

Sappiamo che:  $P^\mu = E \frac{dx^\mu}{dt}$  - Posso quindi scrivere, in forma piú compatta:

$$T^{\alpha\mu}(x) = \sum_n \frac{P_n^\alpha(t) P_n^\mu(t)}{E_n} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

- $T^{\alpha\mu}$  è SIMMETRICO
- $\nexists$  forze esterne  $\Rightarrow \partial_\mu T^{\alpha\mu} = 0$

Teorema  $\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$

Dim.

$$\frac{\partial T^{\alpha i}}{\partial x^i} = \sum_n P_n^\alpha(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{dx_n^i(t)}{dt}$$

Per fare la derivata della  $\delta$ :

$$\frac{\partial f(x-y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x-y)}{\partial(x-y)} \frac{\partial(x-y)}{\partial y} = - \frac{\partial f(x-y)}{\partial(x-y)}$$

$$\frac{\partial T^{\alpha i}}{\partial x^i} = - \sum_n P_n^\alpha(t) \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{dx_n^i(t)}{dt} =$$

$$= - \sum_n P_n^\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial t} T^{d0} + \underbrace{\sum_n \frac{dP_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))}_{\text{Somma delle forze esterne} \equiv 0}$$

Somma delle forze esterne  $\equiv 0$

$$\frac{\partial T^{\alpha i}}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial t} T^{d0} = 0 \quad \text{c.v.d.}$$

10/05 e 11/05 non c'è lezione.

Dopo aver trovato uno metrizza soddisfacente, facciamo il limite al continuo.

$$T^{\mu\nu}(x) = \sum_n \frac{p_n^\mu(t) p_n^\nu(t)}{E_n(t)} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

Questa è vera sempre. Nel caso di sistema isolato (come è l'universo), vale:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\mu} = 0$$

La componente 0,0 è una **densità di energia**:

$$T^{00} = \sum_n E_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

**Applicazione del principio cosmologico**

$T^{00}$  è costante ed ha lo stesso valore  $\forall x$ .

$$T^{00} \equiv \rho$$

$$T^{0i} = \sum_n p_n^i(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

**Applicazione del principio cosmologico**

$\langle p_i \rangle = 0$  (isotropia)  $\Rightarrow T^{0i} = 0 \quad \forall x$

Rimangono solo le componenti  $T^{ij}$  - fissata un'energia:

$$T^{ij}(x) = \sum_n \frac{p_n^i p_n^j}{E_n} \delta^3 \propto \langle p^i p^j \rangle \delta^3$$

Se non c'è viscosità le componenti  $i$  e  $j$  dell'impulso sono scorrelate:

$$\langle p^i p^j \rangle = \langle p^i \rangle \langle p^j \rangle = 0 \quad \text{per } i \neq j$$

Restano solo le componenti  $T^{11}, T^{22}, T^{33}$ , che devono essere uguali e non dipendere dalla posizione (non può  $\exists$  una direzione privilegiata):

$$T^{ij}(x) = \rho(\tau) \delta^i_j$$

Quindi:

$$\begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} = T^{\mu\nu}$$

$$T^{11} = T^{22} = T^{33} \equiv \rho \Rightarrow \rho = \frac{1}{3} (T^{11} + T^{22} + T^{33})$$

$$\rho = \frac{1}{3} \sum_n \frac{p_n^2}{E_n} \delta^3$$

$$p = \sum_n E_n \delta^3$$

Dimensionalmente,  $\rho$  ha le dimensioni di una **pressione**.

Approssimazione non relativistica:  $p_n \ll E_n$ .

Approssimazione relativistica:  $p = \rho/3$ .

Questa è una sorta di equazione di stato.

Abbiamo scritto  $T^{\mu\nu}$  in un universo isotropo ed omogeneo.

Vogliamo ora tradurlo in un tensore di Lorentz.

Scriviamo  $T^{\mu\nu}$  in modo covariante in un s.d.r.

in moto con velocità  $\vec{v}$  rispetto al nostro:

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dt} \quad \eta^{\mu\nu} \quad \vec{v}$$

$$T^{\mu\nu} = \alpha u^\mu u^\nu + \beta \eta^{\mu\nu}$$

Per determinare  $\alpha$  e  $\beta$  faccio il limite per  $\vec{v} \rightarrow 0$  e

confronto con l'espressione di  $T^{\mu\nu}$  nel s.d.r. del

principio cosmologico.

$$u^\mu = (\gamma, \gamma \vec{v}) \xrightarrow{\vec{v} \rightarrow 0} (1, \vec{0})$$

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt}$$

$$\begin{cases} T^{00} \xrightarrow{\vec{v} \rightarrow 0} \alpha + \beta \equiv \rho \\ T^{0i} \xrightarrow{\vec{v} \rightarrow 0} 0 \\ T^{ij} \xrightarrow{\vec{v} \rightarrow 0} -\beta \delta_{ij} \equiv \rho \delta_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \rho + \beta \\ \beta = -\rho \end{cases}$$

Quindi:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu - p \eta^{\mu\nu}$$

Tensore energia-impulso in forma covariante

e in tutto l'universo vale

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$$

Abbiamo usato la relatività ristretta (cioè un s.d.r. inerziale a  $\vec{v}$  costante). Per passare in relatività sostituisco il tensore metrico  $\eta^{\mu\nu}$  con  $g^{\mu\nu}$  e lo derivato con la derivata covariante.

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

Queste equazioni identificano un universo isotropo, omogeneo e non viscoso, e valgono in qualunque sistema di riferimento.

$T^{\mu\nu}$  descrive materia e radiazione; le proprietà geometriche locali dell'universo sono date da  $g^{\mu\nu}$  e dal tensore di Riemann.

Vogliamo arrivare all'equazione di Einstein. Essa è in realtà una congettura. Vogliamo costruire, con  $R^{\mu\nu}$  e  $g^{\mu\nu}$ , un oggetto a derivata covariante nulla da mettere in relazione con  $T^{\mu\nu}$ .

Identità di Bianchi:

$$g^{\lambda\nu} R_{\lambda(\mu;\nu)\rho} + g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\rho;\sigma} + g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu(\sigma\nu;\rho)} = 0$$

$$R_{\mu\nu;\rho} - R_{\mu\rho;\nu} + R^\sigma_{\mu\nu;\rho} = 0$$

Contraggo ancora con  $g^{\mu\rho}$ :

$$R_{; \eta} - R^{\rho}{}_{\eta ; \rho} - R^{\nu}{}_{\eta ; \nu} = 0$$

questo è nullo solo nella nostra metrica, vogliamo scrivere un'equazione molto più generale.

$$R_{; \eta} - 2R^{\rho}{}_{\eta ; \rho} = 0$$

Voglio portare fuori la derivata, cioè averla rispetto ad un indice sommato:

$$(\delta^{\rho\eta} R - 2R^{\rho}{}_{\eta})_{; \rho} = 0$$

$$g^{\alpha\eta} (\delta^{\rho\eta} R - 2R^{\rho}{}_{\eta})_{; \rho} = 0$$

$$(g^{\alpha\rho} R - 2R^{\rho\alpha})_{; \rho} = 0$$

Ma anche:

$$(R^{\rho\alpha} - \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} R)_{; \rho} = 0$$

ovvero, questo tensore ha 4-divergenza nulla.

L'equazione più banale che posso provare è:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \text{cost.} \cdot T^{\mu\nu}$$

Verifichiamo se è vera, e quanto vale la costante, in un s.d.r. "semplice". N.B.:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^{\mu} u^{\nu} - p g^{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} [(\rho + p) u^{\alpha} u^{\beta} - p g^{\alpha\beta}] = (\rho + p) u_{\mu} u_{\nu} - p g_{\mu\nu}$$

Posso riscrivere anche l'equazione di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \propto T_{\mu\nu}$$

Se ci mettiamo nel caso non relativistico:

$$T^{ij} = \sum_n \frac{p_n^i p_n^j}{E_n} \delta^3 \Rightarrow |T^{ij}| \ll |T^{00}|$$

In questo limite:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 0 \quad (v \ll c)$$

$$R_{ij} = \frac{1}{2} g_{ij} R \quad (v \ll c)$$

Se inoltre i campi sono deboli:  $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$   
con  $h^{\mu\nu}$  piccolo. Sviluppiamo al primo ordine:

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \eta_{ij} R = -\frac{1}{2} \delta_{ij} R \quad (v \ll c, \text{ campo debole})$$

Questo deriva dall'equazione di Einstein. Ma è tuttavia vero che:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{00} - R_{ii} \quad (v \ll c, \text{ campo debole})$$

$$= R_{00} + \frac{3}{2} R$$

$$\text{Quindi: } -\frac{1}{2} R = R_{00} \quad (v \ll c, \text{ campo debole})$$

Prendiamo ora la parte temporale dell'eq. di Einstein: nelle stesse condizioni,

$$R_{00} - \frac{R}{2} = \text{cost.} \cdot T^{00} = \text{cost.} \cdot \rho$$

$$\text{Quindi: } 2R_{00} = \text{cost.} \cdot T^{00} \Rightarrow \text{cost.} = \frac{2R_{00}}{\rho}$$

Abbiamo visto che a velocità piccole rispetto a c

$$g_{00} = 1 + 2\phi$$

$$\text{Per definizione: } R_{00} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda 0 \nu 0}$$

Nel caso di campo debole (metrica piatta):

$$R_{00} = \eta^{\lambda\nu} R_{\lambda 0 \nu 0} = R_{0000} - R_{i0i0} = -R_{i0i0} \quad (\text{proprietà di antisimmetria})$$

La costante sarà allora uguale a  $-\frac{2R_{i0i0}}{\rho}$ .

Calcoliamo  $R_{i0i0}$ .

$$R_{\tau\rho\sigma\beta} = g_{\tau\mu} R^{\mu\sigma\rho\beta} = g_{\tau\mu} \left[ (\Gamma^{\mu\sigma}_{\nu\tau} \Gamma^{\nu\rho}_{\sigma\beta} - \Gamma^{\mu\rho}_{\nu\tau} \Gamma^{\nu\sigma}_{\sigma\beta}) + \frac{\partial \Gamma^{\mu\sigma}_{\rho\tau}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^{\mu\rho}_{\sigma\tau}}{\partial x^\sigma} \right]$$

Imponiamo ora le varie condizioni di debolezza. Vedremo che i termini in  $\Gamma$  sono infinitesimi di ordine superiore alle derivate, e li trascureremo.

$$\Gamma \sim g \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \Rightarrow \Gamma \Gamma \sim \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} \sim \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1+h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] \sim \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial h}{\partial x} \right]$$

$$\sim \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

Qual è l'ordine più piccolo?

$$h = 2\phi \Rightarrow h = O\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right) = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} = O\left(\frac{1}{r^3}\right); \quad \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)^2 = O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

Tutti i termini sono trascurabili rispetto a  $\frac{\partial \Gamma}{\partial x}$ .

$$R_{i0i0} = g_{ij\mu} \left[ \frac{\partial \Gamma_{00}^{\mu\mu}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{i0}^{\mu\mu}}{\partial x^0} \right]$$

Il secondo termine è nullo perché il campo è statico.

$$g_{ij\mu} \approx \eta_{ij\mu} = -\delta_{ij\mu}$$

$$R_{i0i0} = - \frac{\partial \Gamma_{00}^{ii}}{\partial x^i} \quad \text{campo statico}$$

$$\Gamma_{00}^{ii} = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left( 2 \frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} \right) = -\frac{g^{i\alpha}}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} \approx \frac{1}{2} \delta^{i\alpha} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}$$

Quindi:

$$g_{00} = 2\phi + 1 \quad \Gamma_{00}^{ii} = \frac{2}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

$$R_{i0i0} = - \sum_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^{i2}} = -\nabla^2 \phi$$

La costante è uguale a  $2 \frac{\nabla^2 \phi}{\rho}$ . Vediamo quanto vale.

$$\phi = -\frac{GM}{r}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{G}{r^2} M$$

Se siamo dentro una stella:

$$r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} = \int_0^r G \rho 4\pi r'^2 dr'$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = G \rho 4\pi r^2$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \rho G 4\pi$$

$\Rightarrow$  la costante vale  $8\pi G$ .

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

112 Queste sono 16 equazioni. Ma c'è un altro termine

a quadridivergenza nulla che ci posso sommare:

$$g^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \quad *$$

Posso quindi scrivere:

$$-\Lambda g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \right) \equiv T'_{\mu\nu}$$

$$T'_{\mu\nu} = (\rho + p) u_{\mu} u_{\nu} - p g_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}$$

Vediamo che effetti ha  $\Lambda$  su una metrica piatta:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$$

$$T'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p - \frac{\Lambda}{8\pi G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p - \frac{\Lambda}{8\pi G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p - \frac{\Lambda}{8\pi G} \end{pmatrix}$$

$\Lambda$  si somma all'energia e si sottrae alla pressione (o viceversa, se  $\Lambda < 0$ ).

Definiamo:

$$\rho_T \equiv \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} ; \quad p_T \equiv p - \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

Vedremo che solo le soluzioni di Einstein con  $\Lambda \neq 0$  producono un universo stazionario  $\Rightarrow$  lui introdusse la costante cosmologica  $\Lambda$  per questo motivo -

Poi Hubble pubblicò le misure che dimostravano la non stazionarietà dell'universo.

Risoluiamo ora l'equazione di Einstein mettendo dentro il tensore metrico  $g^{\mu\nu}$  -

$$g^{\mu\rho} [DA_{\rho}] = DA^{\mu} = D[g^{\mu\rho} A_{\rho}] = (Dg^{\mu\rho}) A_{\rho} + g^{\mu\rho} (DA_{\rho})$$
$$\Rightarrow (Dg^{\mu\rho}) A_{\rho} = 0 \Rightarrow Dg^{\mu\rho} = 0 \quad *$$



$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)r^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} t \\ r \\ \varphi \\ \theta \end{matrix}$$

Vedremo che solo due delle 16 eq. sono indipendenti, e sono scalari.

04/05/2012

Controlliamo l'eq. di Einstein con  $g^{\mu\nu}$ :

$$g^{\mu\nu} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) = 8\pi G g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

$$R - 2R = 8\pi G T^{\nu}_{\nu} \quad -R = 8\pi G T_{\mu}{}^{\mu}$$

Posso quindi riscrivere l'equazione di Einstein come:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\nu}_{\nu})$$

Andiamo per componenti.

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\nu}_{\nu}$$

Calcoliamo  $R_{00}$ ,  $R_{11}$ ,  $S_{00}$ ,  $S_{11}$ .

$$T^{\nu}_{\nu} = (s+p)u^{\nu}u_{\nu} - g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}p = (s+p)u^{\nu}u_{\nu} - 4p$$

Nel s.d.r. comovente la velocità è nulla in ogni punto:

$$u = (1, 0, 0, 0) \Rightarrow u^{\nu}u_{\nu} = 1$$

$$T^{\nu}_{\nu} = (s+p) - 4p = s-3p$$

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\nu}_{\nu} = (s+p)u_{\mu}u_{\nu} - g_{\mu\nu}p - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (s-3p) \\ &= (s+p)u_{\mu}u_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (2p + s - 3p) = (s+p)u_{\mu}u_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (s-p) \end{aligned}$$

Quindi:

$$S_{00} = (s+p) - \frac{1}{2} (s-p)$$

In fatti la componente 0,0 di  $g_{\mu\nu}$  vale 1: la metrica di R-W per il s.d.r. comovente è

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2) \right] = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{matrix} t \\ r \\ \theta \\ \varphi \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{(nel sistema} \\ \text{comovente)} \end{matrix}$$

$$g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$$

Quindi:

$$S_{00} = \frac{1}{2} (\rho + 3p)$$

$$R_{00} = \frac{8\pi G}{2} (\rho + 3p)$$

$$S_{11} = 0 + \frac{1}{2} \frac{a^2(t)}{1-kr^2} (\rho - p)$$

$$R_{11} = \frac{8\pi G}{2} \frac{a^2(t)}{1-kr^2} (\rho - p)$$

Calcoliamo  $R_{00}$ . Enunceremo solamente  $R_{11}$  e gli altri.

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\nu\sigma} = R^{\lambda\sigma}{}_{\mu\nu}$$

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu} \Gamma^{\rho}{}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu} \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\sigma} + \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\sigma}}{\partial x^{\rho}}$$

Quali sono le componenti  $\neq 0$  della connessione metrica?

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left( \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right)$$

$$\Gamma^{00}{}_{00} = \frac{1}{2} g^{00} \left( \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right) = 0$$

... è diagonale  $\Rightarrow$  delle  $g^{0i}$  solo  $g^{00} \neq 0$

$$\Gamma^{00}{}_{0i} = \frac{1}{2} g^{00} \left( \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2} g^{00} \left( \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} \right)$$

$$\Gamma^{i0}{}_{00} = \Gamma^{00}{}_{0i}$$

$$\Gamma^{i0}{}_{00} = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left( 2 \frac{\partial g_{\alpha 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\alpha}} \right) = \frac{1}{2} g^{i0} \left( 2 \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right) = 0$$

Se due indici sono = 0,  $\Gamma = 0$

Vediamo allora  $\Gamma^0{}_{ij}$ .

$$\Gamma^0{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{00} \left( \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0}$$

$g_{ij}$  dipende dal tempo attraverso il **fattore di inflazione  $a(t)$** .

$$g_{ij}(t) = a^2(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \equiv a^2(t) \tilde{g}_{ij}$$

con  $\tilde{g}_{ij}$  indipendente dal tempo.

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} = -\frac{1}{2} 2a\dot{a} \tilde{g}_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{2a(t)\dot{a}(t) g_{ij}(t)}{a^2(t)}$$

$$= -\frac{\dot{a}}{a} g_{ij}$$

$$\Gamma_{j0}^i = \frac{1}{2} g^{ik} \left( \frac{\partial g_{k0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial g_{kj}}{\partial t} =$$

$$= \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial a^2(t)}{\partial t} \tilde{g}_{kj} = \frac{1}{2} g^{ik} 2a\dot{a} \frac{1}{a^2} g_{kj} = \delta_j^i \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\Gamma_{j0}^i = \Gamma_{0j}^i = \delta_j^i \frac{\dot{a}}{a}$$

Rimane da calcolare  $\Gamma_{ik}^j$  - Ma non lo facciamo.

Passiamo al calcolo di  $R_{00}$ .

$$R_{00} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda 0 \nu 0} = R^{\nu 0 \nu 0}$$

$$R^{\mu 0 0 0} = \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} \Gamma_{00}^{\nu} - \Gamma_{0\nu}^{\mu} \Gamma_{00}^{\nu} + \frac{\partial \Gamma_{00}^{\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma_{00}^{\mu}}{\partial x^0}$$

Quindi, imponendo  $\sigma \equiv \mu$ :

$$R^{\mu 0 \mu 0} = -\Gamma_{0\nu}^{\mu} \Gamma_{\mu 0}^{\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu 0}^{\mu}}{\partial x^0} = -\Gamma_{0j}^i \Gamma_{i0}^j - \frac{\partial \Gamma_{i0}^i}{\partial x^0}$$

$$= -\delta_i^i \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial t} \left( \delta_i^i \frac{\dot{a}}{a} \right) =$$

$$= -3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial t} \left( 3 \frac{\dot{a}}{a} \right) = -3 \frac{\dot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}}{a} + 3 \frac{\ddot{a}}{a^2} =$$

$$= -3 \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] = -3 \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}$$

Enunciamo  $R_{11}$  senza calcolarlo:

$$R_{11} = (2k + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) (-\tilde{g}_{11})$$

In generale:

$$R_{ij} = (2k + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \cdot (-\tilde{g}_{ij})$$

L'equazione di Einstein si spezza quindi nelle due equazioni scalari:

$$R_{00} = \frac{8}{2} \pi G (\rho + 3p) = -3 \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{11} = \frac{8}{2} \pi G \frac{a^2(\rho - p)}{1 - kr^2} = \frac{2k + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{1 - kr^2}$$

Rimane ancora la questione della 4-divergenza nulla.

$$0 = T^{\mu\nu}_{; \nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} T^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\sigma} T^{\mu\nu}$$

Calcoliamo:

$$0 = T^{0\nu}_{; \nu} = \frac{\partial T^{0\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\sigma\nu}^0 T^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\sigma} T^{0\nu}$$

Calcoliamolo nel sistema co-muovente, dove  $u = (1, 0, 0, 0)$ .

$$\begin{aligned} 0 = T^{0\nu}_{; \nu} &= \frac{\partial T^{00}}{\partial x^0} + \Gamma_{\sigma\nu}^0 T^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\sigma} T^{00} \\ &= \frac{\partial T^{00}}{\partial x^0} + \Gamma_{ij}^0 T^{ij} + \Gamma_{i0}^i T^{00} = \\ &= \frac{\partial T^{00}}{\partial x^0} - \frac{\dot{a}}{a} g_{ij} T^{ij} + 3 \frac{\dot{a}}{a} T^{00} = \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} g_{ij} T^{ij} + 3\rho \frac{\dot{a}}{a} \end{aligned}$$

Nel s.d.r. c-m,  $T^{ij} = -g_{ij} p$ .

$$0 = T^{0\nu}_{; \nu} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho + 3 \frac{\dot{a}}{a} p = 0$$

Questa è una terza equazione scalare.

Moltiplico tutto per  $a^3$ :

$$a^3 \frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\rho \dot{a}a^2 + 3p\dot{a}a^2 = 0$$

Per il principio cosmologico  $\rho$  dipende solo dal tempo.

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p \frac{da^3}{dt} \quad \text{EQUAZIONE DI CONTINUITA'}$$

N.B.:  $a^3$  ha il significato di un volume che si espande!

Esploriamo il significato di queste 3 equazioni scalari -

$$A) \quad 3 \frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G (\rho + 3p)$$

$$B) \quad 2k + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a} = 4\pi G a^2 (\rho - p)$$

$$2 \frac{k}{a^2} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G (\rho - p)$$

$$C) \quad \frac{d}{dt}(\rho a^3) + p \frac{da^3}{dt} = 0$$

Divido A) per 3 e sottraggo A/3) da B):

$$B) \quad 2 \frac{k}{a^2} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 4\pi G (\rho - p) + \frac{4}{3} \pi G (\rho + 3p)$$

$$\boxed{\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8}{3} \pi G \rho} \quad \text{equazione 1}$$

Abbiamo eliminato sia la derivata seconda che il termine di pressione. Se invece sommiamo A) e B):

$$\boxed{\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi G p} \quad \text{equazione 2}$$

Torniamo ad implementare la costante cosmologica:

$$\rho \rightarrow \rho + \frac{1}{8\pi G} \quad p \rightarrow p - \frac{1}{8\pi G}$$

**Equazioni di Friedmann**

$$\boxed{\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8}{3} \pi G \rho + \frac{1}{3} \quad \frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi G p + 1}$$

Dalla prima si ottiene:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 = \frac{1}{3} \pi G \rho a^2 + \frac{1}{6} a^2 - \frac{k}{2}$$

Moltiplicando a per la coordinata co-moving  $r$  otteniamo un potenziale:

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{GM}{a} + \frac{\Lambda a^2}{6} - \frac{k}{2}$$

$$\phi = -\frac{GM}{r} - \Lambda \frac{r^2}{6}$$

Esiste una forza repulsiva (se  $\Lambda > 0$ ) dovuta alla costante cosmologica proporzionale alla distanza:

$$F_\Lambda = \frac{\Lambda r}{3}$$

Questa forza si verifica sperimentalmente osservando il red-shift di galassie lontane.

L'ultimo termine,  $-\frac{k}{2}$ , è dovuto alla curvatura.

Sperimentalmente, pare che viviamo in un universo piatto.

Torniamo ora all'equazione:  $\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8}{3} \pi G \rho$

Moltiplico per  $a^2$  e derivo:

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8}{3} \pi G (\rho a^2 + 2\rho a \dot{a}) = \frac{8}{3} \pi G \frac{1}{a} (\rho a^3 + 2\rho a^2 \dot{a}) =$$

$$= \frac{8}{3} \pi G \frac{1}{a} \left( \frac{d}{dt} (\rho a^3) - \rho a^2 \dot{a} \right) =$$

$$= \frac{8}{3} \pi G \frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{d}{da} (\rho a^3) - \rho a^2 \right) \quad \text{questa discende da A) e B).}$$

Da A) e C) discende invece che:

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8}{3} \pi G (\rho + 3p) = \frac{8}{3} \pi G (-3p - \rho)$$

$$* \frac{d}{da} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{da}$$

$$2\ddot{a}\dot{a} = -\frac{8}{3} \pi G (-3p\dot{a}a - \rho\dot{a}a) = \frac{8}{3} \pi G \frac{\dot{a}}{a} (-3p a^2 - \rho a^2)$$

Ovvero:

$$\frac{d}{da} (\rho a^3) = -3p a^2 = -p \frac{d}{da} (a^3)$$

Che è l'eq. di continuità. Ci sono dunque solo 2 equazioni indipendenti. Prenderemo una delle eq. scalari di Einstein, più l'equazione di continuità.

Equazione di stato  $\rightarrow p = p(\rho)$

Abbiamo già calcolato l'equazione di stato nel caso di piccole perturbazioni al gas perfetto.

Casi banali:

- fluido non relativistico:  $p = 0$
- fluido ultrarelativistico:  $p = \frac{1}{3} \rho$
- universo dominato dalla costante cosmologica:

$$\rho \rightarrow \rho + \frac{1}{8\pi G} \quad p \rightarrow p - \frac{1}{8\pi G} \quad \Rightarrow \quad p = -\rho$$

In generale:

$$p = \alpha \rho \begin{cases} \text{NR} & \alpha = 0 \\ \text{UR} & \alpha = \frac{1}{3} \\ \Lambda & \alpha = -1 \end{cases}$$

Vedremo che all'istante del big-bang era verificata la condizione ultrarelativistica.

Riprendiamo l'equazione di continuità:

$$\frac{d}{dt} (\rho a^3) + \alpha \rho \frac{d}{dt} (a^3) = 0$$

$$a^3 \frac{d\rho}{dt} + (\rho + 2\rho) \frac{d(a^3)}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + (1+\alpha) \frac{3}{a} \frac{da}{dt} = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1+\alpha) \frac{da}{a}$$

$$\log \rho = -3(1+\alpha) \log a + \text{cost.}$$

$$\rho \propto a^{-3(1+\alpha)}$$

Quindi:

caso NR:  $\rho \propto a^{-3}$

caso UR:  $\rho \propto a^{-4} = \frac{1}{a} (a^{-3}) = \text{redshift} \cdot a^{-3}$

caso  $\Lambda$ :  $\rho$  costante,  $\rho = \frac{1}{8\pi G}$

il redshift è dovuto alla  
↑ espansione dell'universo

Riprendiamo le eq. di Friedmann:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3} \pi G (\rho + 3p)$$

$$p = \alpha^{-1} \rho$$

Una soluzione particolare di questa equazione si ha sostituendo  $\alpha \rho$  a  $\rho$ :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3} \pi G (1 + 3\alpha) \rho$$

Nei casi che abbiamo discusso, in cui  $\alpha$  è una costante, abbiamo visto che:

$$\rho \propto a^{-3(1+\alpha)}$$

Inserendo questa nell'eq. precedente otteniamo:

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3} \pi G (1 + 3\alpha) a^{-3(1+\alpha)+1} \quad (\text{se } p = \alpha \rho)$$

Questa è una eq. differenziale per  $a$ . Ansatz:  $a \propto t^\beta$ .

Si ottiene:

$$\beta(\beta-1) t^{\beta-2} = c t^{[-3(1+\alpha)+1]\beta}$$

$$\text{Dunque: } \beta-2 = -3(1+\alpha)\beta + \beta \Rightarrow \beta = \frac{2}{3(1+\alpha)}$$

Una buona soluzione è dunque:

$$a \propto t^{\frac{2}{3(1+\alpha)}} \begin{cases} \rightarrow \text{NR } (\alpha=0) & a \propto t^{2/3} \\ \rightarrow \text{UR } (\alpha=1/3) & a \propto \sqrt{t} \\ \rightarrow \Lambda \quad (\alpha=-1) & \text{In questo caso } \frac{\ddot{a}}{a} \text{ è una costante} \\ & \Rightarrow a \text{ ha forma esponenziale.} \end{cases}$$

Nel caso  $\Lambda$ -dominato:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3} \pi G \left( \frac{1}{8\pi G} - \frac{3\Lambda}{8\pi G} \right) = \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow a \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t}$$



Se c'è stato un istante in cui l'universo è stato dominato dalla costante cosmologica, in quel momento l'universo si è espanso enormemente (inflazione).

Le altre eq. che abbiamo scritto sono:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3} \pi G \rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \Rightarrow$$

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8}{3} \pi G \rho a^2 + \frac{\Lambda}{3} a^2 - k}$$

N.B.:  $\rho$  è la densità di energia del fluido omogeneo ed isotropo per mezzo del quale descriviamo l'universo.

Questa equazione separa i termini  $\rho$ ,  $\Lambda$  e  $k$ .

Se  $\rho = \rho(a)$  l'equazione è risolvibile come un integrale ellittico.

Avevamo trovato, tramite l'eq. di Newton, la densità critica  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \approx 10^{-29} \text{ g/cm}^3$ .

Quanto vale la densità critica sotto forma di materia visibile? Si trova che:

$$\rho_v \sim 3\% \rho_c$$

barioni: delle stelle, atomi

N.B.: tutto questo evolve nel tempo. Ci stiamo riferendo ai valori attuali di queste "costanti":

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 10^{-29} \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{v0} = 3\% \rho_{c0}$$

Per spiegare evidenze sperimentali come l'effetto lente gravitazionale o le curve di rotazione delle galassie abbiamo bisogno di molta più materia. Occorre una densità di materia  $\rho_{M_0} \approx 0.3 \rho_{c0} \approx 3 \cdot 10^{-30} \text{ g/cm}^3$ .

N.B.:  $\rho_{v0}$  si misura misurando la quantità di  $^4\text{He}$

all'interno delle galassie.

Dobbiamo ammettere che esista più materia di quanta ne vediamo, **se assumiamo vera la relatività generale**.

$\rho_V$  è la quantità di energia barionica (non relativistica).

Dobbiamo sommarci la densità di energia relativistica, cioè di particelle leggere. È una radiazione di corpo nero:

$$\rho_{R_0} = c T^4 \quad T = 2.7 \text{ K} \quad c = \frac{k^4}{15 \pi^3 c^3}$$

$$c \approx 8 \cdot 10^{-15} \text{ erg/cm}^3 \text{ K}^4$$

Per quanto ne sappiamo ora, questo numero è sbagliato di un fattore 2. Questo si può spiegare supponendo che nella radiazione cosmica di fondo, oltre ai  $\gamma$ , ci siano anche  $\nu$ .

Domanda  $\rho_{R_0}$  o  $\rho_{V_0}$ ?

$1 \text{ g} \cdot c^2 = \text{energia contenuto in } 1 \text{ g [erg]}$

$$\rho_{R_0} = (2.7)^4 \cdot c^{-2} \cdot 8 \cdot 10^{-15} = (2.7)^4 \cdot 8 \cdot 10^{-36} \\ \approx 50 \cdot 8 \cdot 10^{-36} \text{ g/cm}^3 \approx 4 \cdot 10^{-34} \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{R_0} \sim 1/1000 \rho_{M_0} \quad \left( \frac{\rho_{R_0}}{\rho_{M_0}} \sim 10^{-4} \right)$$

$$\rho_{R_0} \sim 1/100 \rho_{V_0} \quad \left( \frac{\rho_{R_0}}{\rho_{V_0}} \sim 10^{-3} \right)$$

La densità attuale è dominata dalla parte non relativistica.

Possiamo allora dire che  $\rho_{NR} \propto \frac{1}{a^3}$ . N.B.: questa è un' approssimazione di 1%  $\Rightarrow$  è molto accurata.

Come varia questa dipendenza in funzione del tempo?

$$\rho_{NR} a^3 = \rho_{NR_0} a_0^3 \quad (\text{è una costante})$$

Ma abbiamo visto che anche  $\rho_R a^4$  è una costante:

$$\rho_R a^4 = \rho_{R_0} a_0^4$$

Se divido membro a membro:

$$\frac{\rho_R}{\rho_{NR}} a = \frac{\rho_{R0}}{\rho_{NR0}} a_0 \Rightarrow \frac{\rho_R}{\rho_{NR}} = \frac{\rho_{R0}}{\rho_{NR0}} \frac{a_0}{a}$$

10<sup>-4</sup>  
aumenta:  
l'universo è  
in espansione

Nel tempo questo rapporto andrà sempre più verso 0 - l'universo sarà sempre più dominato da  $\rho_{NR}$ .

E in passato?

$$1 \equiv \frac{\rho_R}{\rho_{NR}} = 10^{-4} \frac{a_0}{a} \Rightarrow \frac{a}{a_0} = 10^{-4}$$

Quando l'universo era più piccolo di un fattore 10<sup>4</sup> rispetto alle dimensioni attuali, la materia relativistica e quella barionica avevano lo stesso peso.

Vediamo come si risolve l'equazione per  $\dot{a}$  nel caso attuale,  $\rho \propto a^{-3}$ .

$$\frac{4}{3} \pi \rho a^3 \equiv M$$

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{2MG}{a} + \frac{1}{3} a^2 - k}$$

Questa equazione differenziale è risolvibile integrando

per parti. Vediamo alcuni casi banali.

• Universo di Einstein - De Sitter  $\Lambda = 0$   $k = 0$

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{2MG}{a}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\bar{t}} dt = \int_0^{\bar{t}} \frac{\sqrt{a} da}{\sqrt{2MG}} \Rightarrow \bar{t} = \frac{2}{3} \frac{[a(\bar{t})]^{3/2}}{\sqrt{2MG}}$$

$$\Rightarrow a(t) \propto t^{2/3} \quad (\text{Matter Domination})$$

Altro caso banale: dominazione della materia, curvatura positiva.

- $\Lambda = 0 \quad k = +1$

$$\int dt = \int \frac{da}{\sqrt{\frac{2MG}{a} - 1}}$$

- questa soluzione limitata da  $2GM$ :  
vedremo dal caso generale che va bene.

Cambio variabile:  $a = GM(1 - \cos\bar{\theta}) \Rightarrow da = GM \sin\bar{\theta} d\bar{\theta}$

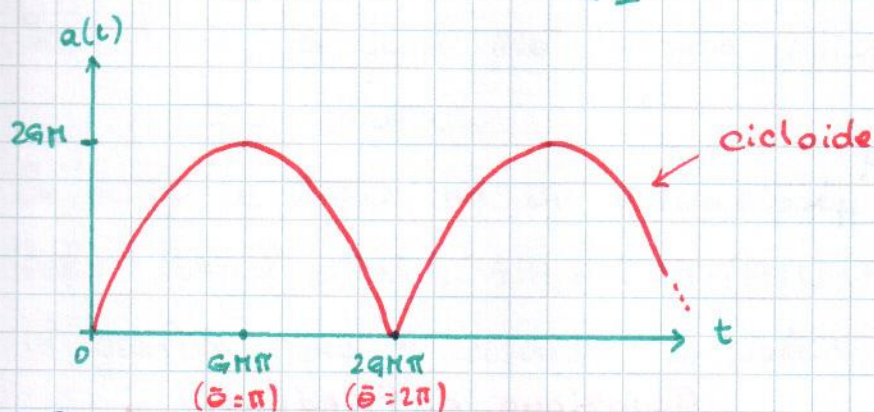
$$\int_0^{a(\bar{\theta})} \frac{da}{\sqrt{\frac{2MG}{a} - 1}} = \int_0^{\bar{\theta}} \frac{GM \sin\bar{\theta} d\bar{\theta}}{\sqrt{\frac{2MG}{GM(1-\cos\bar{\theta})} - 1}}$$

$$= \int_0^{\bar{\theta}} GM \frac{\sin\bar{\theta} d\bar{\theta}}{1} \sqrt{\frac{1 - \cos\bar{\theta}}{1 + \cos\bar{\theta}}}$$

Sostituisco:  $\cos\bar{\theta} = x$

$$= GM \int_1^{\cos\bar{\theta}} -dx \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = -GM \int_1^{\cos\bar{\theta}} \frac{dx(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= GM \left[ \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} \right]_1^{\cos\bar{\theta}} = GM \left[ \bar{\theta} - \sin\bar{\theta} \right] = \bar{t}$$



Caso a curvatura negativa:

- $\Lambda = 0 \quad k = -1$

$$a = GM (\cosh\bar{\theta} - 1)$$

$$t = GM (\sinh\bar{\theta} - \bar{\theta})$$

Questa soluzione non è limitata. Per tempi molto grandi si ha  $a \propto t$ .

Torniamo al caso generale. L'equazione

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8}{3}\pi G\rho + \frac{1}{3}$$

è risolvibile in modo più compatto.

Per due galassie a  $\theta = \varphi = 0$  :

$$ds^2 = dt^2 - a^2 \frac{dr^2}{1-kr^2}$$

Per galassie vicine si ha :  $d \sim ar$

Quindi:

$$v = \dot{a}r = \frac{\dot{a}}{a} ra = \frac{\dot{a}}{a} d \quad (r \text{ piccoli})$$

L'equazione diventa un'equazione per la costante di Hubble:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8}{3} \pi G \rho + \frac{1}{3}$$

$$1 + \frac{k}{a^2 H^2} = \frac{8}{3} \frac{\pi G}{H^2} \rho + \frac{1}{3 H^2}$$

Definisco:

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

L'equazione diventa:

$$1 + \frac{k^2}{a^2 H^2} = \frac{\rho}{\rho_c} + \frac{1}{3 H^2}$$

Definisco:

$$\Omega_M \equiv \rho/\rho_c$$

$$\Omega_\Lambda \equiv \Lambda/3H^2$$

$$\Omega_K \equiv -k/a^2 H^2$$

Equazione di Friedmann

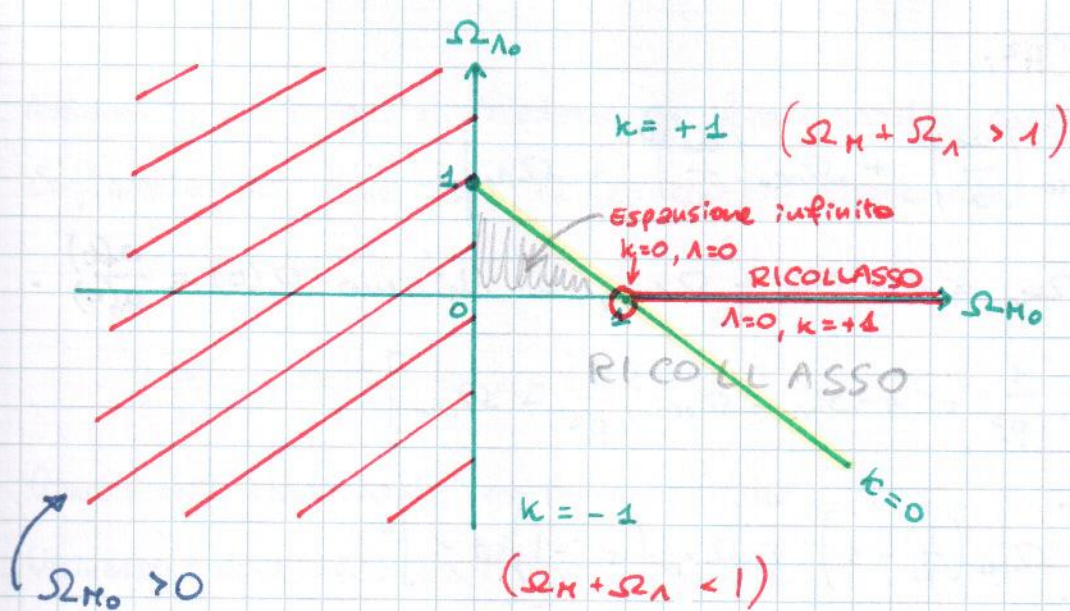
$$\Omega_\Lambda + \Omega_M + \Omega_K = 1$$

Osservazione:

$$\Omega_K = 1 - (\Omega_M + \Omega_\Lambda)$$

Se ho molta materia e  $\Lambda$  l'universo "si chiude".

La curvatura dipende da  $\Lambda$  e dalla densità di materia!



Se c'è dominazione della materia:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{2MG}{a} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Se  $a \rightarrow \infty$  domina  $\Lambda$ . Questo implica che  $\Lambda > 0$ , altrimenti a sinistra avrei un quadrato negativo.

Se  $\Lambda < 0$ ,  $a$  non può essere illimitato:

$\Lambda < 0 \Rightarrow$  ricollasso

Se  $k \leq 0$  e  $\Lambda > 0$  ho un'espansione infinita.

Ref: Carroll et al., ARA & A 30 (1992) 499.

Il grafico sopra si riferisce ai valori attuali di  $\Lambda$  e  $\rho$ .

$$\Omega_M(t) = \frac{8}{3} \frac{\pi G}{H^2(t)} \frac{\text{costante}}{a^3(t)} \Rightarrow \Omega_M = \Omega_{M_0} \frac{H_0^2 a_0^3}{H^2 a^3}$$

$$\Omega_k(t) = -\frac{k}{a^2(t) H^2(t)} \Rightarrow \Omega_k = \Omega_{k_0} \frac{H_0^2 a_0^2}{H^2 a^2}$$

$$\Omega_{\Lambda}(t) = \frac{\Lambda}{3H^2(t)} \Rightarrow \Omega_{\Lambda} = \Omega_{\Lambda_0} \frac{H_0^2}{H^2}$$

Riscrivo l'equazione di Friedmann in termini dei valori attuali.

$$1 = \Omega_{M_0} \frac{H_0^2 a_0^3}{H^2 a^3} + \Omega_{k_0} \frac{H_0^2 a_0^2}{H^2 a^2} + \Omega_{\Lambda_0} \frac{H_0^2}{H^2}$$

Moltiplico per  $H^2$ :

$$H^2 = H_0^2 \left[ \Omega_{M_0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{K_0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_{\Lambda_0} \right]$$

Sostituisco:  $\Omega_{K_0} = 1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{\Lambda_0}$ , e chiamo  $R(t) \equiv \frac{a(t)}{a_0}$ .

$$H^2 = H_0^2 \left[ \Omega_{M_0} \frac{1}{R^3} + (1 - \Omega_{\Lambda_0} - \Omega_{M_0}) \frac{1}{R^2} + \Omega_{\Lambda_0} \right]$$

$$R^2 H^2 = H_0^2 \left[ \Omega_{M_0} \left( \frac{1}{R} - 1 \right) + \Omega_{\Lambda_0} (R^2 - 1) + 1 \right]$$

Sostituisco:  $H = \frac{\dot{a}}{a}$

$$\left[ \Omega_{M_0} \left( \frac{1}{R} - 1 \right) + \Omega_{\Lambda_0} (R^2 - 1) + 1 \right] = \frac{\frac{a^2}{a_0^2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2}{H_0^2} = \frac{\left( \frac{\dot{a}}{a_0} \right)^2}{H_0^2} = \frac{(\dot{R})^2}{H_0^2}$$

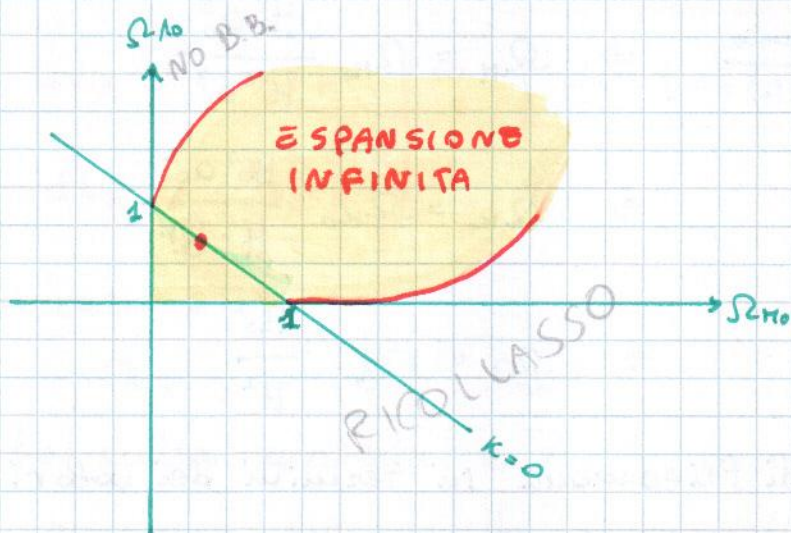
Questa equazione è una cubica.

È una regione di ricollasso per  $\Omega_{M_0}$  molto grande e  $\Omega_{\Lambda_0}$  piccolo: altrimenti avremmo un quadrato negativo.

Se domina  $\Omega_{\Lambda_0}$  rispetto ad  $\Omega_{M_0}$   $R$  non può essere

troppo piccolo per lo stesso motivo  $\Rightarrow a$  è

limitato inferiormente  $\Rightarrow$  non può essere  $a=0$ : NO BIG BANG.



Risultati sperimentali:

$$\Omega_K \approx 0 \Rightarrow \Omega_{\Lambda_0} = 0.7$$

$$\Omega_{M_0} = 0.3$$

Abbiamo visto le eq. di Friedmann in forma molto compatta -

Soffermiamoci sulle eq. in condizioni stazionarie:

$$\frac{\kappa}{a^2} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3} \pi G \rho + \frac{\Lambda}{3}$$

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} = -8\pi G p + \Lambda$$

Condizioni stazionarie  $\leftrightarrow$  derivate nulle.

Universo dominato da M  $\leftrightarrow p \sim 0$

Si ottiene:

$$\Lambda = \frac{8}{3} \pi G \rho + \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow \Lambda = 4\pi G \rho$$

$$\frac{\kappa}{a^2} = \Lambda \Rightarrow a = \sqrt{\frac{\kappa}{\Lambda}} \Leftrightarrow \text{curvatura positiva}$$

$\Lambda$  è positiva, e posso definire  $a(t) \equiv a$  in funzione di  $\Lambda$ .

Le osservazioni sperimentali danno:

$$\Omega_{\Lambda_0} \sim 0.7 \quad \Omega_{M_0} \sim 0.3 \Rightarrow \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{M_0} \sim 1$$



Determiniamo la curvatura

dato  $\Omega \equiv \Omega_{\Lambda} + \Omega_M$ .

$$\Omega_{\Lambda} + \Omega_{\kappa} + \Omega_M = \Omega + \Omega_{\kappa} = 1$$

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} = -\frac{\Omega_{\kappa}}{\Omega} = \frac{\kappa}{a^2 H^2 \Omega}$$

(scostamento % da 1)

$$\Omega H^2 = (\Omega_M + \Omega_{\Lambda}) H^2 = \frac{8}{3} \frac{\pi G \rho}{H^2} H^2 + \frac{1}{3 H^2} H^2 = \frac{8}{3} \pi G \rho + \frac{1}{3}$$

Supponiamo di andare indietro nel tempo. Per un intervallo

abbastanza grande di tempo,  $\rho \sim \frac{1}{a^3}$  (matter domination).

Tutte le dipendenze temporale di  $\Omega H^2$  sta in  $\rho$ .

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} = \frac{\kappa/a^2}{\Omega H^2} \sim a \quad (\text{matter domination})$$

$$a \propto t^{2/3} \Rightarrow \frac{\Omega - 1}{\Omega} \propto t^{2/3}$$



$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} \Big|_{t=1s} \left( \frac{1}{1s} \right)^{2/3} = \frac{\Omega - 1}{\Omega} \Big|_{\text{ora}} \left( \frac{1}{T} \right)^{2/3}$$

con  $T = \text{età dell'universo}$ .

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} \Big|_{\text{ora}} \approx 0.1 \Rightarrow \frac{\Omega - 1}{\Omega} \Big|_{t=1s} \approx 10^{-11}$$

Quando l'universo era giovane,  $\Omega_{\Lambda} + \Omega_M$  faceva 1 fino ad 1 parte su 100 miliardi.

Se aggiungiamo il fatto che, all'inizio, c'era dominazione della radiazione:

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} \sim a^2 \sim (t^{1/2})^2 \sim t$$

Il risultato va, ancora più fortemente, nella stessa direzione.

Vuol dire che la curvatura è nulla?

$$a(t) \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t}$$

Nel caso di dominazione della costante cosmologica, anche per un piccolo intervallo di tempo:

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} = \frac{\kappa/a^2}{\Lambda/3} \propto a^{-2} \propto e^{-2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t}$$

Qualsiasi valore avesse  $\Omega$  inizialmente, dopo un intervallo  $\Delta t$  tale che  $\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \gg 1$  il valore di  $\Omega$  va ad 1.

Questo è il fenomeno dell'**inflazione**. Da quel momento in poi, la curvatura dell'universo è diventata nulla.

Vediamo cos'è il red shift. Se abbiamo un oggetto a raggio co-moving  $r_1$  rispetto a noi, e fissiamo  $\theta$  e  $\varphi$ ,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2}$$

Se stiamo osservando un fotone emesso da una supernova di tipo Ia,  $ds^2 = 0$ .

$$\frac{dt^2}{a^2(t)} = \frac{dr^2}{1 - kr^2} \Rightarrow \frac{dt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

Posso fissare il segno imponendo che

$$\int_{\text{emissione}}^{\text{osservazione}} \frac{dt}{a^2(t)} > 0$$

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \begin{cases} k=1 & \arcsin r_1 \\ k=0 & r_1 \\ k=-1 & \operatorname{arcsinh} r_1 \end{cases}$$

Possiamo scrivere in modo compatto questo risultato:

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{\arcsin(\sqrt{k} r_1)}{\sqrt{k}}$$

Nel limite  $k \rightarrow 0$  riproduce  $r_1$ . Per  $k = -1$ :

$$\frac{\arcsin(i r_1)}{i} = \operatorname{arcsinh} r_1$$

Abbiamo quindi:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{\arcsin(\sqrt{k} r_1)}{\sqrt{k}} \quad \begin{array}{l} \text{fotone emesso} \\ \text{a distanza } r_1 \end{array}$$

Questo non dipende dal tempo. Verifichiamo scambiando  $t_1$  con  $t_1 + \text{un periodo del fotone}$ :

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)} + \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} - \frac{\delta t_1}{a(t_1)}$$

Questi due integrali sono uguali: sono 2 fotoni emessi alle stesse distanze!

$$\Rightarrow \frac{\delta t_0}{a(t_0)} = + \frac{\delta t_1}{a(t_1)} \Rightarrow \frac{\delta t_0}{\delta t_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \quad \text{RED SHIFT}$$

Il periodo cambia a causa dell'espansione dell'universo!

Abbiamo definito:

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} \quad \lambda_0 \text{ osservata, } \lambda_1 = \lambda \text{ all'emissione}$$

$$= \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1 \Rightarrow \frac{a(t_0)}{a(t_1)} = 1 + z$$

$z$  grande  $\Rightarrow$   $\delta$  emesso quando l'universo era piccolo.

$$\delta t_0 = (1+z) \delta t_1 \quad \text{effetto di dilatazione dei tempi}$$

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \Rightarrow a(t) \cdot v(t) \text{ costante nel tempo.}$$

$\Rightarrow$  densità di energia di radiazione diminuisce nel tempo come  $1/a$  (questo fa passare da  $1/a^3$  ad  $1/a^4$  nel caso di radiation domination).

$$v_0 = \frac{v_1}{1+z} \quad \text{spostamento verso il rosso}$$

Più che un effetto Doppler, è un effetto dovuto all'espansione dell'universo. Solo al 1° ordine è  $\propto$  velocità.

Se  $r$  è molto piccolo:

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1 \approx \frac{a(t_0) - [a(t_0) + (t_1 - t_0) \dot{a}(t_0)]}{a(t_1)}$$

(al prim'ordine)

$$\begin{aligned} &= \frac{(t_0 - t_1) \dot{a}(t_0)}{a(t_1)} \approx r_1 \dot{a}(t_0) = r_1 a(t_0) \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} = r_1 a(t_0) H_0 \\ &= d H_0 \end{aligned}$$

Ma è vero anche che:  $v = \frac{d}{dt} [r_1 a] = r_1 \dot{a}$

$\Rightarrow z = v/c$  (Sarebbe  $v/c$ , siamo in unità  $c=1$ )

$$z = \frac{v}{c} = \frac{d H_0}{c}$$

La volta scorsa avevamo scritto:

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_{M_0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{K_0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_{\Lambda_0}}$$

Questa è una funzione solo di  $z$ .

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_{M_0} (1+z)^3 + \Omega_{K_0} (1+z)^2 + \Omega_{\Lambda_0}} \equiv H_0 \cdot E(z)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = H_0 E(z) \Rightarrow dt = \frac{da}{a} \frac{1}{H_0 E(z)}$$

$$\frac{a_0}{a} = 1+z \Rightarrow -\frac{a_0}{a^2} da = dz \Rightarrow \frac{da}{a} = -\frac{dz}{1+z}$$

$$\int_0^{\bar{t}} dt = \int_0^{a(\bar{t})} \frac{da}{a} \frac{1}{H_0 E(z)} = - \int_{\infty}^{\bar{z}} \frac{dz}{1+z} \frac{1}{H_0 E(z)} = \int_{\bar{z}}^{\infty} \frac{dz}{(1+z) H_0 E(z)}$$

$$a=0 \Rightarrow z = \infty$$

Nel caso di matter domination:  $\Omega_M = 1$ ,  $\Lambda = 0$ ,  $k = 0$

Se  $\bar{t}$  è il tempo all'istante attuale:  $\bar{z} = 0$

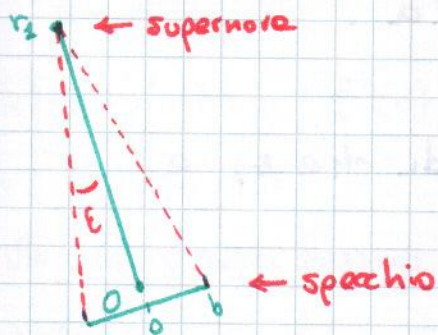
$$= \int_0^{\infty} H_0^{-1} \frac{dz}{(1+z)\sqrt{(1+z)^3}} = \frac{1}{H_0} \frac{2}{3} = \bar{t} = T_0 (\Omega_M = 1)$$

$$= \frac{1}{1.5} \cdot 15 \cdot 10^9 \text{ yr}$$

età dell'universo nel caso M.D.

La correzione è un fattore  $1/3$ .

Andiamo al secondo ordine in  $z$ .



Il numero di fotoni che riesco a rivelare sono quelli che hanno:

$$\epsilon r_s a(t_0) \leq b$$

distanza propria

distanza dal centro dello specchio del punto d'arrivo del fotone

**DISTANZA PROPRIA**

$$\int dt = a(t_0) \int_0^{r_s} \frac{dr}{1-kr^2}$$

← Nel caso di  $r_s$  piccoli  $\approx a \cdot r_s$

(Nel nostro caso  $r_s \rightarrow \epsilon r_s$ )

La frazione di fotoni che osservo dato un angolo  $\Theta$  massimo è data da:

$$\frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{\Theta} \int_0^{2\pi} r d\theta r \sin\theta d\varphi$$

Nel nostro caso  $\Theta = \epsilon$ ,  $\epsilon$  piccolo:

$$\approx \frac{\epsilon^2}{4} = \frac{b^2}{4 r_s^2 a^2(t_0)} \equiv \frac{N_s}{N_{\text{tot}}} = \frac{\text{superficie specchio}}{4\pi r_s^2 a^2(t_0)}$$

In corrispondenza di una supernova, misuro il flusso di energia sotto forma di fotoni.

$$L_{app} = \frac{L_{iniz}}{r_1^2 a^2(t_0)} \frac{1}{(1+z)^2} \equiv \frac{L_{iniz}}{4\pi d_L^2}$$

L'energia dei fotoni si riduce di un fattore  $1+z$ .

L'altro fattore  $1+z$  è dato dalla dilatazione dei tempi: ( $L \sim E/t$ ).

$d_L \equiv$  distanza di luminosità

$d_L$  è una quantità misurabile. Nel modello cosmologico vale:

$$d_L = r_1 a(t_0) (1+z)$$

N.B.:  $L_{iniz}$  è stimabile perché "conosciamo" il meccanismo di emissione delle S1a.

$L(S1a) \equiv 1$  candela standard.

Da una S1a posso misurare sia  $d_L$  che  $z$ , e verificare come si vale questa relazione.

$$d_L \equiv f(z)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} &= \frac{\arcsin(\sqrt{k} r_1)}{\sqrt{k}} = \int \frac{1}{\dot{a}} \frac{da}{a} = (\dots) \\ &= - \int_z^0 \frac{dz}{a_0 H_0 E(z)} = \frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \end{aligned}$$

Facciamo questo conto al 2° ordine.

Nel modello che stiamo creando, la distanza di luminosità è data da:

$$d_L = a_0 r_z (1+z)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 E(z)} = \int_0^{r_z} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{a \sin(\sqrt{k} r_z)}{\sqrt{k}}$$

(per una SN 1A).

$$\int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 E(z)} = \frac{\sqrt{k}}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{ds}{E(s)} \quad E(s) = \sqrt{\Omega_{m_0}(1+s)^3 + \Omega_{k_0}(1+s)^2 + \Omega_{\Lambda_0}}$$

Di solito utilizziamo una espressione molto più semplice, approssimata al secondo ordine. Al 1° ordine abbiamo già visto che esce la dipendenza dalla costante di Hubble.

$$r_z = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \left[ \frac{\sqrt{k}}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{ds}{E(s)} \right] \equiv \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(f(z))$$

$$f(z) \approx f'(0)z + \frac{1}{2} f''(0)z^2 + \dots$$

$$\sin[f(z)] \approx f(z)$$

Le  $\sqrt{k}$  si semplificano confondendo il seno con l'argomento.

Rimane:

$$r_1 \approx \frac{1}{a_0 H_0} \left[ \frac{1}{E(0)} z + \frac{1}{2} f''(0) z^2 \right]$$

$$f'(s) = \frac{1}{E(s)} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m_0}(1+s)^3 + \Omega_{k_0}(1+s)^2 + \Omega_{\Lambda_0}}} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$r_1 \approx \frac{1}{a_0 H_0} \left[ z + \frac{1}{2} f''(0) z^2 \right] \quad \text{Al 1° ordine: } r_1 = \frac{z}{a_0 H_0} \Rightarrow z = H_0 d \text{ (Doppler)}$$

$$f''(s) = -\frac{1}{2} \frac{3\Omega_{m_0}(1+s)^2 + 2\Omega_{k_0}(1+s)}{[\Omega_{m_0}(1+s)^3 + \Omega_{k_0}(1+s)^2 + \Omega_{\Lambda_0}]^{3/2}}$$

$$\Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{2} (3\Omega_{m_0} + 2\Omega_{k_0})$$

$$r_2 \approx \frac{1}{a_0 H_0} \left[ z - \frac{1}{4} (3\Omega_{m_0} + 2\Omega_{k_0}) z^2 \right]$$

Scriviamola in termini di  $\Omega_{m0}$  ed  $\Omega_{\Lambda 0}$ :

$$\Omega_{k0} = 1 - \Omega_{m0} - \Omega_{\Lambda 0}$$

$$r_1 \approx \frac{1}{a_0 H_0} \left[ z - \frac{1}{4} (3\Omega_{m0} + 2 - 2\Omega_{m0} - 2\Omega_{\Lambda 0}) \right]$$

La distanza di luminosità è data da:

$$d_L = a_0 (1+z) r_1 = \frac{(1+z)}{H_0} \left[ z - \frac{z^2}{4} (2 + \Omega_{m0} - 2\Omega_{\Lambda 0}) \right]$$

Definiamo:  $q_0 \equiv \frac{\Omega_{m0}}{2} - \Omega_{\Lambda 0}$

Limitandoci al 2° ordine:

$$d_L \approx \frac{1}{H_0} \left[ z - \frac{z^2}{2} (1 + q_0) + z^3 \right] = \frac{1}{H_0} \left[ z + \frac{z^2}{2} (1 - q_0) \right]$$

Osservando una SN 1A possiamo misurare indipendentemente  $d_L$  e redshift (usando le righe spettrali)  $\Rightarrow$  si ricava sperimentalmente  $q_0$ .

Di solito misuriamo la **magnitudine apparente**:

$$m \equiv -2.5 \log_{10} f$$

dove  $f$  è il flusso di energia, e dipende dalla distanza.

Si definisce **magnitudine assoluta** la magnitudine apparente che avrebbe l'oggetto se si trovasse a 10 parsec:

$$M \equiv -2.5 \log_{10} \left( f \frac{d^2}{(10 \text{ pc})^2} \right)$$

Facendone la differenza:

$$m - M = -2.5 \log_{10} f + 2.5 \log_{10} f + 5 \log_{10} \left( \frac{d}{10 \text{ pc}} \right) \equiv \mu$$

$\mu$  si dice **modulo-distanza**.

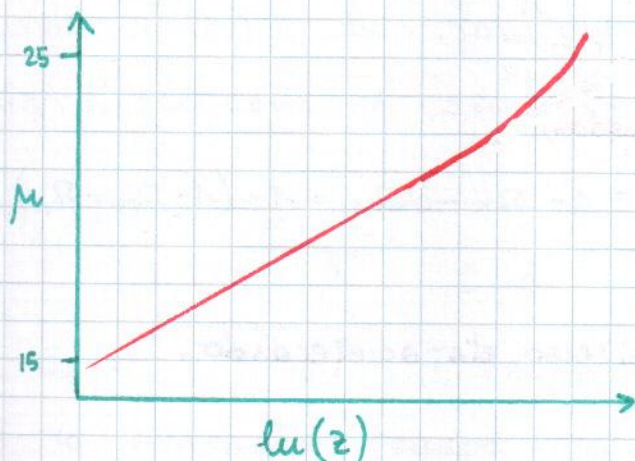
Per un oggetto al centro della galassia si ha ad es.:

$$d = 10 \text{ kpc} \Rightarrow \mu = 15$$

Per le SN 1A conosciamo già  $M$  ( $-1.3 M_{\odot}$ ), quindi misurando

in abbiamo una misura di  $d_L$ . La SNIa è una **candela standard**. Altro esempio:

• Limite di visibilità (Virgo cluster)  $\rightarrow 10 \text{ Mpc} \Rightarrow \mu = 30$ .



Sperimentalmente, con molte SNIa, si ottiene questa relazione.

Se ne deduce una stima dei valori di  $\Omega_{M_0}$  e di  $\Omega_{\Lambda_0}$ ; questo si può

migliorare studiando la distribuzione angolare della radiazione cosmica di fondo.

Vedi slides.

$$\Omega_{\Lambda_0} = 0.73 \pm 0.04 \quad \text{densità di energia oscura}$$

$$\Omega_{M_0} = 0.27 \pm 0.04$$

$$0.044 \pm 0.004 = \rho_{\text{barionica}}$$

$$\rho_{\text{TOT}} = \Omega = 1.02 \pm 0.02$$

$$T = 13.7 \pm 0.2 \quad 10^9 \text{ yr}$$

$$H_0 = 70,0 \pm 1,6 \quad \text{km/s/Mpc}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0.044 \pm 0.004 = \rho_{\text{barionica}} \\ \rho_{\text{TOT}} = \Omega = 1.02 \pm 0.02 \end{array} \right\} \Rightarrow \rho_{\Lambda} \sim 10\% \rho_{\text{TOT}}$$

Che significato ha  $q_0$ ?

$$a(t) \approx a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t-t_0) = a(t_0) + H_0 a(t_0)(t-t_0)$$

$H_0(t-t_0)$  è un parametro adimensionale  $\Rightarrow$  è buono per fare un'espansione al 2° ordine.

$$a(t) \approx a(t_0) + H_0(t-t_0)a(t_0) + \frac{1}{2} a(t_0) \frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)H_0^2} (t-t_0)^2 H_0^2$$

$$\equiv a(t_0) \left[ 1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t-t_0)^2 \right]$$

$q_0$  è un parametro di accelerazione. Verifichiamo



che è uguale alla scrittura data prima.

$$q_0 = - \frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)H_0^2} \stackrel{?}{=} \frac{\Omega_{\Lambda_0}}{2} - \Omega_{\Lambda_0}$$

$$\frac{k}{H^2 a^2} + 1 + \frac{2\ddot{a}}{H^2 a} = - \cancel{8\pi G \rho} \frac{1}{H^2} + \frac{1}{H^2}$$

(matter domination)

$$-\Omega_k + 1 - 2q = 3\Omega_{\Lambda} \Rightarrow 2q = 1 - \Omega_k - 3\Omega_{\Lambda} = 1 - (1 - \Omega_M - \Omega_{\Lambda}) - 3\Omega_{\Lambda}$$

$$2q = \Omega_M - 2\Omega_{\Lambda} \quad \text{c.v.d.}$$

Si verifica che attualmente l'universo sta accelerando.

## Termodinamica del big-bang

Sappiamo che:

$$H^2 = -\frac{k}{a^2} + \frac{8}{3}\pi G \rho + \frac{1}{3}$$

Andiamo all'indietro nel tempo.  $\rho \sim \begin{cases} 1/a^3 \\ 1/a^4 \end{cases}$

Quando  $a \ll a_0$ , domina di gran lunga il termine in  $\rho$ :

$$\text{all'inizio, } H^2 \approx \frac{8}{3}\pi G \rho.$$

L'espansione dell'universo a quell'epoca era dominata dalla densità di materia (relativistica e non).

Condizione di equilibrio termodinamico  $\equiv$  le particelle interagiscono **molto velocemente**.

Il rate d'interazione è dato da:

$$\frac{dN}{dt dV} = n \sigma v n_R$$

Il numero di interazioni per particella per unità di tempo si ottiene dividendo per  $n$ :

$$\Gamma \equiv \frac{dN}{dt d(mV)} = n \sigma v n_R$$

Questo è un tempo<sup>-1</sup>, ho bisogno di capire quanto

è piccolo  $\Rightarrow$  lo confronta con  $H$ .

## Condizione di eq. termodinamico

$$\Gamma \gg H$$

Andremo infatti a scrivere equazioni dipendenti dal rapporto  $\Gamma/H$ .  
Se vale  $\Gamma \gg H$ , la funzione di distribuzione di ciascuna specie di particelle è semplicemente quella termodinamica:

$$f_i(\vec{p}) = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu_i}{T}} \pm 1}$$

con  $E_i = \sqrt{\vec{p}_i^2 + m_i^2}$ ,  $T$  temperatura e  $\mu_i$  potenziale chimico.

$T$  è la temperatura termodinamica della specie che è all'equilibrio in quel momento.

$$n_i \propto f_i(\vec{p}) \frac{d^3\vec{p} dV}{h^3}$$

In unità di  $\hbar = 1$ :  $dn_i = g_i f_i(\vec{p}) \frac{d^3p dV}{(2\pi)^3}$

$$\frac{dn_i}{dV} \equiv dn_i \int dn_i = g_i \int f_i(\vec{p}) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = g_i (2\pi)^{-3} \int f_i(\vec{p}) dp p^2 d\Omega$$

$$\int dn_i = \frac{g_i 4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f_i(\vec{p}) p^2 dp$$

### Caso non relativistico: $T, p \ll m$

Questa condizione ovviamente dipende anche dalla specie della particella.

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty f_i(\vec{p}) p^2 dp$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$E_i \approx m_i + \frac{p^2}{2m_i}$$

Il termine esponenziale domina rispetto ad 1.

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{-\frac{m_i + \mu_i}{T}} e^{-\frac{p^2}{2m_i T}} p^2 dp = \frac{g_i}{2\pi^2} e^{-\frac{m_i}{T}} e^{\frac{\mu_i}{T}} \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2m_i T}} dp$$

$$= \frac{g_i}{2\pi^2} e^{-\frac{m_i}{T}} e^{\frac{\mu_i}{T}} (2m_i T)^{3/2} \int_0^\infty e^{-x^2} x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{g_i}{2\pi^2} e^{-\frac{m_i}{T}} e^{\frac{\mu_i}{T}} (m_i 2T)^{3/2}$$

densità di particelle NR all'equilibrio

$$n_i = 2g_i e^{-\frac{\mu_i}{T}} e^{\frac{\mu_i}{T}} \left(\frac{m_i T}{2\pi}\right)^{3/2}$$

$T \ll m \Rightarrow$  l'esponenziale rende molto piccola questa densità. La densità di energia è circa  $\rho_i \approx m_i n_i$

Caso relativistico:  $\rho_i \approx \epsilon_i n_i$

La densità di energia è data da:

$$\rho_i = \frac{4\pi g_i}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f_i(\vec{p}) \epsilon_i p^2 dp$$

Avevamo scritto:

$$p_i = \frac{1}{3} \frac{4\pi g_i}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{p^2}{\epsilon_i} f_i(\vec{p}) p^2 dp \quad (\text{pressione}) \quad [P \approx \frac{1}{3} \rho]$$

Per il caso NR avevamo  $p_{i, NR} = T n_i \approx 0$ .

Per il caso relativistico:

$$E \approx p$$

$$\rho_{Ri} = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\epsilon/T} \pm 1}; \quad m_{Ri} = \frac{g}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\epsilon/T} \pm 1}$$

Abbiamo messo  $\mu_i = 0$ , vedremo che è una buona approssimazione.

Si ottiene:

$$\rho_{Ri} = \frac{g_i T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x \pm 1}; \quad m_{Ri} = \frac{g T^3}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x \pm 1}$$

$\rho_{NR} \sim T^{3/2}$ ,  $\rho_R \sim T^4 \Rightarrow$  domina la parte di materia relativistica!

$$\int_0^\infty \frac{z^{n-1} dz}{e^z - y} = \frac{\Gamma(n) \text{Li}_n(y)}{y}, \quad \text{Li}_n(y) = \sum_{k=1}^\infty \frac{y^k}{k^n}$$

Noi abbiamo  $y = \pm 1$ ,  $n = 3; 4$ .

$$\text{Li}_n(1) = \zeta(n)$$

$$\text{Li}_n(-1) = (2^{1-n} - 1) \zeta(n)$$

$$\zeta(3) = L_{i_3}(1) \approx 1,2$$

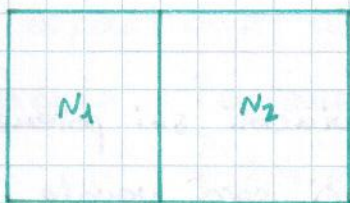
$$\zeta(4) = L_{i_4}(1) = \frac{\pi^4}{90}$$

Abbiamo quindi:

$$m_{R_i} = \begin{cases} \frac{3}{2} \zeta(3) g_i T^3 \text{ (F.D.)} \\ 2 \zeta(3) g_i T^3 \text{ (B.E.)} \end{cases}$$

$$g_{R_i} = \begin{cases} \frac{7}{16} \frac{g_i T^4}{\pi^2} \frac{\pi^4}{90} 6 \text{ (F.D.)} \\ g_i \frac{T^4}{\pi^2} \frac{\pi^4}{30} \text{ (B.E.)} \end{cases}$$

18/05/2012



V costante

$$\delta(N_1 + N_2) = 0 \Rightarrow \delta N_1 = -\delta N_2$$

$$0 = \frac{\partial S_T}{\partial N_1} = \frac{\partial(S_1 + S_2)}{\partial N_1} \Rightarrow \frac{\partial S_1}{\partial N_1} = -\frac{\partial S_2}{\partial N_1} = \frac{\partial S_2}{\partial N_2}$$

**Definizione di POTENZIALE CHIMICO**

$$\frac{\partial S_2}{\partial N_2} = -\frac{\mu}{T} \Rightarrow T dS = -\mu dN$$

$$-\mu dN + dU = T dS - p dV$$

$$dU = \mu dN + T dS - p dV$$

Vediamo un'applicazione. Se  $A_i$  sono le particelle:



(Ad esempio:  $e^- + p \leftrightarrow n + \nu_e$ )

$$m_3 = -m_3$$

$$m_4 = -m_4$$

$$\sum_i m_i A_i = 0$$

In seguito nulla la variazione totale di entropia:

$$0 = \delta S = \frac{\partial S}{\partial N_{A_1}} \delta N_{A_1} + \frac{\partial S}{\partial N_{A_2}} \delta N_{A_2} + \dots = \sum_i \frac{\mu_{A_i}}{T} \delta N_{A_i}$$

Le fluttuazioni del numero di particelle non sono casuali, ma correlate (= numero stechiometrico):  $m_i$  sono in proporzioni fisse. Quindi:

$$0 = \sum_i \frac{\mu_i}{T} \alpha m_i = 0 \Rightarrow \sum_i \mu_i m_i = 0$$

Il potenziale chimico termodinamico è una variabile additiva e si conserva.

Esempio:  $e^+e^- \rightarrow N\gamma$  con  $N$  arbitrario (posso avere un numero grande a piacere nello stato finale)  $\Rightarrow \mu(\gamma) = 0$ , altrimenti non si conserverebbe.

Inoltre:  $p$  e  $\bar{p}$  hanno potenziale chimico opposto.



Questa reazione conserva  $L_e$  e  $B$ , ed impone dei vincoli sui  $\mu_i$ :

$$\mu_e + \mu_p = \mu_n + \mu_{\nu_e}$$

Ogni legge di conservazione impone dei vincoli sui potenziali termodinamici. Il numero di  $\mu_i$  indipendenti sarà uguale al numero di quantità conservate.

Esempio: data una certa  $T$  di equilibrio,  $n_{e^-} - n_{e^+}$  è calcolabile ed è una funzione dei  $\mu_i$ :

$$n_{e^-} - n_{e^+} = \frac{2}{2\pi^2} \left( \frac{E^2 dE}{e^{-E/T} + 1} - \frac{E^2 dE}{e^{E/T} + 1} \right) = \frac{T^3}{3\pi^2} \left[ \frac{\pi^2 \mu}{T} + \left( \frac{\mu}{T} \right)^3 \right]$$

(nel caso ultrarelativistico,  $T \gg m$ ).

Qualsiasi numero di particelle è funzione dei  $\mu_i \Rightarrow$  le quantità conservate sono funzioni **dispari** dei  $\mu_i$  (passando da  $p$  a  $\bar{p}$ ,  $Q, B, L \dots$  cambiano segno).

$$Q, B, L_i = f(\mu_i)$$

La  $Q$  totale dell'universo, per quanto ne sappiamo, è nulla  $\Rightarrow$  le  $f$  corrispondenti sono tutte nulle.

$B$  ed  $L$  non sono invece nulli (preponderanza di materia). Inoltre, con buona approssimazione,

$$n_e - n_{e^+} \approx n_B$$

$$\frac{\mu}{T} \propto \frac{m_B}{T^3} \equiv \eta_B$$

$\eta_B$  = frazione barionica della densità di materia  $\approx 6 \cdot 10^{-6}$

$\eta_B$  è calcolata rispetto al numero totale di fotoni.

Il fatto che  $\eta_B$  sia molto e che  $\eta_B$  sia piccola ci assicura che i potenziali chimici in gioco siano tutti trascurabili.  
 $\Rightarrow$  li approssimiamo tutti a 0.

Vediamo la storia termodinamica dell'universo.

Quando, all'indietro nel tempo, diminuisce il parametro di espansione  $a$  ( $\Rightarrow \lambda, k$  trascurabili), la temperatura aumenta. Teniamo come vincolo:

$$H^2 = \frac{8}{3} \pi G \rho \quad \text{da: } \rho_c = \frac{3}{8} \frac{H^2}{\pi G} \approx 10^{-29} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

In questa fase l'espansione dell'universo è dominata dalla densità di materia relativistico, con:

$$\rho_{R_i} = \frac{g_i T^4 \pi^2}{30} \quad \left( \times \frac{7}{8} \text{ se } i \text{ è un fermione} \right)$$

$$M_{R_i} = \frac{g_i \zeta(3) T^3}{\pi^2} \quad \left( \times \frac{3}{4} \text{ se } i \text{ è un fermione} \right)$$

Si ottiene che:

$$\langle E \rangle = \frac{\rho}{n} = \frac{\pi^4}{30 \zeta(3)} T \quad \left( \times 3.15 \text{ se f.}, \times 2.7 \text{ se b.} \right)$$

Relazione E-T per un gas relativistico

Data una temperatura  $T \approx 10$  MeV, quali sono le particelle che contano? Quelle relativistiche (le altre sono soppresse da un fattore  $\rho_{NR} = T^{3/2} e^{-m/T}$ ).

A 10 MeV contano  $\gamma, e^\pm, \bar{\nu}_i$ , gravitoni.

10 MeV è una  $T$  grande:  $10 \text{ MeV} = 1.2 \cdot 10^{11} \text{ K}$ !

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H^2 = \frac{\pi^2}{30} T^4 \left[ \underset{g_i(\gamma)}{2} + \underset{g_i(e^+e^-)}{2 \cdot 2 \cdot \frac{7}{8}} + \underset{\text{specie di } \nu}{3 \cdot 2 \cdot \frac{7}{8}} \right] \frac{8}{3} \pi G$$

moltiplichere uno  $\times 2$  e avessimo centesina

che i  $\nu$  sono particelle di Dirac e non di Majorana.

$$g_{\text{eff}}(T_1) = \left[ 2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{7}{8} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{7}{8} \right], \quad T_1 = 10 \text{ MeV}$$

Al crescere di  $T$ , aumentano le particelle contribuenti e cambia  $g_{\text{eff}}$ . N.B.: stiamo implementando il MS, che è verificato solo fino ad una certa massa  $\Rightarrow$  questo modello è valido solo fino ad una certa temperatura.

Altra condizione di validità:  $\Gamma \gg H$

La prima interazione che può rompere questa condizione, al calore di  $T$ , è la più debole: l'interazione debole. Se si "spegne", i  $\nu$  smettono di interagire con il resto della materia  $\Rightarrow$  **disaccoppiamento dei  $\nu$  dal bagno termico**. Quando succede questo?

$$\Gamma = \sigma_{\nu\nu} v_{\text{rel}} \sim G_F^2 T^2 m_\nu \quad (\text{dimensionalmente})$$

$$\approx G_F^2 T^2 T^3 = G_F^2 T^5$$

$$H^2 = \frac{8}{90} \pi^3 G T^4 g_{\text{eff}}(T)$$

In unità di  $\hbar = c = 1$ :  $\frac{m^2}{r^2} [G] = [F] = m \frac{e}{t^2} \Rightarrow [G] = \frac{1}{m} \frac{e^3}{t^2} = \frac{e}{m} = \frac{1}{[m]^2}$

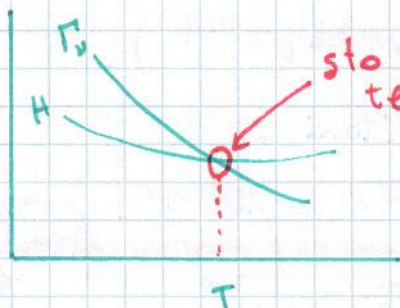
$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$$

$$\frac{1}{G} \equiv m_p = 10^{19} \text{ GeV} \quad \text{MASSA DI PLANCK}$$

$$H^2 \approx 2.76 g_{\text{eff}}(T) \frac{T^4}{m_p^2}$$

$T$  tale che:  $\nu$  non interagiscono più

Voglio ricavare  $T$ :  $G_F^2 T^5 = \sqrt{2.76 g_{\text{eff}}(T)} \frac{T^2}{m_p}$



sto cercando questa temperatura.

$$T^3 = \frac{\sqrt{2.76 g_{\text{eff}}}}{G_F^2 m_p}$$

$$\approx \frac{\sqrt{2.76 g_{\text{eff}}}}{10^9} \text{ GeV}^3$$

$$T \approx \sqrt[3]{30} 10^{-3} \text{ GeV} \approx 3 \text{ MeV}$$

A 3 MeV i  $\nu$  non interagiscono più con il resto del bagno termico,

e si espandono come particelle libere in un universo in espansione.  
 Sono relativistici  $\Rightarrow$  risentono del redshift  $\Rightarrow$  mentre  
 l'universo si espande rimane costante il prodotto  
 $E_\nu \cdot a$ .

Al momento del disaccoppiamento:

$$f(E_D) = \frac{1}{e^{E_D/T_D} + 1}$$

N.B.: da 3 MeV in giù i  $\nu$   
non sono piú all'equilibrio!

$$E(t)a(t) = E_D a_D \Rightarrow E_D = \frac{E a}{a_D}$$

Sostituendo nella funzione di distribuzione:

$$f(E_D) = \frac{1}{e^{\frac{E a}{T_D a_D} + 1}} \equiv \frac{1}{e^{E/T_{eff}} + 1}$$

$$T_{eff} \equiv T_D \frac{a_D}{a}$$

Questa è nuovamente una distribuzione di particelle  
 all'equilibrio! (Ad una  $T(a) = T_{eff}$ ).

Il numero di  $\nu$  prima del disaccoppiamento è  $\propto T^3$ ;  
 dopo il disaccoppiamento  $N_\nu \cdot a = \text{costante} \Rightarrow N_\nu \propto T_{eff}^3$   
 $\Rightarrow$  non cambia praticamente nulla.

Se scendiamo ancora sotto con la temperatura  
 ( $< 1$  MeV), a dominare l'espansione sono ancora  
 $\nu$ ,  $\gamma$ ,  $e^\pm$ . A tenere in equilibrio le altre particelle  
 è la reazione



Sotto  $\frac{1}{2}$  MeV questa reazione crolla sotto-soglia,  $e^+$  ed  $e^-$   
 diventano non relativistici e "non contano piú".  
 C'è un calo brusco di elettroni. Come varia  $a$   
 in quel momento?



Un vincolo è posto dall'entropia, che si deve conservare.

$$T dS(V, T) = dU + p(T) dV = d(\rho V) + p(T) dV$$

Anche  $\rho$  dipende solo da  $T$ :  $\rho = \rho(T)$ .

$$T dS(V, T) = V d\rho(T) + (\rho + p) dV$$

$$dS = V \frac{d\rho}{T} + \frac{(\rho + p)}{T} dV$$

Impongo che  $S$  sia una funzione di stato.

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\rho + p}{T}$$

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{d\rho}{dT}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{1}{T} \frac{d\rho}{dT} \equiv \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = -\frac{1}{T^2} (\rho + p) + \frac{1}{T} \frac{d}{dT} (\rho + p)$$

$$\frac{1}{T} \frac{d\rho}{dT} = -\frac{1}{T^2} (\rho + p) + \frac{1}{T} \frac{d\rho}{dT} + \frac{1}{T} \frac{dp}{dT} \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T} (\rho + p)}$$

Voglio scrivere l'entropia come un differenziale esatto, ed integrarla.

$$T dS = d(\rho V) + p dV = d[(\rho + p)V] - V dP =$$

$$= d[(\rho + p)V] - \frac{V(\rho + p)}{T} dT$$

$$dS = \frac{1}{T} d[(\rho + p)V] - \frac{1}{T^2} V(\rho + p) dT = d\left[\frac{(\rho + p)V}{T}\right]$$

Abbiamo imposto solo che  $S$  fosse una f.d.s.

e che  $\rho, p = f(T)$ .

$$\boxed{S = \frac{(\rho + p)V}{T} + \text{const.}}$$

Uso il volume co-moving  $a^3$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\rho + p}{T} \right) a^3 \right] = \frac{1}{T} \frac{d}{dt} [(\rho + p) a^3] + a^3 (\rho + p) \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{T} \right) =$$

$$\text{CONTINUITÀ:} \quad = \frac{1}{T} \frac{d}{dt} (\rho a^3) + \frac{1}{T} \frac{d}{dt} (p a^3) - \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dt} a^3 (\rho + p)$$

$$\frac{d}{dt} (\rho a^3) = -\rho \frac{da^3}{dt} \rightarrow = -\frac{1}{T} \rho \frac{da^3}{dt} + \frac{1}{T} p \frac{da^3}{dt} + \frac{1}{T} a^3 \frac{dp}{dt} - \frac{1}{T} a^3 \frac{dp}{dt}$$

L'entropia per volume co-moving si conserva.

$$S = \frac{g+p}{T} a^3$$

Nel nostro caso, per particelle relativistiche:  $S = \frac{4}{3} \frac{g}{T} a^3 =$   
 $= \frac{4}{3} g_{\text{eff}} \frac{\pi^2}{30} T^3 a^3$

Questo si deve conservare. Ma  $g_{\text{eff}} = g_{\text{eff}}(T)$ ,  $T$  ed  $a$  cambiano.  $P \equiv$  prima = quando  $T > \frac{1}{2} \text{ MeV}$  ( $\gamma$  ancora  $e^\pm R$ ):

$$S_P = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{30} (aT)_P^3 \left[ 2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{7}{8} \right]$$

$D \equiv$  dopo = solo  $\gamma$ , e  $\nu$  sparsi.

$$S_D = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{30} (aT)_D^3 [2]$$

$$S_P = S_D \Rightarrow (aT)_D^3 = \frac{11}{4} (aT)_P^3$$

Per i neutrini, disaccoppiati, non succede nulla:

$$(aT_\nu)_P = (aT_\nu)_D$$

La f. di distribuzione dei  $\nu$  è la stessa dei  $\gamma$  prima che gli  $e^\pm$  "escono dal gioco", quindi:

$$(aT)_P^3 = (aT_\nu)_P^3 = (aT_\nu)_D^3$$

$$(aT)_D^3 = \frac{11}{4} (aT_\nu)_D^3 \Rightarrow T_\gamma = \sqrt[3]{\frac{11}{4}} T_\nu \text{ (negli istanti successivi alle fuoriuscite di } e^\pm \text{)}$$

Il disaccoppiamento dei  $\gamma$  avviene nello stesso modo di quello dei  $\nu$ , "se ne vanno" con una f. di d. di B.E. Ma il rapporto  $T_\gamma/T_\nu$  rimane costante nel tempo!

$$T_{\nu_0} = \sqrt[3]{\frac{4}{11}} T_{\gamma_0} = 1.95 \text{ K}$$

Ref: "Early Universe".

è il volume più bene definita a meno di una costante.

$$S = \frac{(p+p) \cdot V}{T} + \dots$$

lo, sempre, è invariante.

Quando  $V = a^3$ , valutiamo la variazione di  $S$  nel tempo:

↳ volume costante

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{(p+p) a^3}{T} \right] &= \frac{1}{T} \frac{d}{dt} [(p+p) a^3] + a^3 \cdot (p+p) \frac{d}{dt} \frac{1}{T} = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{d}{dt} (p a^3) + \frac{1}{T} \frac{d}{dt} (p a^3) - \frac{1}{T^2} a^3 (p+p) \frac{dT}{dt} \end{aligned}$$

ma  $dp = \frac{dT}{T} (p+p)$  quindi:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{(p+p) a^3}{T} \right] = -\frac{1}{T} p \frac{da^3}{dt} + \frac{1}{T} p \frac{da^3}{dt} - \frac{1}{T^2} a^3 \frac{dT}{dt} = 0$$

cioè il tempo del volume costante è costante allora dipende solo di questo quanto andiamo in  $T$ . Il tempo del volume costante risulta:

$$S = \frac{4}{3} \frac{\pi}{T} a^3 = \frac{4}{3} g_{\text{eff}} \frac{\pi^2}{30} T^3 a^3$$

ed è questo che si deve formare. Al di sotto di  $T = 0,5 \text{ MeV}$ , non si trovano più e, ma solo  $\mu$ . Prima di  $0,5 \text{ MeV}$  ( $T > 0,5 \text{ MeV}$ ) in  $h$ .

$$S_{\text{prima}} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{30} (aT)_{\text{prima}}^3 \left[ 2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{7}{8} \right] \rightarrow \text{v. non utile gli e}$$

mette dopo:  $S_{\text{dopo}} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{30} (aT)_{\text{dopo}}^3 [2] \rightarrow \text{v. non utile: } \mu \text{ di tempo del volume costante due, } \mu \text{, conservato, quindi:}$

$$2 (aT)_{\text{dopo}}^3 = \frac{11}{2} (aT)_{\text{prima}}^3 \Rightarrow (aT)_{\text{dopo}}^3 = \frac{11}{4} (aT)_{\text{prima}}^3$$

$\mu$  è non dissipati, sempre hanno un  $a \cdot T = \text{cost.}$  (quindi, per lo,  $(aT)_{\text{prima}} = (aT)_{\text{dopo}}$ ), dato che la funzione di distribuzione è sempre la stessa anche se  $\mu$  è dissipati, la loro temperatura sarà come quella dei  $\mu$  ( $(aT)_{\text{prima}} = (aT)_{\text{prima}}$ ), quindi:

$$(aT)_{\text{dopo}}^3 = \frac{11}{4} (aT)_{\text{prima}}^3 = \frac{11}{4} (aT)_{\text{dopo}}^3 \Rightarrow T_{\mu} = \sqrt[3]{\frac{11}{4}} T_{\nu}$$

quindi oggi  $\mu$   $T_{\nu}$  dissipati e:

$$T_{\mu} = \sqrt[3]{\frac{11}{4}} T_{\nu} = 1,95 \text{ K}$$

Quando formassimo i  $\mu$ , il ragionamento sarà lo stesso per la funzione dei  $\nu$ .

21/05/2012

Ultimo nota da:

$$g_{\mu} (aT)^3 \Rightarrow T_{\mu} \propto \frac{1}{\sqrt[3]{g_{\mu}}} \cdot a$$

Per  $T < m_e$ , i  $\nu$  equivalgono alle  $\gamma$  senza la  $T_e$  reale.

$$T_\nu = \sqrt{\frac{11}{4}} \cdot T_e$$

Otteniamo anche le minime approssimazioni in  $\nu$ :

$$\Delta m_{12}^2 \approx 10^5 \text{ eV}^2 \quad \Delta m_{13}^2 \approx 10^3 \text{ eV}^2$$

Quindi, i  $\nu$  hanno  $m \neq 0$  e dell'ordine della frazione di eV. Sappiamo che la  $T$  della radiazione cosmica di fondo è:

$$T_0 = 2,7^\circ \text{K} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$$

e, se consideriamo i  $\nu$  più di massa, approssimiamo l'energia media alla loro temperatura:

$$T_\nu = \sqrt{\frac{4}{11}} \cdot 2,7^\circ \text{K} \approx 10^{-3} \text{ eV}$$

ed i  $\nu$  non sono relativistici (come la massa al momento del disaccoppiamento,  $\mu \approx 1 \text{ MeV}$ ).

Proviamo anche il numero di  $\nu$  al momento attuale:

$$n_{\nu_0} = 2 \cdot \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \cdot T_0^3$$

ma questa relazione non va bene per i  $\nu$  non relativistici (in effetti è questa relazione che integra la distribuzione di Fermi-Dirac, ma non funziona perché qui i  $\nu$  non sono relativistici). Numericamente:

$$n_{\nu_0} \approx \frac{24}{10} \left(\frac{1}{4000}\right)^3 \approx 400 \text{ } \nu / \text{cm}^3$$

è il numero previsto dal modello cosmologico standard. Le minime  $\Delta m^2$  in  $\nu$  possono dare i  $\nu$  non solo a massa nulla, se lo fossero, ma sarebbero approssimati la stessa funzione di distribuzione dei  $\nu$  (anche essi non-relativistici), ma almeno tutte e tre delle 3 famiglie leptoniche:

$$n_{\nu_0} = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{11}}\right)^3 \cdot T_0^3 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \log(2) \approx \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{11} \cdot 400 \approx 0,9 \cdot 400 \approx 360 \text{ } \nu / \text{cm}^3$$

# famiglie

nell'ipotesi che i  $\nu$  non abbiano massa al momento del disaccoppiamento, i  $\nu$  sono,  $\mu \approx 1 \text{ MeV}$ , relativistici, dunque,  $\mu \approx 1 \text{ MeV}$ , questa relazione è valida.

Il # totale di particelle nel volume  $\rho$ -costante, inoltre, non varia; dunque, se abbiamo tale numero al momento di disaccoppiamento, possiamo ricavare il vero  $n_{\nu_0}$   $\mu \approx 1 \text{ MeV}$  tenendo la popolazione col  $e^{-3}$ :

$$n a^3 = \text{cost.} \Rightarrow n \propto a^{-3} \propto T^3$$

quindi, il conto fatto è sempre corretto.

Poniamo inoltre la densità materiale di  $\nu$ :

$$\rho_\nu = m_\nu \cdot n_\nu$$

Conoscendo la densità barionica  $\rho_B = 0,23$  e sapendo che la densità di materia è  $\rho_M = 0,3$ , possiamo valutare se  $\nu$  rientra o comunque il discorso tra le due quantità:

$$\rho_\nu = \frac{m_\nu \cdot n_\nu}{10^{-28} \text{ g/cm}^3} \text{ eV/cm}^3 \cdot \frac{10^{-9}}{6 \cdot 10^{23}} \text{ densità materia dell'ordine di } \rho_M = 0,3$$

densità critica  $\rho_c$

Quindi  $m_\nu [\text{eV}] = 0,3 \cdot 3 \cdot 10^{-9} \text{ eV} \approx 5 \text{ eV}$ .  $\nu$  viene una stima sulla massa del  $\nu$ .

Infine, questa non è  $\nu^2$  perché la  $m_\nu$  stessa deve avere una frazione di eV (almeno un ordine di grandezza sotto).  $\nu$  non proprio come la differenza tra  $\rho_M$  e  $\rho_B$ .

D.B. Poniamo invece di interpretare questa "materia oscura" menzionata come GRAVITONI: essi hanno  $m=0$  ed hanno una distribuzione di Bose-Einstein. Per i gravitoni (inimitabile a  $\nu$ , per cui abbiamo  $g^2 \cdot T^5$ ), possiamo ipotizzare una relazione d'entro del tipo:

$$\frac{G^2 \cdot T^5}{9} \text{ cal. di Newton}$$

Infine:

$$\Gamma(\text{gravitoni}) = v_{\text{esc}} \cdot \rho \cdot \frac{1}{m} = \frac{T^2}{m_{\text{Planck}}^4} \cdot T^3 = \frac{T^5}{m_{\text{Planck}}^4}$$

Otteniamo anche note che:

$$H^2 = \frac{8}{3} \pi g_{\text{eff}} \frac{T^4}{m_{\text{Planck}}^2} \Rightarrow H \approx \sqrt{g_{\text{eff}}} \cdot \frac{T^2}{m_{\text{Planck}}}$$

ed, quindi, anche:

$$\frac{T^5}{m_{\text{Planck}}^4} = \text{cost.} \cdot \frac{T^2}{m_{\text{Planck}}^4} \Rightarrow m_{\text{Planck}} \cdot \sqrt[3]{\text{cost.}} = T$$

La  $T$  di  $\nu$  e  $\rho$  non è nulla come quella dei gravitoni ( $T \propto 1/(g \cdot a)$ ).

In definitiva,  $\nu$ ,  $\rho$  ed  $\rho_B$  sono le particelle che contribuiscono all'entropia dell'universo.



Consideriamo ora l'entropia prodotta da  $\rho$  e da  $\nu$  ( $T < 2 \text{ MeV}$ ):

$$S = \frac{(\rho + p) \cdot a^3}{T} \text{ densità di entropia} \quad \rho = \frac{S}{a^3} = \frac{(\rho + p)}{T} = \frac{4}{3} \frac{\rho}{T} = \frac{4}{3} g \frac{\pi^2}{30} T^3$$

quindi, tenendo conto che  $T_\rho \neq T_\nu$ :

$$\rho_{\rho+\nu} = \frac{2}{45} \pi^2 \cdot \left[ 2 \cdot T_\rho^3 + 6 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{11} T_\nu^3 \right] = \frac{2}{45} \pi^2 \cdot \left[ 2 + 6 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{11} \right] T_\nu^3$$

Quindi:

$$T_0 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{2}{45} \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{4}{11}\right)} \geq \sqrt[3]{107} \cdot T_6$$

temp. quarkoni

da cui:

$$T_6 \leq T_0 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{107}}$$

è proprio inferiore se era contenuta o meno la materia oscura:

$$\rho_{\phi_0} = \frac{g_{\phi_0}}{9} \frac{\pi^2}{30} T_0^4 \quad ; \quad \rho_{\nu_0} = \frac{g_{\nu_0}}{30} \pi^2 T_0^4 \quad \Rightarrow \frac{\rho_{\phi_0}}{\rho_{\nu_0}} \propto \left(\frac{T_{\phi_0}}{T_{\nu_0}}\right)^4$$

# di grad di libertà dei quarkoni

Quindi: quarkoni forniscono un contributo imponente alla materia oscura (circa  $\frac{1}{4}$  del  $\rho$ ).

Se parliamo il rapporto tra # di horizon ( $m_B a^3$ ) e quello di fermi ( $m_p a^3$ ) nello stesso volume, si dice:

$$\frac{n_B a^3}{m_p a^3} = \text{rap.} = \eta_B$$

non più variare, proprio della loro  
variazione del numero horizon.

poiché  $m_p = \frac{g_p}{\pi^2} T_p^3$  (cioè  $m_p a^3 = \text{rap.} \Rightarrow m_p \propto 1/a^3$ , anche prima del disaccoppiamento, cioè  $T < 0,5 \text{ MeV}$ ) ed analogamente per  $m_B a^3$ . Sappiamo che  $\Omega_B = 0,03$ , quindi:

$$\Omega_B = \frac{m_B}{\rho_{\phi_0}} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 0,03 \quad \Rightarrow \quad \eta_B = \frac{\rho_{\phi_0} \cdot \Omega_B \cdot 6 \cdot 10^{23}}{m_p (=4 \cdot 10^3)} = 5 \cdot 10^{-10}$$

Primo aspetto che la materia oscura fosse costituita da particelle non relativistiche: se così fosse,  $\eta_B$  dovrebbe aumentare, ma questo è escluso dal modello cosmologico (per il quale  $\eta_B = \text{rap.}$ ): la materia oscura non può essere barionica.

Altrimenti, quindi, escluso: neutrini, quarkoni e barioni.

Sappiamo che:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = H \approx 1,7 \cdot \sqrt{\frac{T^2}{m_{\text{max}}}} = \frac{1}{2t} \quad \text{poiché} \quad \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{T^2}{m_{\text{max}}}}} \cdot \frac{10^{22} (\text{MeV})}{T^2 [\text{MeV}^2]}$$

allora otteniamo una relazione tra Tempo  $t$  e Temperatura  $T$ . In unità di  $t_0$ , si dice (con  $K = 6 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}$ ):

$$t = \frac{2}{\sqrt{\frac{T^2}{m_{\text{max}}}}} \cdot \left(\frac{1}{T [\text{MeV}]}\right)^2 \quad \text{secondi}$$

Ma che il disaccoppiamento dell'interazione debole avviene a  $T \approx 1 \text{ MeV}$ , proprio equivalente

ma è che esso avviene a  $t \approx 1 \text{ s}$ . Un ragionamento analogo, ci mostra che:

$$T_p \cdot (1+z) \approx 3 \text{ eV} \quad \Rightarrow \quad t_{\text{equilibrio}} \approx 10^{11} \text{ s} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ anni}$$

(tra materia e  $\nu$ )

24/05/2012

Una delle previsioni ulteriori della fisica della materia oscura è che quest'ultima possa essere legata all'esistenza di buchi non primordiali (MASSIVE COMPACT HALO OBJECT, MACHO): questa teoria sta momentaneamente tornando in voga.  
 La principale interazione p-e-ore è di tipo e.m.:

$$\sigma \propto \frac{d^2}{m_e^2} \quad \left( \sigma_{\text{Thomson}} = \frac{8}{3} \pi \cdot \frac{d^2}{m_e^2} \right)$$

quindi  $\sigma$  dipende dal seno profetto  $\mu$  desiderato  $P$  ed il disaccoppiamento dell'interazione oscura per  $P < H$  (in  $P = \sigma \cdot n_e \cdot v_{\text{rel}}$ ).

Altra condizione, nasce anche la relazione  $e-p \rightarrow H$  (idrogeno) +  $\mu$ : in due condizioni una interazione fra p-e-ore ed  $e-p \rightarrow H\mu$ . Sappiamo che la reazione avviene all'equilibrio:

$$e + p \leftrightarrow H + \mu$$

allora (per  $T$  t.c.  $m_e \gg T \Rightarrow$  cond. non relativistica):

$$n_e = g_e \cdot \left( \frac{m_e \cdot T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_e - m_p}{T}} \cdot e^{-\frac{(m_H - m_p - m_e) \cdot T}{T}}$$

e si può determinare il rapporto:

$$\frac{n_H}{n_e \cdot n_p} = \frac{g_H}{g_e \cdot g_p} \cdot \left( \frac{m_H}{m_e \cdot m_p} \cdot \frac{2\pi}{T} \right)^{3/2} e^{-\frac{\mu_H - \mu_e - \mu_p}{T}} \quad \left( \frac{\mu_H - \mu_e - \mu_p}{T} \approx 1 \text{ ed } m_H \approx m_p \right)$$

dato che i particelli liberi sono addizionali, vale anche che  $\mu_e + \mu_p = \mu_H$ , quindi (rispetto anche da  $m_H - m_e - m_p = E_{\text{legame}}(H) = B(H) = 13,6 \text{ eV}$ ):

$$\frac{n_H}{n_e \cdot n_p} = \left( \frac{2\pi}{m_e \cdot T} \right)^{3/2} \cdot e^{B/T} \quad \text{DURING ENERGY}$$

e sappiamo anche che  $P = \sigma \cdot n_e \cdot v_{\text{rel}}$ , allora ~~questo~~ la frazione di elettroni liberi  $X_e$ :

$$X_e = \frac{n_e}{n_e + n_H}$$

ma (per  $n_p$ )  $n_e = n_p$  (poiché l'universo è globalmente neutro), allora:

$$X_e = \frac{n_e}{n_e + n_H} = \frac{n_p}{n_p + n_H}$$

mentre  $n_B = \#$  di buchi. La funzione  $(1 - X_e) / (X_e)^2$  è una fun. della temperatura, infatti:

$$\frac{1 - X_e}{X_e^2} = \frac{\frac{n_H}{n_p}}{\frac{n_e}{n_p}} \cdot \frac{\frac{n_B^2}{m_p^2}}{\frac{n_p^2}{m_p^2}} = \frac{n_H}{n_p} \cdot n_B = \left( \frac{2\pi}{m_e \cdot T} \right)^{3/2} \cdot e^{B/T} \cdot n_B$$

dividendo e moltiplicando per il numero di  $p$  a quella temperatura e possibile ottenere la

espressione  $\eta_{CB} = \frac{m_B}{m_p}$ :

$$\frac{1 - X_e}{X_e^2} = \left( \frac{2\pi}{m_e T} \right)^{3/2} \cdot e^{B/T} \cdot \eta_{CB} \cdot m_p$$

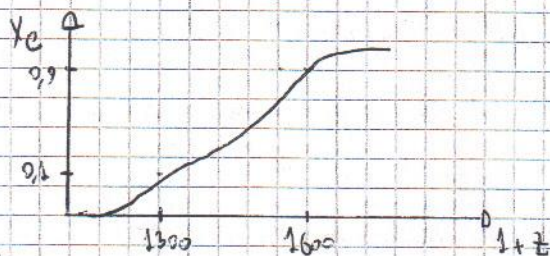
ma  $m_p = \frac{2g(p)}{\pi^2} \cdot T^3$ , quindi:

$$\frac{1 - X_e}{X_e^2} = \left( \frac{2\pi}{m_e T} \right)^{3/2} \cdot e^{B/T} \cdot \eta_{CB} \cdot \frac{2g(p)}{\pi^2} \cdot T^3$$

usando il fatto che  $T \cdot a = \text{cost.} \Rightarrow T = T_0 \cdot (1+z)$  (con  $T_0 = 2,7 \text{ } ^\circ\text{K}$ ), è possibile esprimere  $(1 - X_e)/X_e^2$  in funz. di  $z$ :

$$\frac{1 - X_e}{X_e^2} = \left( \frac{2\pi}{m_e T_0 (1+z)} \right)^{3/2} \cdot e^{B/T_0 (1+z)} \cdot \eta_{CB} \cdot \frac{2g(p)}{\pi^2} \cdot T_0^3 \cdot (1+z)^3$$

e si ha l'andamento:



ossia, quando  $1+z = 1300$ , si hanno atomi di H formati.

l'andamento di  $m_e$ , si ha:

$$m_e = X_e \cdot m_B = X_e \cdot \eta_{CB} \cdot m_p = X_e \cdot \eta_{CB} \cdot \frac{2g(p)}{\pi^2} \cdot T^3$$

quindi si riesce ad esprimere la densità di  $e^-$  in funz. della temperatura (ricordando che  $X_e$  è un  $X_e(T)$ ). Sostituendo la  $P$ :

$$P = \sigma \cdot m_e \cdot v_{\text{rel}} = \left( \frac{8}{3} + \frac{a^2}{m_e^2} \right) \cdot \left( X_e (1+z) \cdot \eta_{CB} \cdot \frac{2g(p)}{\pi^2} \cdot T_0 (1+z)^3 \right) \cdot c$$

ricordando che  $H^2 = \frac{8}{3} \pi G \rho$ , ma avere sapere se quella  $\rho$  è data da una "materia dominata" o da una "radiation domination"; ricorda che  $(1+z)$  ovunque  $\approx 10^4$  e che il numero  $1+z$  vale circa 1300, possiamo concludere che:

$$H^2 = H_0^2 \cdot (1+z)^3 = \frac{8}{3} \pi G \rho \Rightarrow H = H_0 \cdot (1+z)^{3/2}$$

ma, allora,  $H$  e  $P$  in "interazione" ad un certo valore di  $z$  ( $P \propto (1+z)^4$  ed  $H \propto (1+z)^{3/2}$ ), cioè avviene per  $1+z \approx 1100$  circa:

$$(1+z)_{\text{interazione}} P-H \approx 1100$$

tempralmente parlando, si ha:

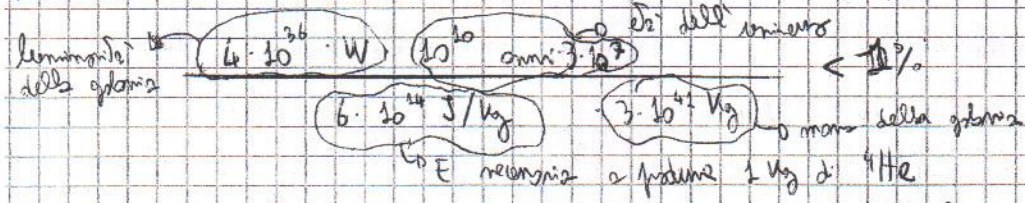
$$t = \frac{2}{3H_0 \cdot (1+z)^{3/2}} \approx 10^5 \text{ anni} \quad \text{per } (1+z) = (1+z)_{\text{interazione}} P-H$$



cioè, dopo circa  $10^5$  anni, si fa un disaccoppiamento del bagno termico.  
 Dipendiamo da 2° equazione Taz radiativa e materia omogenea  $a \approx 3000$  anni.  
 Dopo  $t \approx 10^5$  anni, si fa disaccoppiamento libero e l'energia ad anni diventa fluttuante liberamente.  
 Un altro punto importante è la formazione di nuclei più pesanti dell'H (ad esempio, si ha un sottile dell' ${}^4\text{He}$  dell'ordine del 25%):

frazione in massa di  ${}^4\text{He}$ :  $Y_{{}^4\text{He}} = 25\%$

e quella  ${}^4\text{He}$  non può essere stata prodotta solo all'interno delle stelle / iper, altrimenti:

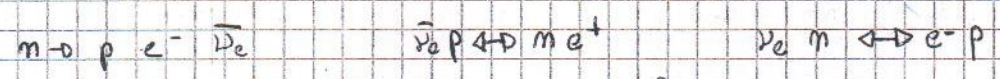


cioè, per del 24% della frazione di  ${}^4\text{He}$  non si basta ad produrre stellare.

Il modello cosmologico spiega come si è formato tutto questo  ${}^4\text{He}$ , infatti:

$$n = g \cdot \left( \frac{m \cdot T}{2\pi} \right)^{3/2} \cdot e^{-m/T} \Rightarrow \frac{n}{p} = \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{3/2} \cdot e^{-1.29/T}$$

uno dei modi in cui le popolazioni neutrone e protone si trovano in equilibrio è



per  $E < 1 \text{ MeV}$  continua di avviene da 1° ordine (che ha  $\tau \approx 800 \text{ s}$ ), ma non si dice bene, quindi:

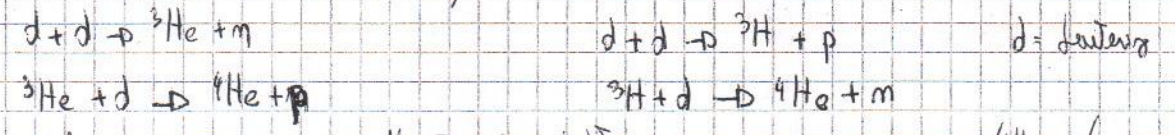
$$n(T=1 \text{ MeV}) \frac{n}{n+p} = \frac{n/p}{n/p+1} = \frac{e^{-1.29}}{e^{-1.29}+1} \approx 0.21$$

che è la frazione del # di n rispetto al # totale di  $n + p$ .

Inoltre, per  $T < 1 \text{ MeV}$ , non si hanno più protoni liberi, quindi:

$$\left. \begin{aligned} n &\rightarrow n \cdot e^{-t/\tau} \\ n+p &\rightarrow n+p \text{ (non varia per la con. del # barioni)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{n}{n+p} \cdot e^{-t/\tau}$$

Il processo  $n+p \rightarrow \text{deuterio} + \gamma$  (2.2 MeV), quando avviene all' $E \approx 1 \text{ MeV}$ , aveva anche un verso inverso ( $n+p \leftarrow \text{deut.} + \gamma$ ), se esiste di produzione dell' ${}^4\text{He}$  vero.



ed allora si forma un numero sufficiente di deuterio, che vanno tutti in  ${}^4\text{He}$  (a energia presente dominante), come accennato, però, se si nota Tropp  $\gamma$ , essi includono la produzione di  $d$ : la  $T$  deve essere abbastanza bassa (però  $m_p \propto T^3$ ) per non formare

del deuterio. In queste condizioni, si forma tutto  $4\text{He}$ : una volta che  $T$  è  
 verso sinistra (cioè il # di  $p$  con  $E \approx 2,2 \text{ MeV}$  è  $<$  del # di  $n$  liberi), allora  
 non si hanno più neutoni liberi da raggiungere la formazione dell' $4\text{He}$ .  
 Quindi:

$$\frac{n_p(E \geq 2,2 \text{ MeV})}{n_p} \leq \frac{n_B}{n_p} = \eta_B \Rightarrow \text{prod. di } 4\text{He} \text{ finale a } T = \bar{T}$$

rapporto dei flussi di  $n$ :  $\frac{n}{n+p} \cdot e^{-E/T}$  con  $\bar{E} \approx \left(\frac{1}{T(\text{MeV})}\right)^2$  MeV, quindi:

$$n_p(E \geq 2,2 \text{ MeV}) = \left[ \int_{\frac{2,2 \text{ MeV}}{T}}^{+\infty} \frac{E^2 dE/T}{e^{E/T} - 1} \right] \cdot \frac{g \cdot T^3 \cdot 4\pi}{(2\pi)^3} \cdot \frac{n_p(E \geq 2,2 \text{ MeV})}{n_p} \approx \int_{\frac{2,2 \text{ MeV}}{T}}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x} dx = (d^2 + 2d + 2) \cdot e^{-d}$$

$d = \frac{2,2 \text{ MeV}}{T(\text{MeV})}$  poiché  $e^x \gg 1$

$$n_p = \frac{2 \zeta(3)}{\pi^2} T^3$$

quindi, a meno di spinti:

e, da  $p$ , possiamo ricavare la temperatura  $\bar{T}$  (ad.  $\bar{E} = \left(\frac{1}{\bar{T}}\right)^2$ ):

$$0,21 \cdot e^{-\bar{E}/T} = \frac{n}{n+p}(\bar{T}) \Rightarrow Y_{4\text{He}} = \frac{2n}{n+p} = 25\% \Rightarrow 2 \cdot 0,21 \cdot e^{-\bar{E}/T} = 0,25$$

e possiamo ricavare  $\bar{E}$ , inserendo nella temperatura  $\bar{T}$  ed ottenendo  $\eta_B$ :

$$\eta_B = e^{-2,2 \text{ MeV}/\bar{T}}$$

il  $\bar{T}$  che si trova è  $\bar{T} = 100 \text{ KeV}$ : a questa temperatura non si ha più formazione di  
 neutroni. Il  $\bar{E}$  corrispondente è:

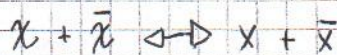
$$\bar{E} = \left(\frac{1}{0,1}\right)^2 \text{ s} \approx 100 \text{ s}$$

in realtà,  $100 \approx 3 \text{ min}$ : non si formano 3 minuti: mancano  $n$  la formazione di nuclei  
 leggeri (come  $\text{He}$  o  $\text{Li}$ ). Si ha:

$$Y_{4\text{He}} = 2 \cdot 0,21 \cdot e^{-100/100} \approx 58\%$$

29/05/2012

considerando due specie nelle equilibria:



si ha:

$$\frac{d(n_X \cdot a^3)}{dt \cdot a^3} = -\sigma_X \cdot v_X \cdot n_X^2 + \sigma_X \cdot v_X \cdot n_X^2(\text{eq.})$$

sufficiente:

$$1) T \text{ invariante: } \sigma_X v_X = |M|^2_{X\bar{X} \rightarrow X\bar{X}}; \quad \sigma_X v_X = |M|^2_{X\bar{X} \rightarrow X\bar{X}}$$

2) Le  $n_x(z) \propto e^{-E_x/T}$  (distrib. di Maxwell-Boltzmann)

Oss:

$$n_x^2(z) \propto e^{-\frac{E_x + E_z}{T}}$$

ma  $E_x + E_z = E_x + E_z$ , quindi:

$$n_x^2(z) \propto e^{-\frac{(E_x + E_z)/T}{T}} = e^{-\frac{(E_x + E_z)/T}{T}}$$

e in  $z$  invece:

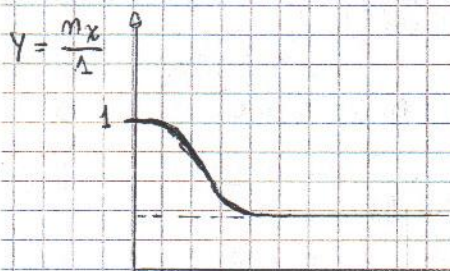
$$\frac{dn_x \cdot a^3}{dt \cdot a^3} = -\partial_x v_x n_x^2 + \partial_x v_x \cdot n_x^2(z) = -\partial_x v_x \cdot (n_x^2 - n_x^2(z))$$

se  $\exists$  per cui una possibile cancellazione, altre restano in  $z$ : simili ad i fondi:

$$\frac{1}{a^3} \frac{dn_x \cdot a^3}{dt} = -\langle \partial_x v_x \rangle_{\text{similari}} \cdot (n_x^2 - n_x^2(z))$$

il resto di quella eq. è che, per  $T \gg m_x \Rightarrow n_x = n_x(z)$ . Vediamo una

possibile relazione di quella equazione:



come sopra le  $\gamma$  non normalizzate  
( $\gamma \rightarrow \gamma(x)/\gamma(0)$ ).

mentre  $\lambda =$  densità di entropia. Sappiamo che  $\lambda \propto T^3$  e che era grande dei  $\gamma$  delle varie particelle formate.

Per  $x$  più  $\Rightarrow T$  grande  $\Rightarrow n_x = n_x(z) \Rightarrow \frac{d(n_x \cdot a^3)}{dt} = 0 \Rightarrow n_x \cdot a^3 = \text{cost.}$  del

resto, se  $n_x \propto T^3 \Rightarrow T^3 \cdot a^3 = \text{cost.}$  (cioè  $a \propto 1/T$ ). Se la  $\lambda$  viene  $\lambda$  non che cambia

lontano dall'equilibrio, all'aumentare di  $x$  (cioè, al diminuire di  $T$ ), la  $\lambda$  viene  $\lambda$  diventa non relativistica ed è densità, quindi, dalla funzione di distribuzione:

$$n_{NR} = g_{NR} \cdot \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} \cdot e^{-m/T} \Rightarrow \frac{n_{NR}}{T^3} = g_{NR} \cdot \left(\frac{m}{T \cdot 2\pi}\right)^{3/2} \cdot e^{-m/T} = g_{NR} \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{3/2} \cdot e^{-x}$$

quindi la funzione va giù esponenzialmente fino al dissolvimento della  $\lambda$ . A questo punto, la  $\partial_x$  diventa molto più  $\Rightarrow \frac{d(n_x \cdot a^3)}{dt} = 0 \Rightarrow n_x \cdot a^3 = \text{cost.}$  Infatti, se la  $\lambda$  viene  $\lambda$  è dissoluta, ma non si può né resta, né diventa, quindi è quindi che il  $\#$  di particelle nel volume  $a^3$  rimane costante.

Questo resta costante stabilisce il  $\#$  di particelle residue al momento attuale.

Lo quanto di particelle residue, quindi, dipende da quanto tali particelle ne sono

dissolte: prima si dissolvono e più se ne sono.

Le  $\lambda$  con restano maggiori, dunque, sono quelle con sezioni d'urto più piccole.

effettivamente un componente di momento, per risolvere quest'equazione si può usare il metodo di separazione delle variabili.

$$y(x) = \frac{m x}{1} \Rightarrow \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} \left[ \frac{m x}{1} (a^3 \cdot 1) \right] = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{d}{dt} [y \cdot (a^3 \cdot 1)] = \frac{a^3 \cdot 1}{a^3} \cdot \frac{dy}{dt} = 1 \cdot \dot{y}$$

inoltre:

$$dx = d\left(\frac{m}{T}\right) = -m \cdot \frac{dT}{T^2} \quad ; \quad H \propto T^2 \Rightarrow H = a \cdot T^2$$

$$T = \frac{1}{2H} \Rightarrow dt = -\frac{1}{2a} \cdot \frac{dT}{T^3} = -\frac{1}{dT^2} \cdot \frac{dT}{T} = -\frac{1}{H} \cdot \frac{dT}{T}$$

ma  $-\frac{dT}{T} = \frac{dx}{x}$ , quindi:

$$dt = -\frac{1}{H} \cdot \frac{dT}{T} = \frac{1}{H} \cdot \frac{dx}{x} \Rightarrow 1 \cdot \dot{y} = 1 \cdot \frac{dy}{dt} = 1 \cdot x \cdot H \cdot \frac{dy}{dx}$$

e si ottiene:

$$1 \cdot x \cdot H \cdot \frac{dy}{dx} = -\langle \Theta V \rangle_A \cdot m_x^2(x) \cdot \left( \frac{m_x^2/A^2}{m_x^2(x)/A^2} - 1 \right) = -\langle \Theta V \rangle_A \cdot m_x^2(x) \cdot \left( \frac{y^2}{y(x)^2} - 1 \right)$$

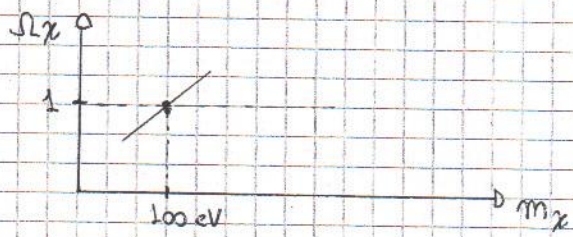
da cui:

$$1 \cdot x \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{\langle \Theta V \rangle_A}{H} \cdot m_x^2(x) \cdot \left( \frac{y^2}{y(x)^2} - 1 \right) \Rightarrow x \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{\Gamma_{eq, x}}{H} \cdot y(x) \cdot \left( \frac{y^2}{y(x)^2} - 1 \right)$$

RATE DI INTERAZ. DELLA SPECIE X

questo equaz. può essere risolta in modo analitico ed è detta EQUAZIONE DI BOLTZMANN PER LA FUORIUSCITA DELLA SPECIE X.

Il risultato della particella X che misura quale può essere approssimato nella logaritmicità:



per  $X = \nu$ , si assume:

$$m_\nu = 5 \text{ eV}, \quad \sum m_{\nu_i} = 30 \text{ eV}$$

$$S_{\nu} = \frac{m_i \cdot m_j}{S_{\nu}}$$

rispetto alle  $m_\nu \ll 100 \text{ eV}$ , quindi il rapporto  $S_{\nu}$  è  $\ll \frac{1}{100}$ . Sappiamo di avere un  $\nu$  non convenzionale che si dissocia quando è non relativistico.

Il caso di HOT DARK MATTER (HDM) quando una particella si dissocia quando è relativistica (si dissocia per  $T \gg m_X$ ), il caso di COLD DARK MATTER (CDM) quando il dissociazione avviene quando la particella è non relativistica ( $T \ll m_X$ ).

Nel caso di un effetto neutro CDM:

$$n = \left( \frac{m T}{2\pi} \right)^{3/2} \cdot e^{-m/T} \xrightarrow{\text{dissociazione}} m \Theta V = 1,66 \cdot \sqrt{g} \cdot \frac{T^2}{m_{plank}}$$

effettivamente:

$$\left( \frac{m T}{2\pi} \right)^{3/2} \cdot e^{-m/T} \cdot \Theta V = 1,66 \cdot \sqrt{g} \cdot \frac{T^2}{m_{plank}}$$

e, riscrivendo tutto in termini di  $x = m/T$ :

$$\left( \frac{m T}{2\pi} \right)^{3/2} \cdot e^{-x} \Theta V = 1,66 \cdot \sqrt{g} \cdot \frac{T^2}{m_{plank}}$$

voliamo da questa espressione fino a: onde per grandi variazioni della  $\theta$ ,  $x$  cambia di poco (dipendenza logaritmica). Supponiamo che:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} T \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3T}{m}} = \sqrt{\frac{3}{x}}$$

quindi:

$$\frac{1}{T} \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-x} \cdot \theta \cdot \sqrt{\frac{3}{x}} = 1,66 \cdot \sqrt{g} \cdot \frac{1}{m_{\max}} \Rightarrow \frac{x^2}{m^2} \left( \frac{m^2}{2\pi x} \right)^{3/2} \cdot e^{-x} \cdot \theta \cdot \sqrt{\frac{3}{x}} = 1,66 \sqrt{g} \cdot \frac{1}{m_{\max}}$$

da cui, semplificando il semplificabile:

$$m \cdot \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \cdot e^{-x} \cdot \theta \cdot \sqrt{3} = \frac{1,66 \sqrt{g}}{m_{\max}} \Rightarrow e^{-x} = \frac{1,66 \sqrt{g} \cdot (2\pi)^{3/2}}{\sqrt{3} \cdot \theta \cdot m \cdot m_{\max}} \Rightarrow x = \ln \left( \frac{\sqrt{3} \cdot \theta \cdot m \cdot m_{\max}}{1,66 \cdot \sqrt{g} \cdot (2\pi)^{3/2}} \right)$$

e' la dipendenza logaritmica già usata.

La temperatura  $T$  viene di solito scelta  $\theta = 6^2 \cdot m^2$ ,  $\sqrt{g} = 1/4$ ,  $m_{\max} = 1,66 \text{ eV}$ :

$$x = 17 \div 18$$

per parametri molto vicini ( $m = 100 \text{ GeV}$ ,  $\sqrt{g} = 15 \div 100$ ):

$$x = 27 \div 29$$

confronto a Termini in potere di ben 4 ordini di grandezza,  $x$  praticamente non varia ~~con i parametri~~ prima valore il numero di una mese.

$$m_{\text{oscillazione}} \cdot \theta \cdot v = 1,66 \cdot \sqrt{g} \cdot \frac{T_{\text{osc}}^2}{m_{\max}} \Rightarrow m_0 a^3 = \text{cost.}$$

Riferimento alla temperatura dei  $p$ , allora:

$$m_0 = \left( \frac{T_0}{T_0} \right)^3 \cdot m_0$$

e questo nelle vere e i  $p$  non approssimano entropia da tutta le altre particelle, in fase solo di questo, introduciamo un fattore correttivo  $2/g$ :

$$m_0 = \left( \frac{T_0}{T_0} \right)^3 \cdot m_0 \cdot \frac{2}{g} \Rightarrow m_0 = \frac{1}{T_0} \cdot (T_0)^3 \cdot \frac{1}{\theta \sqrt{\frac{3}{x}}} \cdot \left[ \frac{2}{g} \cdot 1,66 \sqrt{g} \right] \cdot \frac{1}{m_{\max}}$$

la densità di energia di queste particelle il mondo attuale è:

$$\rho_0 = m \cdot n_0 \Rightarrow \Omega_x = \frac{\rho_0}{\rho_c} = \frac{m \cdot n_0}{\rho_c} = \frac{m}{T_0} \cdot \frac{T_0^3}{\theta \sqrt{\frac{3}{x}}} \cdot \left[ \frac{2}{g} \cdot 1,66 \sqrt{g} \right] \cdot \frac{1}{m_{\max}} \cdot \frac{1}{\rho_c}$$

che  $m/T_0 = x$ . Se facciamo  $\Omega_x = 0,3$ , si trova:

$$\Omega_x = 0,3 \Rightarrow \theta = \frac{x T_0^3}{\sqrt{3} x} \cdot \frac{\rho_c}{m_{\max} \cdot 0,3} \cdot \frac{1}{\rho_c}$$

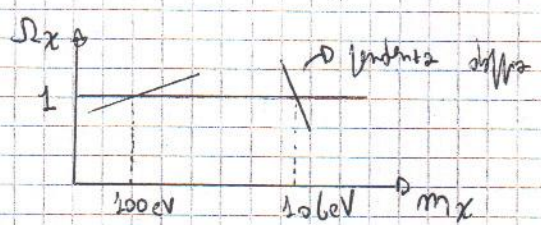
nel momento in  $x$  uguale ( $x = 25$ ), si trova:

$$\theta = 3 \cdot 10^{-36} \text{ cm}^2$$

le o una tipa  $\sigma$  di interazione debole.

$$G_F^2 \cdot (m^2 = 1 \text{ GeV}^2) = \frac{1}{25} \cdot 10^{-30} \text{ cm}^2$$

ma, allora, per essere un buon candidato di materia oscura, la particella deve essere insensibile all'interazione debole (o per lo meno  $\nu$  "non interattiva": o una particella con massa elevata, ed interazione debole). ~~Per~~ Per ora:

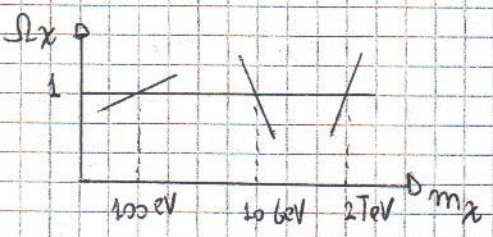


in realtà non può essere un  $\nu$  con  $m = 10 \text{ GeV}$  (altrimenti lo avremmo già trovato al LEP): se questa tipa di  $\nu$  esiste, ha  $m > 50 \text{ GeV}$ .

La Teoria di Fermi per le interazioni deboli non tiene per masse sopportabili o minori in quella del  $W^\pm$ : se paragoniamo con  $m_W \gg m_W$ , allora la  $\sigma$  è:

$$\sigma = \frac{g_w^2}{(s + m_w^2)^2} \cdot s \approx \frac{g_w^2}{s} = \frac{G_F^2 \cdot m_w^4}{m_x^2}$$

che è  $m_w$  indica una particella WIMP (Weakly Interactive Massive Particle). Quando questa Teoria, si dice che la stabilità della materia oscura ha  $m_x \approx 2 \text{ TeV}$ .



una particella di questo tipo (che, per ora, non sappiamo nemmeno) è prevista dalla Teoria SUPERSIMMETRICA: si tratta del NEUTRALINO.

Non è sempre presente un neutralino: nei primordiali universi, al pari, quelle erano anche quelle particelle supersimmetriche cariche.

Se una particella era presente anche, essa deve essere annichita all'interno delle galassie (un po' come la materia ordinaria): noi non sappiamo il processo attraverso il quale si interaggia debolmente (quindi interazione forte).

Possiamo valutare l'interazione neutralino-nucleo (di materia): il sistema si muove rispetto alla galassia a  $v = 200 \text{ km/s}$  ( $\Rightarrow \beta = 10^{-3}$ ), dunque i neutralini che entrano nei nuclei del sistema solare sono non relativistici, allora:

$$(m_w) \rightarrow (m_w) \quad (m_w \gg m_w) \quad \Rightarrow \quad E_{\text{max}} = 2 \cdot m_w \cdot v^2 = 2 A \cdot \text{keV}$$

ovvero  $A = \#$  di massa del nucleo. 50-100 keV di nuclei nucleari in famiglie per

minore, a pto di essere sufficientemente schermati dai neutroni.

Per via del periodo di vita della Vera Dark (1 anno), dovremo avere un picco massimo del # di interazioni in le WIMP a fondo: un esperimento (DAMA) lo ha osservato. Questo è importante, però permette di escludere l'ipotesi che si tratti di un fondo.

Il rate di interazione delle WIMP in un bersaglio è:

$$\frac{dN}{Ndt} = \sigma \cdot (m_W \cdot V_R) = \sigma \cdot \frac{\rho_W}{m_W} \cdot 10^{-3} \quad \text{ovvero } \sigma = m_W \cdot V_R = \frac{\rho_W}{m_W} \cdot V_R$$

Tipicamente  $\rho_W = 0,3 \text{ GeV/cm}^3 \approx 10^5 \Rightarrow \rho_W = 10^5 \cdot \rho_c$ , per spiegare il pto che le WIMP formano le galassie, Mercuriale, quindi:

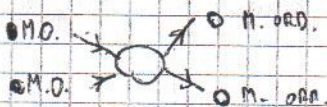
$$\frac{dN}{Ndt} \approx \text{meno di 1 al giorno}$$

non è, quindi, affatto facile osservare una interazione delle WIMP.

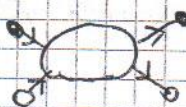
28/05/2017

Parlo anche delle interazioni deboli tra materia oscura e materia ordinaria:

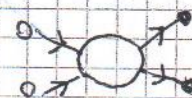
INDIRETTE



DIRETTE



COLLISIONI



quella diretta (più, al tempo, ovvio) tra WIMP e quark. La produzione di materia oscura usando collisioni tra particelle ordinarie non è ancora stata osservata.

La ricerca indiretta di materia oscura è molto attuale: si cerca produzioni anomale di particelle ordinarie (come  $e^+$  ed  $e^-$  e  $\nu$ ; non  $\mu$ , poiché con loro sono ancora più rari), in modo da correlare ad interazioni materia oscura-materia oscura.

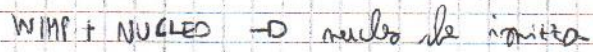
Queste ricerche sono fatte, al tempo, mediante: R.C. cosici (in esperimenti come FERMI, PAMELA od AMS).

L'esperimento ATIC, un pannello, al tempo, misura un eccesso di  $e^+$  ed  $e^-$ : tra le varie ipotesi si era anche l'interazione di due particelle di materia oscura. Queste misure sono, comunque, molto difficili: è difficile vedere dove sono e pto il fondo, ma questo non è un compito facile.

L'esperimento PAMELA era in grado di misurare la carica delle particelle, dunque senza distinguere tra  $e^+$  ed  $e^-$ : sopra ai 100 GeV, PAMELA ha osservato un eccesso misurato del rapporto  $e^+/(e^++e^-)$ . I modelli che interpretano tutto delle pulsar (raggi di  $e^+$  e di  $e^-$ ) vanno da Vera, permette di spiegare questo

modello non perturbato: si comprende la difficoltà di discernere tra eventi di origine naturale ed eventi legati al fondo (al tempo, contenuto delle pulsioni).

Per questo conviene, invece, la rivelazione diretta, ma conviene nelle rivelazioni:



questo tipo (modello non) di eventi dovrebbe arrivare nella terra in numero all'interno di un "vento di WIMP". Queste minime sono quelle, per via, basate sul rapporto di massa effettiva in periodi diversi dell'anno (modulazione annuale).

I metodi di rivelazione principali sono la ionizzazione, la scintillazione e la vibrazione (quest'ultimo tipo di rivelazione dipende dal bilancio di calore: come effettuare questo tipo di misura a bassa temperatura): questi metodi permettono di rivelare i nuclei ionizzati.

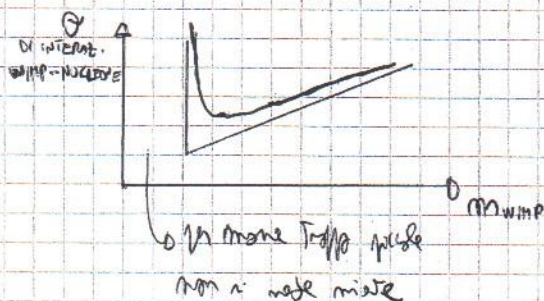
Un esperimento di rivelazione diretta basato sulla ionizzazione è DAMA, al fon. Ito.

DAMA ha grande una modulazione ~~annuale~~ delle minime compatibile con il periodo atteso (1 anno), gli eventi superiori tra 2 keV e 6 keV; le energie sono più basse di quelle attese per un neutronio supersimmetrico, inoltre, al momento stesso, nessun altro esperimento ha confermato le FLUTTUAZIONI osservate da DAMA.

Bisogna anche già escludere di fonti naturali; un tipo campo di fondo naturale è quello dei  $\mu$  prodotti nell'atmosfera: la densità dell'atmosfera dipende dalla temperatura della stessa (che, localmente, dipende dalla stagione) e, dato che il # di  $\mu$  incidenti dipende dalla densità dell'atmosfera, si comprende come essi abbiano un ciclo stagionale in estate (quando è più alta e l'atmosfera è rarefatta).

Un esperimento analogo (sempre al fon. Ito) è XENON, in cui si studia la combinazione della ionizzazione di un gran volume di Xe e della scintillazione. Questo esperimento, pur avendo la possibilità di effettuare minime locali (si scapira due e si aumenta la sezione di energia, quindi è possibile rivelare tutti gli eventi di tipo e.m. ed ovunque negli strati interni del volume di Xe), ha delle difficoltà nella stabilire la propria soglia di rivelazione: se era forse  $> 6$  keV, questo esperimento non poteva vedere eventi di WIMP.

I risultati dei vari esperimenti possono essere grafici in un plot:





Esame: un argomento a scelta + un argomento chiesto dal Prof. Durata  $\approx$  40 min.

Orto da concordare tra gli studenti  $\rightarrow$  riferire al Prof. (anche fuori dagli uffici ordinari).

email: [leonardo.baldoni@infm.pi.it](mailto:leonardo.baldoni@infm.pi.it)