raggio visibile
densità critica OGGI

$$\frac{G \frac{4}{3} \pi r_v^3 \rho_{co}}{r_v c^2} \approx \frac{10 (10^{28})^2 \cdot 7 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-29}}{10^{21}} \approx \frac{10^{57} \cdot 10^{-37}}{10^{21}} = 0.7$$

$\Rightarrow$  questa correzione non è piccola  $\Rightarrow$  non posso permettermi di usare la meccanica Newtoniana in questo frangente.

Se anche la meca. Newtoniana funziona molto bene sul sole, ci sono delle piccole correzioni, misurabili molto bene, ad esempio dovute alla dilatazione dei tempi.

$$d\tau = (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)^{1/2} \Rightarrow dt = d\tau \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)^{-1/2}$$

$$dt = d\tau (g_{00})^{-1/2} = d\tau (1 + 2\phi)^{-1/2}$$

Se abbiamo due orologi in due campi gravitazionali differenti, c'è uno shift di frequenza dovuto alla



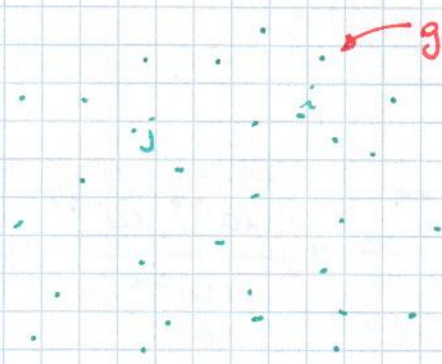
relatività generale:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{dt_1}{dt_2} = \left( \frac{1 + 2\phi_2}{1 + 2\phi_1} \right)^{1/2}$$

N.B.: Se le derivate parziali prime di  $g_{\mu\nu}$  fossero nulle, osserveremmo shift in frequenza anche a piccola distanza.

Vedremo come sarà fatto il tensore metrico (Robertson-Walker) in ambito cosmologico. Ci metteremo in un SDR che si espande nel tempo.

Le galassie sono in "caduta libera": sono soggette solo all'attrazione gravitazionale.



galassie

∀ galassia:  $x_i, t$

Imponiamo  $(x_i, t)$  costante

⇒ nel tempo cambierà solo la DISTANZA tra due galassie.

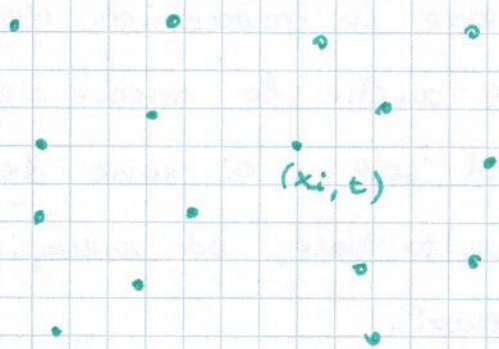
26/04/2012 (par)

Supponiamo di avere il già citato insieme di galassie tenute insieme dalla forza gravitazionale. A

ciascuna è associato un set di coordinate  $\{x_i\}$  ed un tempo  $t$

misurato nel sistema ad essa solidale. Prendendo due istanti misurati nella galassia  $i$ -esima, la distanza tra di essi è:

$$d\tau^2 = g_{00} dt^2 + \cancel{dx_i^2} \quad \text{all'interno della stessa galassia, } dx_i = 0$$





Il sistema è **CO-MOVENTE**  $\Rightarrow$  fissiamo  $g_{00} = 1$ . Così:

$$d\tau^2 = dt^2$$

Consideriamo l'equazione geodetica per la galassia  $i$ -esima:

$$\cancel{\frac{d^2 x_i}{d\tau^2}} + \Gamma_{00}^i \frac{\partial x^0}{\partial \tau} \frac{\partial x^0}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{d^2 x_i}{d\tau^2} = 0 \quad (\text{siamo all'interno di una stessa galassia})$$

La geodetica implica dunque:  $\Gamma_{00}^i = 0$

Questo è un vincolo sul tensore metrico. Infatti:

$$0 = \Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{i\sigma} \left( 2 \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} \right) = \frac{1}{2} g^{i\sigma} \left( 2 \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial(1)}{\partial x^\sigma} \right) = g^{i\sigma} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}$$

Questa è una somma sugli indici  $\sigma = 0 \dots 3$ , ma il termine in  $g_{00}$  è lo derivato di una costante  $\Rightarrow$  è nullo. Ci limitiamo agli

indici spaziali, che chiamiamo  $J \equiv 1 \dots 3$ :

$$g^{iJ} \frac{\partial g_{J0}}{\partial x^0} = 0$$

In generale, se abbiamo una matrice  $M$  non singolare (invertibile) ed un vettore  $\vec{a}$ :

$$M_{iJ} a_J = 0 \Rightarrow M_{iJ} a_J [M^{-1}_{JK} a_K] = 0 \Rightarrow \delta^K_J a_J a_K = 0 \\ \Rightarrow a_K a_K = 0 \quad \forall K$$

Siamo in queste condizioni: la parte spaziale del tensore metrico è necessariamente invertibile. Ne risulta:

$$g^{iJ} \frac{\partial g_{J0}}{\partial x^0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial g_{J0}}{\partial x^0} = 0 \quad \forall J$$

Tutte le componenti spazio-temporali del tensore metrico sono **indipendenti dal tempo**. Se introduciamo le coordinate sferiche  $t, r, \theta$  e  $\varphi$ :

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \text{è composto da invarianti}$$



Infatti:

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \text{invariante} = r^2 dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

$$\vec{x} \cdot d\vec{x} = r dr = \text{invariante}$$

$dT^2$  dovrà allora dipendere dalle seguenti quantità invariante:

$$dt^2 \quad dr dt \quad dr^2 \quad r^2 d\Omega^2 = r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

Possiamo scrivere:

$$dT^2 \equiv dt^2 - A(r, t) dr dt - B(r, t) dr^2 - C(r, t) r^2 d\Omega^2$$

Questa è la forma più generale di un tensore metrico

o invariante per notazioni;

o tale che  $g_{00} = 1$ .

Abbiamo inoltre visto che le componenti spazio-temporali

del tensore metrico non devono dipendere esplicitamente

dal tempo:  $A(r, t) = A(r)$

### SETTING DELLO ZERO DEGLI OROLOGI

Dobbiamo fissare un tempo per tutte le galassie nel

riferimento co-movente:

$$\begin{cases} t' \equiv t + h(\vec{x}) \\ \vec{x}' \equiv \vec{x} \end{cases}$$

Vediamo come si trasformano le componenti spazio-temporali  $g_{0i}$  del tensore metrico.

$$g'_{0i} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^i} = g_{00} \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} \frac{\partial x^0}{\partial x'^i} + g_{0j} \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} + g_{j0} \frac{\partial x^j}{\partial x'^0} \frac{\partial x^0}{\partial x'^i} + g_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x'^0} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}$$

La legge di trasformazione  $t' = t + h(\vec{x})$  fissa:

$$x^0 = x'^0 - h(\vec{x})$$

$$\frac{\partial x^0}{\partial x'^0} = 1 \quad \frac{\partial x^0}{\partial x'^i} = - \frac{\partial h}{\partial x^i} = - \frac{\partial h}{\partial x^i}$$



Inoltre, dato che  $\vec{x}' = \vec{x}$ :

$$\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = \delta^j_i \quad \frac{\partial x^j}{\partial x'^0} = 0$$

(le componenti spaziali non dipendono dal tempo). Si ottiene:

$$g'_{0i} = -\frac{\partial h}{\partial x^i} + g_{0j} \delta^j_i = -\frac{\partial h}{\partial x^i} + g_{0i}$$

Quindi, "ri-settare gli orologi" significa fare una trasformazione in cui la componente spazio-temporale del tensore metrico è definita a meno della derivata spaziale di una funzione  $h$ . La funzione  $h$  è arbitraria - la scegliamo come:

$$h(r) \equiv -\int_0^r A(u) du$$

In tal modo:  $g'_{0i} = g_{0i} + A(r)$

Ma allora, se il tensore deve essere invariante, non resta che imporre  $A(r) = 0$ :

$$d\tau^2 = dt^2 - B(r,t)dr^2 - C(r,t)r^2 d\Omega^2$$

Abbiamo azzerato gli orologi in modo da disaccoppiare le componenti spaziali e temporali - Abbiamo introdotto l'isotropia, ma non l'omogeneità. Si dimostra che, per avere omogeneità, le funzioni  $B$  e  $C$  devono essere fattorizzabili:

$$B(r,t) \equiv a_1^2(t) B'(r) \quad C(r,t) \equiv a_2^2(t) C'(r)$$

Cioè, l'evoluzione in funzione del tempo non può dipendere dallo spazio (altrimenti l'universo non sarebbe omogeneo) - Si dimostra (non in questo corso) anche che:

$$a_1(t) = a_2(t) \equiv a(t)$$

Quindi:

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) [B'(r)dr^2 + C'(r)r^2 d\Omega^2]$$



N.B.: NON stiamo facendo una dimostrazione matematicamente rigorosa.

### Mettrica di Robertson-Walker

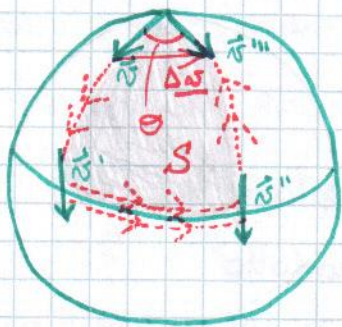
$$r' \equiv \sqrt{c'(r)} \cdot r$$

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) [f(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2]$$

$f(r)$  è la  $B'(r)$  opportunamente rinormalizzata. Questa è la mettrica nel sistema co-movente di un universo omogeneo.

In un universo a mettrica piatta si ha  $f(r) = 1 \forall r$ .

Ma la geometria dell'universo (come, del resto, quella della terra) potrebbe non essere piatta. C'è un metodo per capire se la superficie su cui ci troviamo è piatta o curva: il **TRASPORTO PARALLELO DI VETTORE**.



- Prendiamo un vettore  $\vec{n}$  parallelo al suolo al polo.
- Trasliamo  $\vec{n}$  fino all'equatore (lungo un meridiano), mantenendolo // al suolo.
- Sempre mantenendo  $\vec{n}$  // suolo, trasliamo

$\vec{n}$  lungo l'equatore.

- Ripostiamo  $\vec{n}$  al polo (lungo un altro meridiano), // al suolo.

Se la superficie non è piatta,  $\exists \Delta\vec{n} \neq 0$ .

Se chiamiamo  $S$  la superficie del "triangolo" descritto da  $\vec{n}$ ,

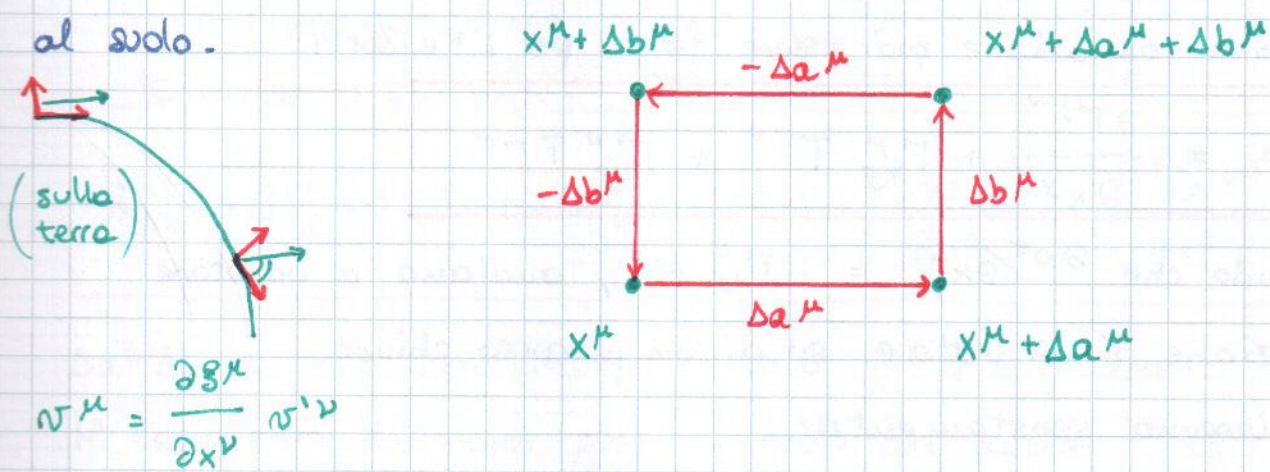
$$\Delta\vec{n} = \Theta \vec{n} = \frac{S}{r^2} \vec{n} \quad \text{con } r \text{ raggio di curvatura della superficie.}$$

Per una superficie piatta,  $r = \infty \wedge \Delta\vec{n} = \vec{0}$ . Stesso discorso vale per la superficie laterale di un cilindro.

Allo scopo di capire come deve essere fatta la funzione



$f(r)$  che compare nella metrica di Robertson-Walker, effettuiamo un trasporto parallelo di vettore in un sistema di riferimento arbitrario a 4 componenti. Partiamo da un s.d.r. fissato tramite il principio di equivalenza e spostiamoci parallelamente al volo.



$$\nu^\mu = \frac{\partial g^\mu}{\partial x^\nu} \nu'^\nu$$

$$d\nu^\mu = 0 \Rightarrow \frac{\partial g^\mu}{\partial x^\nu} d\nu'^\nu + \frac{\partial^2 g^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\rho} dx^\lambda \nu'^\rho = 0$$

Moltiplicando per  $\frac{\partial x^\sigma}{\partial g^\mu}$ :

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial g^\mu} \frac{\partial g^\mu}{\partial x^\nu} d\nu'^\nu + \frac{\partial x^\sigma}{\partial g^\mu} \frac{\partial^2 g^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\rho} dx^\lambda \nu'^\rho = 0$$

da cui:

$$d\nu'^\sigma + \Gamma_{\lambda\rho}^\sigma dx'^\lambda \nu'^\rho = 0 \Rightarrow d\nu'^\sigma = -\Gamma_{\lambda\rho}^\sigma dx'^\lambda \nu'^\rho$$

La variazione che si osserva, come nel caso della terra, è dovuta allo spostamento del sistema di riferimento.

Definiamo:

**Differenziale totale**

$$D\nu^\sigma \equiv d\nu^\sigma + \Gamma_{\lambda\rho}^\sigma dx^\lambda \nu^\rho$$

È una derivata covariante (un 4-vettore eotrovariante) -

Fatto rispetto ad una qualsiasi linea  $s$ , si ha:

$$\frac{D\nu^\sigma}{ds} = \frac{\partial \nu^\sigma}{\partial s} + \Gamma_{\lambda\rho}^\sigma \frac{\partial x^\lambda}{\partial s} \nu^\rho$$

Quindi:



## Derivata parziale

$$\frac{\partial v^\sigma}{\partial x^\nu} \equiv \nabla^\sigma_\nu; \nu = \frac{\partial v^\sigma}{\partial x^\nu} + \Gamma^\sigma_{\nu\rho} v^\rho$$

Questo è uno derivato che si trasforma "bene", in modo covariante.

La stessa operazione può essere fatta per i tensori:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\rho} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} T^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu_{\sigma\rho} T^{\mu\sigma}$$

Ricordando che  $\frac{\partial v^\sigma}{\partial x^\nu} = -\Gamma^\sigma_{\nu\rho} v^\rho$ , andiamo a valutare

la variazione di un vettore su di un percorso chiuso lungo ciascuno spostamento:

$$\begin{aligned} \delta v^\mu &= -\Gamma^\mu_{\rho\nu}(x) \Delta a^\rho v^\nu(x) - \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x+\Delta a) \Delta b^\rho v^\nu(x+\Delta a) + \\ &+ \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x+\Delta b) \Delta a^\rho v^\nu(x+\Delta b) + \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x) \Delta b^\rho v^\nu(x) \\ &= \Delta a^\rho \left[ \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x+\Delta b) v^\nu(x+\Delta b) - \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x) v^\nu(x) \right] \\ &- \Delta b^\rho \left[ \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x+\Delta a) v^\nu(x+\Delta a) - \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x) v^\nu(x) \right] \end{aligned}$$

Per  $\Delta b, \Delta a$  molto piccoli, espandiamo al 1° ordine:

$$\begin{aligned} \delta v^\mu &\approx \Delta a^\rho \left[ \left( \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x) + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x)}{\partial x^\sigma} \Delta b^\sigma \right) \left( v^\nu(x) + \frac{\partial v^\nu(x)}{\partial x^\rho} \Delta b^\rho \right) \right] \\ &- \Delta b^\rho \left[ \left( \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x) + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x)}{\partial x^\sigma} \Delta a^\sigma \right) \left( v^\nu(x) + \frac{\partial v^\nu(x)}{\partial x^\rho} \Delta a^\rho \right) - \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x) v^\nu(x) \right] \\ &= \Delta a^\rho \left[ \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x) \frac{\partial v^\nu(x)}{\partial x^\rho} \Delta b^\rho + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x)}{\partial x^\sigma} v^\nu(x) \Delta b^\sigma \right] \\ &- \Delta b^\rho \left[ \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x) \frac{\partial v^\nu(x)}{\partial x^\rho} \Delta a^\rho + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x)}{\partial x^\sigma} v^\nu(x) \Delta a^\sigma \right] \\ &= \Delta a^\rho \Delta b^\sigma \left[ \left( \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x) \frac{\partial v^\nu(x)}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x)}{\partial x^\sigma} v^\nu(x) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \Gamma^\mu_{\sigma\nu}(x) \frac{\partial v^\nu(x)}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\sigma\nu}(x)}{\partial x^\rho} v^\nu(x) \right) \right] \end{aligned}$$

avendo ommesso termini del 2° ordine ed avendo opportunamente



cambiato indici ripetuti. Procediamo con la trasformazione, usando  $\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\sigma} = -\Gamma_{\sigma\beta}^\nu v^\beta$ :

$$\delta v^\mu \approx \Delta a^\alpha \Delta b^\sigma \left[ -\Gamma_{\beta\nu}^\mu(x) \Gamma_{\sigma\beta}^\nu(x) + \frac{\partial \Gamma_{\beta\sigma}^\mu(x)}{\partial x^\sigma} \right] - \left[ -\Gamma_{\sigma\nu}^\mu(x) \Gamma_{\beta\sigma}^\nu(x) + \frac{\partial \Gamma_{\beta\sigma}^\mu(x)}{\partial x^\beta} \right] v^\sigma$$

$$\equiv R_{\beta\sigma\alpha}^\mu \Delta a^\alpha \Delta b^\sigma v^\sigma$$

### TENSORE DI RIEMANN

$$R_{\beta\sigma\alpha}^\mu = \Gamma_{\sigma\nu}^\mu(x) \Gamma_{\beta\sigma}^\nu(x) - \Gamma_{\beta\nu}^\mu(x) \Gamma_{\sigma\beta}^\nu(x) + \frac{\partial \Gamma_{\beta\sigma}^\mu(x)}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma_{\sigma\beta}^\mu(x)}{\partial x^\beta}$$

$\Delta a^\alpha \Delta b^\sigma$  è una superficie orientata in 4 dimensioni. Il tensore di Riemann gioca il ruolo che aveva  $\frac{1}{r^2}$  nel caso della superficie terrestre:  $R_{\beta\sigma\alpha}^\mu$  definisce la geometria del riferimento.

Il tensore di Riemann gode delle proprietà:

- SIMMETRIA:  $R_{(\lambda\mu)(\nu\rho)} = R_{(\nu\rho)(\lambda\mu)}$
- ANTISIMMETRIA:  $R_{(\lambda\mu)(\nu\rho)} = -R_{(\mu\lambda)(\nu\rho)} = R_{(\mu\lambda)(\rho\nu)} = -R_{(\lambda\mu)(\rho\nu)}$
- $R_{\tau\rho\sigma\beta} = g_{\tau\mu} R_{\beta\sigma\alpha}^\mu$
- CICLICITÀ:  $R_{\lambda(\mu\nu\sigma)} + R_{\lambda(\sigma\mu\nu)} + R_{\lambda(\nu\sigma\mu)} = 0$
- IDENTITÀ DI BIANCHI:

$$R_{\lambda\mu(\nu\sigma;\eta)} + R_{\lambda\mu(\eta\nu;\sigma)} + R_{\lambda\mu(\sigma\nu;\eta)} = 0$$

Valuteremo un caso a 2 dimensioni: la metrica

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [f(r) d\Omega^2 + r^2 d\Omega^2]$$

a  $t$  e  $\Theta$  fissati. Il trasporto parallelo ci sarà utile per ricavare l'espressione di  $f(r)$  da questo caso bidimensionale.



$$R_{\sigma\rho}^{\mu\nu} = \left( \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} \Gamma_{\rho\rho}^{\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^{\mu} \Gamma_{\sigma\rho}^{\nu} \right) + \frac{\partial \Gamma_{\rho\rho}^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial \Gamma_{\sigma\rho}^{\mu}}{\partial x^{\rho}}$$

$$R_{\tau\rho\sigma\rho} = g_{\tau\mu} R_{\sigma\rho}^{\mu\nu}$$

Ogni indice assume 4 valori. Cosa succede in uno spazio bidimensionale?

$$R_{1111} = -R_{1111} \quad (\text{antisimmetria})$$

$$R_{1111} = 0$$

$$R_{1122} = 0$$

Se gli indici hanno solo due valori il numero di componenti diverse da 0 è molto piccolo.

$$0 \neq R_{1212} = -R_{2112} = R_{2121} = -R_{1221}$$

È una sola componente diversa da 0, e le sue permutazioni antisimmetriche. In 2 dimensioni posso quindi scrivere:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{g_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu}}{\det(g)} R_{1212}$$

Il fattore moltiplicativo specifica il segno.

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{g_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu}}{g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}} R_{1212}$$

Questo è un tensore a 4 indici. In realtà me ne bastano 2:

**Tensore di Ricci:**

$$R_{\mu\kappa} \equiv g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}$$

Nel caso bidimensionale questo vale:

$$R_{\mu\kappa} = \frac{g^{\lambda\nu} g_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} - g^{\lambda\nu} g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu}}{g} R_{1212}$$

avendo definito  $g \equiv g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}$ .

$$R_{\mu\kappa} = \frac{2g_{\mu\kappa} - g_{\mu\kappa}}{g} R_{1212} = \frac{g_{\mu\kappa}}{g} R_{1212}$$



In 2 dimensioni  $R_{\mu\nu}$  è  $\propto$  al tensore metrico.

Definisco:

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{2 R_{1212}}{g}$$

Curvatura

$$k \equiv -\frac{R}{2}$$

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) (f(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2)$$

$$d\Omega^2 = \sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2$$

Se ci mettiamo a  $t \equiv \bar{t}$  e  $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$  possiamo facilmente calcolare la curvatura  $R$ .  $R$  è un invariante ed il principio cosmologico dice che è costante.

Applicando questo, vedremo come è fatta  $f(r)$  per questa metrica.

$$g_{ij} = - \begin{pmatrix} f(r) & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (r) \\ (\varphi) \end{matrix} \left( a^2(t) \equiv 1 \Rightarrow d\tau^2 = -f(r)dr^2 - r^2d\varphi^2 \right)$$

N.B.: Se lo spazio è curvo, non è detto che  $dr^2$  sia un intervallo di lunghezza.

Dobbiamo calcolare  $R_{1212}$ .

$$R_{1212} = g_{12} R_{212}^i$$

Ma siccome il tensore metrico è diagonale:

$$= g_{11} R_{212}^{11}$$

$$R_{1212} = g_{11} \left[ \Gamma_{1i}^1 \Gamma_{22}^i - \Gamma_{2i}^1 \Gamma_{12}^i + \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x^2} \right] =$$

$$= g_{11} \left[ \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x^2} \right]$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} g^{1i} \left( \frac{\partial g_{2i}^1}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^i} \right) = 0$$

$g$  è diagonale  $\Rightarrow$   
 $i \equiv 1$

Rimane:

$$R_{1212} = g_{11} \left[ \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} \right]$$



$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{1i} \left( 2 \frac{\partial g_{i2}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^i} \right) = -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

Abbiamo scritto  $g_{ij}$  in forma covariante. L'inversa contravariante ha gli elem. elevati alla -1.

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{f(r)} \frac{\partial r^2}{\partial r} = -\frac{1}{2} \frac{2r}{f(r)} = -\frac{r}{f(r)}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial r} = -\frac{1}{f(r)} + \frac{r}{f^2(r)} + \frac{\partial f(r)}{\partial r} = \frac{f'(r)}{f^2(r)} - \frac{1}{f(r)}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{1i} \left( 2 \frac{\partial g_{i1}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = \frac{1}{2} f(r) \frac{\partial f(r)}{\partial r}$$

N.B.: stiamo usando  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \varphi$ .

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{2i} \left( \frac{\partial g_{i2}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} \right) \stackrel{i=2}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} 2r = \frac{1}{r}$$

Possiamo ora calcolare  $R_{1212}$ .

$$R_{1212} = -f(r) \left[ -\frac{r}{f(r)} \left( \frac{f'(r)}{2f(r)} - \frac{1}{r} \right) + \frac{f'(r)}{f^2(r)} - \frac{1}{f(r)} \right]$$

Stiamo usando la notazione  $f'(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r}$ .

$$R_{1212} = -f(r) \left[ -\frac{r f'}{2f^2} + \frac{1}{f} + \frac{r f'}{f^2} - \frac{1}{f} \right] = -\frac{f'(r) r}{2f(r)}$$

Allora:

$$k = -\frac{R_{1212}}{g} = \frac{f'(r) r}{2f(r) \cdot f(r) r^2} = \frac{f'(r)}{2f^2(r) r}$$

Questa curvatura è la stessa  $\forall$  galassia  $\forall$  s.d.r.

La funzione che risolve questa equazione è:

$$f(r) = \frac{1}{1 - kr^2}$$

Infatti:

$$\frac{2kr}{2(1-kr^2)^2 r} (1-kr^2)^2 = k \quad \text{erd.}$$



La metrica di Robertson-Walker assume la forma:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

Abbiamo assunto solo il principio cosmologico e che B e C fossero factorizzabili.

Caso particolare: universo a curvatura positiva.

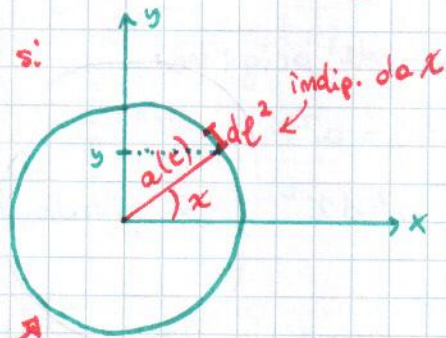
Le galassie si

trovano su

questa

superficie

sferica



$$dl^2 = a^2 dt^2 = dx^2 + dy^2$$

Se l'universo si sta espandendo, vuol dire che il raggio aumenta nel tempo.

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$2x dx + 2y dy = 0$$

$$dx = -\frac{y}{x} dy \Rightarrow dl^2 = \frac{y^2}{x^2} dy^2 + dy^2 = dy^2 \frac{a^2}{x^2} = dy^2 \frac{a^2}{-y^2 + a^2}$$

Divido sopra e sotto per  $a^2$ :

$$dl^2 = \frac{a^2 dy^2/a^2}{1 - y^2/a^2}$$

Se come coordinato co-movente definisco  $r \equiv \frac{y}{a} = \sin \chi$ , questa rappresenta la galassia indipendentemente dal tempo.

$$dl^2 = \frac{a^2 dr^2}{1-r^2}$$

CASO CON  $k > 0$

Se  $k$  è positivo, posso fare la sostituzione:

$$kr^2 = r'^2 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{k} r'^2, \quad dr^2 = \frac{1}{k} dr'^2$$

$$\Rightarrow ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr'^2}{1-r'^2} + r'^2 d\Omega^2 \right]$$

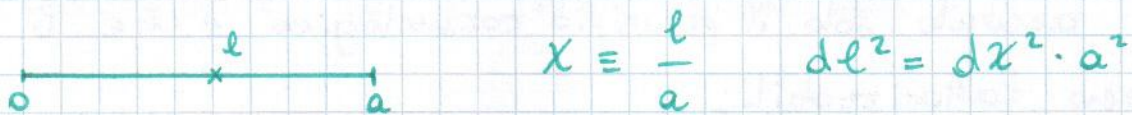
Caso particolare: CURVATURA NULLA  $\rightarrow ds^2 = dt^2 - a^2(t) [dr'^2 + r'^2 d\Omega^2]$

Caso particolare: CURVATURA NEGATIVA:

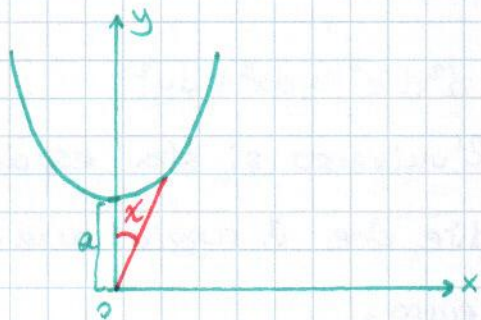
$$k < 0 \Rightarrow ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr'^2}{1+r'^2} + r'^2 d\Omega^2 \right]$$



Mettiamoci in un caso ancora unidimensionale. Se la curvatura è nulla, cosa posso usare come coordinate co-movente (che resta fissa al variare di  $a$ )?  $l/a$ .



Vediamo la curvatura negativa.



Vicino all'origine:

$$y^2 - x^2 = a^2$$

$$dl^2 = a^2 dx^2 \quad (x \text{ piccolo})$$

$$x = a \sinh \chi$$

$$y = a \cosh \chi$$

Diffenziando:

$$dx = a \cosh \chi d\chi = y d\chi$$

$$dy = a \sinh \chi d\chi = x d\chi$$

$$dx^2 - dy^2 = y^2 d\chi^2 - x^2 d\chi^2 = a^2 d\chi^2 = dl^2$$

(Stiamo facendo su un'iperbole la stessa cosa che abbiamo fatto sulla sfera). Diffenziando  $y^2 - x^2 = a^2$ :

$$2y dy - 2x dx = 0 \Rightarrow dy = \frac{x}{y} dx$$

$$\Rightarrow dl^2 = dx^2 - \frac{x^2}{y^2} dx^2 = dx^2 \left( \frac{y^2 - x^2}{y^2} \right) = \frac{a^2 dx^2}{a^2 + x^2} = a^2 \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

La coordinata co-movente è  $r \equiv \frac{x}{a} = \sinh \chi$ .

Per studiare l'universo occorre ancora conoscere  $a(t)$  e

$k$ . Come sono determinati dalla distribuzione della materia (che è in movimento) all'interno dell'universo?

Come descrivere il moto delle particelle dell'universo?

Dovrò descriverlo come un fluido che in ciascun punto avrà una certa  $E$  ed un certo  $\vec{P}$ .



Prima definiamo questo fluido in relatività ristretta, e poi generalizziamo alla relatività generale.

### Analogo elettromagnetico

La densità di carica è data da:

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

La densità di corrente:

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \sum_n e_n \frac{d\vec{x}_n(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$



Definisco:

$$J^\mu(x, t) \equiv \int dt' \sum_n e_n \frac{dx_n^\mu(t')}{dt'} \delta^4(x^\mu - x_n^\mu(t'))$$

Se come variabile d'integrazione utilizzo il tempo proprio  $\tau$  questo resta un "buon" quadrivettore:

$$J^\mu(x, t) = \int d\tau \sum_n e_n \frac{dx_n^\mu(\tau)}{d\tau} \delta^4(x^\mu - x_n^\mu(\tau))$$

$\nearrow$  4-vettore  
 $\nearrow$  4-vettore  
 $\nearrow$  invariante  
 invariante

$\rho(\vec{x}, t)$  è la componente 0 di un quadrivettore - Se lo moltiplico per un 4-vettore  $P^\alpha$  ottengo la componente  $(\alpha, 0)$  di un tensore:

$$\sum_n P_n^\alpha(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \equiv T^{\alpha 0}(x)$$

Le componenti  $(\alpha, i)$  sono date da:

$$\sum_n P_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \equiv T^{\alpha i}(x)$$

Posso scrivere:

### Tensore Energia - Impulso

$$T^{\alpha\mu}(x) = \sum_n P_n^\alpha(t) \frac{dx_n^\mu(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$