

ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

demi1io@df.unipi.it

03/03/2010

Mercoledì 11-13, 16-18

Giovedì 11-13

Esame = scritto + orale

Libri

- Lezioni di Meccanica Quantistica
- Problemi " " "
- Griffiths - Meccanica Quantistica
- (Springer) The quantum Mechanics solver

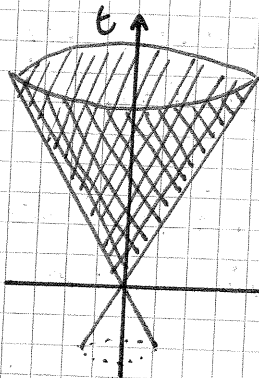
Padri fondatori della meccanica quantistica
(1925-1927)

Heisenberg - Nobel 32

Schrödinger } - Nobel 33

Dirac

Mettono in crisi i concetti di località e causalità



$$x = ct$$

$$t = \frac{1}{c} x$$

come luce. Se $v \neq c$ ($v < c$)
il cono è più stretto

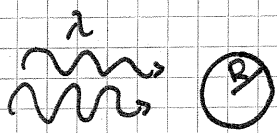
← Relatività ristretta

Predetta con 11 cifre significative il fattore gireomagnetico dell'elettrone. Tutte le cifre confermate dagli esperimenti.

Fino ad oggi non è stata falsificata la meccanica quantistica.

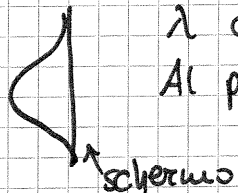
Effetto fotoelettrico inspiegabile assumendo che l'energia scambiata tra oem e campione si divide tra tutti gli elettroni ricettori.

Esperimento di Fresnel:



λ confrontabile con R

Al posto dell'ombra prevista si vede un massimo di luce.

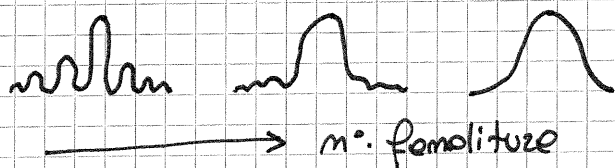


1889 Heinrich Hertz produce onde radio

1895 scoperti raggi X (Brag padre)

1927 Bragg ($2d \sin \theta = n\lambda$) (Reticolo di diffrazione) (figlio) misura i passi reticolari di diversi materiali e vince il Nobel.

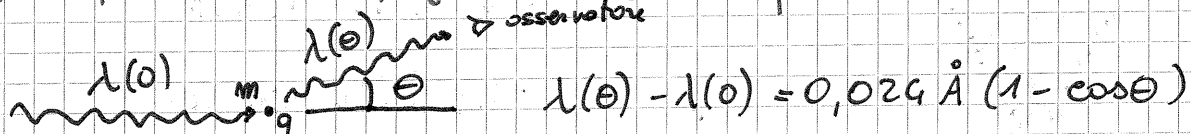
Esperimento di Young: più aumenta il numero di fenditure, più le figure di diffrazione tendono al continuo:



Interferenza e diffrazione sono 2 manifestazioni del principio di sovrapposizione.

Effetto Compton spiega l'impulso associato ad un'onda: $p = \frac{h}{\lambda}$

Effetto fotoelettrico spiega l'energia a pacchetti: $E = h\nu$



Questa legge associa ad ogni angolo di osservazione una lunghezza d'onda.

$$0,024 \text{ \AA} = \frac{h}{mc} = \text{lunghezza d'onda Compton}$$

m è la massa della particella su cui incide l'onda.

Relatività ristretta: per i fotoni $E = pc$

$$\Rightarrow \lambda E = hc = 12400 \text{ eV} \cdot \text{\AA}$$

visibile: $\lambda \approx 6000 \text{ \AA} \Rightarrow$ Energia scambiata $\approx 2 \text{ eV}$

Compton: $h\nu + mc^2 = mc^2 \gamma$, γ fornisce la velocità dell'elettrone.

Studio del corpo nero ← ricerca di standard di luminosità per vedere se convergono di più le lampadine elettriche o quelle a gas.

Con la meccanica classica (gravità, attrazione elettrostatica) non si può prevedere la dimensione dell'atomo. Non c'è in quelle formule nessuna lunghezza privilegiata.

Se non esistessero le orbite stazionarie per gli elettroni, si avrebbe collasso radiativo sul nucleo. L'energia irradiata dall'elettrone ad ogni giro è $-\frac{e^2}{2\pi}$.

L'accelerazione centripeta è fornita dalla forza coulombiana:

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{2r} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{e^2}{2r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{e^2}{mr^2}\right)^2$$

Abbiamo supposto che ad ogni giro l'elettrone perde un $dr \ll r \Rightarrow$ suppongo l'orbita CIRCOLARE.

In realtà il collasso radiativo è molto veloce (qualche decime di ms).

de Broglie → tesi di dottorato $\left\{ \begin{array}{l} v = \frac{E}{p} \\ \lambda = \frac{h}{p} \end{array} \right.$
equazioni per passare

da onda a corpuscolo e viceversa.

Ghirondi - "Un'occhiata alle coste di Dio" - libro divulgativo sulla quantistica.

Went-Hein - "I pantaloni di Pitagora" - storia

Heisenberg, prime matrici: $AB \neq BA \rightarrow$ Meccanica matriciale.

Schrödinger → meccanica ondulatoria. Risolve nell'ambito delle onde problemi di quantistica. Equazioni differenziali lineari a derivate parziali.

Dirac dimostra che i due metodi sono equivalenti.

1935 in poi, nessuno trova niente di nuovo nella quantistica.

La formula di Rydberg $E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \approx -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2}$

deriva dalla quantistica e

viene usata per essa oltre che per gli atomi di H.

Oggi con la meccanica quantistica si spiegano interazione forte, debole, e forza e.m., ma non ancora la forza gravitazionale.

1928 - non era stato ancora scoperto il neutrone -

Dirac prevede i positroni (ma pensa che sia il protone). 1932 → viene scoperto il positrone (Anderson).

Feynman → elettrodinamica quantistica

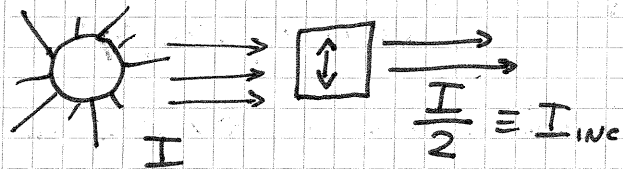
Sorgente = sde

Un pezzo di polaroid polarizza la luce nella sua direzione privilegiata.

La luce riflessa dal pavimento è già polarizzata, infatti se la guardo attraverso un pezzo di polaroid l'intensità che ricevo varia a seconda della rotazione dell'asse privilegiata.

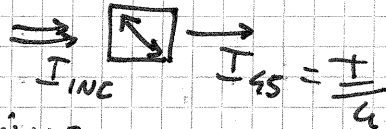
Legge di Malus

1. polarizzo il sole



2. aggiungo un polaroid a 45°

$$I_{45} = I_{inc} \cos^2 45^\circ$$



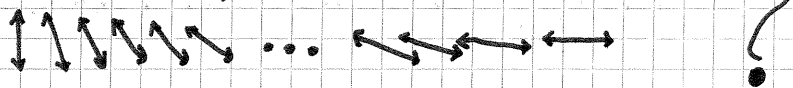
3. aggiungo un polaroid \perp al primo

$$I_f = \frac{I}{8}$$



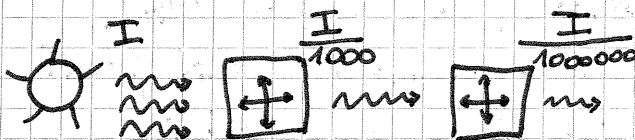
Se metto quest'ultimo subito dopo al primo, $I_f \sim 0$. Una coppia di polaroid \perp filtra tutto.

Cosa succede mettendolo una serie tendente ad infinito di polaroid con assi:



Dal sole arrivano $400 \div 500 \frac{W}{m^2}$.

In realtà una coppia di polaroid ortogonali qualcosa passa, e' un per mille dell'intensità incidente.



Ogni Joule corrisponde a 10^{12} fotoni gialli sdari.

Con un opportuno numero di coppie di attenuatori è possibile ridurre l'intensità ad 1 fotone al secondo.

no 6 attenuatori uno $\boxed{\updownarrow}$ \uparrow \nwarrow

Il fotone \neq PASSA OLTRE l'ultimo rivelatore o no?

Abbiamo di fronte un esperimento di cui controlliamo al 100% le condizioni iniziali, ma non possiamo controllare il risultato finale!

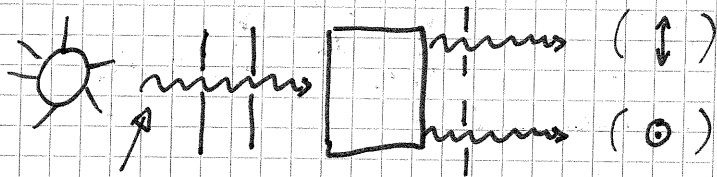
Posso dire qualcosa solo se metto il secondo polaroid parallelo o \perp al primo.

Altrimenti, per calcolare la probabilità che il fotone passi:

$$\cos^2 \Theta = \left| \langle e_0 | e_y \rangle \right|^2 \quad \bar{E} = h\nu$$

L'interazione con lo strumento di misura (l'ultimo polaroid) costringe il sistema a scegliere uno stato.

Cristallo birifrangente

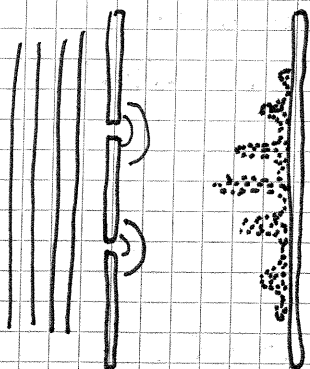


non polarizzata

Se riduciamo l'intensità incidente ad un fotone per volta non sappiamo predire in che stato uscirà dal cristallo.

Uno spazio di Hilbert descrive la polarizzazione di un'onda (2-dim), un altro la propagazione (∞-dim)

$$\square \phi = \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(x,t) = 0 \quad \text{equazione d'onda unidimensionale}$$

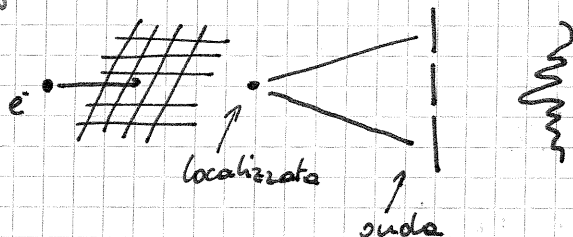


Posso immaginare i fotoni, o meglio, le onduline in fase uscenti dalle 2 fenditure, come due vettori due stati! che si sommano: in certi punti sono in fase, in altri in controfase.

Si chiamano ampiezze di propagazione.

Per un fotone, lo scambio di energia avviene in maniera corpuscolare, la propagazione in maniera ondulatoria.

Una volta localizzata una particella in un modo non distruttivo, quella comincia di nuovo a diffondersi in un'onda non localizzata.



CO RDA TESA

$$\begin{cases} \square \phi = 0 & \text{funzione} \\ \phi(x,0) = a(x), \dot{\phi}(x,0) = b(x) & \text{dati iniziali} \\ \phi(0,t) = \phi(L,t) = 0 & \text{condizioni al bordo} \end{cases}$$

\square = operatore di d'Alembert.

↑
↳ problema ben posto.

Soluzione generale

$$\phi(x,t) = F(x+vt) + G(x-vt)$$

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = a(x) \\ vF'(x) - vG'(x) = b(x) \Rightarrow F'(x) - G'(x) = \frac{b(x)}{v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = a(x) \\ vF'(x) - vG'(x) = b(x) \Rightarrow F'(x) - G'(x) = \frac{b(x)}{v} \end{cases}$$

↑
↳ sistema differenziale

$$\Rightarrow F(x) - G(x) = \int_{x_0}^x \frac{b(\xi)}{v} d\xi$$

dopo aver integrato
ambo i membri.

↳ x_0 arbitraria

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = a(x) \\ F(x) - G(x) = \int_{x_0}^x \frac{b(\xi)}{v} d\xi \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[a(x) + \int_{x_0}^x \frac{b(\xi)}{v} d\xi \right]$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \left[a(x) - \int_{x_0}^x \frac{b(\xi)}{v} d\xi \right]$$

$$\phi(x,t) = F(x+vt) + G(x-vt) = \frac{1}{2} \left[a(x+vt) + a(x-vt) + \frac{1}{v} \int_{x-vt}^{x+vt} b(\xi) d\xi \right]$$

La costante arbitraria x_0 s'è semplificata.

Questa è la soluzione espressa in termini di dati iniziali. La $b(x)$ deve essere localmente integrabile.

In assenza di dispersione, e se l'onda è solo progressiva o solo regressiva, la forma d'onda si conserva nel tempo.

Quali sono le condizioni su $a(x)$ e $b(x)$ affinché le onde siano solo progressive o solo regressive?

$$\phi(x, t) \rightarrow \phi(\vec{x}, t)$$

$$\square \phi = \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi(\vec{x}, t)$$

$$\phi(\vec{x}, 0) = a(\vec{x}); \quad \dot{\phi}(\vec{x}, 0) = b(\vec{x})$$

Come si fattorizza?

$$\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{\nabla^2} \right) \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{\nabla^2} \right) \phi(\vec{x}, t) \quad \text{NO.}$$

Ci fossero soluzioni della forma $\phi(x, t) = X(x)T(t)$?

$$\text{sen } k(x-vt) = \text{sen } kx \cos vt - \cos kx \text{sen } vt.$$

Se trovo delle soluzioni di un'equazione, allora anche le combinazioni lineari di queste sono soluzioni.

Cerco una base per questo spazio di soluzioni fattorizzate.

$$X \frac{1}{v^2} \ddot{T} = T X'' \quad \frac{1}{v^2} \frac{\ddot{T}}{T} = \frac{X''}{X} \quad \text{Separazione delle variabili.}$$

I due membri devono essere costanti.

$$\begin{cases} \frac{1}{v^2} \frac{\ddot{T}}{T} = \text{cost.} \equiv -k^2 \\ \frac{X''}{X} = \text{cost.} \equiv -k^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{costante di separazione.} \\ \text{Per ora ci limitiamo a} \\ \text{quelle negative - ARBITRARIAMENTE.} \end{array}$$

$$X'' = -k^2 X$$

$$\ddot{T} = -(vk)^2 T$$

X e T sono elementi dello spazio vettoriale di cui sto cercando la base.

Stiamo cercando gli autovettori dell'operatore derivata seconda rispetto agli autovalori $-k^2$ e $-v^2 k^2$. Risolvendolo:

$$X(x) = e^{ikx} \quad e^{-ikx}$$

$$T(t) = e^{i\omega t} \quad e^{-i\omega t} \quad \omega \equiv \sqrt{(kv)^2} \quad \omega \in \mathbb{R}^+$$

k può essere sia positivo che negativo!

$x(k) = e^{ikx}$ basta questo - $k \geq 0$, il segno viene da questa.
 Quindi, al variare di k :

$$\begin{aligned} \phi_k(x,t) &= X_k(x)T(t) = a e^{ikx} e^{i\omega t} + b e^{ikx} e^{-i\omega t} \\ &= a e^{i(kx + \omega t)} + b e^{i(kx - \omega t)} \\ &= a e^{-ik(x + \frac{\omega}{k}t)} + b e^{-ik(x - \frac{\omega}{k}t)} \\ &= a e^{-ik(x + vt)} + b e^{-ik(x - vt)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_k(x,t) &= \alpha e^{ik(x+vt)} + \beta e^{ik(x-vt)} \\ &= \alpha e^{i(kx - \omega t)} + \beta e^{i(kx - \omega t)} \end{aligned}$$

$$k \in \mathbb{R}$$

$$\omega_k = \sqrt{(kv)^2}$$

La soluzione GENERALE è:

$$\phi(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} (\alpha(k) e^{ik(x+vt)} + \beta(k) e^{ik(x-vt)})$$

Questi esponenziali sembrano trasformato di Fourier.

Quando è che questo integrale esiste?

$$|\phi| \leq \int \frac{dk}{2\pi} |\alpha(k)| \quad \phi \in L^1$$

Ci mettiamo direttamente in L^2 .
 Torniamo ai dati iniziali.

$$a(x) = \int \frac{dk}{2\pi} (\alpha(k) + \beta(k)) e^{-ikx}$$

$$b(x) = iv \int \frac{dk}{2\pi} (\alpha(k) - \beta(k)) e^{-ikx}$$

$$\int dx e^{ix} a(x) = \int \frac{dk}{2\pi} (\alpha(k) + \beta(k)) \int dx e^{-i(k-e)x}$$

$$\begin{cases} \hat{a}(e) = \alpha(e) + \beta(e) \\ \frac{1}{v} \hat{b}(e) = \alpha(e) - \beta(e) \end{cases} \quad \int dx e^{-i(k-e)x} = 2\pi \delta(k-e)$$

10/03/2010

Soluzioni dell'equazione di d'Alembert costituiscono uno spazio vettoriale chiuso sotto addizione e sottrazione

$$\left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \phi(x,t) = 0$$

$$\phi(x,0) = a(x)$$

$$\dot{\phi}(x,0) = b(x)$$

$$\Rightarrow a(x) e^{i(kx - \omega t)} + \beta(x) e^{i(kx + \omega t)}$$

$$k \in \mathbb{R}$$

$$\omega = \sqrt{(vk)^2}$$

La soluzione generale è

$$\phi(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \left[a(x) e^{i(kx - \omega t)} + \beta(x) e^{i(kx + \omega t)} \right]$$

Se a e $\beta \in L^2$, queste sono le loro trasformate di

Fourier:

$$a(x) = \int \frac{dk}{2\pi} [a(k) + \beta(k)] e^{ikx}$$

Scrivo un vettore come c.l. dei vettori della base:

$$\vec{v} = \sum v_i \vec{e}_i \quad \{\vec{e}_i\} \text{ ortonormale}$$

Come si trovano le proiezioni v_i ? Con prodotti

scalari:

$$(\vec{v}, \vec{e}_j) = \sum v_i (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \sum v_i \delta_{ij} = v_j$$

Dati due vettori:

$$\vec{v} = \{v_i\} \quad \vec{w} = \{w_i\}$$

$$(v, w) = \sum_i v_i w_i$$

$$\|v\|^2 = (v, v) = \sum_i v_i^2$$

$$\|v\| = 0 \iff v = 0$$

Proprietà non degenerativa del prodotto scalare

Norme non degenerare in L^1 (non deriva dal prodotto scalare in L^1 , non ne esiste uno giusto):

$$\|f\| = \int_{\mathbb{R}} dx |f(x)|$$

Lo spazio invece dotato di una norma derivata da un prodotto non deg. è $L^2(\mathbb{R})$ (spazio di Hilbert):

$$\|f\|_2 = \int_{\mathbb{R}} dx |f(x)|^2$$

$$(g, f) = \int_{\mathbb{R}} dx g^*(x) f(x) = \sum_i g_i^* f_i$$

$$L_2(\mathbb{R}) \leftrightarrow \{f_1, \dots, f_N, \dots\} \in L^2 \Leftrightarrow f = \sum_i f_i \in L^2$$

Tornando alla $a(x)$, una volta appurato che quell'integrale \int , e converge, allora anche $\phi(x, t) \in L^2$ perché è maggiorato da $a(x)$.

Aumentiamo le dimensioni dell'equazione. (*)

• e^{ikx} , $k \in \mathbb{R}$, è una base in $L^2(\mathbb{R})$

$$a(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \hat{a}(k)$$

↳ una base continua

$$(e^{ikx}, e^{ilx}) = \int \frac{dx}{2\pi} e^{-ikx} e^{ilx} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \delta(l-k) = \delta(k-l) \text{ (ortogonalità)}$$

• in realtà queste funzioni non sono L^2 ...

Stiamo parlando di DISTRIBUZIONI, sappiamo che:

$$a(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \hat{a}(k) \leftrightarrow a(x) = \sum_n \hat{a}_n e_n(x)$$

$$(e_n(x), e_m(x)) = \int_{\mathbb{R}} dx e_m^*(x) e_n(x) = \delta_{nm}$$

ℓ_2 = spazio delle successioni a quadrato sommabile

(*) Esportiamo in 3 dimensioni: nel caso del potenziale vettore:

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \vec{A}(\vec{x}, t) = 0 \text{ oppure } \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \phi(\vec{x}, t) = 0$$

Prima, la ϕ era una funzione scalare, anche se con più variabili.

$\phi(x, t)$ f. scalare ad 1 v.

$\phi(\vec{x}, t)$ f. scalare a 3 v.

Scriviamo:

$$\vec{A}(\vec{x}, 0) = \vec{a}(\vec{x})$$

$$\dot{\vec{A}}(\vec{x}, 0) = \vec{b}(\vec{x})$$

$\vec{A}(\vec{x}, t)$ f. vett. a 3 v.

(sono campi vettoriali)

Definisco: $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ $\omega = \sqrt{c^2 k^2}$ $\omega_k = c|\vec{k}|$

Ne deriva:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\alpha(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t)} + \beta(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega_k t)} \right]$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\vec{E}(\vec{k}) \alpha_\lambda(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t)} + \beta_\lambda(\vec{k}) \vec{E}_\lambda(\vec{k}) e^{i(\dots + \dots)} \right]$$

(somma sulle 3 variabili spaziali)

\vec{E} rappresenta la polarizzazione. Sappiamo che $\vec{E} \cdot \vec{k} = 0$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

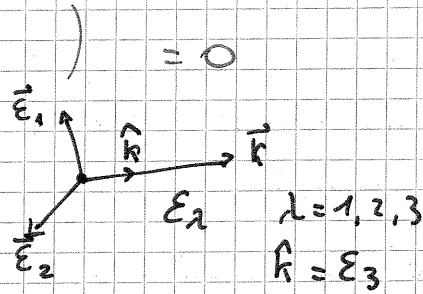
$$\vec{E} = \sum_{\lambda=1}^3 \vec{E}_\lambda \hat{\lambda}$$

Svolgendo:

$$\frac{1}{c^2} (-i\omega \vec{k})^2 - \sum_{j=1}^3 (ik_j)^2 + \frac{1}{c^2} (i\omega \vec{k})^2 = \dots$$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \right) \left(\dots \right) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \int \dots d_\lambda \vec{E}(\vec{k}) \cdot i\vec{k}$$



$$\vec{E}_\lambda(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega \vec{k} t)} \quad \vec{k} \cdot \vec{x} = \text{costante}$$

Se scelgo un sistema di riferimento dove $\vec{k} = (0, 0, k)$,

e considero:

$$e^{ikz - \omega t} = e^{ik(z - \frac{\omega}{k} t)} = e^{ik(z - ct)} = f(x - ct)$$

L'onda è progressiva.

La velocità con cui si muovono i piani di fase si chiama velocità di fase dell'onda.

L'onda è monocromatica perché è periodica con una sola frequenza.

$$\vec{E}_\lambda(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega \vec{k} t)}$$

onda monocromatica progressiva rettilineamente polarizzata

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^2 \left\{ d_\lambda(\vec{k}) \vec{E}_\lambda(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega \vec{k} t)} + d_\lambda^*(\vec{k}) \vec{E}_\lambda(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega \vec{k} t)} \right\}$$

$k \rightarrow -k$

$$d_\lambda^*(-\vec{k}) \vec{E}_\lambda(-\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega \vec{k} t)}$$

Così \vec{A} diventa una funzione reale ...

$$f(k) \in \mathbb{R} \Rightarrow \hat{f}(\vec{k}) = \hat{f}^*(-\vec{k})$$

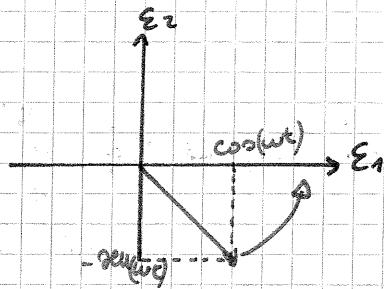
$$\text{Re} \left\{ d_\lambda \vec{E}_\lambda(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega \vec{k} t)} \right\} = d_\lambda \vec{E}_\lambda(\vec{k}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega \vec{k} t)$$

Fino a abbiamo visto onde polarizzate linearmente.

E quelle circolari?

$\vec{E}_1 + i\vec{E}_2$ ← Stato di polarizzazione circolare

Per disegnare dobbiamo prenderne la parte reale
 $\text{Re}\{(\vec{E}_1 + i\vec{E}_2)e^{-i\omega t}\} = \vec{E}_1 \cos(\omega t) + \vec{E}_2 \text{Re}\{ie^{-i\omega t}\} =$
 $= \vec{E}_1 \cos(\omega t) - \vec{E}_2 \sin(\omega t)$ (VETTORE ROTANTE)



Base per lo spazio delle polarizzazioni circolari:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{E}_1 + i\vec{E}_2) \equiv \sigma_+ \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{E}_1 - i\vec{E}_2) \equiv \sigma_- \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\langle \sigma_+, \sigma_- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-1) = 0 \Rightarrow \text{ortogonalità}$$

$$\sum_{\lambda=1}^3 \vec{E}_i^\lambda \vec{E}_j^\lambda = \delta_{ij}$$

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{E}_1\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rightarrow |\sigma_+\rangle \quad \langle \sigma_+ | \rightarrow (1, -i)$$

Rappresentazione bra-ket

$$N \rightarrow \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_m \end{pmatrix} = |N\rangle$$

$$\langle N | = (N_1^*, \dots, N_m^*)$$

$$\sum_{\lambda=1}^2 \vec{E}_i^\lambda \vec{E}_j^\lambda = \delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j$$

Ora in poi usiamo uno spazio complesso per le polarizzazioni.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \psi(\vec{x}, t) \quad *$$

Energia del campo elettromagnetico

$$E(t) = \frac{1}{2} \int d^3x [\vec{E}^2(\vec{x}, t) + \vec{B}^2(\vec{x}, t)] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\text{volume}} d^3x \left[\frac{1}{c^2} \dot{\vec{A}}^2(\vec{x}, t) + (\nabla \wedge \vec{A})^2(\vec{x}, t) \right]$$

= Σ , costante rispetto al tempo, se integro su \mathbb{R}^3

La funzione integranda è $L^2 \Rightarrow$ energia FINITA

* prim'ordine nel tempo, laplaciano.

OPERATORE DI SCHRÖDINGER

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \right] \psi(\vec{x}, t) = 0$$

$\psi \in \mathbb{C}$ Questo è l'equazione per la particella libera in 3 dimensioni.

Unico dato iniziale richiesto: $\psi(\vec{x}, 0) = a(\vec{x})$

Soluzione: perché l'equaz. è al 1° ordine in t

$$\psi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k^s t)} \phi(\vec{k})$$

$$\phi(\vec{k}) = \hat{a}(\vec{k}) \text{ (trasformata di Fourier di } a(\vec{x})) \Leftrightarrow \psi(\vec{x}, 0) = \hat{a}(\vec{x})$$

↑
altre notazione

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) + \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \psi(\vec{x}, t) =$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\hbar \omega_k^s - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k^s t)} \phi(\vec{k}) = 0$$

$$\Rightarrow \hbar \omega_k^s = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$$

" " " "

$$E = \hbar \omega = \hbar \omega$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} = \hbar \vec{k}$$

$$E = \hbar \omega = \hbar \omega$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} = \hbar \vec{k}$$

⇒ per un'onda singola progressiva piana: (monochromatica)

$$\psi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} e^{i \frac{\vec{p} \cdot \vec{x} - Et}{\hbar}} \phi\left(\frac{\vec{p}}{\hbar}\right)$$

... si ha un corpuscolo di energia E ed impulso \vec{p} .

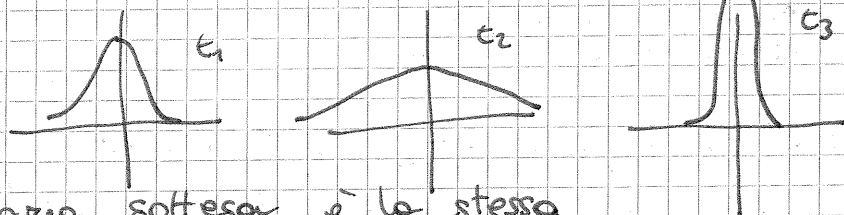
Relazione di dispersione: $\hbar \omega_k^s = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$

C'è una costante reale del moto? Come l'energia dell'oscillazione?

$$M(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \psi^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \rho(\vec{x})$$

MASSA TOTALE
DEL GRUPPO
D'ONDE

$|\psi|^2$ è costante nel tempo:



$\psi^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) \equiv \rho(\vec{x})$
(densità di probabilità)

l'area sottesa è la stessa

Dimostriamo che M è costante:

$$\int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{x} - \omega_p t)} \phi^*(\vec{p}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t)} \phi(\vec{k}) =$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \phi^*(\vec{p}) e^{i\omega_p t} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi(\vec{k}) e^{-i\omega_k t} \int d^3x e^{+i(\vec{k} - \vec{p}) \cdot \vec{x}}$$

sostituisco nel 1° int. tutte le k con le p

$$\int d^3x e^{+i(\vec{k} - \vec{p}) \cdot \vec{x}} = (2\pi)^3 \delta_3(\vec{k} - \vec{p})$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \varphi^*(\vec{k}) \varphi(\vec{k}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\varphi(\vec{k})|^2$$

Si conserva la norma L^2 del dato iniziale.

$$i\hbar \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi''$$

Soluzioni fattorizzate del tipo:

$$e^{ikx} e^{-i\omega_k^s t}$$

$$\psi_k''(x, t)$$

sapendo che: $\hbar \omega_k^s = \frac{(\hbar k)^2}{2m} = E$

questa E è 2 volte dipendente (in k)

In questo caso ovviamente non abbiamo ancora posto condizioni al bordo come avevamo fatto con la corda di chitarra.

Proviamo ad introdurre:

$$\psi(0, t) = \psi(a, t) = 0$$

Fissata un'energia, quanti k posso scegliere per mantenere valido la relazione di dispersione?

$+k$ e $-k$.

$$\psi_{-k}(x, t) = e^{-ikx} e^{-i\omega_k^s t}$$

$$\Rightarrow 2 \times \text{sen}(kx) e^{-i\omega_k^s t} = \psi_k - \psi_{-k} = \Delta_k(x, t)$$

$\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ sono lin. indipendenti e generano lo spazio delle soluzioni. Posso benissimo usare combinazioni di ψ_k e ψ_{-k} come la $\Delta_k(x, t)$.

Impongo la 2^a condizione al bordo:

$$\Delta_k(a, t) = 0 = \text{sen}(ka) e^{-i\omega_k^s t} \Leftrightarrow ka = m\pi \quad k_m = \frac{n\pi}{a}$$

$$\Delta_m(x, t) = \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{i\frac{E_m t}{\hbar}} \quad \text{con } E_m = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2} n^2$$

I k sono discreti, come anche i livelli dell'energia. I numeri interi sono spuntati: appena abbiamo imposto delle condizioni al bordo!

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

Da un punto di vista sperimentale (Rydberg) si trova:

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad \text{che è uno spettro ben diverso (H).}$$

N.B.: all'inizio avevamo scelto $k < 0$!

mi aspetto sempre soluzioni del tipo

$$L^2([0, a]) \text{ ovvero t.c. } \int_0^a dx |\psi(x)|^2 < +\infty$$

Condizioni iniziali ...

$$\psi(x, 0) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad \text{converge? in che modo?}$$

$$\|\psi_m(x, 0) - \psi(x, 0)\|_2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \equiv \text{convergenza}$$

Serie di Fourier!

Come evolve nel tempo?

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$$

Se converge la prima, converge anche questa, perché in modulo sono la stessa cosa.



Buca di potenziale in finita.

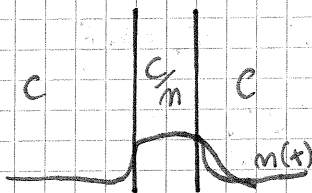
$$m \equiv m_e \quad a \equiv 1 \text{ \AA}$$

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{m a^2} \quad (\text{scala energia})$$

Con queste condizioni: $E \approx 27,2 \text{ eV}$, che è la stessa della formula di Rydberg.

$$E_{\text{max}} \approx \frac{\hbar^2 \pi^2}{m_p a_p^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{m a_p^2} \approx 10^6 \text{ eV} \leftarrow \text{transizioni nucleari}$$

Luce che attraversa un mezzo:



$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{m^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) A(x, t) = 0$$

Non è più a coefficienti costanti!*

$$m(x) = 1 + n(x)$$

Il potenziale può non essere costante.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi(x, t) = 0$$

Cerco soluz. fattorizzate: $\psi = T(t) X(x)$

$$\frac{i\hbar \dot{T}}{TX} = \frac{(HX)T}{TX}$$

$$i\hbar \frac{\dot{T}}{T} = E = \frac{HX}{X}$$

↑ costante di separazione, $E \in \mathbb{R}$

Diventano 2 equazioni.

$$\begin{cases} i\hbar \dot{T} = ET & \rightarrow T \propto e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \\ HX = EX & \rightarrow \text{problema autovalori - autovettori! } T\psi = \lambda\psi \end{cases}$$

$$(T - \lambda I)\psi = 0$$

Si evita la soluzione nulla quando la matrice non è invertibile.

Per quali matrici sicuramente \exists autovalori reali?

$$T = T^\dagger \leftarrow \text{Hermitiana!} \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

H è hermitiano?

Hermitiano significa che:

$$(w, T\psi) = (T^\dagger w, \psi) \quad T^\dagger = \text{hermitiana aggiunta di } T$$

Se $T = T^\dagger$, T è hermitiana.

$$\psi = \sum e_i (e_i \cdot \psi) \quad T\psi = T e_i (e_i \cdot \psi)$$

$$w = e_i (e_i \cdot \psi)$$

$$w = e_i (e_i \cdot \psi)^* = e_i (\psi \cdot e_i) \quad (\text{vett. colonna})$$

Siamo in uno spazio di Hilbert, c'è un prodotto scalare.

$$(G, HF) = \int G^*(HF) dx \stackrel{?}{=} (HG, F) = \int (HG)^* F dx$$

H è hermitiano?

Vediamo se lo è l'operatore $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Il coeff. davanti non conta. Se T è hermitiana, anche dT è hermit.

$$\int G^* \left[-\left(\frac{d}{dx}\right)^2 F \right] dx = \text{integro per parti.}$$

F, G continue e $\in L^2$

\Rightarrow il termine $uv \Big|_{-\infty}^{+\infty}$ va a 0

$$= \int (d_x G^*) dx F dx = \int (-d_x^2 G)^* F dx \equiv (TG, F)$$

\Rightarrow la derivata seconda $\frac{d^2}{dx^2}$ è hermitiana - la derivata prima è antihermitiana ($(G, T F) = -(T G, F)$);

$i \frac{d}{dx}$ è hermitiana.

La V che compare in H è hermitiana?

È una funzione reale - È hermitiano -

$\Rightarrow H$ hermitiano $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ ed esistono solo
 λ reali - (Spettro di un op. hermitiano).

(λ = autovalori)

Gli autovalori di $-\frac{d^2}{dt^2}$ sono positivi. (k^2)

ESERCIZI

11.03.10

3.1. $\lambda_0 = 6 \cdot 10^3 \text{ \AA}$

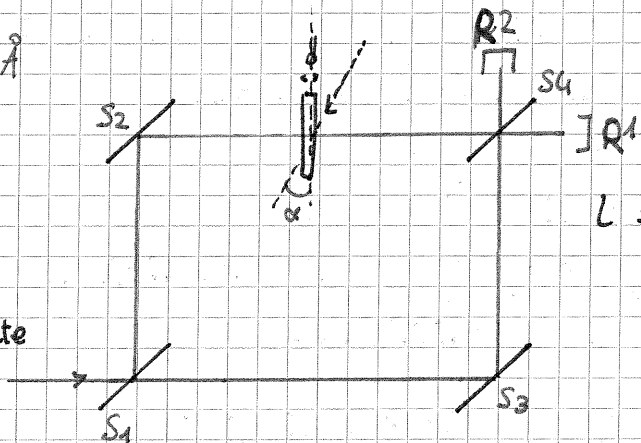
$$a^2 = b^2 = \frac{1}{2}$$

$$t^2 = a^2 = \frac{I_e}{I_c}$$

$$r = b^2 = \frac{I_r}{I_c}$$

non si dissipa niente

$$a^2 + b^2 = 1$$



S_4 riflettente
al 50%, come
 S_1

L sbarretta di vetro

Nel caso dell'onda si sommano i campi elettrici, del singolo fotone l'ampiezza di propagazione. L permette di variare la fase del fascio superiore. Con esso si torna l'interferometro per far arrivare le onde in fase -

$$m = 12 \quad d = 1 \text{ mm} \quad \delta\varphi = 2\pi \quad v = \frac{c}{m}$$

Di quanto devo variare α affinché lo sfasamento $\delta\varphi$ sia 2π ?

$$\lambda_0 v = c$$

$$\lambda v = \frac{c}{m}$$

$$\lambda_v = \frac{1}{m} \lambda_0$$

$$\delta\varphi = \frac{\text{lung. percorsa}}{\text{lung. d'onda}}$$

$$\delta\varphi = \delta\varphi|_{\varphi=0} - 2\pi \frac{d/\cos\alpha}{\lambda_v} = 2\pi \frac{d}{\lambda_0} m \left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1 \right)$$

(variazione rispetto al caso in cui L è verticale)

Espandendo con Taylor: $\frac{1}{\cos\alpha} - 1 \approx \frac{\alpha^2}{2}$

$$\delta\alpha \sim 10^{-4} \text{ rad}$$

I_0 intensità incidente. Calcolare $I(R_1)$ in funzione di φ , ed il contrasto delle frange:

$$\frac{I_1}{I_0}$$

$$V = \frac{I_{1\max} - I_{1\min}}{I_{1\max} + I_{1\min}} \quad (\text{visibilità} = \text{contrasto})$$

[integrare tra 0 e π il vettore di Poynting] $\tau \gg 1/2$

$$I_0 \propto \frac{1}{c} \int_0^z E^2(t, \bar{x}_R) \approx \frac{1}{2} E_{\text{MAX}}^2$$

Nel rivelatore invece arrivano i campi elettrici di entrambi i fasci.

Se i due fasci fossero polarizzati in modo \perp tra di loro, non ci sarebbero i termini di interferenza.

$$\left. \begin{aligned} E_a(t, \bar{x}_1) &= \frac{aE}{\sqrt{2}} \sin(\omega t + \varphi_2) \\ E_b(t, \bar{x}_2) &= \frac{bE}{\sqrt{2}} \sin(\omega t + \varphi_1) \end{aligned} \right\} \text{Sommare, quadrare, mediare}$$

$$I_1 = \frac{1}{c} \int_0^z dt (E_b^2 + E_a^2 + 2E_a E_b) = \frac{1}{c} \left[\frac{b^2 E^2}{2} + \frac{a^2 E^2}{2} + 2 \frac{E^2}{2} ab \int_0^z dt \sin(\omega t + \varphi_1) \sin(\omega t + \varphi_2) \right]$$

Formule di prostaferesi: (si ricavano con Eulero)

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

L'integrale diventa $\int dt [\cos(\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$

$$I_1 = \frac{E^2}{2} \left(\frac{1 + 2ab \cos \varphi}{2} \right)$$

$\underset{I_{\text{inc}}}{\parallel}$

$$I_2 = I_0 - I_1 = I_{\text{inc}} \left(\frac{1 - 2ab \cos \varphi}{2} \right)$$

Visibilità:

$$I_{\text{MAX}} \propto 1 + 2ab \quad I_{\text{MIN}} \propto 1 - 2ab$$

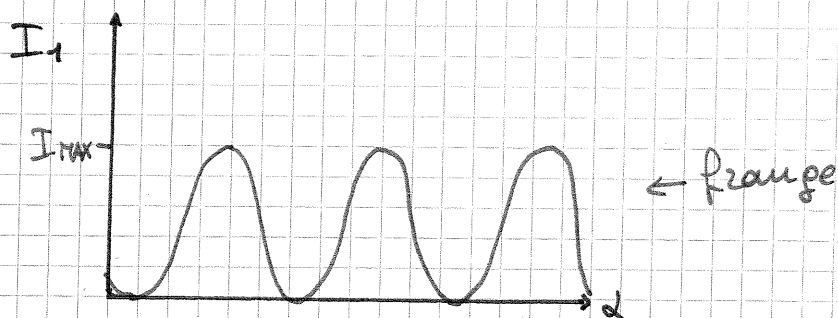
$$I_{\text{MAX}} - I_{\text{MIN}} = 4ab$$

$$V = 2ab$$

$$I_{\text{MAX}} + I_{\text{MIN}} = 2$$

Quando è max la visibilità? $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

\Rightarrow specchio semiriflettente in S1



3.2 • $\lambda_0 = 6 \cdot 10^3 \text{ \AA}$ $I_{inc} = 5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{erg}}{\text{s} \cdot \text{cm}^2}$

$d(S_1, S_3) + d(S_3, \text{rivelatori}) = 60 \text{ cm}$

Avanti: fotoni al secondo al cm^2 entrano nell'interferometro?

Avanti: ce ne sono in tutto?

$\lambda E = hc = 12000 \text{ eV}$

$\frac{I_{inc}}{h\nu} = \frac{dn}{dt ds}$

$I_{inc} = 5 \cdot 10^{-3} \frac{10^{12} \text{ eV}}{1.6} = 3 \cdot 10^9 \frac{\text{eV}}{\text{s} \cdot \text{cm}^2}$

$\frac{I_{inc}}{h\nu} = 5 \cdot 10^9$ ogni ms entra un fotone.

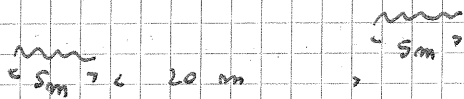
Distanza tra i fotoni?

Tempo di percorrenza $T = \frac{60}{3 \cdot 10^{10}} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ s}$

La distrib. è binomiale, calcolare scarto quad. medio.

3.3 • Aggiungere 30m di fibra ottica tra S2 e S4.

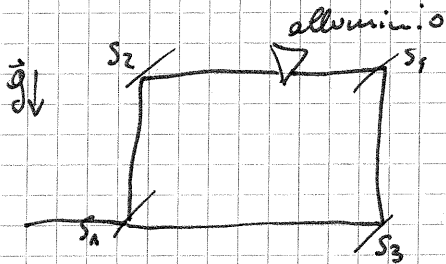
Due fotoni nemmeno lontanamente sovrapposti non fanno interferenza:



3.4 • Interferometro Bomze - Hart

Mettione su un reticolo dell'ordine dell'Å \Rightarrow riflessione Bragg

$K = \frac{2\pi}{\lambda}$



17-03-2010

$$i\hbar\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' \quad \psi(x,t) \in L^2(\mathbb{R}[x])$$

[$\varphi(x)$ funzione che rappresenta i coefficienti della sommatoria]

$$\psi(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi} \varphi(k) e^{i\frac{\hbar}{\hbar}(px - \epsilon_p t)}$$

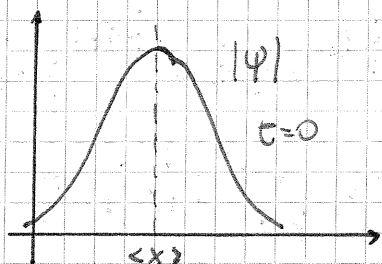
$$\hbar\omega_p = \epsilon_p = \frac{(\hbar k)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

Dato un dato iniziale $\psi(x,0) = a(x) \Rightarrow \varphi(k) = \hat{a}(k)$

Inoltre abbiamo visto questo invariante:

$$M = \int dx \psi^*(x,t) \psi(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi} \varphi^*(k) \varphi(k) \quad \text{Normalizzo } |\psi|^2:$$

$$\Psi \equiv \psi/\sqrt{M} \Rightarrow \int dx \Psi^*(x) \Psi(x) = 1 = \int dx \rho(x) \quad \text{densità di probabilità}$$



Parlando di Ψ lo considereremo già normalizzata.

Definiamo $|\Psi|^2$ densità di massa.

Definiamo un baricentro $x_G \equiv \frac{1}{M} \int dx x \Psi^* \Psi$ - Ci aspettiamo che nel tempo il centro di massa possa

muoversi solo di moto rettilineo uniforme - Non è sottoposto a forze!

$$\vec{x}_G(t) = \vec{v}_G(t) t + \vec{x}_G(0)$$

$$\vec{x}_G(t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \varphi^*(k) e^{i\frac{\epsilon_k}{\hbar} t} \varphi(l) e^{-\frac{i\epsilon_l}{\hbar} t} \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \vec{x} e^{i\vec{l}\cdot\vec{x}}$$

Ricordando che:

$$\int dx e^{i(l-k)x} = 2\pi \delta(l-k)$$

derivato ambo i membri e moltiplico per $-i$:

$$-i \frac{\partial}{\partial l} \int$$

ovvero:

$$\int dx x e^{i(l-k)x} = -2\pi i \delta'(l-k)$$

~ ~ ~ Istruzioni per l'uso ~ ~ ~

$$\int dk \delta(k-l) f(k) = f(l)$$

$$\int dk \delta'(k-l) f(l) = -f'(l) \quad [\text{tramite integrazione per parti}]$$

$$\int dk \delta''(k-l) f(l) = f''(l)$$

e così via.

ed il pacchetto cambia forma.

La velocità di gruppo totale si ottiene mediando tutti i contributi:

Per d'Alembert:

$$c \frac{\partial \psi}{\partial k} (|\vec{k}|) = c \hbar$$

di per sé da k solo per la direzione!

Schrödinger	d'Alembert
$v = v(\vec{k})$	$v = v(\vec{k})$

Il unico caso in cui le velocità di fase sono tutte c è quello unidimensionale dell'onda piana (che infatti per d'Alembert era non dispersiva) - Nei casi reali la velocità di gruppo è sempre $< c$.

formando a Schrödinger.

$$\omega_p = \frac{\hbar}{2m} k^2 \quad (\omega \text{ di fase})$$

si può vedere questa come v_g solo per onde piane, altrimenti si fa l'integrale.

Contributo alla velocità di gruppo: $\vec{v}_g = \vec{\nabla}_{\vec{k}} \omega_p = \frac{\hbar \vec{k}}{m}$

Velocità di gruppo: $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\psi^*(\vec{k})}{\sqrt{N}} \left(\frac{\hbar \vec{k}}{m} \right) \frac{\psi(\vec{k})}{\sqrt{N}}$ CASO GENERALE

Insomma il pacchetto si deforma - Quanto sarà largo?

larghezza quadratica del pacchetto

Caso unidimensionale

$$x_g(t) \equiv \langle x \rangle (t) \quad (q \text{ medio al tempo } t)$$

$$v_g \equiv \frac{\hbar}{m} \langle k \rangle \quad (\text{valor medio di } p/m)$$

Abbiamo due densità: $\rho(\vec{r})$, $\hat{\rho}(\vec{k})$ (ovviamente sottostanno al principio di indeterminazione).

$$\Delta x^2(t) = \langle x^2 \rangle_t - \langle x \rangle_t^2 \quad \text{momento secondo di } q$$

Infatti:

$$\Delta x^2(t) = \frac{1}{N} \int d^3x \psi^*(x,t) (x - \langle x \rangle)^2 \psi(x,t)$$

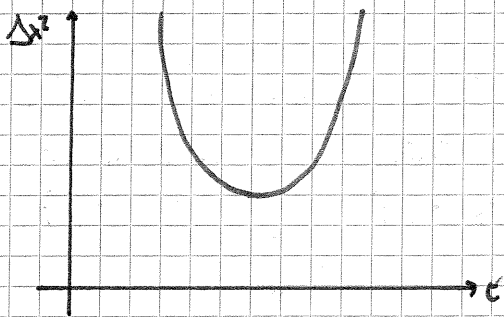
$$(x - \langle x \rangle)^2 = x^2 + \langle x \rangle^2 - 2x \langle x \rangle$$

$$\Delta x^2(t) = \langle x^2 \rangle + \langle x \rangle^2 - 2 \langle x \rangle \int \frac{dx}{N} \psi^* + \psi = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\Delta x^2(t) = 0 \Leftrightarrow \psi = 0 \quad \forall t$$

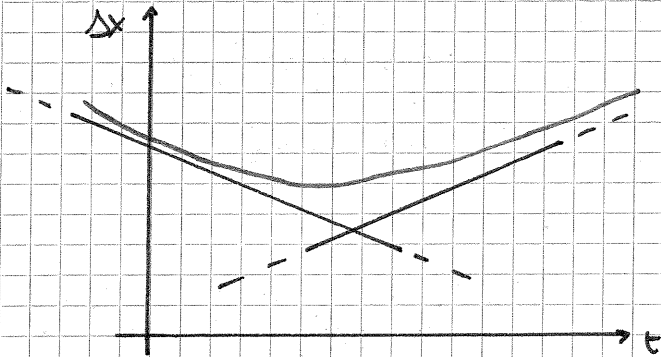
$\Delta x^2(t)$ si dice anche MOMENTO SECONDO. $\dot{\Delta x^2} \geq 0 \quad \forall t$

$$0 \leq \Delta x^2(t) = At^2 + Bt + \Delta x^2(0) \quad A > 0$$



← ha radici complesse
 $\Rightarrow \text{SA } \Delta x^2(t) > B^2$
 (discriminante < 0)

Il Δx sarà $\sim \sqrt{\Delta x^2}$:

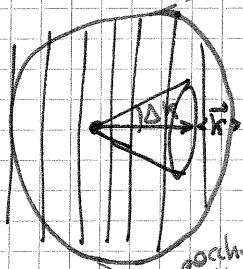


$\Delta x(t) \sim at$
 $\Delta y(t) \sim bt$
 $\Delta z(t) \sim ct$
 Δx non si annulla mai.
 $t \rightarrow +\infty \Rightarrow \Delta x \rightarrow +\infty$

$$\Delta k^2 = \frac{1}{\hbar} \int dk \varphi^*(k) (k - \bar{k})^2 \varphi(k)$$

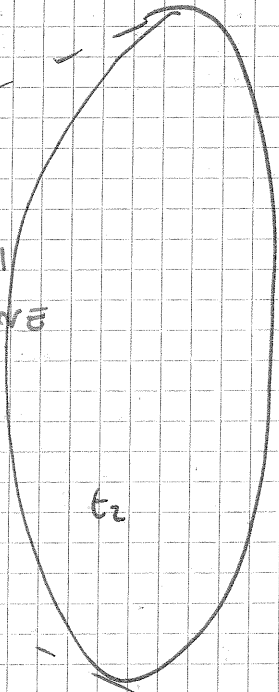
LARGHEZZA SPETTRALE

$$\Delta y^2 = \frac{\hbar^2}{m^2} \Delta k^2 t^2 + \dots$$



CONO DI
 DIFFRAZIONE

pacchetto
 d'onde



Le onde si
 propagano
 disperdendosi.
 La relazione di
 dispersione definisce
 il cono.

$t=0$

x

k

M

$$\int dx \psi^* \psi = \int dx \psi^* \mathbb{1} \psi = \int \frac{dk}{2\pi} \varphi^* \varphi = \int \frac{dk}{2\pi} \varphi^* \mathbb{1} \varphi$$

$\langle x \rangle$

$$\int dx \psi^* x \psi = \int dx (\psi_x)^* \psi = \int \frac{dk}{2\pi} \varphi^* (i \nabla_k) \varphi$$

$q: \psi \rightarrow x (\alpha \psi_1 + \beta \psi_2)$
 hermitian

$q': \varphi \rightarrow i \nabla_k \varphi$
 hermitian

$\langle k \rangle$

$$\int dx \varphi^* (-i \hbar \vec{\nabla}_x) \varphi = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \varphi^* k \varphi(k)$$

$p: \varphi \rightarrow \hbar k \varphi$

Rappresentazione delle coordinate	Rappresentazione degli impulsi
$q: \psi \rightarrow x\psi$	$\varphi \rightarrow i\partial\varphi$
$q^2: \psi \rightarrow x^2\psi$	$\varphi \rightarrow (i\partial)^2\varphi$
$p: \psi \rightarrow -i\hbar\partial_x\psi$	$\varphi \rightarrow \hbar k\varphi$
$p^2: \psi \rightarrow (-i\hbar\partial_x)^2\psi$	$\varphi \rightarrow \hbar^2 k^2\varphi$

Conoscere i momenti q di un'onda permette di conoscere il modulo dell'onda e non la fase - momenti $q =$ potenze di ∂_x

Calcoliamo i momenti di queste distribuzioni. $t=0$

$$\begin{array}{l}
 \psi^*\psi \equiv \rho \quad \varphi^*\varphi \equiv \hat{\rho} \\
 q: \int x\rho dx \quad \int k\hat{\rho} \frac{dk}{2\pi} \quad : p \\
 \int \psi^*(-i\hbar\partial)\psi dx \quad \int \frac{dk}{2\pi} \varphi^*(i\partial\varphi) \\
 q^2: \int x^2\rho dx \quad \int \varphi^*(i\partial)^2\varphi \frac{dk}{2\pi} \\
 \int \psi^*(-i\hbar\partial)^2\psi dx \quad \int k^2\hat{\rho} \frac{dk}{2\pi} \quad : p^2
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{tutto normalizzato} \\ \text{con } \frac{1}{L} \end{array}$$

Teorema

Dati $\rho(x)$,

$$|x|_N \equiv \int dx |x|^N \rho \geq |x_N| \equiv \int dx x^N \rho, \quad N=0, \dots, +\infty$$

$$\text{Supponendo } \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(|x|_N)^{1/N}}{N} = V < \infty$$

(m.lim = massimo limite (\sim limite del sup))

Allora è possibile ricostruire univocamente la ρ .

Dalla ρ non si ricostruisce la ψ (il fattore di fase scompare).

Supponiamo di avere $\psi_2(x) = \lambda\psi_1(x)$

$$M_2 = \int dx \psi_2^* \psi_2 = \lambda^* \lambda \int dx \psi_1^* \psi_1 = |\lambda|^2 M_1$$

$$\langle x \rangle_2 = |\lambda|^2 \langle x \rangle_1$$

$$\frac{\langle x \rangle_2}{M_2} = \frac{\langle x \rangle_1}{M_1}$$

I momenti p e q sono invarianti per ψ proporzionali tramite un $\lambda \in \mathbb{C}$. Infatti, ψ può al più essere ricostruita a meno di una costante (costante di fase)

Si può ricostruire a partire da tutti i momenti:

q e $p \forall N$?

es. 5.22

$$\psi_A(x) = \pm \psi_A^*(x) \quad \psi_B(x) = \pm \psi_B^*(-x) = \psi_A^*(x)$$
$$e^{-(a+ib)x^2} \quad e^{-(a-ib)x^2}$$

non sono proporzionali: $\frac{\psi_A}{\psi_B} = e^{-2ibx^2}$ $\frac{\psi_A}{\psi_B} = f(x) \Rightarrow \psi_A \not\propto \psi_B$

dimostrare che $\rho_A(x) = \rho_B(x) \Rightarrow q_A^N = q_B^N \forall N$

$$\rho_A = \psi_A^*(x) \psi_A(x) \quad \rho_B = \psi_B^*(x) \psi_B(x) = \psi_A^*(x) \psi_A(x) = \psi_A^*(x) \psi_A(x)$$

valore medio $q_A^N = \int dx x^N \rho = q_B^N$

dimostrare che $\hat{\rho}_A(x) = \hat{\rho}_B(x) \Rightarrow p_A^N = p_B^N$

$$\hat{\rho}_A(x) = \rho_A^*(k) \rho_A(k) \quad \hat{\rho}_B(x) = \rho_B^*(k) \rho_B(k)$$

$$\rho_A(k) = \int dx \psi_A(x) e^{ikx} \quad \rho_B(k) = \int dx \psi_A^*(x) e^{ikx}$$

$$\rho_B^*(k) = \int dx \psi_A(x) e^{-ikx} = \rho_A(-k)$$

Se ψ_A è pari/dispari, anche la sua trasformata è pari/dispari.

$$\rho_B^*(k) = \pm \rho_A(k) \Rightarrow \rho_A^*(k) \rho_A(k) = \rho_B^*(k) \rho_B(k)$$

$$\rho_B(k) = \pm \rho_A^*(k)$$

\Rightarrow memento con tutte le p e le q si può ricostruire ψ a meno di una costante.

Gli operatori X^N sono hermitiani. Inoltre:

$$X^m X^n \psi_A(x) = X^{m+n} \psi_A(x) = X^m X^n \psi_A(x)$$

$$\Rightarrow [X^m, X^n] = 0$$

Vediamo invece: $pq \psi_A \stackrel{?}{=} qp \psi_A$

$$pq \psi_A = -i \partial_x (x \psi_A) = -i \psi_A - i x \psi_A' \quad (\text{c'è un } \hbar)$$

$$qp \psi_A = x (-i \partial_x \psi_A) = -i x \psi_A'$$

$$(qp - pq) \psi_A = i \hbar \psi_A \quad \psi \text{ ha da essere derivabile!!}$$

$$[q, p] = qp - pq = i \hbar \mathbb{1}$$

COME SI RICA VA LA RELAZIONE DI INDETERMINAZIONE TRA DUE OSSERVABILI.

Siamo in uno sp. di Hilbert. Consideriamo due op-hermitiani: R e S , e un vettore $|A\rangle$

($|A\rangle$ è uno stato, ovvero una funzione d'onda (vettore) definita a meno di una costante)

$|A\rangle$ è normalizzato: $\langle A|A\rangle = 1$

$\langle A|R|A\rangle = \pi$ = valor medio dell'op. R sullo stato A

$\pi \in \mathbb{R}$, infatti è un elemento della diagonale della matrice hermit. R . (R scritto nella base dei vettori $|A\rangle$ & co.)

$$\langle A|S|A\rangle = s$$

Supponiamo $[R, S] = C$ (C operatore)

C è hermitiano? $C = C^\dagger$?

$$C = RS - SR$$

$$C^\dagger = (RS)^\dagger - (SR)^\dagger = S^\dagger R^\dagger - R^\dagger S^\dagger = SR - RS = -C$$

$$[(B, RSA) = (RB, SA) = (SRB, A)]$$

Quindi, $C^\dagger \neq C$ e $C^\dagger = -C$ (C è antihermitiano) -

iC è invece hermitiano.

$$[R, S] = iC$$

Definisco due nuovi operatori (che "conoscono" lo stato A):

$$P = R - \pi \mathbb{1} \quad \sigma = S - s \mathbb{1}$$

$$[P, \sigma] = [R - \pi \mathbb{1}, S - s \mathbb{1}]$$

Un commutatore è lineare in ognuno dei suoi argomenti. È antisimmetrico e dispari nello scambio dei suoi argomenti.

Il commutatore è un operatore

$$[R, S] = RS - SR = -[S, R]$$

$$[R+S, T] = RT + ST - TR - TS = [R, T] + [S, T] \quad (\text{distributivo})$$

$\mathbb{1}$ commuta con tutto.

Se ne ricava:

$$[P, \sigma] = [R, S]$$

Consideriamo $x \in \mathbb{R}$.

$R + ixS$ non è hermitiano - Applicandolo allo stato $|A\rangle$ e facciamo il modulo quadro.

$$[\langle A|R|A\rangle = (A, PA); \quad \langle A|S|A\rangle = (A, SA)]$$

$$(\hat{P} + ix\hat{\sigma})A$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq ((\hat{p} + ix\hat{\sigma})A, (\hat{p} + ix\hat{\sigma})A) = (A, (\hat{p} - ix\hat{\sigma})(\hat{p} + ix\hat{\sigma})A) = \\ &= (A, (\hat{p}^2 - ix(\hat{\sigma}\hat{p} - \hat{p}\hat{\sigma}) + x^2\hat{\sigma}^2)A) = \\ &= (A, \hat{p}^2 A) - x(A, \hat{\sigma} A) + (A, \hat{\sigma}^2 A) \end{aligned}$$

Motiviamo che:

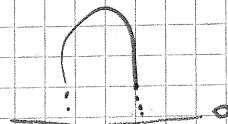
$$(A, (\hat{R} - r)^2 A) = r^2 - 2r(A, \hat{R} A) + (A, \hat{R}^2 A)$$

Si tratta di uno scarto quadratico medio.

L'espressione di prima diventa:

$$\Delta R_A^2 - x(A, \hat{\sigma} A) + x^2 \Delta S_A^2 \geq 0$$

È una parabola con $\Delta < 0$, quindi:



$$4(\Delta R_A^2)(\Delta S_A^2) \geq |(A, i\hat{\sigma} A)|^2 = |(A, [R, S] A)|^2$$

Due operatori che non commutano sottostanno a questa relazione:

$$\Delta R_A \Delta S_A \geq |(A, [R, S] A)| \cdot \frac{1}{2}$$

↳ Regole di Heisenberg - Robertson

Mel nostro caso, si ha:

$$\Delta X_A \Delta P_A \geq \frac{1}{2} |(A, i\hbar \mathbb{1} A)| = \frac{\hbar}{2}$$

In fisica classica uno stato è rappresentato da un punto sul piano delle fasi. Vediamo che in realtà non è un punto ma un quadratino di lato $\hbar/2$.

• vedi microscopio di Heisenberg.

In quali condizioni un esperimento saturo il principio di indeterminazione? ($\Delta \Delta \equiv \hbar/2$)

(pacchetti di minima indeterminazione)

Rifacciamo un conto:

$$(x - id_x) \psi_A - (-id_x x) \psi_A = i \psi_A = [x, -id_x] \psi_A$$

$$[id_x, \frac{\hbar}{i} k] \psi_A = \frac{\hbar}{i} i \psi_A$$

↳ questo segno che rende i due commutatori uguali.

$$[q, p] = i\hbar \mathbb{1} \quad (p = \hbar k)$$

torinando alla saturazione:

$$(\hat{p} + i\hat{\sigma}x)A = 0 \leftarrow \text{deve valere questa.}$$

Notazione: $\int d^3x \equiv \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3}$

Si introduce in:

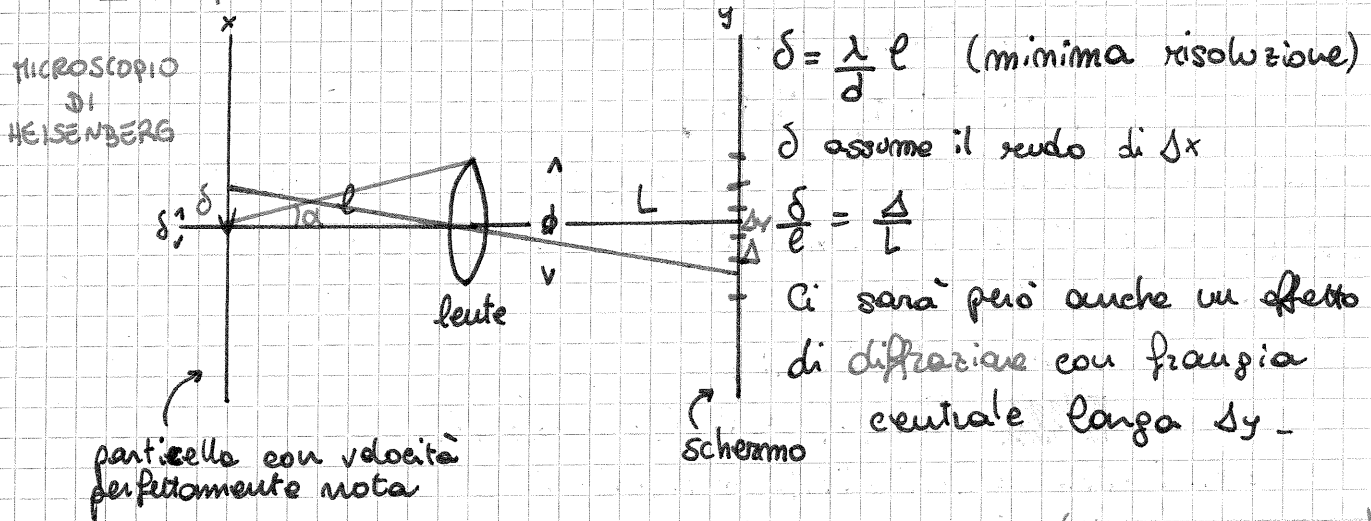
$$\frac{\partial}{\partial t_i} [\psi(\vec{x}) e^{i\omega(\vec{k})t} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}(t)}] = 0$$

18/03/2010

$$\Delta x_i^2(t) = \Delta x_i^2(0) + \frac{t}{m} \langle p_i p_i + q_i p_i - 2\bar{p}_i \bar{q}_i \rangle + \frac{t^2}{m^2} \Delta p_i^2$$

Qui m è la massa della particella, non la \hbar del pacchetto d'onde. La particella è libera.

Chiamiamo algebra degli osservabili della particella tutti i polinomi (di grado alto a piacere) del tipo $F(p, q)$.



la frangia centrale è visibile se $\delta > \delta y$ (dimensioni oggetto > risoluzione oggetto)

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{d} L < L \frac{\delta}{L} \Rightarrow \delta > \frac{L \lambda}{L} = \frac{\lambda}{2\alpha} = \frac{\lambda}{2d}$$

Si può capire la posizione iniziale del fotone solo se $\delta > \frac{\lambda}{2d}$. Sappiamo che per il fotone $p = \frac{h}{\lambda}$.

Prima che il fotone urti la particella, questa ha un impulso $p_p = mv$. Per cui l'impulso iniziale totale dopo l'urto sarà:

$$P_x \text{ tot} = mv_x - \frac{h}{\lambda} \alpha \quad (\text{cse il fotone va verso l'alto nella lente})$$

$$P_x \text{ tot} = mv_x' + \frac{h}{\lambda} \alpha \quad (\text{il bosso " " " " " "})$$

Sottraendo:

$$m \Delta v_x = \frac{h}{\lambda} \Delta d$$

Quindi, abbiamo il Δp .

$$\Delta x \Delta p > \frac{\lambda}{2d} \frac{h}{\lambda} \Delta d = h \quad [\text{microscopio di Heisenberg}]$$

Questa fu la prima formulazione del principio di indeterminazione, con h anziché $h/2$.

$[q_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}$ Gli indici si riferiscono alle direzioni.
Il principio di ind. vale solo per grandezze lungo la stessa direzione: posso invece conoscere simultaneamente q_1 e p_2 .

Momento angolare

$$\vec{L} = \vec{q} \wedge \vec{p}$$

$$L_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$$

$$L_2 = q_3 p_1 - q_1 p_3$$

$$L_1 = q_2 p_3 - q_3 p_2$$

Queste formulazioni per L_i sono prive di ambiguità.

$[q_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij} \Rightarrow$ non importa l'ordine in cui le scrivo.
($\delta_{ij} = \delta_{ji}$)

Regola di Liebniz

$$[RS, T] = [R, T]S + R[S, T]$$

$$= RST - TRS = (RT - TR)S + R(ST - TS)$$

Identità di Jacobi:

$$[R, [S, T]] + [S, [T, R]] + [T, [R, S]] = 0$$

Le parentesi di Poisson godono di queste proprietà.

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i}$$

Le Poisson brackets sono in meccanica classica l'analogo di quello che sono i commutatori per la meccanica quantistica.

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \{H, g\}$$

leggi del moto classiche.

Se per f prendo q_i e per g prendo p_j , $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$

$$[q_i, q_j] = 0 = [p_i, p_j]$$

$$\begin{aligned} [L_1, L_2] &= [q_2 p_3 - q_3 p_2, q_3 p_1 - q_1 p_3] = \\ &= [q_2 p_3, q_3 p_1] - [q_2 p_3, q_1 p_3] - [q_3 p_2, q_3 p_1] + [q_3 p_2, q_1 p_3] = \\ &= q_2 [p_3, q_3] p_1 - 0 - 0 + q_1 [q_3, p_3] p_2 = \end{aligned}$$

$$= -i\hbar q_2 p_1 + i\hbar q_1 p_2 = i\hbar L_3$$

$$[L_2, L_3] = i\hbar L_1$$

$$[L_3, L_1] = i\hbar L_2$$

Non si possono conoscere simultaneamente piú di UNA componente del momento angolare: a due a

due NON commutano! Si abbandona l'idea di traiettoria.

Regole di Heisenberg - Robertson

$$\Delta R_A \Delta S_A \geq |\langle A | [R, S] | A \rangle|$$

$$\begin{aligned} (\hat{p} + i\alpha \hat{\sigma}) |A\rangle &= 0 \\ z(\vec{k}, t) &\equiv \varphi(k) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}(t)} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial k_i} z + \frac{k - \bar{k}_i}{2(\Delta k)^2} z \right|^2 \geq 0 \Rightarrow \int d_3 k \left| \dots \right|^2 \geq 0$$

$$\int d_3 k \left(\frac{\partial z^*}{\partial k} \cdot \frac{\partial z}{\partial k} + \frac{(k - \bar{k})^2}{4(\Delta k)^4} z^* z + \frac{\partial z^*}{\partial k} \frac{k - \bar{k}}{2(\Delta k)^2} + \frac{\partial z}{\partial k} \frac{k - \bar{k}}{2\Delta k^2} z^* \right) =$$

$$= \Delta x^2(t) + \frac{1}{4\Delta k^4} \Delta k^2 - \int d_3 k z z^* \frac{\partial}{\partial k} \frac{k - \bar{k}}{2\Delta k^2} =$$

$$= \dots - \frac{1}{2\Delta k^2} \int d_3 k \varphi^* \varphi$$

$$= \Delta x^2(t) + \frac{1}{4\Delta k^2} - \frac{1}{2\Delta k^2} = \Delta x^2(t) - \frac{1}{4\Delta k^2} \geq 0$$

$$\Delta x^2(t) \geq \frac{1}{4(\Delta k)^2} \Rightarrow \Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Le gaussiane sono stati di minima indeterminazione

Inoltre, una gaussiane nello spazio delle x è ancora una gaussiane nello spazio delle k .

$\Delta x = \Delta x(t)$, $\Delta p = \text{costante del moto}$
Quando vale $\Delta x \Delta p = \hbar/2$? Quando:

$$0 = \frac{\partial}{\partial k_i} z + \frac{k - \bar{k}_i}{2(\Delta k)^2} z \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial k} = - \frac{k - \bar{k}}{2(\Delta k)^2} z$$

$$\frac{\partial z}{z} = - \frac{k - \bar{k}}{2(\Delta k)^2} \partial k \Rightarrow z = A e^{-\frac{(k - \bar{k})^2}{2(\Delta k)^2}}$$

Gaussiano nello spazio k .

Quello che abbiamo fatto è:

$$\left(-i\hat{q} + \frac{\hat{p} - \bar{h}}{2(\Delta k)^2} \right) \psi$$

Ovvero: $(\hat{p} - i\lambda\hat{q})\psi_A(x)$ ovvero $(\hat{p} - i\lambda\hat{q})\psi_A(x)$

$$\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - i\lambda x \right) \psi_A(x) = \psi_A' + \frac{\lambda x}{\hbar} \psi_A \equiv 0$$

$$\frac{d\psi_A}{\psi_A} = -\frac{\lambda x}{\hbar} \Rightarrow \frac{\psi_A(x)}{\psi_A(0)} = e^{-\frac{\lambda}{2\hbar} x^2} \text{ sempre gaussiano,}$$

ma nello spazio delle x .

Gli unic pacchetti d'onda che stanno in uno stato di MINIMA INDETERMINAZIONE sono le GAUSSIANE.

$$[p^2, q] = p[p, q] + [p, q]p = -i\hbar(p\mathbb{1} + \mathbb{1}p) = -i\hbar \cdot 2p$$

$$[p^3, q] = [p^2 \cdot p, q] = p^2(-i\hbar\mathbb{1}) + (-i\hbar 2p)p = -i\hbar 3p^2 \quad [q, p] = i\hbar$$

I commutatori agiscono un po' come le derivate.

Suppongo $f(p)$ polinomio in p . Allora:

$$\underline{[f(p), q] = [p, q]f'(p) = -i\hbar f'(p)}$$

$$f(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p^1 + a_0$$

$$f'(p) = n a_n p^{n-1} + (n-1)a_{n-1} p^{n-2} + \dots$$

Analogamente:

$$\underline{[g(q), p] = i\hbar g'(q)}$$

Supponiamo di conoscere i valori medi di tutte le osservabili $f(p, q)$ su un certo stato. (Si parla di misure di quantità fisiche!) Devono comunque sottostare a tutte le indeterminazioni.

Identifico lo stato del sistema, con la conoscenza di tutti i valori medi, come un raggio nello spazio di Hilbert (cioè lo conosco a meno di una costante).

Questo si chiama teorema di ricostruzione (Arthur Whiteman). Ma si tratta di infinite misure di infinite osservabili.

Lo stato di un sistema è identificato da un raggio in uno spazio di Hilbert (dotato di prodotto scalare).

Per avere più informazioni possibili sullo stato di un sistema occorre misurare un insieme completo di osservabili che commutano.

24/03/2010

$$\hat{q}: x \quad \hat{p}: \frac{i\hbar}{\hbar} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\psi_A(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \varphi_A(k) \quad (\text{trasf. di Fourier} \equiv \mathcal{F}) \quad * \mathcal{H}$$

Siamo nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Indichiamo con $|A\rangle$ i vettori $\in L^2(\mathbb{R})$. Possiamo definire una base.

$$\left\{ \sum_1^N c_n |e_n\rangle, c_n \in \mathbb{C}, n=0, 1, \dots \right\}$$

Questo insieme è denso in \mathcal{H} . Per definire la densità occorre la nozione di vicinanza \leftarrow norma \leftarrow pr. scalare.

$$|A\rangle = \sum_1^{\infty} a_n |e_n\rangle$$

$$|B\rangle = \sum_1^{\infty} b_n |e_n\rangle$$

$$\langle B|A\rangle = \sum_1^{\infty} b_n^* a_n$$

Si dimostra che questa converge tramite la dis. di Schwartz:

$$|\langle A|B\rangle| \leq \|A\| \|B\| \quad \text{dove } \|A\| = \langle A|A\rangle^{1/2} \dots$$

Quindi, ha senso scrivere che:

$$|A\rangle = \sum_1^{\infty} a_n |e_n\rangle \quad \equiv \text{la serie } \sum a_n |e_n\rangle \text{ converge proprio ad } |A\rangle.$$

Se ci limitiamo ad N dimensioni, il prodotto è lineare:

$$\langle C_N | D_N \rangle = \sum c_m^* \langle e_m | \sum d_n |e_n\rangle = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^M c_m^* d_n \delta_{nm} = \sum_1^N c_m^* d_m$$

Lo spazio in cui questo avviene è detto pre-hilbertiano.

Hilbert ha dimostrato che vale anche per spazi

∞ -dimensionali, hilbertiani separabili*.

Le successioni di Cauchy convergono ad un solo valore.

* Uno spazio di Hilbert si dice SEPARABILE se è possibile trovare al suo interno un set completo di vettori ortonormali.

$|e_n\rangle$ vettore della base - proiettore sul sottospazio generato da $|e_m\rangle$

Cosa fa l'operatore $P_m = |e_m\rangle\langle e_m|$?

$$P_m |e_n\rangle = |e_m\rangle\langle e_m | e_n\rangle = \delta_{mm} |e_m\rangle$$

Questo si dice proiettore.

Prendiamolo su un vettore A qualunque:

$$\begin{aligned} |e_m\rangle\langle e_m | A\rangle &= \sum_n |e_m\rangle\langle e_m | a_n |e_n\rangle = & |A\rangle = \sum_n a_n |e_n\rangle \\ &= \sum_n a_n |e_m\rangle \delta_{mm} = a_m |e_m\rangle = P_m |A\rangle \end{aligned}$$

Il proiettore ha autovalori 0 e 1, che sono limitati.
 \Rightarrow è limitato \Rightarrow è definitibile su tutto \mathcal{H} .

Si nota anche che:

$$\sum_m P_m |A\rangle = \sum_m |e_m\rangle\langle e_m | A\rangle = \sum_m a_m |e_m\rangle = |A\rangle$$

\Rightarrow La somma di tutti i proiettori è l'1.

$$\sum_m |e_m\rangle\langle e_m| = \mathbb{I} \quad \text{Relazione di Completezza}$$

Ovviamente, i proiettori vanno messi TUTTI dentro la somma -

La precedente si chiama Relazione di completezza -

Si dice anche "decomposizione dell'identità"

secondo la base $\{|e_n\rangle\}_n$ - \hookrightarrow è la decomposizione spettrale dell'operatore identità.

Ma di basi ortonormali posso scegliere quante voglio, in \mathcal{H} .

Secondo la base $\{|e_n\rangle\}_n$, si ha

$$|A\rangle \leftrightarrow \sum_n a_n \quad \sum |a_n|^2 = \langle A | A \rangle < +\infty$$

Ma secondo la base $\{|e'_n\rangle\}_n$,

$$|A\rangle \leftrightarrow \sum_n a'_n \quad \sum |a'_n|^2 = \langle A | A \rangle < +\infty$$

Gli $\{a_m\}$ si ottengono dagli $\{a'_n\}$ tramite una matrice unitaria che esprime il cambiamento di base. Ovviamente, se le basi scelte sono ortonormali.

La matrice unitaria conserva l'ortonormalità della base e quindi le norme dei vettori.

1) Quali operatori lineari in H ammettono un insieme ortormale di autovettori?

$$T|e_n\rangle = t_n|e_n\rangle$$

2) Quali operatori lineari ammettono una base di autovettori corrispondenti ad autovalori reali?

In N dimensioni sarebbero gli operatori hermitiani.

In n dimensioni, le nozioni di hermiticità e di autoaggiunzione NON COINCIDONO. Per i nostri usi, questo è comunque poco rilevante.

In generale: $(v, Tu) = (T^+v, u) \stackrel{\text{il prod. scalare}}{=} \langle v, Tu \rangle$

Inoltre: $(T^+v, u) = (Tv, u) \Rightarrow T$ hermitiano.

Es.: verificare se id_x è hermitiano in $C^1([0, a])$.

$C^1([a, b])$ è denso in $L^2([a, b])$

se definisco:

$$D_0 = \{f \in C^1 \mid f(0) = f(a) = 0\}$$

Allora, id_x è hermitiano in $D_0([0, a])$.

Se consideriamo l'espressione $(v, Tu) = (T^+v, u)$ allora basta che $0 \neq f$ o g sia in D_0 .

In questo caso: $T \neq T^+$ e T si dice SIMMETRICO.

Se il dominio di T è UGUALE al dominio di T^+ , allora T si dice AUTOAGGIUNTO ed ammette una base ortormale di autovettori di autovalori reali.

Supponiamo T tale che: $(= \text{ammette decomposizione spettrale})$

- $T e_n = t_n e_n$ (T ammette autovettori ed autovalori)
- a_n complet. (autovettori formano una base completa)

$$T = T^+ \Leftrightarrow T \text{ simmetrico} \Rightarrow t_n \in \mathbb{R}$$

dim. in Metodi

Allora: autovettori di autovalori diversi sono L. Infatti:

$$(e_m, T e_n) = t_n (e_m, e_n) = (T e_m, e_n) = t_m (e_m, e_n)$$
$$t_n \neq t_m \Rightarrow (e_m, e_n) = 0$$

In notazione di Dirac:

$$\langle e_m | T | e_n \rangle = t_n \langle e_m | e_n \rangle = t_m \langle e_n | e_m \rangle$$

Se T è autoaggiunto...

$$T = T^\dagger \Rightarrow \sum_n |e_n\rangle \langle e_n| = \mathbb{I}$$

"gli operatori autoaggiunti sono una fabbrica di basi"

Nella rappresentazione della sua base, T si scrive:

$$T = \sum_n |e_n\rangle t_n \langle e_n| \quad \text{Rappresentazione spettrale di } T$$

Infatti: $T |e_m\rangle = \sum_n |e_n\rangle t_n \langle e_n | e_m \rangle = \sum_n |e_n\rangle t_n \delta_{mn} = t_m |e_m\rangle$

Per operatori autoaggiunti è banale dire che:

$$f(T) = \sum_n |e_n\rangle f(t_n) \langle e_n|$$

← Se T è autoaggiunto.

$$f(T) |e_m\rangle = f(t_m) |e_m\rangle$$

Tutte le $f(T)$ hanno la stessa base di autovettori, cambiano gli autovalori.

Problema: $\sqrt{T} |e_m\rangle = \sqrt{t_m} |e_m\rangle$ se uno dei t_m è < 0 , allora \sqrt{T} non è hermitiano!

$$e^{\alpha T} = \sum_n |e_n\rangle e^{\alpha t_n} \langle e_n| = 1 + \alpha T + \frac{(\alpha T)^2}{2!} + \dots + \frac{(\alpha T)^n}{n!} + \dots$$

... un operatore può convergere in 3 modi possibili.

In N dimensioni, quella serie converge in \mathbb{R} o \mathbb{D} ?

Consideriamo e^{-T} :

$$e^{-T} = \sum_n |e_n\rangle e^{-t_n} \langle e_n|$$

$t_m \in \mathbb{R} \rightarrow$ esempio: $-\frac{\hbar^2}{2m} \dots \Rightarrow \bar{E}_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$ DIVERGE

\Rightarrow l'op. non è limitato \Rightarrow non è definitibile dappertutto.

In questo caso, l'op. era la derivata seconda, che infatti non è definitibile dappertutto.

Torniamo ad e^{iat} : ogni e^{iat_n} ha modulo 1! Infatti e^{iat} è un op. UNITARIO, ed è teorema che ci assicura che ha una base completa di autovettori, anche se gli autovalori non sono $\in \mathbb{R}$.

$$U|e_n\rangle = \lambda|e_n\rangle$$

$$(Ue_n, Ue_n) = (\lambda e_n, \lambda e_n) = \lambda^* \lambda (e_n, e_n)$$

$$(e_n, U^* U e_n) = (e_n, e_n)$$

\Rightarrow se U ha autovalori, questi hanno modulo 1.
È un sse: se $|\lambda| = 1$, U è unitario.

$$U = \sum_n |e_n\rangle e^{iat_n} \langle e_n| \quad U^* = \sum_n |e_n\rangle e^{-iat_n} \langle e_n|$$

$$U^* U = \sum_{m,n} |e_m\rangle e^{iat_m} \langle e_m| e_n \rangle e^{-iat_n} \langle e_n| = \\ = \sum |e_n\rangle \langle e_n| = \mathbb{I}$$

Un operatore è definito positivo se:

$$\langle A|T|A\rangle \geq 0 \quad \forall |A\rangle$$

Il che eq. a dire che gli elementi sulla diagonale della matrice T_{ij} sono positivi.

Se l'op. è hermitiano, equivale a dire che gli autovalori sono tutti ≥ 0 .

* dimostrazione *

Quando un autovalore è nullo, l'operatore non è invertibile ($1/T \nexists$ perché $\nexists 1/t_n$).

|||

Quando una matrice ha rango nullo non è invertibile.

$$T^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |e_n\rangle n^2 \langle e_n|$$

$$T|e_1\rangle = |e_1\rangle$$

$$T|e_{-1}\rangle = -|e_{-1}\rangle$$

$$T^2|e_{\pm 1}\rangle = +|e_{\pm 1}\rangle$$

Il comb. lin. di $|e_1\rangle$ e $|e_{-1}\rangle$ si ha lo stesso autovalore λ (per T^2)
 $\rightarrow T^2$ è degenerata

\rightarrow autospazio di dimensione 2 per l'autovalore 1 di T^2 .

Es.: $I f(x) = f(-x)$ (inversione spaziale)

$$I^2 f = I(I f) = \mathbb{1} f$$

$$I^2 = \mathbb{1}$$

Supponiamo $I f = \lambda f \Rightarrow I^2 f = \lambda^2 f = f \Rightarrow \lambda = \pm 1$

e le autofunzioni sono tutte le funzioni pari e dispari - 1 due λ sono infinite volte degeneri -

Operatori p e q -

$$T = T^\dagger \Rightarrow \exists \{|e_n\rangle\}_n : \sum_n |e_n\rangle \langle e_n| = \mathbb{1} \quad T = \sum_n |e_n\rangle \langle e_n|$$

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{p}|A\rangle = p|A\rangle$$

$$|A\rangle \in L^2(\mathbb{R})$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi_A(x) = p \psi_A(x)$$

$$\text{oppure: } \hbar k \varphi_A(k) = p \varphi_A(k)$$

[\hat{p} è simmetrico \Rightarrow prende autovalori $\in \mathbb{R}$]

$$\psi_A(x) = e^{i p \cdot x / \hbar} \quad \psi_A(x) \notin L^2(\mathbb{R})$$

(il dominio di \hat{p} è $\supset L^2$)

$$f[\psi_A(x)] = \varphi_A(k)$$

Fourier conserva l'essere L^2 o no di una funzione.

$$\int dx e^{-ikx} \psi_A(x) = \int dx e^{i \frac{p \cdot x}{\hbar} - ikx} = \int dx e^{ix(\frac{p}{\hbar} - k)} = 2\pi \delta(\frac{p}{\hbar} - k) = \varphi_A(k)$$

\Rightarrow né l'operatore derivata né l'operatore moltiplicazione hanno autovettori in L^2 - Quindi vale lo stesso anche per \hat{q} -

\hat{p} e \hat{q} non sono hermitiani.

$$T \text{ autoaggiunto } (T = T^\dagger, \mathcal{D}_T = \mathcal{D}_{T^\dagger}) \Leftrightarrow \begin{cases} T = \sum_m |e_m\rangle t_m \langle e_m| \\ t_m \in \mathbb{R} \\ \sum_m |e_m\rangle \langle e_m| = \mathbb{1} \end{cases}$$

$$\hat{q} |x_0\rangle = x_0 |x_0\rangle \quad x_0 \text{ non degenera}$$

Per questa equazione abbiamo due rappresentazioni:

$$\begin{cases} x \psi_{x_0}(x) = x_0 \psi_{x_0}(x) \\ i \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{x_0}(k) = x_0 \varphi_{x_0}(k) \end{cases}$$

Dalla prima: $\psi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$

Dalla seconda: $\varphi_{x_0} = A e^{-ikx_0}$

$$\langle x_0 | y_0 \rangle = \int dx \psi_{x_0}^*(x) \psi_{y_0}(x) = \int dx \delta(x - x_0) \delta(x - y_0) = \delta(x_0 - y_0)$$

Per oggetti in L^2 , invece, è $\langle e_n | e_m \rangle = \delta_{nm}$

Le due rappresentazioni devono essere =:

$$\langle x_0 | y_0 \rangle = \int \frac{dk}{2\pi} A^* e^{ikx_0} A e^{-iky_0} = |A|^2 \delta(x_0 - y_0)$$

$$\Rightarrow A \equiv \sqrt{2\pi}$$

Controlliamo:

$$\psi_{x_0}(x) \stackrel{?}{=} \int \frac{dk}{2\pi} \sqrt{2\pi} e^{-ikx_0} e^{ikx} \stackrel{?}{=} \delta(x - x_0) \text{ definendo } \mathcal{F} \text{ con } \sqrt{2\pi} \dots$$

Quindi:

$$|x_0\rangle = \begin{cases} \psi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0) \\ \varphi_{x_0}(k) = \sqrt{2\pi} e^{-ikx_0} \end{cases} \quad |k_0\rangle = \begin{cases} \psi_{k_0}(x) = \dots e^{-ik_0 x} \\ \varphi_{k_0}(k) = \delta(k - k_0) \end{cases}$$

Qualsiasi rappresentazione usiamo, valgono:

$$\langle x_0 | y_0 \rangle = \delta(x_0 - y_0)$$

$$\langle k_0 | l_0 \rangle = \delta(k_0 - l_0)$$

Sono insiemi di vettori "ortogonali" (la δ è di Dirac, non di Kronecker). (non siamo in L^2)

$$\int dx_0 |x_0\rangle \langle x_0| = ?$$

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} |k_0\rangle \langle k_0| = ?$$

Integriamo i proiettori. Risulterà che entrambi.

gli integrali fanno $\mathbb{1}_H$, l'identità nello spazio di Hilbert. Eppure, stiamo integrando un continuo di funzioni che non appartengono ad H .

N.B.: i set ortonormali che sono basi per H devono avere cardinalità numerabile (es.: ci si fanno serie, non integrali).

Allarghiamo il concetto di prodotto scalare.

$$f \in L^2 \Rightarrow \int dx f^* f < +\infty$$

ma se abbiamo due funzioni,

$$(f, g) = \int f^* g$$

Perché questo sia $< +\infty$ non occorre che sia f sia g siano L^2 . Se f ha un dominio compatto, g può anche $\rightarrow \infty$.

Si costruisce un dominio più grande dello spazio di Hilbert:

$$D \subsetneq H \subsetneq D'$$

dove D' è duale rispetto a D .

È il dominio delle funzioni analitiche.

$$\int dx |x\rangle \langle x| = \mathbb{1}_H \quad (\text{integrale di})$$

$$\int dx |x\rangle \langle x| = \hat{q} \quad \int \frac{dk}{2\pi} |k\rangle \langle k| = \hat{p}$$

Vediamo se queste strutture sono consistenti.

$$\psi_A(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \varphi_A(k)$$

$$1 = \int dx \psi_A^*(x) \psi_A(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \varphi_A^*(k) \varphi_A(k) \quad (\text{normalizzazione})$$

$$\langle B|q|A\rangle = \int dx \varphi_B^*(x) \psi_A(x)$$

$$\langle A|q|A\rangle = \int dx \psi_A^*(x) \psi_A(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \varphi_A^*(k) \frac{i\partial}{\partial k} \varphi_A(k)$$

$$\langle A|p|A\rangle = \int dx \psi_A^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi_A(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \varphi_A^*(k) \hbar k \varphi_A(k)$$

Voglio identificare un vettore $|A\rangle \in \mathcal{H}$ con la sua funzione $\psi_A(x)$ o $\varphi_A(k)$.

$$|A\rangle = \int dx |x\rangle \langle x|A\rangle = \int dx |x\rangle \psi_A(x)$$

$$\begin{aligned} \langle B|A\rangle &= \int dy \psi_B^*(y) \langle y| \cdot \int dx |x\rangle \psi_A(x) = \\ &= \int dx dy \psi_B^*(y) \delta(x-y) \psi_A(x) = \int dx \psi_B^*(x) \psi_A(x) \end{aligned}$$

che è l'espressione del prodotto scalare che abbiamo sempre visto, ma solo se gli integrali di prima sono davvero \mathbb{R}^1 .

* Usiamo questa normalizzazione: $\langle k_0|l_0\rangle = 2\pi \delta(k_0 - l_0)$ *

Ovviamente:

$$|A\rangle = \int \frac{dk}{2\pi} |k\rangle \langle k|A\rangle = \int \frac{dk}{2\pi} |k\rangle \varphi_A(k)$$

È vero che una è la \hat{q} dell'altra?

$$\hat{q}|x_0\rangle = x_0|x_0\rangle$$

$$|x_0\rangle = \int \frac{dk}{2\pi} |k\rangle \langle k|x_0\rangle = \int \frac{dk}{2\pi} |k\rangle e^{-ikx_0}$$

$$\text{Oppure: } |k_0\rangle = \int dx |x\rangle \langle x|k_0\rangle = \int dx |x\rangle e^{-ik_0x} \quad \leftarrow \text{trasformate di Fourier}$$

$$\langle x| = \int \frac{dk}{2\pi} \langle k| e^{-ikx}$$

$$\langle x|A\rangle = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \langle k|A\rangle$$

Ovvero:

$$\psi_A(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \varphi_A(k) \quad \text{c.v.d.}$$

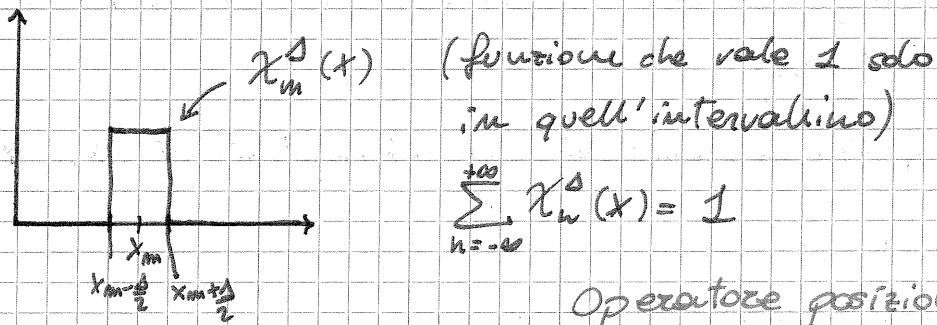
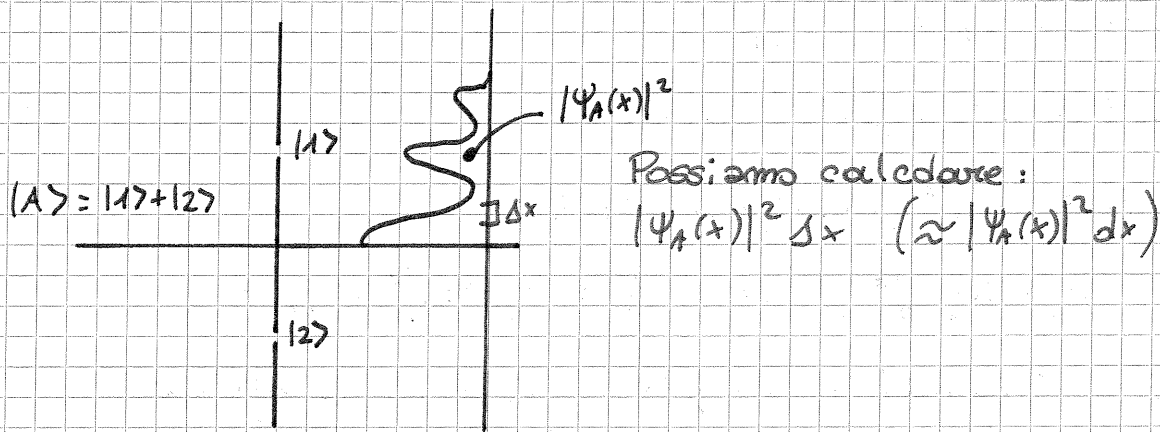
$$\langle k|x\rangle^* = \langle x|k\rangle = e^{ikx}$$

Infine: $|A\rangle \in L^2$

$$|A\rangle = \int \frac{dk}{2\pi} |k\rangle \langle k|A\rangle = \int dx |x\rangle \langle x|A\rangle$$

Un vettore L^2 lo abbiamo espresso come somma continua di oggetti $\notin L^2$.

Rivediamo le rappresentazioni di \hat{p} e \hat{q} .



Operatore posizione

$$\chi_n^{\Delta}(x) \cdot \int dy \chi_n^{\Delta}(y) \psi(y) = |n\rangle \langle n | \psi \rangle$$

Tutto questo è teoria delle distribuzioni.

$$T = \sum_n |n\rangle t_n \langle n| \quad \text{Rappresentazione spettrale di } T$$

$$\langle i | T | j \rangle = \sum_n \langle i | n \rangle t_n \langle n | j \rangle = \sum_n \delta_{in} t_n \delta_{nj} = \sum_j \delta_{ij} t_j = t_i$$

La base degli autovettori è quella in cui T è diagonale.

$$\langle y | \hat{q} | z \rangle = \int dx \langle y | x \rangle x \langle x | z \rangle = \int dy \delta(y-x) + \delta(x-z) = z \delta(y-z)$$

Lo δ di Dirac è l'analogo al continuo della δ di Kronecker.

$$\langle y | \hat{q} | k \rangle = y e^{-iky}$$

ESERCIZIO

$$\psi_A(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

$$\langle A | \hat{q} | A \rangle = ?$$

$$\langle A | \hat{q} | A \rangle = \int dx \psi_A^* \hat{q} \psi_A = \int dx x \psi_A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{x^2 + 2x^2 + a^2} x = 0$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_A(x) x \psi_A(x) = \langle A | \hat{q} | A \rangle = \langle A | I I \hat{q} I I | A \rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx (I \psi_A(x)) \underbrace{(I \hat{q} I^{-1})}_{=-\hat{q}} (I \psi_A(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx (-x) \psi_A(-x) \psi_A(-x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_A(x) (-x) \psi_A(x) = - \langle A | \hat{q} | A \rangle$$

Um operatore dispari non può connettere stati con la stessa parità!

$$\Rightarrow \langle A | \hat{q} | A \rangle = - \langle A | \hat{q} | A \rangle \Rightarrow \langle A | \hat{q} | A \rangle = 0$$

Insomma, $\psi_A(x) = \psi_A(-x)$ anche per \hat{p}

\hat{q} è un operatore dispari ($I \hat{q} I = -\hat{q}$)
 \hat{q}^2 è pari ($I \hat{q}^2 I = \hat{q}^2$) Le p. dispari di \hat{q} sono op. dispari, quelle pari sono op. pari.

"Un operatore dispari non può connettere (= avere elem. di matrice $\neq 0$) stati con la stessa parità; un op. pari non può connettere stati con parità opposte"

$$\langle B | \hat{p} | A \rangle = ? \quad \psi_A(x) = \frac{x}{(x^2+a^2)^2} \quad \psi_B = \frac{\sin \frac{x}{b}}{(x^2+b^2)^2}$$

$$\langle B | \hat{p} | A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_B(x) (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi_A(x) = 0$$

$\psi_B \equiv (x+x^2)e^{-|x|}$ ← né pari né dispari, ma somma di pari e dispari

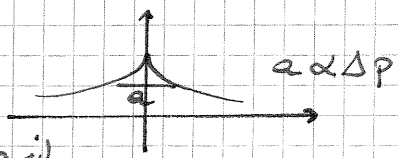
$$\langle B | \hat{p} | B \rangle = 0 \text{ lo stesso}$$

$$= -i \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_B(x) \left(\frac{\hbar \partial}{\partial x} \right) \psi_B(x)$$

$$\langle B | \hat{p} | B \rangle = \langle B | \hat{p} | B \rangle^* \rightarrow i \int \dots = 0$$

$$\mathcal{H}[\psi_B(x)] = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{1}{\dots}$$

$$\varphi_A(k) = e^{-\frac{|k|}{a}} \leftarrow \text{pari} = |A\rangle$$



$$\Delta x^2(t) = \frac{\Delta p^2}{m^2} t^2 + \left(\langle A | p q + q p | A \rangle - 2 \langle A | \hat{p} | A \rangle \langle A | \hat{q} | A \rangle \right) \frac{t}{m} + \langle A | (x - \bar{x})^2 | A \rangle$$

$\Delta x^2(0)$

$$\Delta p^2 = \langle A | p^2 | A \rangle$$

$$\Delta x^2 = \langle A | q^2 | A \rangle$$

$$\Delta p^2 = \int \frac{dk}{2\pi} \frac{\hbar^2 k^2}{\hbar^2 k^2} e^{-\frac{2|k|}{a}} \cdot \frac{1}{|A\rangle^2} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \hbar^2 k^2 e^{-\frac{2|k|}{a}}}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-\frac{2|k|}{a}}} = \frac{2 \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \hbar^2 k^2 e^{-\frac{2k}{a}}}{\frac{a}{4\pi}}$$

$$\int_0^{\infty} dx x^n e^{-x} = n!$$

$$\frac{2k}{a} = x \Rightarrow 2 \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \hbar^2 k^2 e^{-\frac{2k}{a}} = \frac{\hbar^2}{2\pi} \left(\frac{a}{2}\right)^3 2$$

$$\Delta p^2 = \frac{\hbar^2 a^2}{4}$$

$$\Delta x^2(0) = \dots = \frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow \Delta x^2(t) = \frac{\hbar^2 a^2 t^2}{4m^2} + \frac{1}{a^2}$$

25.03.2010

ESERCIZIO 2

Prendiamo un pacchetto d'onde $\varphi_A = \lambda e^{-ikx/a}$

$$\Delta x^2(t) = \frac{(\Delta p)^2}{\omega^2} t^2 + \frac{t}{\omega} \langle A | p q + q p | A \rangle - 2 \langle A | p | A \rangle \langle A | q | A \rangle + \langle A | (x - \bar{x})^2 | A \rangle$$

Il valore a deve essere presente nello scarto su k .

$$\langle A | p | A \rangle = \langle A | q | A \rangle = 0$$

$\langle A | p q + q p | A \rangle = 0$ perché c'è uno \hat{A} , ma il numero deve essere reale.

$$\Rightarrow \Delta x^2(t) = \frac{(\Delta p)^2}{\omega^2} t^2 + \Delta x_A^2(0)$$

$$\Delta p^2 = \langle A | p^2 | A \rangle \quad \Delta x^2 = \langle A | q^2 | A \rangle$$

2° si devono fare i calcoli:

$$\begin{aligned} \Delta p^2 &= |\lambda|^2 \int \frac{dk}{2\pi} e^{-\frac{2ikx}{a}} (\hbar k)^2 = \frac{\int \frac{dk}{2\pi} e^{-\frac{2ikx}{a}} (\hbar k)^2}{\int \frac{dk}{2\pi} e^{-\frac{2ikx}{a}}} = \\ &= \frac{2 \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} e^{-\frac{2kx}{a}} \hbar^2 k^2}{2 \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} e^{-\frac{2kx}{a}}} = \frac{\frac{\hbar^2}{2\pi} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 \int_0^\infty x^2 e^{-x}}{\frac{1}{4\pi a}} = \text{con } \frac{k}{a} = x \end{aligned}$$

[Sapendo che $\int_0^\infty x^n e^{-x} = n!$] $= \frac{\hbar^2}{2\pi} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot 2! \cdot \frac{4\pi a}{1} = \frac{\hbar^2 a^2}{4}$

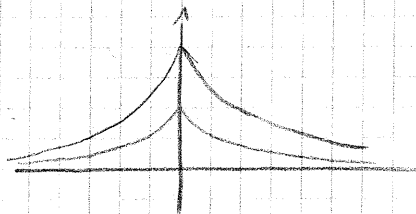
$$\Delta x^2(t) = \frac{\hbar^2 a^2}{4\omega^2} t^2 + \Delta x_A^2(0)$$

$$\Delta x_A^2(0) = \int e^{-\frac{kx}{a}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial k^2} e^{-\frac{kx}{a}} \frac{dk}{2\pi} = \frac{1}{a^2}$$

Una derivata si fa per parti, poi si fa anche con l'altra e otteniamo:

$$= \frac{1}{a^2} \frac{\int \frac{dk}{2\pi} e^{-\frac{kx}{a}}}{\int \frac{dk}{2\pi} e^{-\frac{kx}{a}}} = \frac{1}{a^2}$$

Da questo si deduce che:



25 marzo 2010

ESERCIZIO 3

Prendiamo due operatori che hanno in comune una base di autovettori

$$T = \sum |e_n\rangle t_n \langle e_n|$$

$$S = \sum |e_n\rangle s_n \langle e_n|$$

Fa solo il prodotto:

$$T \cdot S = \sum_n \sum_m |e_n\rangle t_n \langle e_n| e_m \rangle s_m \langle e_m| =$$

$$= \sum_n \sum_m |e_n\rangle t_n s_{nm} s_m \langle e_m| = \sum_n |e_n\rangle t_n s_n \langle e_n|$$

Analogamente $ST = TS$ perché dentro alla sfera ci sono solo numeri.

Quindi se due operatori hanno una base di autovettori comuni, allora commutano, ma è vero il viceversa?

Prendiamo $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ e $\hat{p}^2 = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}$

nello spazio: $L^2([-\pi, \pi]) \supseteq D = \{f(x) : f(-\pi) = f(\pi)\}$

Tra le funzioni $f_k(x) = e^{ikx}$ ce ne sono alcune che soddisfanno a quella condizione? (in D)

$$-k\pi = k\pi + 2n\pi \Rightarrow k = \pm n$$

Quindi le funzioni: $\{f(x) = e^{inx} \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$ sono autovettori dell'operatore \hat{p} su D . [con n autovalore per e^{inx}]
operatori allora hanno degli autovettori comuni;

In generale se i due commutano, ma si deve vedere se la base per il primo è base anche per il secondo operatore. [non tutti i set di autovettori comuni costituiscono delle basi]

$$P^2 f = P(Pf) = p(nf) = n(pf) = n^2 f \Rightarrow \text{gli autovalori sono gli } n^2$$

Gli autovettori di p sono autovettori di p^2 , ma gli autovettori di p^2 non lo sono per p (non tutti).

Per esempio il $\sin(nx)$ è autovettore di p^2 , ma non lo è per l'operatore p . Però si può dire che esiste una base di autovettori simultanei. N.B. $e^{im^2 x} \rightarrow$ degenera, ha autoval. $\pm m$ per p .

Questo che abbiamo dimostrato con un esempio è un teorema importante.

Le base simultanee sono perché gli autovettori possono essere definiti a meno di un fattore di fase $e^{i\phi}$.

Quando $n=0$ non abbiamo 2 autovettori indipendenti.

Sapendo ora che $\exists |e_n\rangle$ non degenera, e che inoltre $(\text{con un solo autovalore}) T|e_n\rangle = t_n|e_n\rangle$
 $[T, S] = 0$. Allora si può dimostrare che $|e_n\rangle$ è anche autovettore non degenera per S . (ipotesi: $|e_n\rangle$ autovett. non deg. per T).

Si deve cioè dimostrare che $S|e_n\rangle = s_n|e_n\rangle$

Applicando T : $T(S|e_n\rangle) = S(T|e_n\rangle) = S(t_n|e_n\rangle) =$
 $T|e_n\rangle = t_n|e_n\rangle = t_n(S|e_n\rangle)$

ma se $S|e_n\rangle$ deve essere uguale ad $|e_n\rangle$ allora devono essere proporzionali, e la costante la chiamiamo s_n e quindi si è dimostrato, t_n ha come unico autovettore $|e_n\rangle$, per cui se $S|e_n\rangle$ è autovettore di T con autoval. t_n deve essere $S|e_n\rangle = s_n|e_n\rangle$.

- Prendiamo ora: $U = \sum |e_n\rangle e^{i\lambda_n} \langle e_n|$, questo è un operatore unitario.

DECOMPOSIZIONE SPETRALE di U .

Consideriamo $U(\alpha)U(\beta) = U(\alpha+\beta)$ dipendono da due parametri e soddisfanno quella proprietà.

$$U(\alpha)U^\dagger(\alpha) = \mathbb{1} \quad U^{-1}(\alpha) = U^\dagger(\alpha) = U(-\alpha)$$

$$U(0) = \mathbb{1}$$

GRUPPO - insieme di elementi, in cui esiste una legge di composizione di elementi che, applicate, ci dà un altro elemento dell'insieme; inoltre esiste il neutro e l'inverso. In base ai gruppi in questa scrittura:

$$\alpha \rightarrow U(\alpha) \quad \alpha, \beta, "+" \in (\mathbb{R}, +)$$

$$\beta \rightarrow U(\beta) \quad \text{che è la retta reale con la somma}$$

$$\alpha+\beta \rightarrow U(\alpha+\beta) = U(\alpha)U(\beta) \Rightarrow \text{il disgiungimento è commutativo}$$

OMOMORFISMO l'altro gruppo in questo caso è quello degli operatori esponenziali unitari.

Consideriamo le traslazioni:

$$x = x' + \alpha$$

$$x = x'' + \beta$$

\Rightarrow Per passare da s a s'' allora si trasla di $\alpha+\beta$ e non cambia niente se prima si fa α oppure si fa β . (Le due traslazioni) commutano

Consideriamo:

$$[p_a, q_b] = -i\hbar \delta_{ab} \quad \text{Supponiamo di traslare:}$$

$$[p'_a, q'_b] = -i\hbar \delta_{ab}$$

TEOREMA DI VON NEUMANN

È un operatore unitario U tra:

$$\begin{cases} U p_a U^\dagger = p'_a \\ U q_b U^\dagger = q'_b \end{cases}$$

si possiamo chiedere se U è unico, la risposta è no perché si può moltiplicare per una fase, ma in generale solo per questo.

In meccanica classica chi fa questo sono le parentesi di Poisson, chiamate anche trasformazioni canoniche.

$$U(pq - qp)U^\dagger = -i\hbar \overset{=1}{U \mathbb{1} U^\dagger} \quad [\text{in una dimensione: } a=b]$$

sviluppo rispetto al $-$ e aggiungo coppie UU^\dagger (equivale a "moltiplicare" e "dividere" per uno stesso elemento)

$$(U p U^\dagger U q U^\dagger) - (U q U^\dagger U p U^\dagger) = p' q' - q' p' = -i\hbar \mathbb{1} = -i\hbar$$

Il viceversa però non è vero.

Preso $\begin{cases} Q \equiv q + \alpha \\ P \equiv p \end{cases}$ (Q è la nuova coordinata, q')
 (P " " " " p') (traslando, la velocità non cambia...)

Faccendo il commutatore si vede che la costante a commuta e quindi il ^{commutatore} e è lo stesso. $([p, q] = -i\hbar)$ Gli osservabili sono operatori autoaggiunti ("hermitiani" in ∞ d'imm.)

In generale U non è un osservabile perché $U \neq U^\dagger$. Quello che si deve fare ora è trovare l'operatore U che fa proprio quello che vogliamo, cioè una traslazione.

Intanto sappiamo che sono operatori unitari, e che fare prima una traslazione di a e poi di b o viceversa non cambia niente.

C'è un altro teorema che dice che se vogliamo tutte quelle cose dette per U , allora $\exists G$: (G operatore)

$U(a+b) = U(a)U(b)$ ecc... $U(a) = e^{iaG}$ con G autoaggiunto

TEOREMA DI STONE

$\begin{cases} e^{iaG} p e^{-iaG} = p \\ e^{iaG} q e^{-iaG} = q + a \end{cases}$ In generale, sono $G = G(p, q)$
Trovare $G(p, q)$

Questo è come dire che e^{iaG} commuta con $p \Rightarrow$ deve essere una funzione di p , allo stesso modo \checkmark deve commutare con $q \Rightarrow$ deve essere funzione di q ; ^{NON} prende a come parametro \Rightarrow vale $\forall a$.

Siccome posso scegliere a a piacere in \mathbb{R} , posso anche scegliere a infinitesimo. Se a è infinitesimo, riscrivere le relazioni, si

può sviluppare in serie: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$\begin{cases} (1 + ia\hat{G} + \dots) p (1 - ia\hat{G} + \dots) = p \\ (1 + ia\hat{G} + \dots) q (1 - ia\hat{G} + \dots) = q + a \\ p + ia[Gp - pG] = p + ia[G, p] = p \\ q + ia[G, q] = q + a \end{cases}$ Raccoglio i termini sviluppendo i prodotti:

$\begin{cases} ia[G, p] = 0 \quad (\forall a, ia[G, q] = a \Rightarrow [G, p] = 0) \Rightarrow G = f(p) \\ ia[G, q] = a \Rightarrow [G, q] = \frac{a}{ia} = \frac{1}{i} = -i \end{cases}$

G commuta con $p \Rightarrow$ posso trovare una base di autovettori comuni.

Inoltre con q deve dare un ^{commutatore} $"-i"$. G deve essere funzione solo di p e non può contenere q altrimenti non commuterebbe con p . (N.B.: p e q NON commutano)

Vediamo se G fosse un polinomio di p . Dalle proprietà dei commutatori sappiamo che $[f(p), q] = f'(p)$. Vediamo se è quindi un polinomio del 1° ordine:

$[ap, q] = -i \Rightarrow a(-i\hbar) = -i \Rightarrow a = \hbar \Rightarrow G = \hat{p}/\hbar \Rightarrow$ se \hat{p} è autoaggiunto, lo è anche \hat{G} .
 $U(a) = e^{-ia\hat{p}/\hbar}$ OPERATORE DI TRASLAZIONE

Verifichiamo che $U(a)U(b) = U(a+b)$

$e^{-ia\hat{p}_\hbar} \cdot e^{-ib\hat{p}_\hbar} = e^{-i(a+b)\hat{p}_\hbar}$ Sembra una normale proprietà degli esponenziali, ma qui gli esponenti sono operatori (ovvero matrici). Si può sempre dire che è valida lo stesso?

Digressione:
 $e^A e^B \stackrel{?}{=} e^{A+B}$

Questo in generale non è vero, e meno che $[A, B] = 0$

Dimostriamo: \Rightarrow

Possiamo trovare $|e_u\rangle$ per T e S . $(A=T; B=S)$ e quindi per e^T ed e^S , con autovettori e^{t_u} ed e^{s_u} .

$e^T \cdot e^S |e_u\rangle = e^T (e^{s_u} |e_u\rangle) = e^{s_u} e^{t_u} |e_u\rangle$
 $= e^{s_u+t_u} |e_u\rangle = e^{T+S} |e_u\rangle$

(Vero solo se \exists una base di autovettori comuni)

Supponiamo ora che $[T, S] = C \neq 0$, ma $[C, S] = [C, T] = 0$

se questo è vero, allora:

$e^T \cdot e^S = e^{T+S + \frac{1}{2}[T, S]} = e^{T+S} \cdot e^{\frac{1}{2}[T, S]}$ IDENTITÀ B.C.H.

Se è il commutatore di ordine 2 ad essere 0 allora la formula si complica di molto.

si deve cercare di capire se il segno è $+\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$.

[Questo esercizio si trova anche sul libro].

Esponiamo tutto in serie: $e^{\lambda T} e^{\lambda S} = e^{\lambda T + \lambda S + \frac{1}{2}[\lambda T, \lambda S]}$ espandiamo fino al secondo ordine in λ .

$(1 + \lambda T + \frac{1}{2} \lambda^2 T^2)(1 + \lambda S + \frac{1}{2} \lambda^2 S^2) = (1 + \lambda T + \lambda S \pm \frac{1}{2}[\lambda T, \lambda S] + \frac{1}{2}(\lambda T + \lambda S + [T, S])^2 + \dots)$

non si prendono i termini del quadrato dell'esponente che non sono del secondo ordine in λ . (il commutatore va al 3° ordine)

$1 + \lambda(T+S) + \frac{\lambda^2}{2}(T^2 + S^2 + 2TS) = 1 + \lambda(T+S) \pm \frac{1}{2}[\lambda T, \lambda S] + \frac{1}{2}\lambda^2(T^2 + S^2 + TS + ST)$ (non commutano!)

$\frac{1}{2}(T^2 + S^2 + 2TS) = \pm \frac{1}{2}[T, S] + \frac{1}{2}(T^2 + TS + ST + S^2)$ provo con il "+":

$TS = \frac{1}{2}TS - \frac{1}{2}ST + \frac{1}{2}TS + \frac{1}{2}ST \Rightarrow$ il segno davanti è $\pm \frac{1}{2}[T, S]$ e il "+"

chi ci garantisce però che vale anche per ordini superiori?

$U(a) = e^{-ia\hat{p}_\hbar}$ $U(a)|A\rangle \xrightarrow{RS \leftarrow \text{Rappresentazione spettrale}} \psi_A(x) = e^{-a\frac{d}{dx}} \psi_A(x) = (\text{sviluppo con Taylor})$
 $= (1 - a\frac{d}{dx} + \frac{a^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \dots) \psi_A(x)$

$\psi_A(x) = e\psi'_A(x) + \frac{a^2}{2}\psi''_A(x) = \psi_A(x-a)$

Espansione di Taylor di ψ_A intorno ad $x-a$.

$U(a)\psi_A(x) = \psi_A(x-a)$
TRASLAZIONE

$$V(b) = e^{ibq/\hbar} \leftarrow \text{analogo per i momenti } \hat{q}. \text{ ("Trasla" le } \hat{p}\text{)}$$

Non c'è il uovo davanti ad i , per conservare le regole di commutazione
 $q = \text{Linear momentum}$

$$V(b)\hat{p}V^\dagger(b) = \hat{p} - b$$

$$V(b)\hat{q}V^\dagger(b) = \hat{q}$$

Si dice che $V(b)$ è una rappresentazione, delle traslazioni, unitarie nello spazio $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.
 porta F in VFV^\dagger , che appartiene allo stesso spazio di F .

UFU^\dagger si chiama endomorfismo, in generale, ora però $U \in U$ sono operatori particolari.

Se facciamo 2 traslazioni, una lungo x e una lungo y :
 $U(a_1)U(a_2) = e^{-ix\hat{p}_1/\hbar} \cdot e^{-iy\hat{p}_2/\hbar} = e^{-i/\hbar(a_1\hat{p}_1 + a_2\hat{p}_2)} = \boxed{e^{-i/\hbar a \cdot \hat{p}}}$

Per le rotazioni la situazione cambia: mentre le traslazioni commutano le rotazioni non lo fanno.

$$U_1(\pi/2)U_3(\pi/2) \neq U_3(\pi/2)U_1(\pi/2). \quad \begin{matrix} U_1 = \text{rot. attorno all'asse } 1 (x) \\ U_3 = \text{" " " " " " } 3 (z) \end{matrix}$$

Inoltre le rotazioni composte tra di loro possiamo esprimere con un'unica rotazione attorno ad un diverso asse. esplicitamente in questo caso, con una U_2 !

$$e^{\lambda T} \cdot e^{\lambda S} = e^{\lambda(T+S)} \cdot e^{\frac{\lambda^2}{2}[T,S]} \quad \text{moltiplicando per } e^{-\lambda T} \left\{ \dots \right\} e^{-\lambda S}$$

a sinistra a destra

$$\mathbb{1} = e^{-\lambda T} \cdot e^{\lambda(T+S)} \cdot e^{-\lambda S} \cdot e^{\frac{\lambda^2}{2}[T,S]}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{\lambda^2}{2}[T,S]} = e^{-\lambda T} \cdot e^{\lambda(T+S)} \cdot e^{-\lambda S}$$

Si scrive così quando i due parametri sono di natura molto diversa $\lambda \in \mathbb{C}$, C operatore (commutatore di T con S)
 $M(\lambda) \equiv M(\lambda)$ $M(0) = \mathbb{1}$ lo sappiamo ($e^0 = 1$)

Facciamo $\frac{d}{d\lambda} M$: di T né di S da soli -

$$\frac{d}{d\lambda} M = \cancel{(-T + T + S - S)} e^{-\lambda T} e^{\lambda(T+S)} e^{-\lambda S} = -T \cdot M + T M + e^{-\lambda T} \cdot \underbrace{S e^{\lambda(T+S)}}_{\text{No! si può portare un operatore al di là di un altro solo se tra di loro COMMUTANO!}} \cdot e^{-\lambda S} - M S =$$

$$= -M S + e^{-\lambda T} \cdot S e^{\lambda(T+S)} M = \dot{M}$$

$$= -M S + e^{-\lambda T} (e^{\lambda T} S + [S, e^{\lambda T}]) M = -M S + M S + e^{-\lambda T} [S, e^{\lambda T}] M =$$

$$\dot{M} = e^{-\lambda T} [S, e^{\lambda T}] M \quad \mathbb{1} \text{ commuta con tutto}$$

$$[S, e^{\lambda T}] = [S, 1 + \lambda T + \frac{\lambda^2 T^2}{2} + \dots] = [S, 1] + \lambda [S, T] + \frac{\lambda^2}{2} [S, T^2] + \dots =$$

$$[S, T^2] = [S, T]T + T[S, T] = CT + TC \quad T \text{ e } C \text{ commutano } \Rightarrow CT + TC = 2CT = 2\lambda C$$

$$= \lambda C + \frac{\lambda^2}{2} \cdot 2 \cdot \lambda C = \lambda C (1 + \lambda T) = \lambda C \cdot e^{\lambda T}$$

"de. sviluppo"

$$\dot{M} = e^{-\lambda T} \cdot e^{\lambda T} \cdot \lambda C M = \lambda C \cdot M$$

Integrando, supponendo M Hermitiana $\dot{M} = \lambda C M$

$$\dot{M}_{ii} = \lambda C_{ii} m_{ii}$$

↳ autoval. sulla diagonale

Questa è un sistema di equazioni differenziali disaccoppiate e la soluzione è:

$$M_{ii}(\lambda) = e^{\frac{1}{2} \lambda^2 C_{ii}}$$

$$\int d(\ln M_{ii}(\lambda)) = \int \lambda C_{ii} d\lambda = C_{ii} \cdot \frac{1}{2} \lambda^2$$

$$\ln(M_{ii}(\lambda)) = C_{ii} \frac{\lambda^2}{2} \Rightarrow M_{ii}(\lambda) = 1 e^{C_{ii} \frac{\lambda^2}{2}}$$

$$M = 1 \cdot e^{\frac{\lambda^2}{2} [C, S]}$$

02/04/10

Stato di un sistema \leftrightarrow raggio in $\mathcal{H} \leftrightarrow |A\rangle \in \mathcal{H}$

$|A\rangle$ è un qualsiasi vettore rappresentativo del raggio scelto.

Osservabili sul sistema \leftrightarrow operatori autoaggiunti.

\Rightarrow gli autovalori (risultati delle misure) sono reali - Questa classe di operatori è la più vasta classe che ammette una decomposizione spettrale $\sum_n |\xi_n\rangle \xi_n \langle \xi_n| = \mathcal{O}$.

Gli autostati di \mathcal{O} sono completi: $\sum_n |\xi_n\rangle \langle \xi_n| = \mathbb{1}$ (non si lascia fuori nessun possibile risultato della misura).

Ad ogni operatore autoaggiunto associamo una misura in laboratorio:

- ogni stato possibile è un vettore;
- ogni vettore possibile è uno stato;
- ogni operatore autoaggiunto è una possibile misura.

Quando la corrispondenza tra autovalori ed autovettori è non degenere, l'operatore si dice non degenere. Per identificare lo stato del sistema in caso di osservabile degenere occorre specificare l'autovalore per qualche altra osservabile η compatibile con \mathcal{O} ($[\mathcal{O}, \eta] = 0$). Quando lo stato è completamente determinato si è applicato un insieme completo di operatori compatibili.

Quando misuro qualcosa su uno stato che non è un autostato per quello osservabile si ha una probabilità di transizione $P_{A \rightarrow B} = \frac{|\langle B|A\rangle|^2}{\langle B|B\rangle \langle A|A\rangle} \leq 1$.

Introduciamo ora il concetto di EVOLUZIONE TEMPORALE.

Avand'è che un sistema evolve nel tempo? Altera le medie delle misure che ci posso effettuare? Cambia stato?

Eq. di Schrodinger 1-d: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H \psi(x, t)$

$H = \frac{p^2}{2m} \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx} \right)^2$ per la particella libera

$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ in generale (c'è un termine di en. pot.)

Cerchiamo ancora sol. a variabili separate: $\psi(x, t) = T(t) \phi(x)$

$$\frac{i\hbar \dot{T}}{T} = \frac{H\phi}{\phi} = E \Rightarrow \begin{cases} T(t) = e^{-iEt/\hbar} \\ H\phi = E\phi \end{cases}$$

Supponiamo che H abbia autovalori \bar{E}_n e che il set dei suoi autovett. sia completo:

$$\bar{E}_n$$

$$\sum_n |\bar{E}_n\rangle \langle \bar{E}_n| = I$$

$$\sum_n |\bar{E}_n\rangle \bar{E}_n \langle \bar{E}_n| = H$$

$$|A\rangle_0 = \sum |\bar{E}_m\rangle \langle \bar{E}_m| A\rangle = \sum a_m |\bar{E}_m\rangle$$

$$\Psi(x, t) = T(t) \phi(x) \rightarrow e^{-\frac{i\bar{E}_n t}{\hbar}} \phi_m(x)$$

$$\phi_m(x) = \langle x | \bar{E}_m \rangle$$

$$|A_0\rangle \rightarrow |A_t\rangle = \sum a_n \left(e^{-\frac{i\bar{E}_n t}{\hbar}} |\bar{E}_n\rangle \right)$$

Lo stato evolve per un fattore di fase, ovvero:

combiniamo i coefficienti di Fourier al variare del tempo.

$$|A\rangle_t = \sum_n \left(a_m e^{-\frac{i\bar{E}_m t}{\hbar}} \right) |\bar{E}_m\rangle$$

Definiamo un operatore unitario:

$$U(t) \equiv \sum_n |\bar{E}_m\rangle e^{-\frac{i\bar{E}_m t}{\hbar}} \langle \bar{E}_m| \quad \text{Operatore di evoluzione temporale}$$

Tale che:

(Schema di Schrödinger \equiv SP)

$$U(t) |A_0\rangle = |A_t\rangle$$

$$\begin{aligned} U(t) |A\rangle_0 &= \sum_n |\bar{E}_n\rangle e^{-\frac{i\bar{E}_n t}{\hbar}} \langle \bar{E}_n | \left(\sum_m a_m |\bar{E}_m\rangle \right) = \\ &= \sum_{m, n} |\bar{E}_n\rangle e^{-\frac{i\bar{E}_n t}{\hbar}} \langle \bar{E}_n | \bar{E}_m\rangle a_m = \\ &= \sum_m |\bar{E}_m\rangle e^{-\frac{i\bar{E}_m t}{\hbar}} a_m = |A\rangle_t \end{aligned}$$

Esiste anche uno schema di Heisenberg (HP).

L'operatore di evoluzione ^{temporale} deve conservare l'ortogonalità e deve essere linearmente sommabile con altri evolutori.

Se postuliamo questo, e quindi $U(t)$ è unitario, per il teorema di Stone $\exists H: U(t) = e^{-\frac{i\bar{E}H}{\hbar}}$.

H è proprio l'hamiltoniana!

$$U(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \quad \text{l'hamiltoniana è la generatrice per l'operatore di evoluzione temporale.}$$

H si dice GENERATRICE per $U(t)$.

Infatti H dice come evolve Ψ nel tempo:

$$i\hbar \dot{\Psi} = H\Psi \quad (\text{Schrödinger})$$

Ovviamente: $U(t_1)U(t_2) = U(t_1 + t_2)$

Di conseguenza, espandendo con Taylor, si ha:

$$U(\tau) \Psi(x, t) \approx \left(1 + \frac{\tau}{i\hbar} \frac{\partial}{\partial t} \cdot i\hbar\right) \Psi(x, t) = \Psi(x, t) + \frac{\tau}{i\hbar} H \Psi(x, t) = \Psi(x, t + \tau)$$

$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi$

Schrödinger Picture $\begin{cases} |A\rangle_0 \rightarrow |A\rangle_t = U(t) |A\rangle_0 \\ O_S \rightarrow \langle A| U^\dagger O_S U |A\rangle_0 \end{cases}$

$$\langle A| O_S |A\rangle_0 \quad \langle A| O_S |A\rangle_t$$

(O_S generica osservabile)

Si vede che chi evolve è lo stato e non l'osservabile!

Schrödinger \rightarrow evolvono gli stati nel tempo

Heisenberg Picture $\langle A| (U^\dagger(t) O_H U(t)) |A\rangle_0$

$$\begin{cases} |A\rangle_0 \rightarrow |A\rangle_0 \\ O_H(t) = U^\dagger O_S U \end{cases}$$

Im questo schema lo stato resta fisso ed evolvono gli operatori.

Heisenberg \rightarrow gli stati sono "fissi" e nel tempo evolvono le osservabili.

$$O_H(t) = U^\dagger(t) O_S U(t) \quad \downarrow O_S \neq O_S(t): O_S \text{ è costante nel tempo}$$

$$\frac{d}{dt} O_H(t) = U^\dagger(t) O_S \frac{d}{dt} U(t) + \frac{d}{dt} U^\dagger(t) O_S U(t) =$$

$$= U^\dagger(t) O_S \left(\frac{-iH}{\hbar} \right) U(t) + \left(\frac{iH}{\hbar} \right) U^\dagger(t) O_S U(t) =$$

U ed H commutano... $\Leftarrow U = f(H)$

$$= -\frac{i}{\hbar} (O_H(t) H - H O_H(t)) =$$

$$\frac{dO_H(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, O_H(t)]$$

Sfruttando le parentesi di Poisson, si ha:

$$[q, p] = i\hbar \{q, p\} \Rightarrow -\frac{i}{\hbar} [q, p] = \{q, p\} \quad -i = \frac{1}{\hbar}$$

Applicando questa relazione:

$$\frac{d}{dt} O_H = \{O_H, H\}$$

Gli operatori in meccanica quantistica evolvono come le equazioni di moto in

meccanica

classica.

$$\frac{d}{dt} \hat{O}_H = -\frac{i}{\hbar} [\hat{O}_H(t), \hat{H}] = \{O_H, H\}$$

$$\dot{O}_H(t) = \frac{1}{i\hbar} [O_H(t), H]$$

Avendo definito l'operatore $U(t)$, si ha:

$$q_t = U q U^\dagger$$

$$p_t = U p U^\dagger$$

Le regole di commutazione canoniche si conservano
 $\Rightarrow U$ è unitario

$$[q_t, p_t] = U q U^\dagger U p U^\dagger + \dots = U (q p - p q) U^\dagger = i\hbar$$

Teorema di Von Neumann

Se $[q_t, p_t] = [q, p]$, \exists un op. unitario che implementa la trasformazione $q \rightarrow q_t, p \rightarrow p_t$

\rightarrow teor. di Stone \rightarrow tale op. è l'hamiltoniana.

Costruire U per i vari sistemi significa cercare per quei sistemi: gli autovalori ed autovettori dell'hamiltoniana, ovvero:

$$H |E_m\rangle = E_m |E_m\rangle$$

Equazione di Schrödinger per gli stati stazionari

Cosa sono gli stati stazionari?

$$|E_n\rangle \xrightarrow{U(t)} e^{-iE_n t/\hbar} |E_n\rangle$$

Rappresentano lo stesso stato - (cambia un fattore di fase)

Ad esempio,

$$\frac{|E_1\rangle + 3|E_2\rangle}{\sqrt{10}} \xrightarrow{U(t)} e^{-iE_1 t/\hbar} \frac{|E_1\rangle + 3 e^{-i(E_2 - E_1)t/\hbar} |E_2\rangle}{\sqrt{10}}$$

Non è uno stato stazionario, tranne per i t dati:

$$\text{da: } \frac{E_2 - E_1}{\hbar} t = 2n\pi$$

I singoli stati sono stazionari, ma non le loro comb. lineari.

(A meno che non siano c.l. di stati tutti relativi a uno stesso autovalore) -

Si vede bene che $E_i = E_1$ (avendo supposto $H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$)

$$\langle E_n | e^{iE_n t} O_S e^{-iE_n t} | E_n \rangle = \langle O_S \rangle_t = \langle O_S \rangle_0$$

Gli stati stazionari conservano la media delle misore.

Cos'è una costante del moto?

$$\langle A | e^{iHt} O_S e^{-iHt} | A \rangle = \langle O_S \rangle_t \neq \langle O_S \rangle_0$$

$$\langle O_S \rangle_t = \langle O_S \rangle_0 \iff [O_S, H] = 0 \iff U[O_S, H]U^\dagger = 0$$

$$\iff [UO_SU^\dagger, H] = 0 \iff [H, U] = 0 \iff U = f(H)$$

Le costanti del moto sono quelle che commutano con l'hamiltoniana, e hanno valori medi indipendenti dal tempo su TUTTI gli stati.

Gli stati stazionari sono gli unici sui quali tutte le osservabili hanno valori medi costanti.

Vediamo un'applicazione.

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{q}^2 \quad \text{osc. arm. unidimensionale (OA1)}$$

Utilizziamo lo schema di H.:

$$[p, q^2] = 2q[p, q]$$

$$[q_t, p_t] = i\hbar$$

$$\dot{p}_t = \frac{1}{i\hbar} [p_t, H] = \frac{1}{i\hbar} [p_t, \frac{p_t^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_t^2] = \frac{1}{i\hbar} \frac{m \omega^2}{2} 2 q_t [p_t, q_t] =$$

$$[H_t = H_0 \text{ (cost. del moto)}] = -m \omega^2 q_t = -kq = F$$

$$\dot{p}_t = -m \omega^2 q_t \quad F = \frac{dp}{dt} \text{ per definizione!}$$

$$\dot{q}_t = \frac{1}{i\hbar} [q_t, H] = \frac{p_t}{m} \quad (\nu = p/m)$$

$$\dot{q}_t = \frac{p_t}{m} \quad \frac{dq}{dt} = \frac{mv}{m} = v$$

Integro queste due equazioni (sono op. in H). Sono infinite equazioni rispetto alla base in cui sono espresse le matrici di q, p, \dot{q}, \dot{p} !

al variare di m e ω

$$\begin{cases} \dot{q}_t = p_t/m \\ \dot{p}_t = -m \omega^2 q_t \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{q}_t = -\omega^2 q_t \\ \dot{p}_t = -m \omega^2 \dot{q}_t = -m \omega^2 p_t/m = -\omega^2 p_t \end{cases} \Rightarrow q_t \text{ e } p_t \text{ sono funzioni oscillanti.}$$

equazioni di Hamilton

Sono eq. dell'oscillatore armonico.

$$\ddot{q}_t = -\omega^2 q_t \quad \hat{q}(t) = \hat{A} \cos \omega t + \hat{B} \sin \omega t$$

\hat{A}, \hat{B} operatori incogniti.

$$\hat{A} = \hat{q}$$

$$m \dot{\hat{q}}_t = -m \omega \hat{q} \sin \omega t + m \omega \hat{B} \cos \omega t$$

$$\hat{p} = m \omega \hat{B}$$

$$\text{Quindi: } \hat{q}_t = \hat{q} \cos(\omega t) + \frac{\hat{p}}{m\omega} \sin(\omega t)$$

$$\hat{p}_t = m\dot{\hat{q}}_t = -m\omega \hat{q} \sin(\omega t) + \hat{p} \cos(\omega t)$$

Per \hat{p} e \hat{q} si intendono gli op. al tempo 0.

Allora gli elementi di matrice:

$$\langle B | q_t | A \rangle = q_{BA} \cos(\omega t) + \frac{p_{BA}}{m\omega} \sin(\omega t)$$

Conoscendo q_0 e p_0 è completamente conosciuta sia la matrice q_t sia la p_t .

Questo è stato possibile perché le equazioni del moto da integrare erano tutte lineari e abbiamo riutilizzato i risultati classici. Se questo non è possibile, la HP perde molta utilità. HP è utile per OAI e particella libera.

Per utilizzare SP bisogna trovare gli autovettori di H .

Proviamo sempre in OAI:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = \frac{1}{2m} [p^2 + (m\omega q)^2] =$$

(forma quadratica)

$$\stackrel{?}{=} \frac{1}{2m} (p + im\omega q)(p - im\omega q) \leftarrow \text{operatori in forma normale.}$$

$$= \frac{1}{2m} [p^2 + (m\omega q)^2 + im\omega (qp - pq)] = \frac{1}{2m} [p^2 + (m\omega q)^2 - m\omega \hbar] =$$

$$= \frac{1}{2m} [p^2 + (m\omega q)^2] - \frac{\hbar\omega}{2} = H - \frac{\hbar\omega}{2}$$

basta spostare tutti gli autovalori di $\frac{\hbar\omega}{2}$, e gli autovettori di H e di $H - \frac{\hbar\omega}{2}$ sono gli stessi.

$$p - im\omega q \equiv Na \Rightarrow p + im\omega q \equiv Na^\dagger$$

$$a = \frac{1}{N} (p - im\omega q) \quad a^\dagger = \frac{1}{N} (p + im\omega q)$$

$N =$ fattore di normalizzazione

Stabiliamo N t. c. $[a, a^\dagger] = 1$

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{N^2} (im\omega [p, q] - im\omega [q, p]) =$$

$$= \frac{1}{N^2} (\hbar m\omega \cdot 2)$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}$$

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi m \omega}} (p - im\omega q)$$

$$a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi m \omega}} (p + im\omega q)$$

$$\underline{H = \frac{\hbar \omega}{2} = \hbar \omega a^\dagger a} \Rightarrow \underline{H = \hbar \omega (a^\dagger a + \frac{1}{2})}$$

$$a^\dagger a \equiv \hat{N} \quad (\text{operatore numero})$$

$$H = \hbar \omega (N + \frac{1}{2}) \quad [\text{oscillatore armonico}]$$

$$[a^\dagger a, a] = [a^\dagger, a] a = -a = [N, a]$$

$$[a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger = [N, a^\dagger]$$

$N = N^\dagger$ hermitiano

$$N|m\rangle = m|m\rangle$$

$$\Rightarrow \underline{m \in \mathbb{R}} \quad (a^\dagger a)^\dagger = (a)^\dagger (a^\dagger)^\dagger$$

$$N(a^\dagger|m\rangle) = (a^\dagger N + [N, a^\dagger])|m\rangle =$$

$$= (a^\dagger N + a^\dagger)|m\rangle = (m+1)a^\dagger|m\rangle$$

$a^\dagger|m\rangle$ è autovett. per \hat{N} all'autovalore $m+1$.

$a^\dagger \equiv$ operatore di salita - $N a^\dagger|m\rangle = (m+1)a^\dagger|m\rangle$

$\hat{N} a|m\rangle = (m-1)|m\rangle$ $a \equiv$ operatore di discesa.

$$\langle m|a^\dagger a|m\rangle = m \langle m|m\rangle = m \| |m\rangle \|^2 = m \geq 0$$

Gli autovalori di \hat{N} sono tutti positivi. \hat{N} operatore numero naturale?

Quanto sono nulli?

$$a|0\rangle = 0$$

In SP:

$$(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - im\omega x) \psi_0(x) = 0 \equiv (p - im\omega q)|0\rangle = 0$$

\exists soluzione in $L^2(\mathbb{R})$?

$$(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m\omega}{\hbar} x) \psi_0(x) = 0$$

$$\psi_0'(x) = -\frac{m\omega x}{\hbar} \psi_0(x) \Rightarrow \psi_0(x) \propto e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

gaussiana (minima indeterminazione).

Normalizzando:

$$|0\rangle \rightarrow \psi_0(x) = N e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

$$a^\dagger|0\rangle \propto |1\rangle \quad \text{ma } a|0\rangle = 0!$$

$$a^\dagger|1\rangle \propto |2\rangle$$

$$a^\dagger|m\rangle \propto |m+1\rangle$$

$$\begin{aligned} \psi_0 &\sim e^{-\alpha x^2} && \text{pari} && \text{(a, a' dispari)} \\ \psi_1 &\sim x e^{-\alpha x^2} && \text{dispari} && \\ \psi_2 &\sim (x^2 - \frac{1}{2\alpha}) e^{-\alpha x^2} && \text{pari} && \end{aligned}$$

lunghezza caratteristica dell'OA1: $\frac{\hbar}{m\omega} = \frac{1}{2\alpha}$

Più modi ha l'equazione, più alto è l'autoval. corrispondente (teor. di Liouville - di oscillazione)

$$|m\rangle \rightarrow \psi_m(x) = H_m(x) e^{-\alpha x^2}$$

H_m polinomi di Hermite.

Si dimostra che:

$$\sum_m |m\rangle \langle m| = \mathbb{1}$$

Gli autovettori di H formano un sistema completo.

In $\mathcal{S}P$:

$$\sum_m \langle x|m\rangle \langle m|y\rangle = \langle x|y\rangle$$

$$\sum_m H_m(x) e^{-\alpha x^2} H_m^*(y) e^{-\alpha y^2} = \delta(x-y) \text{ Relazione di completezza}$$

L'energia dello stato fondamentale è

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{1}{2} \hbar\omega$$

Inoltre, \forall autoval. di $H \exists!$ autovettore \Rightarrow lo spettro di H è non degenero.

In questo caso:

$$\Delta p_{00}^2 = \overline{p_{00}^2} > 0$$

$$\Delta q_{00}^2 = \overline{q_{00}^2} > 0$$

L'hamiltoniana è positiva \Rightarrow le energie dello spettro sono tutte positive

$$H_{00} = \frac{\overline{p_{00}^2}}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \overline{q_{00}^2} > 0 \Rightarrow E_0 > 0$$

Gli stati stazionari dell'OA1 hanno parità definita $(-1)^n$.

$$\langle m|p|m\rangle = 0$$

$$\langle m|q|m\rangle = 0$$

Operatori dispari non connettono stati con la stessa parità.

5.22 es. già fatto

5.6 $q \rightarrow \tilde{q} = \lambda q$ $p \rightarrow \tilde{p} = \frac{1}{\lambda} p$ [dilatazione]
 è canonica?

$$[\tilde{q}, \tilde{p}] = \lambda q \lambda^{-1} p - \lambda^{-1} p \lambda q = [q, p] \Rightarrow \text{sì.}$$

$\Rightarrow \exists$ un op. unitario t.c. $\tilde{q} = U q U^\dagger$ \wedge $\tilde{p} = U p U^\dagger$

$$U \equiv U(\lambda) \equiv U_\lambda$$

$$U_{\lambda_1} U_{\lambda_2} = U(\lambda_1 \cdot \lambda_2) = U_{\lambda_1 \lambda_2}$$

Il teorema di Stone vale se $U_{\lambda_1} U_{\lambda_2} = U_{\lambda_1 + \lambda_2}$, quindi NON
 in questo caso.

$$\ln \lambda \equiv \tau$$

$$\lambda = e^\tau$$

$U_{\tau_1} U_{\tau_2} = U_{\tau_1 + \tau_2}$ gruppo di operatori unitari con le giuste caratteristiche per applicare Stone.

$$U_\tau = e^{-i\tau \Delta}$$

$$\tilde{q} = e^\tau q \quad \tilde{p} = e^{-\tau} p$$

$$\tilde{q} = U_\tau q U_\tau^\dagger \approx (1 - i\tau \Delta + \dots) q (1 + i\tau \Delta + \dots) = q + \tau q \Delta$$

$$\tilde{p} = \dots \dots \dots = p - \tau p \Delta$$

Si ricava:

$$[q, \Delta] = i q \quad \wedge \quad [p, \Delta] = -i p$$

Ansatz: $\Delta = f(p) \cdot g(q)$

Si ricava:

$$\Delta = \frac{1}{2} (pq + qp) \quad \text{generatore della dilatazione}$$

$$U_\tau = e^{-i \frac{\tau}{\hbar} \frac{1}{2} (pq + qp)} = e^{-\tau \left(x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} x \right)}$$

$$U_\tau \psi(x) = \psi(e^\tau x)$$

$[pq, qp] = 0 \Rightarrow$ l'esponenziale si può fattorizzare -

• che operatore è $e^{-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \right) \frac{\pi}{\omega}}$? $e^{-\frac{i\pi}{\hbar \omega} H_{\text{osc}}}$ ← dimensionalmente ok

Questo esponenziale non si fattorizza proprio.

Applicato a $\psi(x)$ cosa dà?

evol. temporale oscillatore armonico:

$$|0\rangle_t = e^{-\frac{i}{2} \omega t} |0\rangle_0$$

$$|1\rangle_t = e^{-i \frac{3}{2} \omega t} |1\rangle_0$$

$$|2\rangle_t = e^{-i \frac{5}{2} \omega t} |2\rangle_0$$

...

$$H_1 |m\rangle_1 = \hbar\omega (m + 1/2) |m\rangle_1$$

$$U H_1 U^\dagger U |m\rangle_1 = U \hbar\omega (m + 1/2) |m\rangle_1$$

$$H_2 U |m\rangle_1 = \hbar\omega (m + 1/2) U |m\rangle_1 \Rightarrow |m\rangle_2 = U |m\rangle_1$$

v . v . v . v .

Atomo di idrogeno

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \rightarrow H_H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 - \frac{e^2}{r} \quad E_n \left(\frac{\hbar^2}{m}, e^2\right)$$

$$H' = -\frac{\hbar^2}{2m\lambda^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 - \frac{e^2}{r\lambda} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$$

$$E'_n \left(\frac{\hbar^2}{m\lambda^2}, \frac{e^2}{\lambda}\right)$$

Ma H ed H' sono unitariamente equivalenti \Rightarrow hanno lo stesso spettro. $E_n \neq E'_n(\lambda)$! Non dipende da λ

Devono quindi dipendere da una combinazione dei due argomenti, in cui λ si semplifichi.

$$E_n \left(\frac{\hbar^2}{m e^4}\right)$$

Che dimensioni ha? $[E^{-1}]$

In realtà:

$$E_n = -\frac{m e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

Applicando il teor. di von Neumann per generare hamiltoniane unitariamente equivalenti si può risalire allo spazio no. i livelli energetici dello spettro (discreto) associato.

Teorema di von Neumann \Leftrightarrow distanza livelli discreti

$$E_n = E_n \left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{m e^4} \cdot \hbar^2 m \omega^2} \right) \propto \hbar\omega$$

Introduciamo un campo elettrico: es. 5.11

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 - e \bar{E} q \quad [OA1 \text{ in campo elettrico}]$$

$$\frac{1}{2} m \omega^2 \left(q^2 - \frac{e \bar{E}}{m \omega^2} q \right) \quad \frac{e \bar{E}}{m \omega^2} \equiv a \quad [e]$$

$$\left(q^2 - 2a q + a^2 \right) - \frac{1}{2} m \omega^2 a^2$$

$$H_a \equiv \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (q - a)^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \mathbb{1}$$

$$\tilde{p} = p$$

$$\tilde{q} = q - a \mathbb{1}$$

OA1 con $q' = q - a$

$$U(a) = e^{-\frac{i p a}{\hbar}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{operatore di traslazione!} \\ \text{commuta con } p \Rightarrow U p U^{-1} = U U^{-1} p = p \end{array} \right.$$

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$U(a) H_0 U^\dagger(a) = H_a + \frac{1}{2} m \omega^2 a^2$$

$$H_0 |m\rangle = \underbrace{\left(m + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega}_{= E_m} |m\rangle$$

$$E_m^{(a)} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega + \frac{1}{2} m \omega^2 a^2$$

fare es 5.7, 5.8

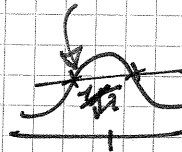
5.9

$$\eta_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\lambda\hbar}} (p - i\lambda q) \quad \lambda > 0 \quad \lambda = m\omega$$

$$\exists! |0\rangle_\lambda : \eta_\lambda |0\rangle_\lambda = 0$$

$$\hat{\eta}_\lambda \rightarrow \hat{a}_\lambda$$

lung. caratteristiche = $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$



$$\frac{\hbar}{m\omega} \dots$$

Abbiamo già visto che $|0\rangle_\lambda \xrightarrow{RS} e^{-\frac{\lambda}{2\hbar} x^2}$

$|d\rangle \equiv V(b)U(a)|0\rangle$ (traslazione degli impulsi + traslazione delle coordinate)

$$d = \frac{b}{\sqrt{2\lambda\hbar}} - i\sqrt{\frac{\lambda}{2\hbar}} a \equiv d_1 + id_2$$

$d \in \mathbb{C}$, d bidimensionale. $a = [q]$, $b = [p]$

$$|d\rangle = e^{\frac{ibq}{\hbar}} e^{-\frac{ia^2}{\hbar}} |0\rangle$$

$$\xrightarrow{RS} e^{\frac{ibx}{\hbar}} \psi(x-a)$$

Valore medio di q e p su questo stato:

$$\langle 0|U^\dagger(a)qU(a)|0\rangle = \langle 0|q+a|0\rangle = a \mathbb{1} = \langle 0|q|0\rangle + a\langle 0|0\rangle = a$$

Il valore medio di p , su questo stato, non fa più 0.

$$\psi_A(x) = e^{\frac{ibx}{\hbar}} e^{-\frac{\lambda}{2\hbar}(x-a)^2}$$

Dimostrare che $\hat{\eta}_\lambda |d\rangle = d |d\rangle \quad \forall d \in \mathbb{C}$

d arbitrario $\Rightarrow a, b$ arbitrari. Continuo di autovettori?

$$a |d\rangle \stackrel{?}{=} d |d\rangle$$

$$|d\rangle = V(b)U(a)|0\rangle$$

$$a VU|0\rangle = (VUa + [a, VU])|0\rangle \quad ?$$

Se $[A, B]$ commuta con A e con B si ha:

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A, B]} = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A, B]}$$

$$e^B e^A = e^{-[A, B]} e^{A+B}$$

$$U(a)V(b) = V(b)U(a) e^{i\frac{ab}{\hbar}}$$

$$UV\eta(UV)^\dagger = UV(p - i\lambda q)V^\dagger U^\dagger =$$

$$= (p+b) - i\lambda(q+a) = \eta + \alpha$$

$$UV \text{ trasla } \eta \text{ di } \alpha. \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (UV)^\dagger \eta UV = \eta - \alpha$$

$$\eta|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$$(UV)^\dagger \eta (UV)|0\rangle = (\eta + \alpha)|0\rangle$$

$$(UV)^\dagger \eta |\alpha\rangle = +\alpha|0\rangle$$

$$\eta|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle$$

Applicando ad uno stato gli operatori di traslazione delle coordinate e degli impulsi non si può ottenere un nuovo stato \perp al primo.

Si dimostra che \nexists stati ortogonali tra di loro tra quelli costruiti in questo modo.

$$\forall |\alpha\rangle, |\beta\rangle, \quad \langle \alpha | \beta \rangle = e^{-|\alpha - \beta|^2}$$

Si dimostra che, se si estrae uno stato \perp ad un altro (ad esempio sottraendogli la proiezione sul primo), quello non è più uno stato coerente.

Esercizi fino al 5.25

08/04/2010

$$\eta = \frac{1}{(2\hbar\lambda)^{1/2}} (p - i\lambda q)$$

$$\eta|0\rangle = 0 \quad |0\rangle \xrightarrow{RS} e^{-\frac{\lambda}{2\hbar}x^2}$$

$$[a] = q, [b] = p \quad \alpha = \frac{b}{(2\lambda\hbar)^{1/2}} - i \frac{\lambda a}{(2\lambda\hbar)^{1/2}}$$

$$V(b)U(a) = e^{\frac{ibq}{\hbar}} e^{-\frac{iap}{\hbar}} \quad \alpha \rightarrow |\alpha\rangle = V(b)U(a)|0\rangle$$

$$1. \quad \eta|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$$2. \quad \bar{q}_\alpha = \langle \alpha | q | \alpha \rangle = a$$

$$\bar{p}_\alpha = \langle \alpha | p | \alpha \rangle = b$$

} dimostrare

$$VU\eta U^\dagger V^\dagger = \eta \pm \alpha$$

$$VU\eta U^\dagger V^\dagger |\alpha\rangle = (\eta \pm \alpha)|\alpha\rangle$$

$$VU\eta U^\dagger V^\dagger VU|0\rangle = (\eta \pm \alpha)|\alpha\rangle$$

$$VU\eta|0\rangle = (\eta \pm \alpha)|\alpha\rangle = 0 \quad \eta|0\rangle = 0$$

$$\Rightarrow (\eta - \alpha)|\alpha\rangle = 0 \quad \Rightarrow \eta|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$$\langle \alpha | = \langle 0 | U^\dagger V^\dagger$$

$$\bar{q} = \langle 0 | U^\dagger V^\dagger q V U | 0 \rangle =$$

$$V U q U^\dagger V^\dagger = q - a \Rightarrow \begin{cases} q \rightarrow q - a \\ p \rightarrow p - b \end{cases}$$

$$= \langle 0 | q + a | 0 \rangle = \langle 0 | q | 0 \rangle + a \cdot 1 = a$$

Dim. che gli stati $|\alpha\rangle$ sono di minima indeterminazione. Cioè:

$$\Delta p_\alpha \Delta q_\alpha = \hbar/2$$

$$(\Delta p_\alpha)^2 = \langle \alpha | p^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | p | \alpha \rangle^2 = \bar{p}_\alpha^2 - b^2$$

$$(\Delta q_\alpha)^2 = \langle \alpha | q^2 | \alpha \rangle - a^2 = \langle 0 | (q+a)^2 | 0 \rangle - a^2 =$$

$$q^2 = W q W^\dagger W q W^\dagger = \langle 0 | q^2 | 0 \rangle = \Delta q_0^2$$

$$(\Delta p_\alpha)^2 = \langle 0 | p^2 | 0 \rangle = \Delta p_0^2 \quad \text{Gli } |\alpha\rangle \text{ sono stazionari?}$$

Per questi sappiamo che vale la min. indeterminazione ($|0\rangle$ è gaussiana) -

Per $|0\rangle$ si ha (vedi fondo libro es.):

$$\Delta x^2 = \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{\lambda} \quad \Delta p^2 = \frac{\hbar^2}{2 \sigma^2} = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 \lambda}{\hbar}$$

$$\Delta x^2 \Delta p^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar}{\lambda} \cdot \hbar \lambda = \frac{1}{4} \hbar^2$$

$$\Delta x \Delta p = \sqrt{\frac{1}{4} \hbar^2} = \frac{\hbar}{2}$$

Si può anche scrivere:

$$\alpha = \frac{\bar{p}}{2\Delta p} - i \frac{\bar{q}}{2\Delta q}$$

con uno stato di minima indeterminazione

tutti gli stati coerenti sono di minima indet.

Dimostriamo il viceversa -

(Stati coerenti: $\eta|0\rangle = 0$)

$$0 = \langle s | (p + i\lambda q)(p - i\lambda q) | s \rangle \Rightarrow \eta | s \rangle = 0$$

Generica funz. d'onda stati coerenti: $e^{-\frac{1}{2\hbar}(x-a)^2} e^{\frac{i b x}{\hbar}} = \psi_0(x)$

$$\psi_0(x) =$$

Gli stati coerenti sono tutti e soli gli stati di minima indeterminazione.

5.10 Stati coerenti per l'oscillatore armonico

$$l = m\omega \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \hbar\omega \left(\eta^\dagger \eta + \frac{1}{2} \right)$$

(+ tutte le cose di prima)

$$\langle \alpha | H | \alpha \rangle = \langle 0 | U^\dagger V^\dagger \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \right) V U | 0 \rangle =$$

$$= \langle 0 | \left[\frac{(p+b)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (q+a)^2 \right] | 0 \rangle =$$

I termini lineari non li mettiamo perché i loro valori medi su $|0\rangle$ sono nulli.

$$= \langle 0 | \frac{p^2+b^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (q^2+a^2) | 0 \rangle =$$

$$= \frac{b^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 + \langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{b^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 + \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\langle \alpha | H | \alpha \rangle = \hbar\omega \left(\bar{n} + \frac{1}{2} \right)$$

Forzando all'es. precedente, trovare gli a_n tali che:

$$3. |\alpha\rangle = \sum a_n \frac{(\eta^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

Si verifica che i vettori $\frac{(\eta^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$ sono ortonormali. ^{tra loro}

$$[\eta, \eta^\dagger] = 1 = \eta\eta^\dagger - \eta^\dagger\eta$$

$$\langle m | m \rangle \stackrel{?}{=} \delta_{mm}$$

$$AB = BA + [A, B]$$

$$\langle 0 | 1 \rangle = \langle 0 | \eta^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | p - i\lambda q | 0 \rangle = 0 - 0 = 0$$

$$\langle 1 | 1 \rangle = \langle 0 | \eta \eta^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \eta^\dagger \eta + 1 | 0 \rangle = \langle 0 | 1 | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle = 1$$

$$\langle 2 | 2 \rangle = \langle 0 | \frac{\eta^2}{\sqrt{2}} \frac{\eta^{\dagger 2}}{\sqrt{2}} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \langle 0 | \eta [\eta, \eta^{\dagger 2}] | 0 \rangle =$$

$$= \frac{2}{2} \langle 0 | \eta \eta^\dagger | 0 \rangle = 1$$

$$\langle m | m \rangle = \langle 0 | \eta^m \eta^{\dagger m} | 0 \rangle \cdot \frac{1}{m!} = \langle 0 | \eta^{m-1} [\eta, \eta^{\dagger m}] | 0 \rangle =$$

$$= \langle 0 | \eta^{m-1} (\eta^\dagger)^{m-1} | 0 \rangle \frac{1}{(m-1)!} = 1 \quad (\text{s. sta dimostrando per induzione})$$

Questi sono autovettori di $H = H^\dagger$, quindi sono completi (operatori hermitiani ammettono basi complete di autovettori)

$$\Rightarrow \sum_n |n\rangle \langle n| = 1 \quad \Rightarrow \sum_n |n\rangle \langle n | \alpha \rangle = |\alpha\rangle$$

$$a_m = \langle m | \alpha \rangle = \langle 0 | \frac{\eta^m}{\sqrt{m!}} | \alpha \rangle =$$

$$= \langle 0 | \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} | \alpha \rangle = \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \langle 0 | \alpha \rangle$$

$$\begin{aligned} \eta | \alpha \rangle &= \alpha | \alpha \rangle \\ \eta^m | \alpha \rangle &= \alpha^m | \alpha \rangle \end{aligned}$$

Si come U, V unitari e $|\alpha\rangle = VU|0\rangle$, e $|0\rangle$ ha norma 1, allora $|\alpha\rangle$ ha norma 1. operatori unitari conservano la norma

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} |\alpha|^{2m} \right) |\langle 0 | \alpha \rangle|^2 = |\langle 0 | \alpha \rangle|^2 e^{|\alpha|^2} \equiv 1$$

$$\Rightarrow |\langle 0 | \alpha \rangle| \equiv e^{-|\alpha|^2/2} \quad a_m \equiv d_m$$

Questo fissa il modulo ma non la fase, che posso scegliere = 1 per avere $\langle 0 | \alpha \rangle \in \mathbb{R}$.

$$d_m = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} (= a_m) \in \ell^2$$

$$\beta_m = e^{-|\beta|^2/2} \frac{\beta^m}{\sqrt{m!}} \in \ell^2$$

ℓ^2 è lo spazio delle successioni a quadrato sommabile.
 L^2 è lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile.

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \sum_0^{\infty} d_m^* \beta_m = \sum_0^{\infty} e^{-|\beta|^2/2} \frac{\beta^m}{\sqrt{m!}} e^{-|\alpha|^2/2} \frac{(\alpha^m)^*}{\sqrt{m!}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \sum_0^{\infty} \frac{(\beta \alpha^*)^m}{m!} = e^{\alpha^* \beta} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \neq 0 \quad \forall \alpha, \beta$$

Scegliamo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-(\alpha - \beta)^2/2}$$

Più α e β sono diversi, più piccolo è il loro prodotto scalare, che però non è mai nullo.

$$|A\rangle \in L_2$$

$$\langle \alpha | A \rangle = \sum_0^{\infty} a_m (d^m) \frac{1}{\sqrt{m!}} < +\infty$$

= $F(\alpha)$ funzione ^{analitica} olomorfa di α

$$\langle \alpha | A \rangle = 0 \iff |A\rangle = 0$$

Le funzioni olomorfe, al finito, possono avere solo zeri isolati.

Questo continuo di vettori è completo.

Tornando al 5.10:

$$\langle \alpha | H | \alpha \rangle = \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{b^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 a^2$$

$$\frac{|d\rangle}{\sqrt{m!}} = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle$$

ℓ^2 base auto-normale
coeff. di Fourier (al variare di α)

Qual è lo spettro dell'energia su $|d\rangle$?

Posso trovare tutti gli $E_m = \hbar \omega (m + \frac{1}{2})$?

Teorema di Liouville

Se una funzione è analitica e limitata su tutto il piano complesso, allora è costante.

Qual è la probabilità di transizione $|\alpha\rangle \rightarrow |N\rangle$?

$$E_N = \hbar\omega(N + 1/2)$$

$$P(|\alpha\rangle \rightarrow |N\rangle) \equiv P_N = |\langle N|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2N}}{N!} e^{-|\alpha|^2}$$

Possiamo trovare tutti gli stati al variare di N con questa probabilità $P(N)$.

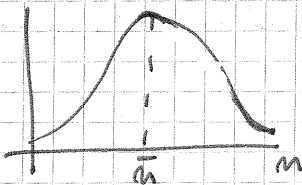
$P(N)$ ha la forma di una distribuzione di Poisson.
Possiamo calcolare i momenti di questa distribuzione di probabilità.

$$\left. \begin{aligned} \sum P_m &= 1 \\ \sum P_m \hbar\omega(m + 1/2) &= \overline{H}_\alpha \end{aligned} \right\} \text{dimostrare}$$

$$P_m = |\langle m|\alpha\rangle|^2 = \langle \alpha|m\rangle \langle m|\alpha\rangle = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{decompos. spettr. di } H: \\ H = \sum_m |m\rangle E_m \langle m| \end{array} \right.$$

$$\sum P_m \underbrace{\hbar\omega(m + 1/2)}_{E_m} = \sum_N \langle \alpha|N\rangle E_m \langle N|\alpha\rangle = \langle \alpha|H|\alpha\rangle$$

$$\langle \alpha|H|\alpha\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{b^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \equiv \hbar\omega(\bar{m} + 1/2)$$



numero medio di occupazioni dello stato - (\bar{m})

$$\Delta H_\alpha = \sum_N P_N (E_N - \bar{E})^2 \quad \text{"larghezza" della distribuzione}$$

Si ricava:

$$(\bar{m} + 1/2) = \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega |\alpha|^2$$

$$\Rightarrow (\hbar\omega) \left(\frac{b^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \right) = |\alpha|^2$$

$$\sum_N P_N N^2 = ?$$

Una funzione omogenea di grado k è una f tale che:
 $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$

Teorema del viriale $2\bar{T} = k\bar{V}$

$2, k$ gradi di omogeneità ($T = P^2/2m$)

k grado di om. del potenziale

7.5 sull'evoluzione temporale di stati coerenti.

$$|\alpha\rangle_0 = |0\rangle = V(b)U(a)|0\rangle \quad \text{stato coerente}$$

$$|\alpha\rangle_t = ? \quad (|0\rangle = \text{stato fondamentale O.A.1})$$

Si usa la rappresentazione dell'energia:

$$|\alpha\rangle_0 = \left(\sum_0^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \right) |m\rangle$$

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar}$$

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle_t &= U(t)|\alpha\rangle_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} U(t)|m\rangle = \\ &= \dots \dots \dots e^{-iE_m t/\hbar} |m\rangle \quad H|m\rangle = E_m|m\rangle \end{aligned}$$

Si come è un O.A.1, $E_m = (m + \frac{1}{2})\hbar\omega$

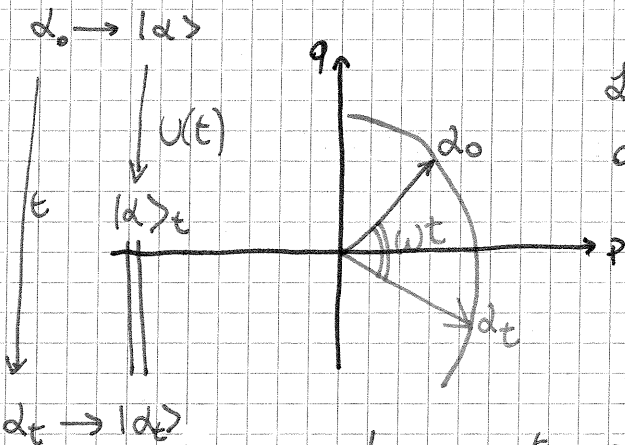
$$|\alpha\rangle_t = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} e^{-i\omega(m + \frac{1}{2})t} |m\rangle =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + i\omega t)} \sum_0^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} (e^{-i\omega t})^m |m\rangle$$

fattore di fase
elim. mobile

^{n.b.:} Questo fattore di fase NON è costante. Però si applica a tutti gli stati della sovrapposizione che descrive $|\alpha\rangle_t$, perciò si può raccogliere a fattore comune ed eliminare ($|\alpha\rangle_t$ resta definito, come $|\alpha\rangle$, a meno di un fattore di fase).

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_0^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle$$



classica
La curva nel piano delle fasi dell'O.A.1 opportunamente normalizzato è una circonferenza.

In questo caso, $|\alpha\rangle_t = |\alpha_t\rangle$.

(Il diagramma è commutativo) -

Uno stato coerente di O.A.1, evolvendo nel tempo, va in un altro stato coerente corrispondente all'evoluto temporale del numero complesso che rappresentava il primo.

Si conserva la minima indeterminazione.

Questi stati coerenti sono quelli che meglio rappresentano il comportamento delle OEM classiche.

OEM classica = collezione di OAI

⇒ conservano la coerenza

$$\langle m | p | m \rangle \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{c} \Psi_m \\ \uparrow \\ \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{c} -i\partial \\ \partial x \\ \uparrow \\ \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{c} \Psi_m \\ \uparrow \\ \mathbb{R} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \langle m | q | m \rangle = 0$$

È sugli stati coerenti?

$$\langle \alpha_t | p | \alpha_t \rangle = \langle \alpha | (W^\dagger p W) | \alpha \rangle$$

(schema di Heisenberg)

$$W(t) = e^{-iHt/\hbar}$$

$$d_t = d e^{-i\omega t}$$

$$= \langle \alpha | \hat{p} \cos(\omega t) + m\omega \hat{q} \sin(\omega t) | \alpha \rangle = b \cos(\omega t) + m\omega a$$

È un'evoluzione classica.

Gli stati coerenti sono quelli dove i valori medi di p e q evolvono allo stesso modo di come fanno nello schema classico.

14.06.2019

Abbiamo visto come si evolvono i valori medi delle osservabili nel tempo. Lo schema di Heisenberg si presta ad essere paragonato allo schema classico.

Data una hamiltoniana, come si trovano autovalori ed autovettori?
Hamiltoniana classica:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \xrightarrow{RS} -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + V(x)$$

termine cinetico
termine potenziale
(V_m è pari)

Oscillatore armonico: $I V(t) I^{-1} = V(-x) = V(x)$ $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$
 autovalori equispaziati di 1 a partire da $\frac{1}{2} \hbar\omega$

$$I V = V I \Leftrightarrow [I, V] = 0 \quad \text{ma anche per } \hat{p}^2 \text{ vale questo, } \Rightarrow$$

$$[I, H] = 0 \Leftrightarrow H |E\rangle = E |E\rangle$$

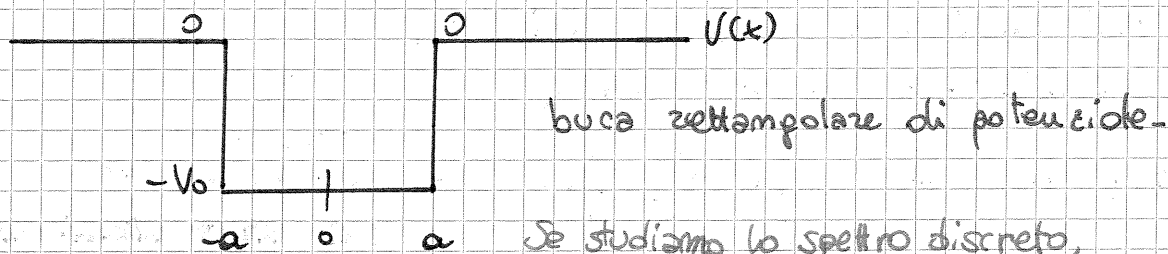
$$H (I |E\rangle) = I E |E\rangle = E (I |E\rangle) \quad I |E\rangle = \lambda |E\rangle$$

Ogni volta che abbiamo una H pari, gli autovettori sono a parità definita.

Ψ_E e Ψ_E^* sono entrambe autofunzioni all'autovalore $E \in \mathbb{R}$ per \hat{H} .
 ma se E è non degenere, allora $\Psi_E \propto \Psi_E^* \Rightarrow \Psi_E \in \mathbb{R}$ o Ψ_E complessa pura

⇒ gli autostati sono o REALI o DEFINITI. (0A1)

Vediamo un altro potenziale:



Se studiamo lo spettro discreto, sappiamo che troveremo un numero finito di autovalori, e autovettori impropri.

$$\begin{cases} (-\infty, -a) & \psi''_E = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi_E \\ (-a, a) & \psi''_E = -\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} \psi_E \\ (a, \infty) & \psi''_E = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi_E \end{cases}$$

Qual è l'autovalore E ?

L'equazione in forma canonica è:

$$\psi''_E(x) = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \psi_E(x)$$

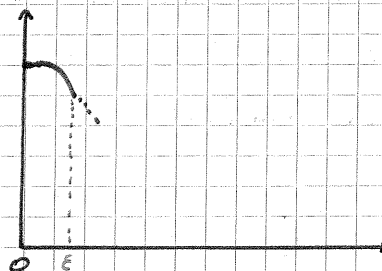
V è pari ⇒ gli autovettori non degeneri saranno o pariti o definiti. La derivata di una funzione pari è dispari.

Per una funzione pari:

$$\psi_E(x) = \psi_E(-x)$$

$$\psi'_E(x) = -\psi'_E(-x)$$

$$\Rightarrow \underline{\psi'_E(0) = 0}$$



Posso imporre: $\psi_E(0) \equiv 1 = \text{costante}$

Fitto con una parabola fino ad ϵ . Poi ricalcolo i valori in ϵ

e fitto con un'altra parabola, eccetera.

Però manca la derivata seconda!!

Per il teorema di Cauchy non avremmo potuto imporre $\psi_0 = 0$, o

avremmo trovato la soluzione $\psi_x = 0 \forall x$.

$$\psi(0) = 0 \wedge \psi'(0) = 0 \Rightarrow \psi(x) = 0 \forall x$$

Per la particella libera avevamo imposto la costante di separazione

reale e negativa ($-k^2$). Qui abbiamo più casi.

↳ funzioni d'onda oscillanti

1. $E < -V_0$

Le soluzioni sono della forma: $Ae^{V\sqrt{k^2}x} + Be^{-V\sqrt{k^2}x}$ ($-\infty, -a$)

$$k \equiv \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$$

cerchiamo ψ normalizzabili β

$$E e^{\sqrt{k^2} x} + F e^{-\sqrt{k^2} x} \quad (a, +\infty)$$

$$C e^{\sqrt{k'^2} x} + D e^{-\sqrt{k'^2} x} \quad (-a, a)$$

$$k' \equiv \sqrt{\frac{-2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$$

k e k' si mantengono positivi, nell'ipotesi $E < -V_0$.
Vediamo che condizioni possiamo imporre.

Consideriamo il punto a :

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \psi_\varepsilon''(x) dx = \psi_\varepsilon'(a+\varepsilon) - \psi_\varepsilon'(a-\varepsilon) =$$

se questa fa 0, allora possiamo imporre sia la
continuità di ψ che quella di ψ' .

$$= -\frac{2m}{\hbar^2} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} E \psi_\varepsilon dx + \frac{2m}{\hbar^2} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} V(x) \psi_\varepsilon(x) dx \quad (\text{dall'eq. di Schrödinger})$$

Se la ψ è continua (e quindi
limitata!) intorno ad a , allora:

$$\left| \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \psi_\varepsilon dx \right| \leq \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} |\psi_\varepsilon| dx \leq M \cdot 2\varepsilon \quad (M = \max_{(a-\varepsilon, a+\varepsilon)} |\psi_\varepsilon(x)|)$$

Per $\varepsilon \rightarrow 0$, entrambi gli integrali convergono a 0,
quindi anche ψ' è continua.

$\Rightarrow \psi_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ per una buca di potenziale rettangolare

$$\begin{cases} E e^{ka} + F e^{-ka} = C e^{k'a} + D e^{-k'a} \\ kE e^{ka} - kF e^{-ka} = k' C e^{k'a} - k' D e^{-k'a} \end{cases}$$

CONDIZIONI DI CONTINUITÀ
IN a E $-a$ PER ψ E ψ'

$$\begin{cases} A e^{-ka} + B e^{ka} = C e^{-k'a} + D e^{k'a} \\ -kA e^{-ka} + kB e^{ka} = -k' C e^{-k'a} + k' D e^{k'a} \end{cases}$$

[equazioni omogenee]

Possiamo scrivere:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} \quad \text{ad sd.}$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{matrix}$

ma cerchiamo soluzioni L^2 .

Notiamo che gli esponenziali positivi delle soluzioni
non potranno mai essere L^2 ! di folgo.

Adesso abbiamo un sistema omogeneo di 4 eq-
in 4 incognite lin. indep. L'unica soluzione è quella
identicamente nulla.

Ma le 4 equazioni sono veramente **INDIPENDENTI**?

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{k'a} & -e^{-k'a} & -e^{-ka} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix} = 0$$

dipende da k e k' .

Il determinante deve essere 0 perché le 4 non sono
indipendenti. Questo impone una condizione su k .

$$\det M(\bar{E}) = 0 \Rightarrow \bar{E} = \dots$$

Si può fare in modo + semplice

$$\rightarrow [H, I] = 0$$

Posso cercare una base di autovettori comuni di H e di I .

Si riesce a produrre un sistema 2×2 ausiliario ux .

(Si impongono solo le condizioni su a ; in $-a$ verranno rispettate per la parità)

Cerchiamo prima le autofunzioni pari.

Sull'intervallo centrale:

$$C e^{k'x} + D e^{-k'x} = D e^{k'x} + C e^{-k'x} \Rightarrow D = C$$

$$\Rightarrow \psi = C(e^{k'x} + e^{-k'x}) \equiv C \cosh(k'x)$$

Poi, in $(-\infty, -a)$ e (a, ∞) sarà simmetrico, posso
imporre le cond. di continuità in uno solo dei punti.

$$(-\infty, -a) \rightarrow A e^{kx}$$

$$(-a, a) \rightarrow C \cosh(k'x)$$

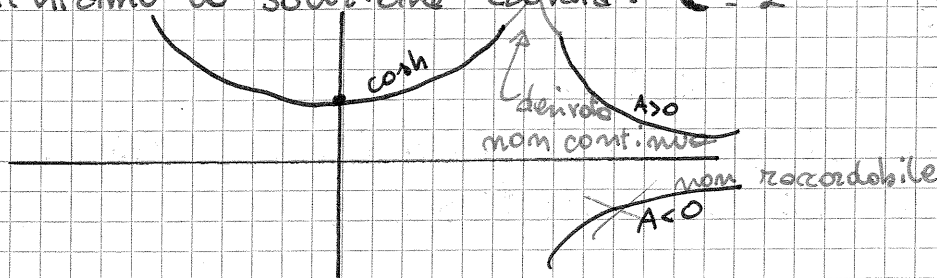
$$(a, \infty) \rightarrow A e^{-kx}$$

$$\begin{cases} A e^{-ka} = C \cosh(k'a) \\ -k A e^{-ka} = k' C \sinh(k'a) \end{cases} \Rightarrow -(ka) = (k'a) \tanh(k'a)$$

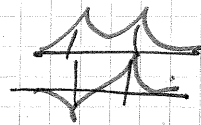
equazione trascendente

Le soluzioni, in questo caso ($\bar{E} < -V_0$).

Grafichiamo la soluzione trovata. $C = 1$



Le ψ candidate pari o dispari sarebbero:
non vanno bene.



pari
dispari

A seconda delle ampiezze, rami non raccordabili (ψ discontinua), o ψ' discontinua. Infatti:

$$E|\epsilon\rangle = H|\epsilon\rangle$$

$$E\langle\epsilon|\epsilon\rangle = \langle\epsilon|(T+V)|\epsilon\rangle \quad \dots \text{cerchiamo } |\epsilon\rangle \text{ normalizzabili} \dots \Rightarrow$$

$$E = \langle\epsilon|T|\epsilon\rangle + \langle\epsilon|V|\epsilon\rangle$$

cio, tradotto in sp. ϵ :

$$\underbrace{E \int \psi_\epsilon^* \psi_\epsilon}_{=E} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \psi_\epsilon^* \psi_\epsilon'' + \int V \psi_\epsilon^* \psi_\epsilon \geq (\min V) \int dx |\psi_\epsilon|^2$$

$$\langle\epsilon|T|\epsilon\rangle + \langle\epsilon|V|\epsilon\rangle \geq \langle\epsilon|T|\epsilon\rangle + \min_{\mathbb{R}} V > \min_{\mathbb{R}} V$$

$$E = \bar{T}_\epsilon + \bar{V}_\epsilon \geq \bar{T}_\epsilon + \min V \geq \min V$$

$$\Rightarrow \bar{E} > \min V$$

Non autovalori con $\bar{E} < -V_0$. (altrimenti avremmo $T < 0$ su tutta la retta reale) mentre $\bar{T} \geq 0$

2. $-V_0 < E < 0$

Classicamente non sarebbe possibile il moto, in quanto $T < 0$. Quantisticamente è possibile.

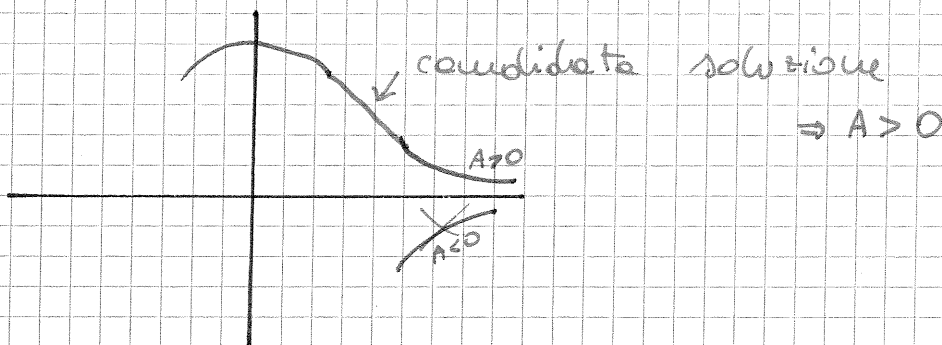
Nella regione $(-a, a)$: $\psi_\epsilon'' = -k'^2 \psi_\epsilon$

$$\Rightarrow \psi_\epsilon = c \cos(k'x) \quad k' = [2m(\bar{E} + V_0)]^{1/2} / \hbar = \frac{\sqrt{2m(\bar{E} + V_0)}}{\hbar}$$

condizioni di continuità:

nelle regioni esterne a $(-a, a)$
 $\psi \propto e^{-k|x|}$

$$\begin{cases} A e^{-ka} = c \cos k'a \\ -kA e^{-ka} = -k'c \sin k'a \end{cases}$$



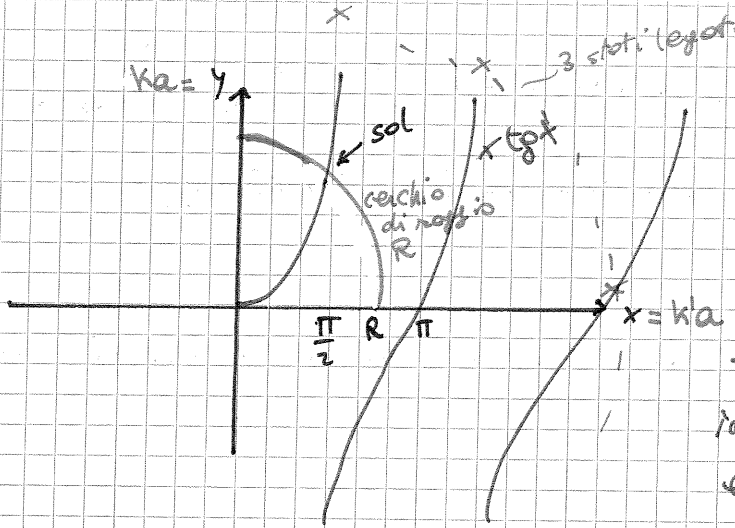
dalle cond. di cont.:

$$\underbrace{(ka)}_y = \underbrace{(k'a)}_x \text{ e } \underbrace{q(k'a)}_x \quad y = x \operatorname{tg} x$$

Immaginiamo:

$$k^2 + k'^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (-E + \bar{E} + V_0) \quad k^2 a^2 + k'^2 a^2 = \frac{2m a^2}{\hbar^2} V_0 \quad x^2 + y^2 = R^2$$

$y^2 + x^2 = 2m V_0 \frac{a^2}{\hbar^2} \equiv R^2$ y ed x non sono indipendenti!
le soluzioni sono le intersezioni fra il cerchio ed $y = x \operatorname{tg} x$



A seconda di R ci sono più o meno soluzioni.

Si vede che $k'a < \frac{\pi}{2}$
 \Rightarrow si può disegnare l'arco di coseno tra $-a$ ed a e ricordarsi in modo C^1 con gli esponenziali - ($\cos \theta > 0$ per $\theta < \frac{\pi}{2}$)

Trovando k e k' si è anche trovato E .

Si vede anche che: $\psi''(a) = 0 \Rightarrow$ flesso in a (ed in $-a$)
 ($\cos \frac{\pi}{2} = 0$)

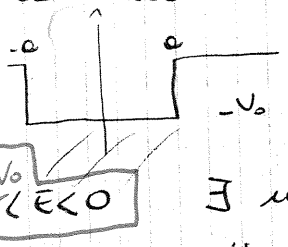
Comunque scelgo R , ovvero comunque prendo piccolo $|V_0|$, ovvero comunque prendo piccolo $|a|$, 3 stati legati in $(-a, a)$ - Almeno 1 - $R = \frac{\sqrt{2mV_0a^2}}{\hbar}$

La ψ_E non è nulla al di fuori della regione classicamente accessibile \Rightarrow 3 possibilità di trovare la particella lì fuori - [EFFETTO TUNNEL]

Per avere r di uno stato legato PARI occorre avere $R > \pi$ (vedi grafico $x+y$).

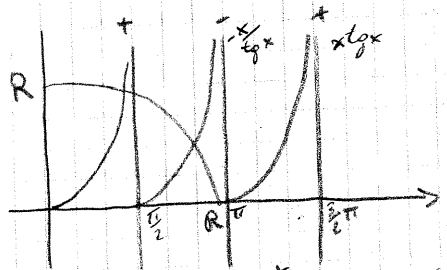
si può dimostrare che ad autovalori discreti corrispondono autovettori normalizzabili. Con

la buca di potenziale ci siamo serviti della simmetria



È un solo autovalore che ci porta alla descrizione di un moto classico.

$$k'a \equiv \xi \quad ka \equiv \eta$$



A seconda del valore di R si trovano più autovalori.

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \equiv R^2 \quad (\text{raggio}^2 \text{ di una circonferenza})$$

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \cos(\xi \frac{x}{a}) & x \in (-a, a) \\ A_1 e^{-\eta_1 \frac{x}{a}} & x \rightarrow \pm\infty \end{cases} \quad E_1 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \eta_1^2$$

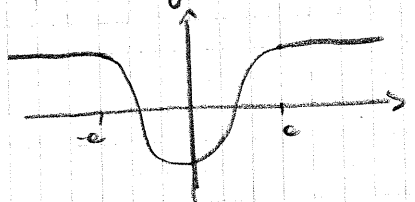
$$\psi_2(x) = \begin{cases} \sin(\xi \frac{x}{a}) & x \in (-a, a) \\ A_2 e^{-\eta_2 \frac{x}{a}} & x \rightarrow \pm\infty \end{cases} \quad E_2 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \eta_2^2$$

osservando il comportamento all'infinito di ψ_n si capisce se appartiene allo spettro discreto oppure allo spettro continuo.

Quando R^2 che passa esattamente per un esisto, allora che succede? [cioè: $R = n\frac{\pi}{2}$].

lora si trova: $\cos(2\pi \frac{x}{2})$ con $\eta = 0$

facendo un grafico:



Questa funzione non è normalizzabile, allora si dovrebbero escludere quei punti

e però si trova $\eta = 0$ allora si può dire con certezza che $E = 0$, cioè l'autovalore è nullo.

e poi siamo nel caso $E > 0$ si troveranno due soluzioni tutte le loro combinazioni lineari (come per la particella

libera).
 di energia è la differenza tra l'ultimo autovalore discreto e la soglia del continuo.
 oltre per $E > 0$ le soluzioni non sono normalizzabili.

0. $E > 0$

In generale siamo in una zona classicamente accessibile, e l'energia cinetica è positiva.

Quello che succede è che la particella arriva, accelera in corrispondenza della buca, e poi torna alla velocità iniziale.

le. L'espansione ora è immaginaria:

$$\begin{aligned} & - +Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ & - Ce^{ikx} + De^{-ikx} \\ & - Ee^{ikx} + Fe^{-ikx} \end{aligned}$$

È una funzione d'onda che si mantiene oscillante su tutto lo spazio.

Per $E > 0$ abbiamo ancora una soluzione fatta a pezzi con 6 costanti, ma se consideriamo la parità allora:

$$E = B \quad \wedge \quad F = A$$

(simmetria rispetto alla buca)

Si vede che il determinante delle condizioni di continuità è sempre > 0 , questo vuol dire che si ha una sola soluzione per il valore dell'energia.

Allo stesso modo si ottiene per le soluzioni dispari.

Per E si trovano 2 soluzioni: una pari e una dispari.

Tutte soluzioni non vanno a 0 all'infinito, ^{non} si mantengono limitate perché sono oscillanti, come per il caso della particella libera.

$$\left(\psi_E'' = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi_E = -k^2 \psi_E \right)$$

Prendi due soluzioni allora facendo una combinazione lineare anche questa è soluzione per lo stesso autovalore.

Si dimostra che:

$$\int \psi_{E_1}^* \psi_{E_2} dx = \delta(E_1 - E_2)$$

avendo scelto un'opportuna costante di proporzionalità, da mettere davanti alle ψ . (normalizzazione?)

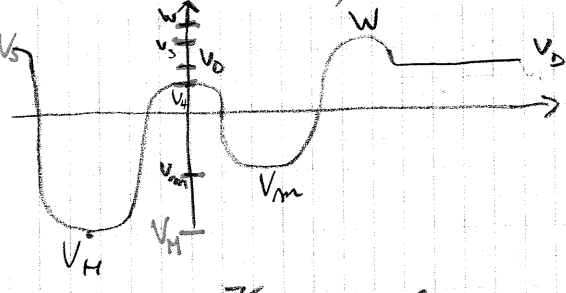
Tutto ciò vale per i potenziali a supporto compatto (cioè che sono $\neq 0$ solo in un intervallo!)

Se abbiamo un potenziale generico:



Dividendolo a scalini si riesce comunque a risolvere, perché su ogni troncino si sa come sono le soluzioni.

Visto che il potenziale è pari, allora se si trova una soluzione a sinistra, questa si ritrova anche a destra.



Come è fatto lo spettro di questo potenziale?

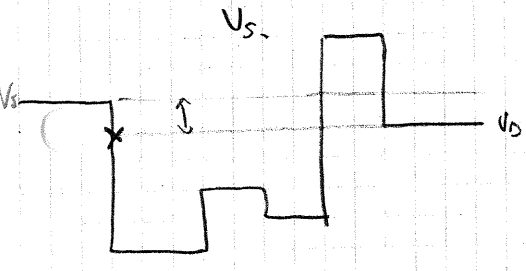
$E \leq V_H$ ~~Autovalori~~

$V_H < E < V_M$ ci aspettiamo uno spettro discreto, come nel caso della semplice buca di potenziale. La degenerazione degli autovalori è 1.

$V_M < E < V_H$ si deve andare a vedere quali sono le zone classicamente accessibili e gli autovalori sono ancora non degeneri, discreti, e le autofunzioni sono normalizzabili.

$E > V_S$ ci sono 2 zone classicamente possibili \Rightarrow si ha coppia degenerazione (può andare sia $\rightarrow +\infty$ che $\rightarrow -\infty$)

$b < E < V_S$ oltre V_S la particella non può andare, quindi la particella può andare solo da destra verso sinistra, perché non può andare sotto il potenziale



per la parità, $E=B$ ed $F=A$

$$+Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$\cancel{B}e^{ikx} + Ae^{ikx}$$

zone destra

Così abbiamo le condizioni per S costanti. E sparisce proprio.

fatto che la particella non può partire da destra ci fa eliminare un termine, la degenerazione è 1.

Appena una delle zone classicamente accessibili diventa inaccessibile

allora si passa dalla degenerazione 2 a 1, ma lo spettro è continuo.

se tutte e due le zone si interdicano allora la degenerazione rimane 1 ma lo spettro diventa discreto.

quando si impongono le condizioni di continuità si devono mantenere limitati gli stati che si mantengono limitati.

la particella libera la relazione di completezza: $\sum_k |k\rangle\langle k| = 1$

$\langle \kappa | \kappa' \rangle = \delta(\kappa - \kappa')$ Relazione di ortogonalità

con $E = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \kappa'^2}{2m}$ $\delta(E - E') = \delta\left(\frac{\hbar^2}{2m}(\kappa^2 - \kappa'^2)\right) = \frac{1}{\frac{\hbar^2}{2m} \cdot 2\kappa} \delta(\kappa - \kappa')$

$\frac{1}{a} \int f\left(\frac{x}{a}\right) \delta(ax) a dx = \frac{1}{a} \int f\left(\frac{y}{a}\right) \delta(y) dy = \frac{f(0)}{|a|}$ Proprietà della δ di Dirac

$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$

Il problema di dove andare a cercare lo spettro allora lo abbiamo praticamente risolto. ??

ESERCIZIO 1

$\rho(x) = |\psi(x)|^2 = \frac{1}{(x^2 + a^2)^2}$ (densità di probabilità)

Dire se lo stato è univocamente determinato.

La risposta è no perché questa è definita a meno di un fattore di fase, perché la $\sqrt{\quad}$ complessa di 1 è definita a meno di un angolo. (fattore di fase $e^{i\varphi}$)

$\psi(x) = \frac{1}{x^2 + a^2} \cdot e^{ikx}$

$\frac{\langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \xrightarrow{RS} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + a^2} \cdot (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{ikx}}{x^2 + a^2} \right) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx} = \begin{cases} 0 & \text{se } k=0 \\ k & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$?

Qual è il $\langle \psi | \hat{q} | \psi \rangle$?

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iqx}}{x^2 + a^2} \cdot x \cdot \frac{e^{-iqx}}{x^2 + a^2} dx = 0$

Se conosciamo $|\psi|^2 \Rightarrow$ si conosce il valor medio di \hat{q} , ma non si sa niente sulla \bar{p} perché va come la derivata di $\psi(x)$.

ESERCIZIO 2

$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ $\rho(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} = |\psi|^2$

La particella si trova in un autostato di H .

Dire se lo stato è univocamente determinato, e meno di un costante?

$\langle \psi_E | \psi_E \rangle = \int \frac{e^{-i\hat{q}x}}{(x^2 + a^2)^2} \cdot \frac{e^{i\hat{q}x}}{(x^2 + a^2)^2} dx$ questo è finito.

Quindi lo stato è determinato univocamente, a meno di una costante.

trovare \bar{p} e \bar{q} : sono entrambi nulli. ?

• Dire se lo stato è di minimo indeterminato.

Non lo è perché non è una gaussiana.

• Trovare il potenziale $V(x)$ con l'equazione di Schrödinger.

$$+\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) + E \psi(x) = +V(x) \psi(x)$$

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + E$$

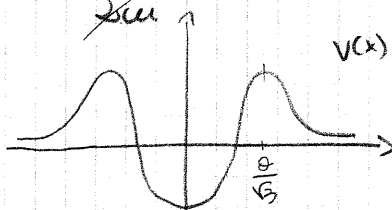
$V(x)$ è pari perché $\psi(x)$ è pari
 ($\psi'(x)$ è dispari e $\psi''(x)$ è pari) è tutto pari nell'equazione

Il rapporto tra funzioni pari è ancora pari.

$$\psi'(x) = -\frac{2x}{(x^2+a^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \psi''(x) &= \frac{-2(x^2+a^2)^{-2} + 2x \cdot 2(x^2+a^2)^{-3}}{(x^2+a^2)^4} = ? \\ &= -\frac{2}{(x^2+a^2)^3} [x^2+a^2 - 4x^2] \end{aligned}$$

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{2}{(x^2+a^2)^3} \cdot (x^2+a^2 - 4x^2) = \frac{\hbar^2}{m} \cdot \frac{-a^2+3x^2}{(x^2+a^2)^2}$$



Per $E=0$ tale funzione è armonizzabile

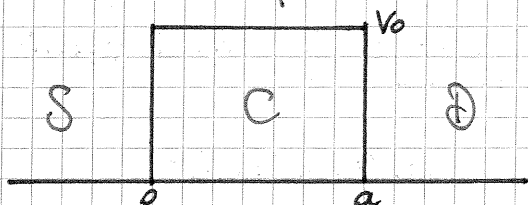
Esiste uno stato normalizzabile dispari? NO, perché lo spettro trovato è un continuo perché all'infinito la funzione va a 0.

Conoscendo lo stato fondamentale in generale siamo in grado di dire praticamente tutto

15.04.2010

Esercizio

Potenziale repulsivo (barriera):



Cosa sappiamo dire sullo spettro della hamiltoniana?

- Autovalori per $E < 0$.

$$H = V(x) + p^2/2m$$

Vediamo come sono gli autovalori per $E > 0$. Si vede che questo potenziale ammette solo spettro continuo, non essendo la particella confinata. Una particella si dice confinata quando, per $x \rightarrow \pm\infty$, la sua funzione d'onda tende monotonicamente a 0, anche se non lo raggiunge mai. Per una buca di potenziale ci tende esponenzialmente.

S] $-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' = E \psi \quad (x < 0) \quad \psi'' = \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = -k^2 \psi \quad \psi \in \mathbb{C}$

C] $-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' = (\frac{p^2}{2m} + V_0) \psi(x) = E \psi(x) \quad \psi'' = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \psi \quad \begin{cases} E = V_0 \Rightarrow \psi \in \mathbb{R} \\ E > V_0 \Rightarrow \psi \in \mathbb{C} \end{cases}$

D] $\psi'' = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi \quad \psi \in \mathbb{C} \quad \psi \text{ oscillante} \Leftrightarrow \psi \text{ esponenziale complesso}$

Una funzione che in un punto qualsiasi vale 0 insieme alla sua derivata prima non può mai risolvere l'equazione $H\psi = E\psi$ (sarebbe la f. identicamente nulla).

S] $\psi_S = A e^{+ikx} + B e^{-ikx}$ (due esponenziali complessi)

C] $\psi_C = C e^{k_{int} x} + D e^{-k_{int} x} \quad k_{int} = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$ (due e. reali)

D] $\psi_D = \bar{E}' e^{-ikx} + F e^{ikx}$

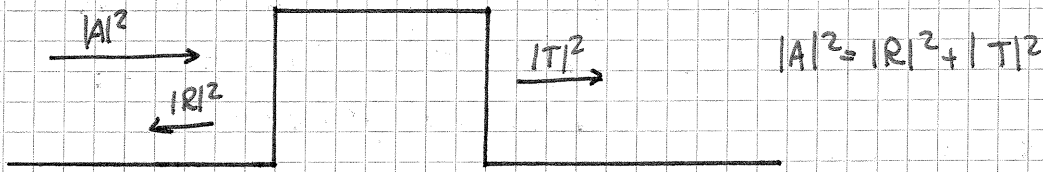
Abbiamo 4 condizioni di continuità (2 + la ψ + 2 + la ψ')
 \Rightarrow abbiamo 6 - 4 = 2 coeff. indipendenti, che possiamo scegliere, e le altre vengono di conseguenza.

Potenziali che sono $\neq 0$ solo in un certo intervallo si dicono a supporto compatto.

Scegliamo ad es. $E' = 0 \Rightarrow$ nella zona D l'autostato $e^{i(px - Et)/\hbar}$ è autostato anche dell'impulso e rappresenta una ↑
fase

particella che si muove da sinistra a destra -

È nella zona S? Avremo, se consideriamo n particelle, tot particelle che vanno da sinistra a destra e tot che invece vengono riflesse. (abbiamo imposto = 0 il coeff. di riflessione per la zona D)



Abbiamo chiamato R e T i vecchi coefficienti B ed F.

R e T sono numeri complessi \Rightarrow hanno delle fasi, che dipendono dalla velocità con cui si muovono le particelle nella zona C.

Poi chiameremo F ("flusso") il coeff. A delle particelle incidenti. Riformuliamo:

$$1 = \left| \frac{R}{F} \right|^2 + \left| \frac{T}{F} \right|^2 \quad |F|^2 = |R|^2 + |T|^2$$

$\begin{matrix} \text{coefficiente di} \\ \text{riflessione} \end{matrix}$ $\quad \quad \quad \begin{matrix} \text{coefficiente di} \\ \text{trasmissione} \end{matrix}$ $\quad \quad \quad r + t = 1$

PARENTESI su r e t

Consideriamo la + generale eq. di Schrödinger:

$$i\hbar \dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\vec{x}) \psi \quad \text{eq. di S. dipendente dal tempo}$$

$$-i\hbar \dot{\psi}^* = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V(\vec{x}) \psi^* \quad \dots \text{e sua complessa coniugata}$$

moltiplichiamo la prima per ψ^* e la seconda per ψ .

$$i\hbar \psi^* \dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi^* \nabla^2 \psi + V \psi^* \psi \quad \text{inoltre:}$$

$$-i\hbar \psi \dot{\psi}^* = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi \nabla^2 \psi^* + V \psi \psi^* \quad \psi^* \dot{\psi} + \dot{\psi}^* \psi = \frac{d}{dt} (\psi^* \psi)$$

Sottraendo membro a membro:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \nabla^2 \psi^* \psi) \quad \text{la parentesi è uno scalare}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi^* \psi = -\frac{1}{i\hbar} \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \cdot (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \vec{\nabla} \psi^* \psi) \quad \dots \dots \dots \text{ vettore}$$

\uparrow divergenza $\quad \quad \quad \nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

Avendo posto:

$$\rho \equiv \psi^* \psi$$

$$\vec{j} \equiv \frac{\hbar}{2m} [\psi^* i \nabla \psi + (i \nabla \psi)^* \psi]$$

Abbiamo una densità ed una corrente che soddisfanno le leggi di conservazione, quindi possiamo passare al flusso:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3x \rho(x) = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad [\text{conservazione locale}]$$

(Stokes)

Se prendiamo $\psi \in L^2$, il primo integrale è $|\psi|^2$, il secondo va a 0 se prendiamo S all'infinito, e ritroviamo che la norma L^2 si conserva.

In 1-dimensione che succede?

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b dx \rho(x) = \int_a^b dx \frac{d}{dt} j(x) = j(b) - j(a)$$

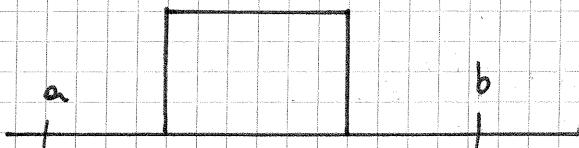
Se, inoltre, ψ è uno stato stazionario, = stato sul quale tutte le osservabili hanno valori medi indip. dal tempo

$$\psi \rightarrow e^{-iEt/\hbar} \psi(x) = \Psi(x, t)$$

l'integrale di $|\psi|^2$ è costante nel tempo $\Rightarrow j(b) - j(a) = 0$
 $\forall a, b \in \mathbb{R}$

fissiamo a e b :

\sim l'intensità in a è = a quella in b



$$-\frac{i\hbar}{2m} [(T^* e^{ikx}) i k T e^{ikx} - (-ik) T^* e^{ikx} T e^{ikx}] = j(b) =$$

$$= \frac{\hbar k}{2m} 2|T|^2 \quad \frac{\hbar k}{m} = \text{velocità} \quad \leftarrow \psi_b = T e^{ikx}$$

In a :

$$\frac{\hbar k}{m} (|F|^2 - |R|^2) = j(a)$$

Imponiamo $j(a) = j(b)$:

$$\Rightarrow |T|^2 = |F|^2 - |R|^2 \quad \text{C.V.D.}$$

j si dice corrente di probabilità
 ρ " " densità " " "

fine parentesi!

In quantistica, tornando all'esercizio, non è possibile la riflessione totale. Però lo è la trasmissione totale - (a seconda dell'E incidente)

Esercizio: per quale potenziale si ha trasmissione totale?

L'aver scelto $E=0$ ha reso il nostro sistema uno stato di scattering con sorgente a sinistra -

$$\forall f(x) \quad \begin{array}{l} f(x) + f(-x) \text{ è pari} \\ f(x) - f(-x) \text{ è dispari} \end{array}$$

Esercizio 6.17

Sappiamo qualcosa sulle autofunzioni di H e vogliamo trovare il potenziale -

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right) \psi(x) = \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x)$$

Sono autofunzioni di H le funzioni:

$\psi_k(x)$ t.c.:

$$\psi_k(x) = \frac{ika - \operatorname{tgh}\left(\frac{x}{a}\right)}{ika + 1} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$

$k > 0$

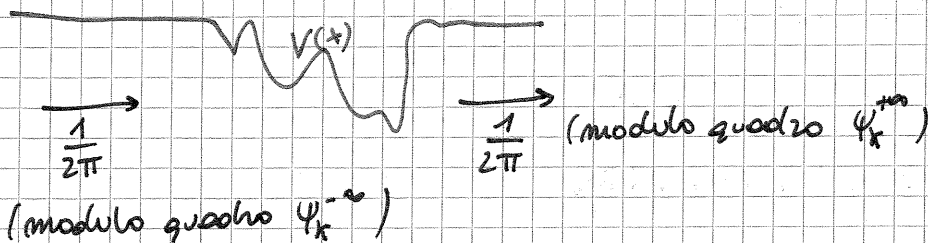
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k^* \psi_{k'} dx = \delta(k - k')$$

tangente iperbolica: $\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$

$\begin{array}{l} \text{sech}(z)/\operatorname{cosh}(z) \\ \xrightarrow{+\infty} 1 \\ \xrightarrow{-\infty} -1 \end{array}$

Limiti:

$$\psi_k(x) \approx \begin{cases} \xrightarrow{+\infty} \frac{ika - 1}{ika + 1} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \\ \xrightarrow{-\infty} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \end{cases}$$



Non c'è riflessione! $R=0, T=1$.

Abbiamo fatto: limiti di ψ_k per $x \rightarrow \pm \infty$, per cui ci aspettiamo che V non sia a supporto compatto. Me vena fuori qualcosa del tipo $\frac{1}{(\cosh \frac{x}{a})^2}$.

Suggerimento:

moltiplico per $\langle x|$ e per $|y\rangle$:

$$\int |k\rangle \langle k| \frac{dk}{2\pi} = \mathbb{1} \quad \int dk \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iky}}{\sqrt{2\pi}} = \langle x|y\rangle = \delta(x-y)$$

Se \exists qualche stato legato, gli stati di scattering non sono completi, e questa relazione non la soddisfa. Si ha:

$$\sum_n \underbrace{\psi_n(x) \psi_n^*(y)}_{\text{stati legati}} + \underbrace{\int \dots}_{\text{stati di scattering}} = \delta(x-y) \quad (\text{per risolvere e' } \int)$$



Ogni buco di potenziale ammette almeno uno stato legato. Possiamo maggiore gli autovalori di V con quelli di B (a cui sappiamo corrispondere stati legati) $\Rightarrow V$ ammette stati legati.

Se abbiamo un potenziale del tipo $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{N(N+1)}{f(x)}$, $N \in \mathbb{N}$, questo ammette N stati legati.

21.04.10

(6.1) $H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad V(q) = V(-q) \quad H \Rightarrow$ spettro solo discreto

$I: IqI^{-1} = -q, \quad IpI^{-1} = -p$

$\exists \xi: [\xi, H] = 0 \wedge [\xi, I] \neq 0$? Se risposta è no - Va dim.

La conoscenza dell'autovalore E_n implica la conoscenza univoca dell'autovettore $|\xi_n\rangle$ solo se l'autoval. è non degenero.

Nel nostro caso V pari \Rightarrow autoval. non degeneri

$E_n \Rightarrow |\xi_n\rangle$

$$V(q) = V(-q) \Rightarrow [I, H] = 0$$

I, \mathcal{G} commutano con H \wedge H non degenera.

$$I |\bar{E}_n\rangle = ? \quad H(I |\bar{E}_n\rangle) = I(H |\bar{E}_n\rangle) = I(\bar{E}_n |\bar{E}_n\rangle) =$$

$$= \bar{E}_n I |\bar{E}_n\rangle \Rightarrow I |\bar{E}_n\rangle \text{ è autovettore di } H \text{ all'autoval.}$$

$\bar{E}_n \Rightarrow I |\bar{E}_n\rangle \text{ è un multiplo di } |\bar{E}_n\rangle$

$$I |\bar{E}_n\rangle = w_n |\bar{E}_n\rangle \quad \text{Risulterà, dato che } w_n^2 = 1,$$

$$I |\bar{E}_n\rangle = \pm |\bar{E}_n\rangle$$

Lo stesso possiamo fare per \mathcal{G} : $\mathcal{G} |\bar{E}_n\rangle = \mathcal{G}_n |\bar{E}_n\rangle$

Di questi autovettori ne abbiamo un'intera base.

$$[I, \mathcal{G}] |\bar{E}_n\rangle = (I\mathcal{G} - \mathcal{G}I) |\bar{E}_n\rangle = 0 \Rightarrow (VD)$$

A volte ci troveremo nella situazione inversa, di dover analizzare l' H e di avere due operatori che commutano entrambi con H ma non commutano tra loro $\Rightarrow H$ sarà degenera. Teorema di degenerazione.

• E se H ha autoval. continui? $\Rightarrow H$ è degenera

Esempio di H che commuta con due osservabili che

non commutano tra di loro: particella libera

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m}; [p, H] = 0, [I, H] = 0, [I, p] \neq 0$$

(p anti-commuta con I)

$$\hat{p} |p\rangle = p |p\rangle \quad \hat{p} (I |p\rangle) = -I(\hat{p} |p\rangle) = -I p |p\rangle =$$

$$= -p (I |p\rangle) \quad I |p\rangle \text{ è autovett. di } \hat{p} \text{ all'autovalore}$$

opposto. Nell'hamiltoniana c'è $p^2 \Rightarrow$ per $H, |p\rangle$ e

$|-p\rangle$ appartengono allo stesso autovalore \Rightarrow rottura di

la degenerazione dell'hamiltoniana.

In 1-d il max della degenerazione è 2.

$$(I |p\rangle \text{ e } I |-p\rangle)$$

• Quali elem. di matrice degli op. p, q, q^2, p^2 sono sicuramente nulli tra gli autostati di H ?

Siamo nel primo caso, di $H = \frac{p^2}{2m} + V(q) : V(q) = V(-q)$.

$$\langle \bar{E}_n | q | \bar{E}_n \rangle = ? \quad \text{Sappiamo che } I |\bar{E}_n\rangle = w_n |\bar{E}_n\rangle = \pm |\bar{E}_n\rangle$$

Supponiamo di avere una matrice M coi suoi autovalori λ_i :

$$\text{facciamo } (M - \lambda_1)(M - \lambda_2) \dots (M - \lambda_n) =$$

$$\text{Nel nostro caso: } (I - 1)(I + 1) = I^2 - 1 = 0$$

Formiamo al caso generale a dimensione n ; M hermitiano $\Rightarrow \exists$ base di autovettori. Dimostriamo che la scrittura di prima fa 0:

$(M - \lambda_1) \dots (M - \lambda_n) | \lambda_k \rangle = 0$ perché il k -esimo elemento della prodottoria fa 0, $\forall k$.

Questa si chiama identità di Keine-Hamilton. Di $| \lambda_k \rangle$ ce n'è una base, quindi ha validità generale.

Formiamo al problema:

$$\langle \bar{e}_n | q | \bar{e}_m \rangle = \langle \bar{e}_n | I I q I I | \bar{e}_m \rangle = \langle \bar{e}_n | (-q) | \bar{e}_m \rangle \omega_n \omega_m = -\omega_n \omega_m \langle \bar{e}_n | q | \bar{e}_m \rangle$$

Supponiamo di prendere due stati con la stessa parità: $\omega_n = \omega_m \Rightarrow \omega_n \omega_m = 1 \Rightarrow \langle \bar{e}_n | q | \bar{e}_m \rangle = 0$
Idem per p .

Gli operatori di spazi hanno elementi di matrice non nulli solo tra stati con parità opposte

("possono CONNETTERE solo stati a parità opposta").

q^2 e p^2 sono pari e possono connettere solo stati con la stessa parità.

6.2 - $-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) + V(x) \psi(x) = \bar{E} \psi(x)$ Solverla in forma adimensionale - $\xi \equiv \frac{x}{a}$; $f(\xi) \equiv \psi(a\xi)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (\psi''(x) + \frac{m^2 \omega^2 x^2}{\hbar^2} \psi(x)) = \bar{E} \psi(x) \quad (OA1)$$

$$\frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} = \frac{1}{a^4} \quad (\text{a lunghezza}) \Rightarrow a^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$$

$$(\psi'' = [a^{-2}]) \quad e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow e^{-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{x^2}{2}}$$

— fine OA1 —

$$d\xi = \frac{1}{a} dx \Rightarrow \left(\frac{d}{dx}\right)^2 a^2 = \left(\frac{d}{d\xi}\right)^2$$

$\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)$ risulta avere le dim. di L^{-2}

$$-\frac{\hbar^2}{2ma^2} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^2 f(\xi) + V(a\xi) f(\xi) = \bar{E} f(\xi)$$

$$-\left(\frac{d}{d\xi}\right)^2 f(\xi) + \frac{2ma^2}{\hbar^2} V(a\xi) f(\xi) = \frac{2ma^2}{\hbar^2} \bar{E} f(\xi)$$

$$\frac{2ma^2}{\hbar^2} \bar{E} = \epsilon$$

$$V(a\xi) \equiv v(\xi) \quad -f''(\xi) + v(\xi) = \epsilon f(\xi)$$

Ad es.: $\xi_1 = 0,5 \Rightarrow \bar{E}_1 = 0,5 \cdot \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ [energia]

$f(\xi_0) = 0, \quad \xi_0 = 9 \Rightarrow t_0 = 9a$

• Se $\int |f(\xi)|^2 d\xi = 1$, quanto vale $C : (f(\frac{x}{a}) \equiv \psi(x))$ sia normalizzata?

(Sare' dimensionato - $C \propto \frac{1}{\sqrt{a}}$)

$\int dx \psi^* \psi \cdot C^2 \equiv 1$

Una volta che ψ contenga C , acquisti le dim. di $\frac{1}{\sqrt{a}}$.

dim. opposte

$\int dx C^2 f^* f = 1 = a \int d\xi f^* f C^2 \Rightarrow |C|^2 a = 1$

• $V_4(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + gx^4$ (oscillatore armonico)

(OA: $\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$
 Al 1° ordine, $\sin\theta \rightarrow \theta$... ma al secondo, $\sin\theta \rightarrow \theta - \frac{1}{6}\theta^3$...)

Chiamiamo H_4 l'hamiltoniana corrispondente.

$H_2 \equiv H_{OA} \quad H_4 - H_2 = gx^4$

$\langle \Psi | gx^4 | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi^* gx^4 \psi = \int dx |\psi|^2 gx^4 > 0$

$\langle \Psi | (H_4 - H_2) | \Psi \rangle \geq 0 \quad \forall \Psi$

\Rightarrow gli autoval di H_4 , ad uno ad uno, sono \geq di quelli di H_2 . \exists uno stato fondamentale per H_4 ?

$\langle \Psi_4^0 | H_4 | \Psi_4^0 \rangle \geq \langle \Psi_4^0 | H_2 | \Psi_4^0 \rangle$
 $\bar{E}_4^0 \geq \bar{E}_2^0$

$a(\hbar, m, \omega) \quad b(\hbar, m, g)$ Scrivere l'eq. in termini di $\frac{x}{a}$ e $\frac{x}{b}$. [Quando il potenziale non è un monomio posso prendere diverse lunghezze intrinseche].

$-\frac{\hbar^2}{2m} (\psi'' + \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} x^2 \psi + \frac{2gm}{\hbar^2} x^4 \psi)$

$b = \left(\frac{\hbar^2}{mg} \right)^{1/6} \quad a = \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{1/2}$

Quale tra a e b conviene usare se:

$m = 12.6 \text{ eV}/c^2$

$\omega = 2\pi \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$

$g = 6,8 \cdot 10^{-2} \text{ eV}/\text{Å}^4$

?

3 casi: $a \ll b$, $a \gg b$, $a \approx b$

$$-\frac{1}{2} \psi''(\xi) + v(\xi) \psi(\xi) = \epsilon \psi(\xi)$$

$$H|\epsilon\rangle = \epsilon|\epsilon\rangle$$

$$p \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \tilde{p} = ap \rightarrow ia\hbar \frac{\partial}{\partial x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \tilde{p}$$

$$\langle x|\epsilon\rangle = \langle \tilde{x}|\epsilon\rangle = \langle \xi|\epsilon\rangle = \psi(\xi)$$

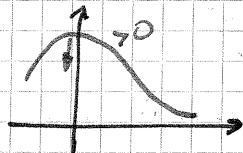
$$\frac{p^2}{2m} + V(x) = \frac{\tilde{p}^2}{2ma^2} + V(a\tilde{x}) \quad |\epsilon\rangle \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \psi(\xi) + v(\xi) \psi(\xi) = \epsilon \psi(\xi)$$

H si può scrivere:

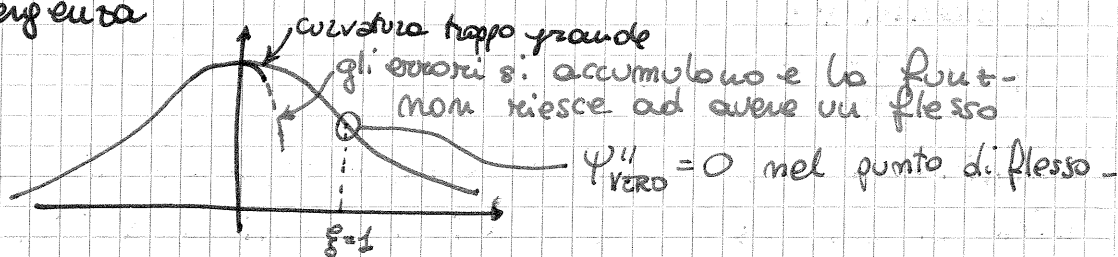
$$\psi'' = -\frac{2m}{\hbar^2} (\epsilon - V(x)) \psi$$

In una zona classicamente accessibile, ψ'' ha il segno opposto a $\psi \Rightarrow$ dove ψ è positiva la curvatura è verso il basso:

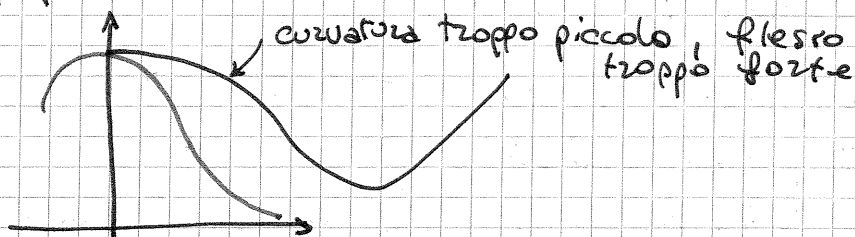


La "quantità" di curvatura dipende dal valore di ϵ

- Se ϵ è troppo grande la curva è troppo stretta e si ha un nodo e, possibilmente, una divergenza



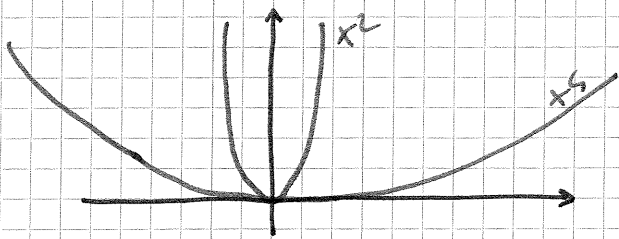
- Un ϵ troppo piccolo non manda a 0 la funzione:



(6.2) È vero che se $a \ll b$ il termine q^4 è trascurabile?

Quando, numericamente, quel termine è trascurabile?

fissiamo ad es.: $\frac{\text{potenziale quadratico}}{\text{potenziale quartico}} = \frac{1}{100}$



$$a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$b = \sqrt[6]{\frac{\hbar^2}{mg}}$$

$$\frac{g x^4}{\frac{1}{2} m \omega^2 x^2} \approx 1 \Rightarrow x^2 \approx \frac{m \omega^2}{2g}$$

$$\frac{g b^4 \left(\frac{x}{b}\right)^4}{\frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{2 g b^4}{m \omega^2 a^2} \left(\frac{x^2}{b^4} a^2\right) \quad \text{bisogna valutare il coefficiente. Riesco}$$

a scriverlo come una potenza di $\frac{a}{b}$?

$$\hbar = m \omega a^2 \quad b^6 = \frac{\hbar^2}{mg} \Rightarrow g b^4 = \frac{\hbar^2 b}{m b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2 g b^4}{m \omega^2 a^2} = \frac{2 \hbar^2}{m b^2 \omega^2 \hbar} = \frac{2 \hbar}{m b^2 \omega} \quad (\text{adimensionale})$$

$$\parallel$$

$$2 \cdot \frac{a^2}{b^2}$$

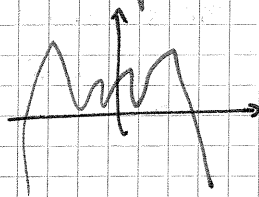
Quindi il rapporto fa: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{x^2 a^2}{b^4}$

\Rightarrow quando $x \approx a$ il rapporto tra i termini del potenziale fa $\left(\frac{a}{b}\right)^6 = 1\%$

Come è fatta la funzione d'onda per $x \gg b$ (e quindi $x \gg a$)? A piccoli x abbiamo una gaussiana, a grandi x ?

$$\psi'' = -\frac{2m}{\hbar^2} (\epsilon - V(x)) \psi$$

Immaginiamo che V sia un OAI + un polinomio con esponenti fino a $2n \Rightarrow$ per grandi x domina x^{2n} . Il segno di x^{2n} deve essere positivo altrimenti, per grandi x , $V \rightarrow -\infty$



È non avrebbe spettro legato, ma continuo

e due volte degenera (2 zone classicamente accessibili) -

Un minimo di potenziale garantisce l'∫ di uno stato fondamentale sotto al quale non c'è niente.

Atomo di Bohr:

potenziale non



(VEDRENO)

limitato impropriamente, ma \exists uno stato fondamentale (nel quale tutti gli atomi hanno lo stesso raggio)

$\sim \dots$

per $x \rightarrow \infty$: $\psi'' \approx -\frac{2m}{\hbar^2} (a_{2m} x^{2m}) \psi$

($\psi_{as} = \psi$ asintotica)

Il potenziale diverge \Rightarrow l'autovalore E è trascurabile -

$m=1 \Rightarrow \psi_{as} \sim e^{-\alpha x^2}$

$m > 1 \Rightarrow \psi_{as} \sim e^{-\alpha x + 2x}$ (ANSATZE)

Provo a metterla nell'equazione:

$+\frac{2m}{\hbar^2} a_{2m} x^{2m} e^{-\alpha x + 2x} \approx e^{-\alpha x + 2x} (\alpha^2 4x^2 + 4x - 2 - \alpha x 2x(2x-1) x^{2x-2})$

Se $\kappa > 0$ come ci aspettiamo, teniamo solo l'esponente dominante e viene:

$+\frac{2m a_{2m} x^{2m}}{\hbar^2} \approx 4\kappa^2 d_{\kappa}^2 x^{2(2\kappa-1)}$

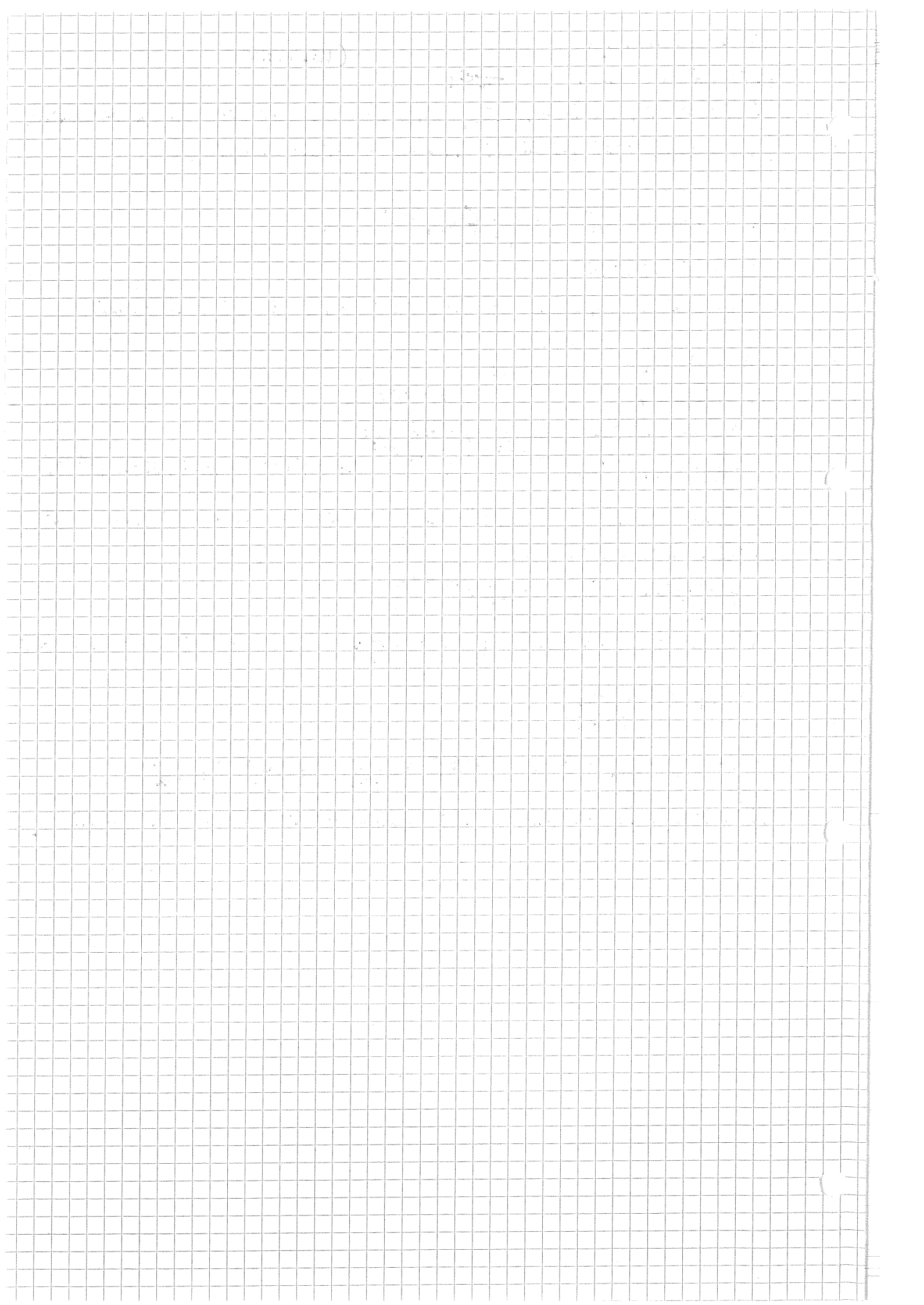
$\Rightarrow \begin{cases} 2m = 2(2\kappa-1) \Rightarrow \kappa = \frac{m+1}{2} & \text{per } m=1 \text{ viene una Gaussiana!} \end{cases}$

$d_{\kappa}^2 = \frac{2m a_{2m}}{\hbar^2 4\kappa^2}$

$m=1 \Rightarrow a_{2m} = \frac{1}{2} m \omega^2$

$\cdot \frac{2m}{\hbar^2 \cdot 4} = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^2 = d_{\frac{1}{2}}^2$

Più diverge il potenziale, più rapidamente va a 0 la funzione -



$$+ \frac{2m a_{2n}}{\hbar^2} x^{2n} e^{-2k x^{2n}} = \uparrow$$

$$\psi''_{os} = \text{EXP}(\alpha_k^2 4k^2 x^{4k-2} - 2k 2k(2k-1) x^{2k-2})$$

Questo termine è più grande (e quindi domina) rispetto al 2°

$$+ \frac{2m a_{2n}}{\hbar^2} x^{2n} \approx 4k^2 \alpha_k^2 x^{2(2k-1)}$$

Per essere uguali i due membri:

$$2n = (2k-1) \cdot 2 \quad k = \frac{n+1}{2}$$

Se $n=1$ otteniamo una gaussiana.

$$\alpha_k^2 = \frac{2m a_{2n}}{\hbar^2 4k^2}$$

$$\frac{2m \frac{1}{2} m \omega^2}{\hbar^2 4} = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^2 = \alpha_k^2$$

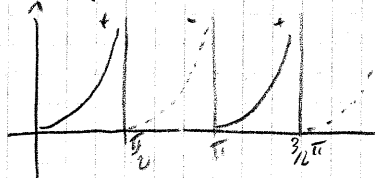
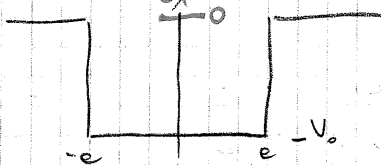
Se il potenziale è quartico: $n=2 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$

$e^{-|x|^{3/2} \cdot \frac{1}{6}} \Rightarrow$ la funzione d'onda va a 0 più rapidamente.

Maggiore è il potenziale più la funzione d'onda va a 0 veloce.

ESERCIZIO 6

Nel caso della buca di potenziale:



$$+ \rightarrow \xi \text{tg} \xi$$

$$- \rightarrow -\xi / \text{tg} \xi$$

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{V_0}{\hbar^2 / 2m a^2}$$

$$\xi = k'a$$

$$\eta = \kappa a$$

Prendiamo ora un altro tipo di buca:

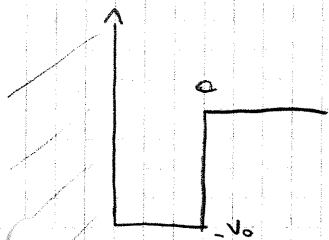
Il potenziale sale

a ∞ da una parte.

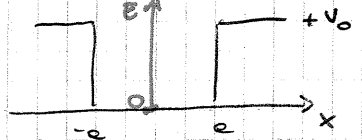
In generale con la buca simmetrica

si poteva avere anche un solo stato

legato (pari) e poi il continuo.



Facciamo un passo indietro:



Gli autovalori di questo saranno testati

rispetto a quella sopra della quantità V_0 .

$$H_- \psi_- = E_n^- \psi_-$$

$$H_+ = H_- + V_0 \mathbb{I}$$

\Rightarrow gli autovettori sono gli stessi.

$$H^+ \psi_- = (E_n^- + V_0) \psi_-$$

Il livello fondamentale si può scrivere:

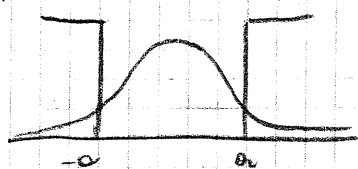
$$\psi_0(x < a) \approx \cos(kx)$$

$$\psi_0(x > a) \approx e^{-\kappa x}$$

L'energia dello stato sarà lo stesso dentro e fuori la buca, quindi:

$$E = -V_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{(\hbar k')^2}{2m}$$

dentro la buca \swarrow \searrow cinetica
potenziale \nwarrow \nearrow fuori la buca



$$-V_0 + \frac{\hbar^2(k_0)^2}{2ma^2} = -\frac{\hbar^2(\kappa^2 a^2)}{2ma^2} \quad (\text{Voglio far comparire } \eta \text{ e } \xi, \text{ lo scopo è coprire quale è } \eta \text{ e quale } \xi)$$

$$-V_0 + \frac{\xi^2}{2ma^2} = -\frac{\hbar^2 \eta^2}{2ma^2} \quad \text{scambiando } \xi \text{ con } \eta \text{ si vede che torna lo stesso } \Rightarrow \text{WRONG WAY. Lasciamo perdere.}$$

Se aumentiamo V_0 allora il κ cresce e quindi la funzione $\psi \propto e^{-\kappa x}$ va a 0 più rapidamente.

Ma allora cosa succede per $V_0 \rightarrow \infty$?

$$\psi'' = -\frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2} \psi, \quad \text{il termine } E - V(x) > 0 \text{ sempre.}$$

$V_0 \rightarrow \infty \Rightarrow$ probabilità NULLA di trovare la particella fuori dalla buca (NO EFFETTO TUNNEL) -

Se $V_0 \rightarrow \infty$ la ψ non è più C^1 nei punti!

$$-a = a.$$

La lunghezza d'onda diminuisce con n :

$$n \frac{\lambda}{2} = a \quad \kappa = \frac{2\pi n}{2a} = \frac{\pi n}{a}$$

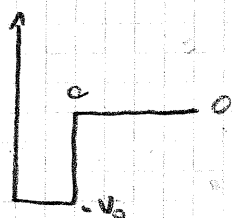
$$l = \frac{2a}{n} \Rightarrow \kappa_n = \frac{2\pi}{l} = \frac{2\pi n}{2a} = \frac{n\pi}{a}$$

I livelli dell'energia:

$$\Rightarrow E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2 = \frac{p^2}{2m}$$

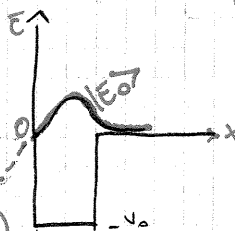
Questi sono i livelli energetici della buca di potenziale infinita.

Tornando al caso:



$$\psi_{E_0}(0) = 0$$

(ovviamente in modo dispari)

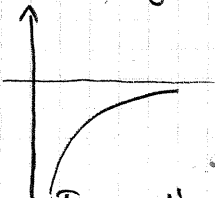


La funzione d'onda ha una nodine a destra ma non a sinistra.

Se prolunghiamo $\psi(0)$ si trova il 1° stato eccitato della buca di potenziale "normale" e simmetrica col potenziale:

Ma non è detto che per questa buca il 1° stato eccitato esista sempre.

Per l'idrogeno il potenziale è del tipo:



per $x \rightarrow 0$ non sappiamo cosa succede, ma l'infinito

various si recupera imponendo $\psi(0) = 0$

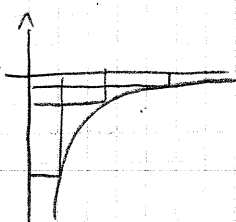
... sarà una R^n ed x , per definizione, va da 0 a ∞ ...

Fare l'esercizio: trovare il valore di V_0 per cui l'energia del sistema è proprio 0.

Come possiamo approssimare al meglio il potenziale dell'idrogeno?

Quale ha queste buche e la migliore?

Cioè: è meglio avere V_0 basso e a largo, oppure il contrario?



ESERCIZIO 7

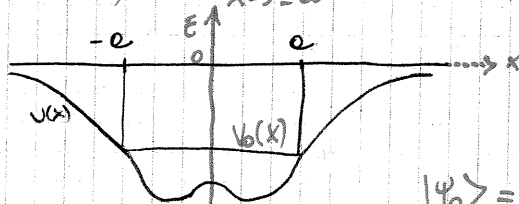
$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + g x^4$$

Si vogliono far trovare gli E_n e $\psi_n(x)$ di H ad un programma di calcolo.

Le condizioni iniziali devono essere: $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$ per il livello fondamentale. Ovvero ψ_0 pari - Successivamente verrà normalizzata, possiamo scegliere $\psi_0(0)$ alto a piacere, ma il valore 1 è sempre conveniente. Questo valore per l'autovalore: $\epsilon \equiv \frac{E}{\hbar\omega} > \frac{1}{2}$ si ottengono dei disegni. Il livello fondamentale ha un autovalore compreso tra: $0.558 < \epsilon < 0.560$. (cfr. 6.3)

ESERCIZIO 8 È data $V(x)$ t.c.: $V_0 \geq V \forall x$; $V(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ (ES. 6.4)

$$V_0(x) = \begin{cases} 0 & |x| > a \\ -V_0 & |x| < a \end{cases}$$



$|\psi_0\rangle \equiv$ stato fondamentale di H_0 - $\epsilon_0 < 0$ (Ovviamente $\epsilon_0 < 0$)

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad H_0 = \frac{p^2}{2m} + V_0(x)$$

Dimostrare che il valor medio di H su $|\psi_0(x)\rangle < 0$.

$$\langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle < 0 \quad H_0 - H \geq 0 \Leftrightarrow V_0 - V \geq 0 \forall x$$

$$\langle \psi_0 | H_0 - H | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | H_0 | \psi_0 \rangle - \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle > 0$$

$$\langle \psi_0 | H_0 | \psi_0 \rangle > \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle$$

$$0 > \epsilon_0 > \quad \swarrow \quad \text{dimostrato}$$

Dimostrare che H ha uno stato legato di energia $\leq \epsilon_0$, dove ϵ_0 è lo stato fondamentale di H_0 . $\epsilon_0^0 \equiv \epsilon_0$ $\psi_0^0 \equiv \psi_0$

Si dimostra per assurdo.

$$\langle \psi_0^0 | H | \psi_0^0 \rangle \quad |\psi_0^0\rangle = \sum_n a_n |\psi_n\rangle$$

Si può fare perché H è hermitiana \Rightarrow ha una base completa di autostati

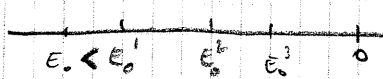
$$\left(\sum_n a_n^* \langle \psi_n | \right) H \left(\sum_m a_m |\psi_m\rangle \right) = \sum_{n,m} a_n^* a_m \langle \psi_n | H | \psi_m \rangle =$$

$$= \sum_{n,m} a_n^* a_m \langle \psi_n | \psi_m \rangle \epsilon_m = \sum_n |a_n|^2 \epsilon_n \quad \text{se gli } \epsilon_n \text{ fossero tutti positivi allora quella cosa}$$

sarebbe sempre > 0 ma si è dimostrato che questo non è possibile. Infatti $\langle \psi_0^0 | H | \psi_0^0 \rangle < 0$ il valore un autovalore deve essere minore di 0 $\Rightarrow \exists$ uno stato legato.

$$\sum_n |a_n|^2 \epsilon_n > \left(\sum_n |a_n|^2 \right) \epsilon_0 = \epsilon_0 \Rightarrow \dots \text{ che ha } \bar{\epsilon} < \epsilon_0. \text{ Infatti:}$$

$$\text{Se } H \leq H_0: \quad \epsilon_0 < \sum_n |a_n|^2 \epsilon_n = \langle \psi_0^0 | H | \psi_0^0 \rangle \leq \langle \psi_0^0 | H_0 | \psi_0^0 \rangle = \epsilon_0.$$



Di sicuro $\epsilon_0 < \epsilon_0^0$ ma non sappiamo dove vanno messi ϵ_1 e ϵ_2 , se non che stanno a sinistra di ϵ_1^0 e ϵ_2^0 .

23 aprile 2010

ESERCIZIO 9 (6.5)

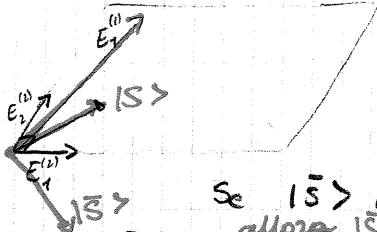
Prendiamo 2 hamiltoniane $H_1 \leq H_2$.

Se H_2 ha N stati legati $E_1^{(2)} \dots E_N^{(2)} \Rightarrow H_1$ ha almeno N stati legati e per gli autovalori vale la relazione:

$$E_1^{(1)} \leq E_1^{(2)} \quad \dots \quad E_N^{(1)} \leq E_N^{(2)}$$

DIMOSTRAZIONE

Se H_2 ha 2 stati legati allora si può prendere un piano di Hilbert generato da essi:



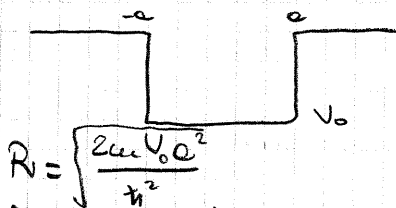
$E_1^{(1)}$ avrà una proiezione sul piano
 $\alpha |E_1^{(1)}\rangle + \beta |E_1^{(2)}\rangle = |S\rangle$

$\langle S | H_1 | S \rangle \leq \langle S | H_2 | S \rangle \leq 0$ ($\neq |S\rangle$!)

Se $|S\rangle$ è il vettore del piano \perp alla proiezione di $|E_1^{(1)}\rangle$ sul piano, allora $|S\rangle$ è anche \perp ad $|E_1^{(2)}\rangle$ (questioni geometriche).
 $\langle S | H_1 | S \rangle \leq 0$ H_1 è negativo su uno stato ortogonale ad $E_1^{(1)}$ e $E_1^{(2)}$ altri autostati di H_1 legato, e così via.

Si è dimostrato che esiste un vettore $|S\rangle$ nel complemento ortogonale ^{rispetto ad $|S\rangle$} di H_1 . In generale si vede che H è negativa su tutto il piano.

Si prende ora una particella in una buca:



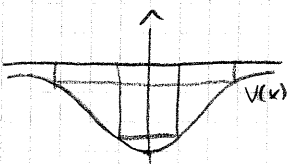
Sappiamo che ha un certo numero di stati legati, dipendente da R , e quindi da a^2 e V_0 . Bisogna vedere quanti $\frac{R}{2}$ entrano in quell' R .

Trovare il numero minimo di stati legati per vari potenziali.

$$V_1(x) = -\frac{3\hbar^2}{mb^2} e^{-\frac{x^2}{b^2}}$$

$$V_2(x) = -\frac{4\hbar^2}{mb^2} e^{-\frac{x^2}{b^2}}$$

Sono gaussiane rovesciate.



Si possono mettere varie buche "note" all'interno, ma il problema è capire quale è meglio. Le varie buche avranno a e V_0 legate dall'essere insorte in questi potenziali.

Se $\begin{cases} x=a \\ V_0 = +\frac{3\hbar^2}{mb^2} e^{-\frac{a^2}{b^2}} \end{cases}$ (primo caso)

Se trovo il max di R^2 , nello stesso punto avrò il max di R .

$$R_{\text{buca}}^2 = \left(\frac{2m \cdot 3\hbar^2 e^{-\frac{a^2}{b^2}} \cdot a^2}{\hbar^2 m b^2} \right) =$$

Si deve trovare il massimo di que-

sta funzione al variare di a . Il max \int : è una funz. fatto così: $\frac{R^2}{a^2}$

$$\frac{\partial (R^2)}{\partial x} = (e^{-x} - x \cdot e^{-x}) \stackrel{!}{=} 0 \quad e^{-x}(1-x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=1} \Rightarrow a^2=b^2$$

si ha per $a=b$ il maggior numero di stati legati.

Il massimo di R^2 si ha in $\frac{6}{e} = 2.207 \Rightarrow$ max per R in $\sqrt{2.2} \Rightarrow 1$ stato legato

Per il potenziale $V_2(x)$: $\frac{8}{e} = 2.943 \Rightarrow$ max per R in $\sqrt{2.94} \Rightarrow 2$ stati legati.

La buca ottimale da scegliere è quella con ordinata in corrispondenza dei punti di flesso. (e ascissa!)

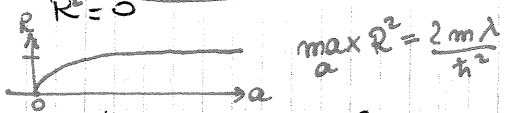
• Dato $V(x) = -\frac{\lambda}{x^2 + b^2}$ trovare λ per cui $V(x)$ ha λ stati legati almeno

$a, V(a)$ dimensioni della buca insorbita -

$$V_0 \approx V(a) = -\frac{\lambda}{a^2 + b^2} \Rightarrow R^2 = \frac{2m\lambda a^2}{\hbar^2(a^2 + b^2)}$$

N.B. Nella espressione di R , V_0 indica la profondità di un potenziale < 0 , sarebbe più corretto scrivere $|-V_0|$. Se la buca vale $-V_0, V_0 > 0$.

Se $a \rightarrow \infty \Rightarrow R^2 \rightarrow \frac{2m\lambda}{\hbar^2}$ se $a = 0 \Rightarrow R^2 = 0$



Per trovare gli N stati:

$$\frac{R^2}{(\pi/2)^2} = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} \cdot \frac{4}{\pi^2} > N \quad \text{allora si trova } \lambda \text{ in funzione di } N$$

imposizione

Prendiamo $V(x) = -\frac{\lambda}{|x| + b}$ trovare il numero di stati legati -

$$V(a) = -\frac{\lambda}{a+b} \quad R^2(a) = \frac{2m\lambda a^2}{\hbar^2(a+b)} \rightarrow \text{facendo } \lim_{a \rightarrow \infty} R^2(a)$$

Visto che diverge si hanno ∞ stati legati.

Quello che conta è il comportamento asintotico di $a^2 V(a)$, e se va ad ∞ allora si hanno ∞ stati legati.

Si parla sempre dei parametri della buca insorbita in $V(x)$.

ESERCIZIO 10 Potenziale di potenziali < 0 t.c. $V(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$:

Si prende un potenziale che non sappiamo come è fatto di preciso, ma con la trattazione generale si può dire che ha almeno uno stato legato. Una buca insorbita \Rightarrow almeno uno stato legato.

Tale potenziale ce lo costruiamo con il metodo variazionale.

Abbiamo un oscillatore armonico:

$$\psi(x, a) = \begin{cases} \sqrt{\frac{315}{256a^9}} (x^2 - a^2)^2 & |x| \leq a \\ 0 & |x| \geq a \end{cases} \quad \text{Lo } \psi(x, a) \text{ è normalizzato}$$

Trovare il valor medio di H su $\psi(x, a)$.

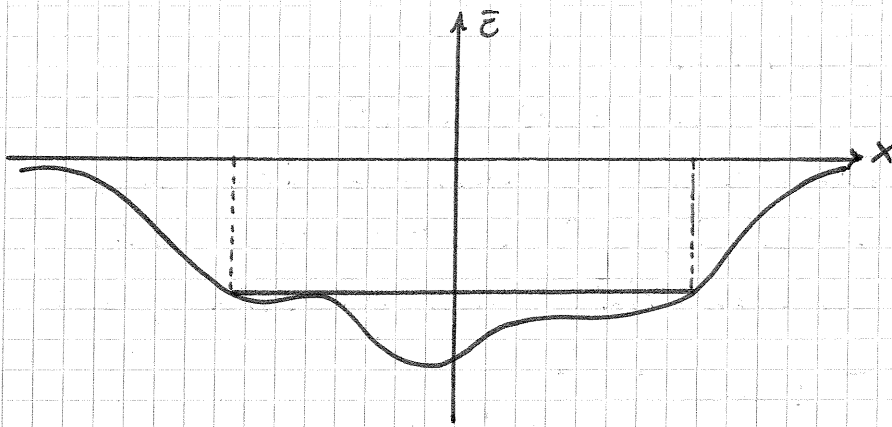
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad \text{Lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico sappiamo che è una gaussiana}$$

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \int_{-a}^a (x^2 - a^2)^2 \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) (x^2 - a^2)^2 dx =$$

In questo modo la funzione non è normalizzata, ma ce ne occupiamo dopo.

$$\begin{aligned} &= C \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-a}^a dx \left[\frac{d}{dx} (x^2 - a^2)^2 \right] + \frac{1}{2} m \omega^2 \int_{-a}^a x^2 (x^2 - a^2)^4 dx \right\} = \\ &= \frac{315}{256a^9} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-a}^a 16x^2 (x^2 - a^2)^2 dx + \frac{1}{2} m \omega^2 a^6 \int_{-a}^a y^2 (y^2 - 1)^4 dy \right\} = \\ &= \frac{315}{256a^9} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} a^7 \frac{16}{105} + \frac{1}{2} m \omega^2 a^6 \frac{256}{3465} \right\} = \quad \text{con } x = ay \\ &= \frac{\hbar^2}{2ma^2} \cdot \frac{3}{16} + \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \cdot \frac{1}{11} \end{aligned}$$

Al variare di a viene descritta una curva e con i conti che di uno fatto ci siamo presi il valor medio di tale curva. Il valor medio di H sullo stato fondamentale è l'autovalore che corrisponde a quello stato.



Metodo Variazionale

6.7 OA1 $\psi(a, x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{315}{256a^9}} (x^2 - a^2)^2 & \rightarrow |x| \leq a \\ 0 & \rightarrow |x| > a \end{cases}$
 coeff. di normalizzazione

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

a) calcolare $\langle \psi(x, a) | H | \psi(x, a) \rangle =$
 $= \left\{ \int_{-a}^a (x^2 - a^2)^2 \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - a^2)^2 \right] dx + \int_{-a}^a (x^2 - a^2)^2 \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 dx \right\} \frac{315}{256a^9} =$

$$\int_{-1}^1 x^2 (x^2 - 1)^2 dx = \frac{16}{105} ; \int_{-1}^1 x^2 (x^2 - 1)^4 dx = \frac{256}{3465}$$

$$= c \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-a}^a dx \left[\frac{d}{dx} (x^2 - a^2)^2 \right]^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \int_{-a}^a dx x^2 (x^2 - a^2)^4 \right\} =$$

$$= c \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-a}^a dx [4x(x^2 - a^2)]^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 a^{11} \frac{256}{3465} \right\} =$$

$$= \frac{315}{256a^9} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} a^7 \frac{16}{105} + \frac{1}{2} m \omega^2 a^{11} \frac{256}{3465} \right\} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \frac{3}{16} + m \omega^2 a^2 \frac{11}{11}$$

Abbiamo calcolato $\langle H \rangle$ su una famiglia di stati dipendente da a .

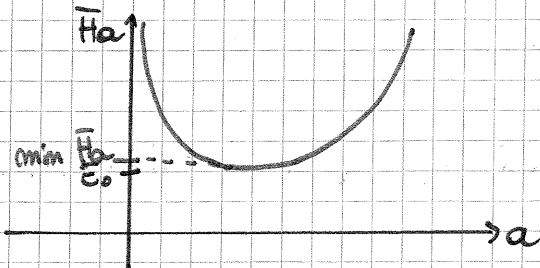
$$\equiv \bar{H}_a$$

Se prendiamo lo stato fondamentale $|\bar{\epsilon}_0\rangle$ (autoval. $\bar{\epsilon}_0$):

$$\forall a \bar{H}_a \geq \bar{\epsilon}_0 \quad \text{ovvero} \quad \forall a \langle a | H | a \rangle \geq \langle \bar{\epsilon}_0 | H | \bar{\epsilon}_0 \rangle$$

(Per OA1, $H > 0 \Rightarrow \bar{\epsilon}_0 > 0$)

Quando trovo il minimo di \bar{H}_a , so stimare $\bar{\epsilon}_0$: sarà compreso tra $\min_a \bar{H}_a$ e 0.



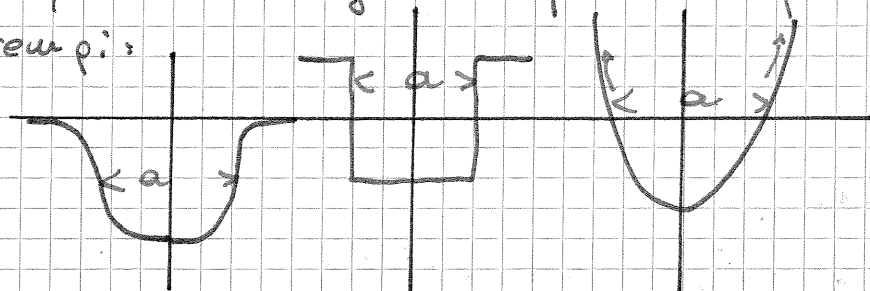
(Gli stati $|a\rangle$ si dicono test function)

ed a si dice test parameter.

Non è detto che tra gli $|a\rangle$ troviamo $|\bar{E}_0\rangle$.

Una buona test function ha la stessa parità del potenziale in questione ed è $\neq 0$ "almeno" in una regione larga quanto la larghezza tipica del potenziale, a :

Esempi:



Una gaussiana, che non si annulla mai, può essere approssimata bene con una funzione non nulla solo sull'intervallo a , ad es:

Tornando all'esercizio:

b) Il minimo di $H|a\rangle$ si ha per $\bar{a} = \sqrt{33} \sqrt{\frac{\hbar^2}{m\omega}}$ e risulta $H(\bar{a}) = 0,52 \hbar\omega$

(Sappiamo che $\langle E_0 | H | E_0 \rangle = 0,5 \hbar\omega$!)

Il numero di parametri tipo a che stiamo definisce il tipo di oggetto di cui bisogna trovare il minimo:

1 parametro \leftrightarrow funzione unidimensionale

2 parametri \leftrightarrow superficie bidimensionale

...

Questo si dice METODO VARIAZIONALE.

c) Vogliamo una f -disponi, quindi ad esempio moltiplichiamo la precedente per x :

$$x(x^2 - a^2)^2$$

6.8 $V(x) = gx^4 \quad g > 0$

b) come dipendono da g ed m gli autovalori dell'hamiltoniana?

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + gx^4 \quad E_n = \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{g}{m}\right)^{1/4}$$

$$q \rightarrow \frac{1}{q} = UqU^\dagger \quad (\text{Von Neumann})$$

$$p \rightarrow \frac{1}{\lambda} p = U_p U^\dagger$$

UHU^\dagger avrà gli stessi autovalori di H , perché è unitariamente equivalente.

$$UHU^\dagger = -\frac{\hbar^2}{2m\lambda^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + g\lambda^4 q^4$$

$$E_n \left(\frac{\hbar^2}{m\lambda^2}, g\lambda^4\right)$$

gli autovalori sono gli stessi, quindi dovranno essere espressi da una funzione in cui λ si semplifica.

Ad. es:

$$\left(\frac{\hbar^2}{m\lambda^2}\right)^2 g\lambda^4$$

Devono sempre avere le dimensioni di un'energia - Questo ansatz ha le dim. di un'energia al cubo

$$E_n \sim \sqrt[3]{\frac{\hbar^4 g}{m}} f(n)$$

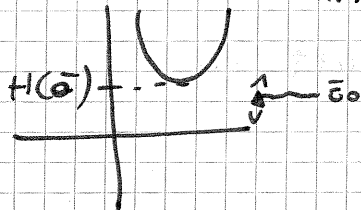
c) $H(\bar{a}) = ? \cdot \sqrt[3]{\frac{\hbar^4 g}{m}}$ (applichiamo il metodo variazionale)

$$\int_{-1}^1 x^4 (x^2 - 1)^2 dx = \frac{256}{15015}$$

$\Psi(x, a)$

$$\langle \Psi(x, a) | H | \Psi(x, a) \rangle = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \frac{3}{16} + g a^4 \frac{3}{143}$$

$$H(\bar{a}) = H_{\min} = 0,68 \sqrt[3]{\frac{\hbar^4 g}{m}}$$



Il metodo variazionale consiste nel variare la funzione d'onda in modo da minimizzare l'upper bound per E_0 .

Cosa si guadagna utilizzando due parametri?

Esempio:

$$(x^2 - a^2)^2 e^{-\alpha x^2}$$

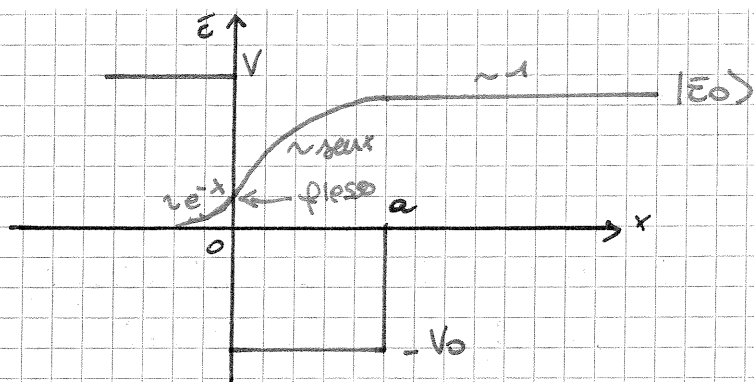
$$\min_{a, \alpha} \bar{H}(a, \alpha) \leq \bar{H}(\bar{a}, \bar{\alpha})$$

Questo ansatz contiene il precedente! Basta avere $\alpha = 0$.

Di solito aumentare i parametri si fa in modo di "contenere" sempre l'ansatz precedente.

ESERCIZIO: Con il seguente potenziale, trovare il minimo V per il quale $E_0 = 0$.

[6.10]



Com $\bar{E}_0 = 0$ la funzione d'onda sarà piatta in $x > a$ ed oscillante in $(0, a)$, ma senza nodi.
 Com $\bar{E}_0 = 0$ la buca è classicamente accessibile;
 $\psi_0'' < 0$ in tutta la buca (no flessi).
 $x < 0$ non è classicamente accessibile, ci sarà un flesso in $x=0$ e continuerà a sinistra con un esponenziale decrescente.

Chiamo \bar{V} il V richiesto.

$$\langle x|V\rangle = \frac{V_0}{a} \int_0^a dx$$

$$-V_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \bar{V} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (\text{vedi problema 6-10})$$

Vedremo che sarà $\bar{V} = a \text{ctg} \frac{V_0 m a^2}{\hbar^2}$

$$\langle \psi|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ikx} dx$$

$$\langle k|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

28.04.2010

ESERCIZIO

$$\psi_k(x) = \frac{ika - \hbar k/a}{ika + 1} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{questo è un autostato - Di cosa?}$$

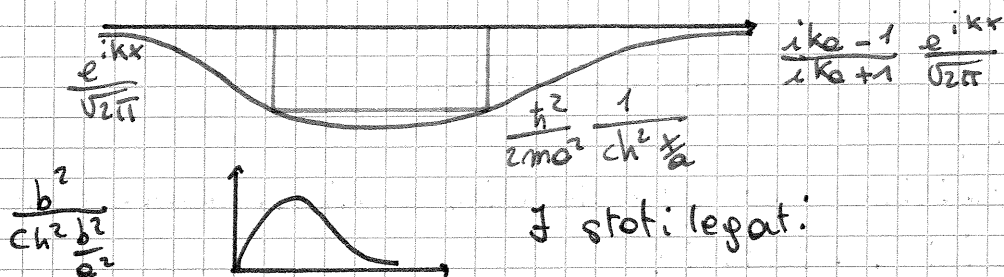
comportamento asintotico: $\frac{ika - 1}{ika + 1} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$
 non c'è onda riflessa!

il coeff. $\frac{ika - 1}{ika + 1}$ è una pura fase, di modulo $^2 1$.

Questo autof. deve appartenere allo spettro continuo, perché non è L^2 (e quindi è non normalizzabile).
 Le autof. sono quelle di particella libera, più una costante che impongo essere 0. Posso scrivere:

$$\bar{E} = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{e} \quad V(x) = \bar{E} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_k''}{\psi_k}$$

Le f. non vanno a 0 né da dx né da sx, quindi la degenerazione è 2. All'autoval. k corrispondono ψ_k e ψ_{-k} .



Gli stati del continuo non sono completi perché
 J almeno uno stato legato.

$$\langle x | \int_{-\infty}^{+\infty} dk |k\rangle \langle k| + |\epsilon_0\rangle \langle \epsilon_0| = \mathbb{1} \quad (y) \quad \text{valore medio tra due stati}$$

Se sapessi: x certo di avere un solo stato legato,
 la relazione di completezza si scrive:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \psi_k(x) \psi_k^*(y) + \psi_0(x) \psi_0^*(y) = \delta(x-y)$$

Invece nel problema:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \psi_k(x) \psi_k^*(y) = \delta(x-y) - \frac{1}{2a} \frac{ch \frac{x}{a}}{a} \frac{ch \frac{y}{a}}{a}$$

Quindi $\frac{1}{2a} \frac{ch \frac{x}{a}}{a} \frac{ch \frac{y}{a}}{a}$ è il contributo di tutti e soli gli
 stati legati.

Domanda: quanti saranno, al più, gli stati legati?

Sappiamo che ce n'è almeno 1.

$$\int dk |k\rangle \langle k| = \mathbb{1} - |0\rangle \langle 0| - |1\rangle \langle 1| - \dots - |N\rangle \langle N|$$

Supponiamo un atomo di essere in uno spazio 3-D
 dotato di base e di voler scrivere la trasformazione
 $|e_2\rangle \langle e_2|$:

	$ e_1\rangle$	$ e_2\rangle$	$ e_3\rangle$
$\langle e_1 $	0	0	0
$\langle e_2 $	0	1	0
$\langle e_3 $	0	0	0

Come sarà fatta la matrice di $|e_2\rangle \langle e_2| + |e_3\rangle \langle e_3|$?

Intanto, questo è un proiettore che proietta sul
 piano generato da $|e_2\rangle$ ed $|e_3\rangle$, che è una
 varietà non più unidimensionale.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} |e_2\rangle\langle e_2| + |e_3\rangle\langle e_3|$$

Come si stabilisce su quante dimensioni agiscono questi generici proiettori?

Se proiettassimo su tutto lo spazio generato dalla base troveremmo la matrice dell'II.

La TRACCIA di una matrice è proprio quello che cerchiamo, purché vogliamo qualcosa di indipendente dalla base in cui è scritta la matrice.

$$\text{Tr}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + \dots + |N\rangle\langle N|) = N$$

analogi:

$$N = \text{Tr} \left(\frac{1}{2a} \text{ch} \frac{x}{a} \text{ch} \frac{y}{a} \right)$$

Per una matrice T, la traccia è data da:

$$\text{Tr}(T) = \sum_{i,j} T_{i,j} \delta_{i,j}$$

$$N = \int dx dy \frac{1}{2a} \text{ch} \frac{x}{a} \text{ch} \frac{y}{a} \delta(x-y) =$$

$$= \int dx \frac{1}{2a} \text{ch}^2 \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \int dz \text{ch}^2 z \quad (z = \frac{x}{a})$$

ERRATA: ~~$\frac{1}{2a} \text{ch} \frac{x}{a} \text{ch} \frac{y}{a}$~~ $\rightarrow \frac{1}{2a} \text{ch} \frac{x}{a} \text{ch} \frac{y}{a}$

$$\int_0^{+\infty} dz \frac{1}{\text{ch}^2 z} = \text{th} z \Big|_0^{+\infty} = 1 - 0 = 1$$

$\Rightarrow \exists!$ stato legato

• Ogni proiettore può essere scritto:

$$(F\phi)(x) = \int F(x,y) \phi(y) dy$$

• La traccia di un proiettore dà la dimensione dello spazio in cui proietta.

Cosa succede se rendo il potenziale più attrattivo?
(più profondo)

Bisogna sempre valutare la quantità:

$$b^2 V(b)$$

Se questo $\rightarrow \infty$, allora è una condizione sufficiente per dire che V ha ∞ stati legati.

\Rightarrow ogni potenziale che va a 0 meno rapidamente di $\frac{1}{b^2}$ ha ∞ stati legati -

Quindi un potenziale che $\rightarrow 0$ più velocemente di $\frac{1}{b^2}$ ha al più un numero finito di stati legati -

Gli autostati ^{del continuo} sono tutti senza riflessione

7.4 $H = \frac{p^2}{2m} + V(x) + V(a-x)$

$V(x)$ supporto compatto

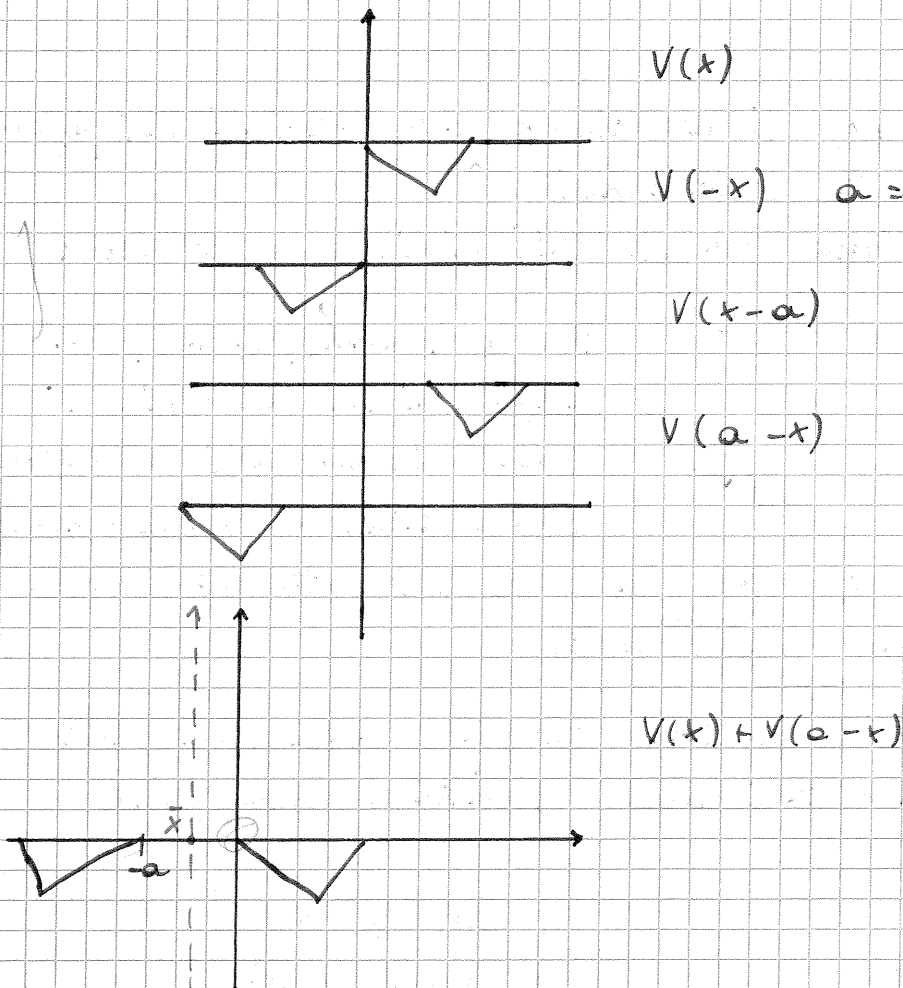
NB: per supporto si intende l'intervallo dove $V(x) \neq 0$

V la sua chiusura, es.:  e a

supporto compatto -

$V(x)$ e $V(a-x)$ supporti disgiunti.

$a=0 \Rightarrow V(a-x) = V(-x)$



$V(x)$ ha un solo stato legato di en - $E_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} k_0^2$

• Per dimostrare che H e I commutano si sposta l'asse y in mezzo alle due buche - $\bar{x} = x - \frac{a}{2}$

• Supponiamo $ka \gg 1$ (ovvero a grande rispetto alla lunghezza tipica dello stato legato)

\Rightarrow buche distanti -

(In questo caso,

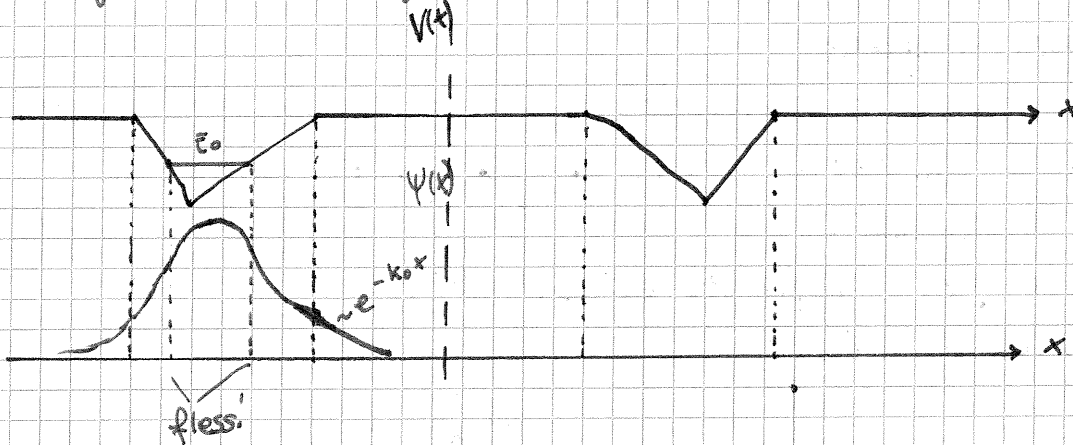
H ha due stati legati: $|s\rangle$ ed $|d\rangle$).

Ovviamente, se una buca ha uno stato legato,

e aggiungo un'altra buca, si ha $V_{2\text{ buche}} \leq V_{1\text{ buca}}$,

ed il nuovo sistema avrà almeno 1 stato legato -

Disegniamo l'autofunzione della buca:



Nel limite $a \rightarrow \infty$ ci aspettiamo due stati diversi, degeneri, con energia \bar{E}_0 (centrobbi) -

Faccio una base con gli stati sinistro e destro:

H	$ s\rangle$	$ d\rangle$	eccetera
$\langle s $	\bar{E}_0		
$\langle d $...	
ecc.			

Per a grande, sono quasi degeneri in energia -

trascuriamo gli eventuali altri stati e diagonalizziamo

la matrice 2×2 per trovare gli autovalori dell' H -

$$\langle s|H|s\rangle = E_0 + ve^{k_0 a} \equiv \bar{E}_0$$

Ma è piú veloce se facciamo un'altra cosa - $|s\rangle$ e $|d\rangle$ non sono autovettori della parità - Come base scegliamo:

$$\begin{aligned} &|s\rangle + |d\rangle \\ &|s\rangle - |d\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [H, I_{\mp}] &= 0 \\ I_{\mp}|s\rangle &= |d\rangle \\ I_{\mp}|d\rangle &= |s\rangle \end{aligned}$$

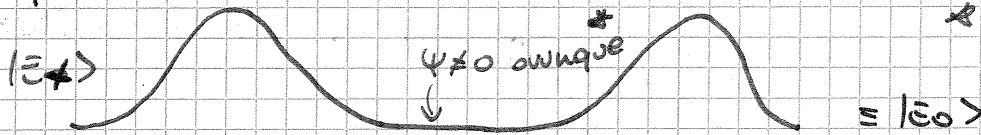
	$ s\rangle + d\rangle$	$ s\rangle - d\rangle$
$\langle s + \langle d $	E_+	0^*
$\langle s - \langle d $	0^*	E_-

* Il H. pari non connette stati.

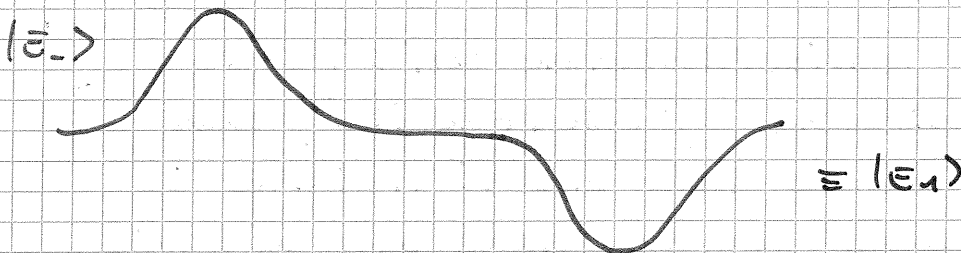
con parità opposta.

Se J stato fondamentale, è certamente quello

pari $\Rightarrow E_+ < E_-$



* è somma di 2 esponenti di



Supponendo di ^{non} aver normalizzato i due stati:

$$E_{\pm} = \frac{(\langle s| \pm \langle d|) H (|s\rangle \pm |d\rangle)}{(\langle s| \pm \langle d|) \cdot (|s\rangle \pm |d\rangle)}$$

Il hamiltoniano è diagonale, quindi gli elementi

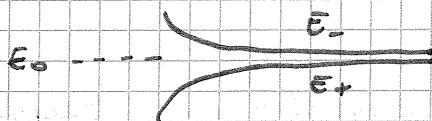
sulla diagonale sono direttamente gli autovalori.

H simmetrica $\Rightarrow \langle s|H|d\rangle = \langle d|H|s\rangle$

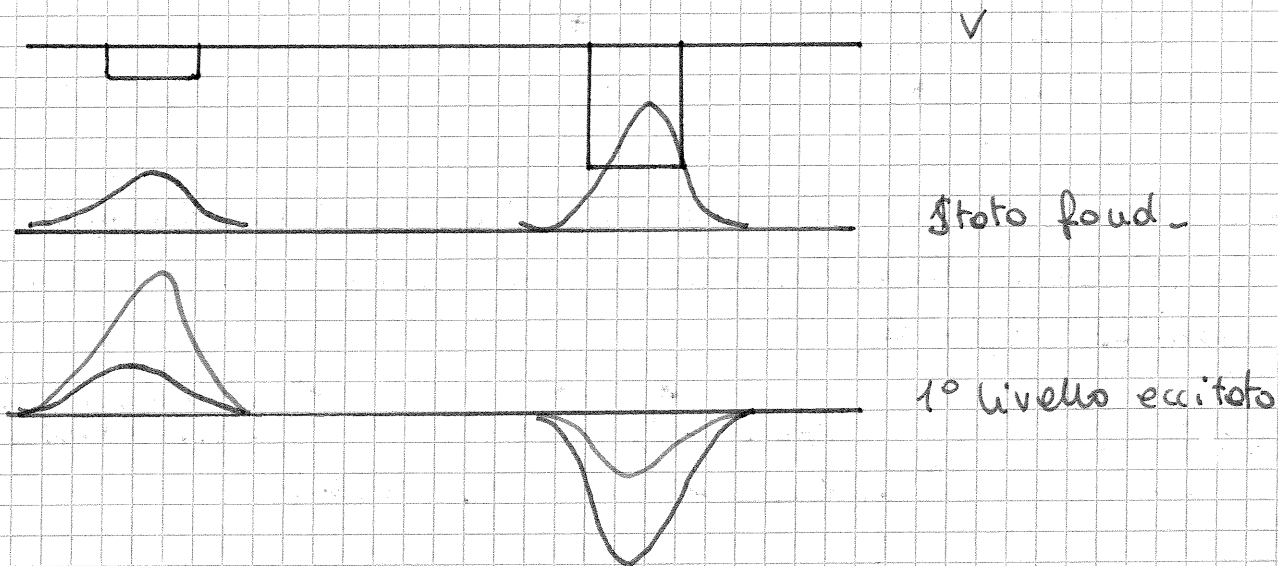
$$E_{\pm} = \frac{2\langle s|H|s\rangle \pm 2\langle d|H|s\rangle}{2\langle s|s\rangle \pm 2\langle s|d\rangle}$$

Il risultato è: $E_{\pm} = E_0 (1 \pm e^{-4k_0 a})$

Abbiamo due livelli energetici che sono tanto più vicini quanto più sono distanti le buche:



Consideriamo un attimo una doppia buca asimmetrica:



Classicamente lo disegneremmo così. Ma se vogliamo mantenere l'ortogonalità, non va bene. La somma delle aree di sinistra deve essere = alla somma delle aree di destra.

Andiamo avanti col 7-9.

Supponiamo che all'istante 0 ho una particella nello stato $|s\rangle$. È uno stato stazionario?

$$|s\rangle = \frac{|\epsilon_0\rangle + |\epsilon_1\rangle}{\sqrt{2}} \quad |d\rangle = \frac{|\epsilon_0\rangle - |\epsilon_1\rangle}{\sqrt{2}}$$

↓ t

$$e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |s\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{i\epsilon_0 t}{\hbar}} |\epsilon_0\rangle + e^{-\frac{i\epsilon_1 t}{\hbar}} |\epsilon_1\rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\epsilon_0 t}{\hbar}} \left(|\epsilon_0\rangle + e^{-\frac{i(\epsilon_1 - \epsilon_0)t}{\hbar}} |\epsilon_1\rangle \right)$$

|||
 $e^{-i\Omega t}$

Quindi questo stato evolve periodicamente nel tempo con $T = \frac{2\pi}{\Omega}$.

$$\text{Al tempo } \frac{T}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\epsilon_0 t}{\hbar}} \left(|\epsilon_0\rangle + e^{-i\pi} |\epsilon_1\rangle \right) \propto |\epsilon_0\rangle - |\epsilon_1\rangle$$

$$= |d\rangle$$

La particella è finita a destra. Dopo un altro semiperiodo sarà tornata indietro.

Queste si chiamano oscillazioni di Rabi e sono tipiche della sovrapposizione tra due stati ad energie diverse. La differenza tra le due energie dà la frequenza delle oscillazioni.

PROBLEMI 3 DIMENSIONALI

$$\Psi(x, y, z) \in L^2(\mathbb{R}^3) \iff \int dx dy dz |\Psi(x, y, z)|^2 < \infty$$

Operatore di Laplace: $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{q}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \right] + V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

L'equazione $H\Psi_E = E\Psi_E$ diventa una P.D.E., di risoluzione molto più difficile rispetto alle classiche O.D.E.. Dovremo costruire qualche costante del moto. Dalla fisica classica pensiamo al momento angolare.

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= y p_z - z p_y \xrightarrow{RS} -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ L_2 &= z p_x - x p_z \xrightarrow{RS} -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ L_3 &= x p_y - y p_x \xrightarrow{RS} -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Dalla fisica classica sappiamo che, in un campo centrale, \vec{L} si conserva come vettore, ovvero L_i è una costante del moto $\forall i = 1, 2, 3$.

Vedremo che vale anche in mecc. quantistica, infatti avremo:

$$\boxed{\begin{aligned} [L_x, H] &= 0 \\ [L_y, H] &= 0 \\ [L_z, H] &= 0 \end{aligned}}$$

È possibile trovare una base comune di autovettori per H, L_x, L_y, L_z ? Bisogna che le componenti di \vec{L} commutano tra di loro. Vedremo:

$$\begin{aligned}
[L_x, L_y] &= [y p_z - z p_y, z p_y - x p_z] = \\
&= [y p_z, z p_x - x p_z] - [z p_y, z p_x - x p_z] = \\
&= [y p_z, z p_x] - [y p_z, x p_z] - [z p_y, z p_x] + [z p_y, x p_z] = \\
&= y [p_z, z] p_x + x [z, p_z] p_y = i \hbar (x p_y - y p_x) \\
&= i \hbar L_z
\end{aligned}$$

Le componenti di \hat{L} non commutano tra di loro.

Quindi \hat{L} autovettori del tipo $|\bar{L}, m_x, m_y, m_z\rangle$.

Altra informazione che si ricava:

L'Hamiltoniana è degenera - In 3 dimensioni.

Abbiamo:

H è SEMPRE degenera.

$$[L_y, L_z] = i \hbar L_x$$

$$[L_z, L_x] = i \hbar L_y$$

In generale: $[L_a, L_b] = i \hbar \epsilon_{abc} L_c$ ϵ_{abc} simbolo di Ricci

$\epsilon \neq 0$ solo se $a \neq b \neq c$, è antisimmetrico per lo scambio di indici, $\epsilon_{123} = 1$. (es.: $\epsilon_{213} = -1$)

$\epsilon = 1$ per permutazioni cicliche di a, b, c .

Dalla matematica sappiamo che le rotazioni sono un gruppo. Infatti, date due rotazioni attorno a due assi, in successione, queste sono equivalenti ad un'unica rotazione attorno ad un altro asse.

\mathbb{R}^3

$L^2(\mathbb{R}^3)$

Traslazioni: $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a}$

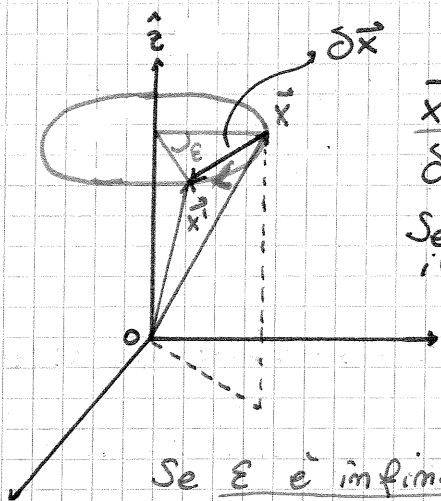
$$\vec{a}, \vec{b} \rightarrow \vec{a} + \vec{b}$$

$$\Psi(\vec{x}) \rightarrow \Psi'(\vec{x}) = e^{-i\vec{p} \cdot \vec{a} / \hbar} \Psi(\vec{x})$$

$$U(\vec{a})U(\vec{b}) = U(\vec{a} + \vec{b})$$

Rotazioni attorno ad un asse \hat{z} :

\hat{L} operatore di traslazione



$$\vec{x}' = \vec{x} + \delta \vec{x}$$

$$\delta \vec{x} = \epsilon \hat{n} \wedge \vec{x}$$

Se giriamo il vettore tenendolo fisso il sist. di riferimento:

$$x'_i = R_{ij}(\vec{n}, \varphi) x_j$$

Se ϵ è infinitesimo, posso confondere $\delta \vec{x}$ con l'arco di circonferenza.

$$(a \wedge b)_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

$$-(b \wedge a)_i = \epsilon_{ikj} b_k a_j$$

La matrice R è hermitiana \leftarrow le rotazioni sono trasformazioni rigide (conservano l'ortogonalità e quindi sono unitarie); inoltre siamo in uno spazio reale e quindi è simmetrica/hermitiana.

Vediamo qualche proprietà:

$$U(\vec{n}, \varphi_1) U(\vec{n}, \varphi_2) \equiv U(\vec{n}, \varphi_1 + \varphi_2)$$

\Rightarrow teorema di Stone \Rightarrow

$$U(\vec{n}, \varphi) \equiv e^{-i\varphi L_n / \hbar}$$

Nota Bene: in generale, $e^{-\frac{i\alpha L_x}{\hbar}} e^{-\frac{i\beta L_y}{\hbar}} \neq e^{-\frac{i}{\hbar}(\alpha L_x + \beta L_y)}$
(vedi formula BCH: L_x ed L_y non commutano).

È giusto assumere che L_n sia il generatore delle rotazioni attorno all'asse \vec{n} ?

L'asse \vec{n} è un sottospazio invariante delle rotazioni attorno ad \hat{n} . $[L_i, q_i] = 0$

Cosa deve fare U per essere un operatore di rotazione?

$$U(\vec{n}, \epsilon) q_i U^\dagger(\vec{n}, \epsilon) \simeq \left(1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} L_n + \dots\right) q_i \left(1 + \frac{i\epsilon}{\hbar} L_n + \dots\right) =$$

$$= q_i - \frac{i\epsilon}{\hbar} (L_n q_i - q_i L_n)$$

$$\frac{i\epsilon}{\hbar} (L_n q_i - q_i L_n) \equiv \delta q_i$$

$$\delta q_i \rightarrow 0$$

$$\text{NB: } U^\dagger(\vec{n}, \epsilon) = U(\vec{n}, -\epsilon)$$

Ovvero $\delta x_i = \varepsilon (\vec{x} \wedge \hat{m})_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon x_j m_k \leftarrow$ graficamente

mentre dai calcoli: $\delta q_i = -\frac{i\varepsilon}{\hbar} [L_n, q_i]$

Postulo: $[L_n, q_i] = i\hbar \varepsilon_{nik} q_k$

$\Rightarrow \delta q_i = \varepsilon \varepsilon_{nik} q_k$ ("spostamento" della punta del vettore dovuto alla rotazione attorno all'asse \hat{m})

Notiamo che $\varepsilon \varepsilon_{ijk} x_j m_k = \varepsilon \varepsilon_{ijk} x_k$, quindi tramite questo postulato la nostra U si comporta come un operatore di rotazione.

Si ricava, dato un generico vettore di \mathbb{R}^3 \vec{v} :

$$[L_x, v_y] = i\hbar v_z$$

$$[L_y, v_z] = i\hbar v_x$$

$$[L_z, v_x] = i\hbar v_y$$

Queste regole di commutazione sono buone anche per "testare" dei numeri o delle grandezze e vedere se sono componenti di un vettore -

\Rightarrow CONSEGUENZA #1: \vec{L} è un vettore.

(quelle regole valgono per $\vec{v} = \vec{L}$)

$U(\vec{m}, \varepsilon) q_i U^\dagger(\vec{m}, \varepsilon) = q_i + \delta q_i$ vale anche per angoli FINITI -

ESERCIZIO q^2 è vettore o scalare?

$$[L_a, q_b q_b] = q_b [L_a, q_b] + [L_a, q_b] q_b =$$

$$= q_b i\hbar \varepsilon_{abc} q_c + i\hbar \varepsilon_{abc} q_c q_b = i\hbar \varepsilon_{abc} (q_b q_c + q_c q_b) = 0$$

$\Rightarrow q^2$ non è un vettore \Rightarrow è scalare -

ESERCIZIO Verificare che $\vec{p} \cdot \vec{q}$ è scalare -

Consideriamo: $H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$

$$[H, L_a] = \frac{1}{2m} [p^2, L_a] + [V(r), L_a]$$

$$[L_a, r] \Psi(x, y, z) = [L_a, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}] \Psi(x, y, z)$$

conviene davvero usare le coordinate cartesiane? $a \equiv z$

$$= \left[i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \pi - \pi \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \Psi(x, y, z) =$$

$$= i\hbar \left(x \frac{\partial \pi}{\partial y} - y \frac{\partial \pi}{\partial x} \right) \Psi = i\hbar \left(x \frac{2y}{2\pi} - y \frac{2x}{2\pi} \right) \Psi = 0$$

\Rightarrow La commuta con π , e quindi con qualsiasi sua funzione (es.: qualsiasi potenziale scalare).

\Rightarrow L_z costante del moto $\forall i = 1, 2, 3$ c.v.d.

Coordinate polari

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = r \cos\theta$$

Si ricava: $L_z \propto \frac{\partial}{\partial \varphi}$

$$e^{-i\frac{\alpha}{\hbar} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)} \Psi(r, \theta, \varphi) = \Psi(r, \theta, \varphi + \alpha)$$

In un campo centrale, V dipende solo da r e non da θ e φ (\Rightarrow commuta con L_z)

In generale: $[L_i, S] = 0 \Leftrightarrow S$ scalare

~ ~ ~ ~ ~

$$M = \int dV \rho(\vec{x})$$

$$\vec{x} = \frac{1}{M} \int dV \rho(\vec{x}) \vec{x}$$

$$T_{ij} = \frac{1}{M} \int dV \rho x_i x_j \quad \left(\text{tensore simmetrico} \right)$$

$$x_i \rightarrow x_{i'} = R_{i'i} x_i$$

$$T_{ij} = v_i w_j \rightarrow T_{i'j'} = R_{i'i} R_{j'j} v_i w_j = R_{i'i} R_{j'j} T_{ij}$$

(come si trasformano i tensori)

Possiamo scrivere:

$$S \text{ scalare} \rightarrow [L_a, S] = 0 \rightarrow U S U^\dagger = S$$

$$\vec{V} \text{ vettore} \rightarrow U V_a U^\dagger = R_{ab} V_b \quad ([L_a, V_b] = i\hbar \epsilon_{abc} V_c)$$

$$T \text{ tensore} \rightarrow [L_a, T_{ij}] = i\hbar (\epsilon_{aik} T_{kj} + \epsilon_{ajk} T_{ik})$$

Si possono classificare grandezze come scalari, vettori, tensori di qualsiasi rango vedendolo come (e se) commu-

causa col momento angolare (o meglio, con le sue componenti) -

Abbiamo appurato che il momento angolare è un operatore vettoriale -

$$[L_a, L_a^2 + L_b^2 + L_c^2] = [L_a, \vec{L}^2] = 0 \Rightarrow \vec{L}^2 \text{ scalare}$$

[campo centrale]

$$[H, L_a] = 0 \quad \forall a = 1, 2, 3$$

$$\Downarrow$$

$$[H, \vec{L}^2] = 0$$

In un campo centrale possiamo diagonalizzare contemporaneamente H , L^2 ed una componente a scelta tra L_x , L_y ed L_z -

Cioè possiamo trovare una base di autovettori simultanei del tipo:

vettore	$ E, \lambda, m\rangle$	
autovalori	E, λ, m	convenzione \rightarrow
operatore	H, L^2, L_z	\rightarrow se questo lo chiamiamo L_z non perdiamo di generalità -

Dimostreremo: $\lambda = \ell(\ell+1)$ con ℓ semi intero -

Come sono fatti gli autostati?

$$\begin{cases} \vec{L}^2 |\lambda, m\rangle = \lambda |\lambda, m\rangle & (\text{in realtà } \lambda \hbar^2) \\ L_z |\lambda, m\rangle = m |\lambda, m\rangle & (\text{" " } m \hbar) \end{cases}$$

Definisco: $L_+ \equiv L_x + iL_y$

$$[L_z, L_+] = [L_z, L_x + iL_y] = i\hbar L_y + i(-i\hbar L_x) = \hbar L_+$$

$$L_- \equiv L_x - iL_y$$

$$[L_z, L_-] = [L_z, L_x - iL_y] = -\hbar L_-$$

L_+ ed L_- si comportano come operatori di salita e di discesa per gli autovalori di L_z -

Supponendo di aver ottenuto anche uno solo dei $|\lambda, m\rangle$, applicando ad esso L_{\pm} e dopo L_z troviamo tutti gli altri -

Si ricava:

$$L_z(L_{-1}\lambda m) = \hbar(m-1)(L_{-1}\lambda m)$$

$$L_z(L_{+1}\lambda m) = \hbar(m+1)(L_{+1}\lambda m)$$

In termini di \hbar ,
gli autovalori sono
spaziati di \hbar .

Attenzione: L^2 è definito positivo ed è diagonalizzabile
assieme ad L_z .

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \Rightarrow L^2 \geq L_z^2 \Rightarrow$$

autovalore di $L^2 \geq$ autovalore di L_z^2

• Applicando L_{\pm} , cambia anche l'autovalore λ ?

$$L^2(L_{\pm}\lambda m) = \hbar^2 \lambda (L_{\pm}\lambda m) \Rightarrow \text{no}$$

\exists un limite inferiore oltre il quale L_{-} smette
di agire - Vedremo che \exists anche un limite superiore -

29.04.2010

$$\left[\frac{L_a}{\hbar}, \frac{L_b}{\hbar} \right] = i \frac{\hbar}{\hbar} \varepsilon_{abc} \frac{L_c}{\hbar}$$

Dividiamo tutto per \hbar :

$$[M_a, M_b] = i \varepsilon_{abc} M_c$$

Abbiamo visto che:

$$[M_a, \vec{M}^2] = 0$$

E che \vec{M} è l'operatore che implementa le rotazioni:

$$U(\vec{n}, \varphi) = e^{i\varphi \vec{n} \cdot \vec{M}}$$

Inoltre, definendo: $M_{\pm} \equiv M_1 \pm iM_2$

$$[M_3, M_{\pm}] = \pm M_{\pm}$$

Possiamo trovare autovettori simultanei per L^2 ed L_z :

$$\begin{cases} \vec{M}^2 |\mu, m\rangle = \mu |\mu, m\rangle \\ M_3 |\mu, m\rangle = m |\mu, m\rangle \end{cases}$$

Andiamo a vedere come saranno fatti -

$$M^2(|\mu, m\rangle) = (M_+|\mu, m\rangle) \cdot \mu$$

$$M_3(|\mu, m\rangle) = (m+1)(M_+|\mu, m\rangle)$$

Unendo queste due informazioni:

$$M_{\pm}|\mu, m\rangle \propto |\mu, m \pm 1\rangle$$

Il simbolo \propto sta a significare che non siamo sicuri che $|\mu, m \pm 1\rangle$ sia normalizzato.

Notiamo che:

$$\vec{M}^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 \Rightarrow m^2 \leq \mu$$

Deve succedere che, dopo un certo numero di applicazioni di M_+ , m non cresca più: devono $\exists j$ e \bar{j} t.c.:

$$\begin{cases} M_+|\mu, j\rangle = 0 \\ M_-|\mu, \bar{j}\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M_+M_- &= (M_1 + iM_2)(M_1 - iM_2) = M_1^2 + M_2^2 - i(M_1M_2 - M_2M_1) = \\ &= \vec{M}^2 - M_3^2 + M_3 \end{aligned}$$

È evidente che M_+ ed M_- non commutano:

$$M_-M_+ = \vec{M}^2 - M_3^2 - M_3$$

Proviamo ad applicare la prima identità al vettore $|\mu, j\rangle$:

$$M_-M_+|\mu, j\rangle = (\vec{M}^2 - M_3^2 - M_3)|\mu, j\rangle = (\mu - j^2 - j)|\mu, j\rangle = 0$$

$$M_+M_-|\mu, \bar{j}\rangle = 0 = (\mu - \bar{j}^2 + \bar{j})|\mu, \bar{j}\rangle$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned} \mu &= \bar{j}(\bar{j} - 1) \\ \mu &= j(j + 1) \end{aligned}$$

Inoltre, uguagliando:

$$\bar{j}^2 - \bar{j} - j^2 - j = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{j} = -j \\ \bar{j} = j + 1 \end{cases}$$

Ma la seconda non

si soddisfa perché, per costruzione, $\bar{j} \leq j -$

$$\begin{aligned} \bar{j} &= -j; & |\mu, j\rangle &= |j(j+1), j\rangle \\ & & |\mu, \bar{j}\rangle &= |j(j+1), -j\rangle \end{aligned}$$

N.B.:

$$\begin{array}{c} \text{-----} \overbrace{\text{-----} 2j \text{-----}} \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \quad \begin{array}{c} -j \quad -j+1 \quad \quad \quad j-1 \quad j \end{array} \quad 2j \in \mathbb{N} \Rightarrow j \in \mathbb{N} \vee j \in \frac{\mathbb{N}}{2}$$

j può essere intero o semi-intero.

Ricopilono e cambiando notazione:

$$\begin{cases} \vec{M}^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle \\ M_3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle \end{cases}$$

Vediamo adesso se $M_+ |j, m\rangle$ è già normalizzato:

$$\langle j, m | M_- M_+ |j, m\rangle = |M_+ |j, m\rangle|^2 = j(j+1) - m(m+1)$$

Quindi imponiamo:

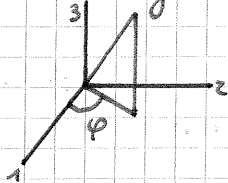
$$M_+ |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle$$

$$M_- |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle$$

Ambo i membri di entrambe le uguaglianze sono normalizzati.

In rappresentazione di Schrödinger:

$$\frac{L_3}{\hbar} \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$$



$|\pi, \theta, \varphi\rangle$

generico autostato della posizione ($\langle \vec{r} |$)

L'equazione agli autovalori precedente si scrive:

$$-i \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi_{jm}(\pi, \theta, \varphi) = m \psi_{jm}(\pi, \theta, \varphi)$$

$$\Rightarrow \psi_{jm}(\pi, \theta, \varphi) = e^{im\varphi} \Phi_{jm}(\pi, \theta)$$

Questo vale \forall valore reale assunto da m .

Immaginiamo di ruotare il sistema di riferimento di $m2\pi$: non devono esserci cambiamenti.

$$e^{im\varphi} = e^{im(\varphi + m2\pi)} = e^{im\varphi} e^{im2\pi}$$

Se prendiamo m INTERO questa identità è rispettata.
 m intero $\Rightarrow j$ intero.

Per ora, per una particella libera, considereremo solo m interi.

Vediamo l'altra equazione. Prima, l'espressione di \vec{M}^2 in coordinate polari:

$$- \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

Il problema è:

$$\begin{cases} -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi_{jm}(\pi, \theta, \varphi) = m \Psi_{jm}(\pi, \theta, \varphi) \\ - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi) \end{cases}$$

Nella seconda abbiamo usato solo la parte angolare di Ψ .

Occorre sempre che:

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi |F(\theta, \varphi)|^2 < \infty$$

ovvero:

$$\int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi |F|^2 < +\infty$$

$$\int d\Omega |F|^2 < \infty \quad (d\Omega \text{ angolo solido})$$

Imponiamo:

$$\int d\Omega Y_{lm}^* Y_{l'm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Possiamo dire che le Y costituiscono un INSIEME

COMPLETO perché sono autovettori simultanei di due operatori hermitiani.

Possiamo scomporre ogni funzione $\in L^2$ in serie di Fourier usando le armoniche sferiche come base:

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

dove gli f_{lm} sono i relativi coefficienti di Fourier e la serie converge in norma L^2 ad F .

Come sono fatte le armoniche sferiche?

Anti, cosa succede se consideriamo m semi-dispari?

$$L^2 |l, m\rangle = l(l+1) |l, m\rangle$$

$$L_z |l, m\rangle = m |l, m\rangle$$

Di che dimensione è questo spazio?

$\forall l$ abbiamo $-l \leq m \leq l$, quindi $2l+1$ vettori del tipo $|l, m\rangle$, che costituiscono un sottospazio invariante sotto rotazione.

facciamo una rotazione attorno ad \vec{m} di un vettore di quello spazio:

$$e^{-i\vec{L}\cdot\vec{n}\varphi} \left(c_{\ell m} | \ell, m \rangle \right) = \sum_m e^{-im\varphi} c_{\ell m} | \ell m \rangle$$

autoval. di L_z
autoval. di L^2

Sono cambiati solo i coefficienti, il nuovo vettore appartiene ancora al sottospazio di partenza -
 Come si scrive una matrice di rotazione attorno, ad es., all'asse z?

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 \times 2 \\ \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \times 3 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} R^3 \text{ \u00e9 invariante sotto} \\ \text{rotazione red e} \\ \text{scomponibile in altri} \\ \text{due sottospazi} \end{matrix}$$

invarianti $\Rightarrow R^3$ si dice RIDUCIBILE.

Questo si pu\u00f2 fare anche per altri spazi, ma i vari sottospazi saranno riducibili solo fino ad un certo punto.

Quando uno spazio non ammette sottospazi propri, non banali, invarianti sotto rotazione, si dice irriducibile per rotazioni.

Lo spazio di cui parlavamo, di dimensione $2\ell + 1$, \u00e9 irriducibile sotto il gruppo delle rotazioni.

Come si ricavano le matrici di L_1, L_2, L_3 ?

$\theta \rightarrow 0$ sviluppo di Taylor di $e^{-i\theta L_3}$ dove $L_3 = \frac{\partial}{\partial \varphi}$
 \rightarrow applicare alla matrice della rotazione in R^3 ?

$l=0 \Rightarrow 1$ solo vettore $\Rightarrow 2l+1=0 \Rightarrow m=0$ (rotaz. di scalari)
 Vediamo come sono fatte le armoniche sferiche -

$$\int |Y_{00}|^2 d\Omega = Y_{00} \text{ è uno scalare}$$

$$= |Y_{00}|^2 \int d\Omega = 4\pi |Y_{00}|^2 \Rightarrow Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

Prendiamo i polinomi omogenei di primo grado -

$$P(i, x_i) = a_i x_i$$

Applichiamo una rotazione: si trasformano come i vettori -

$$a_i R_{ij} x_j = a_i x_i$$

Lo spazio dei vettori di \mathbb{R}^3 è invariante e irriducibile sotto una rotazione generica (attorno a tutti e 3 gli assi) -

Le armoniche sferiche del tipo Y_{lm} stanno in questo spazio -

$$Y_{lm} = \frac{P_{lm}(x_i)}{r}$$

$$[L_z, z] = 0$$

$$[L_z, x+iy] = iy + i(i(-x)) = x+iy$$

$\Rightarrow x+iy$ è un op. di salita per L_z , cfr: $[L_z, L_+]=L_+$

Di conseguenza:

$$(x+iy) \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$m=0$

$m=1$

Infatti $[L^2, x+iy] \neq 0 \Rightarrow$ l'operatore di salita fa crescere m esattamente di 1 -

$$x+iy \equiv z_+$$

$$Y_{11} \propto \frac{x+iy}{r \sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{10} \propto \frac{z}{r} \text{ (invariante sotto } L_z)$$

$$Y_{1,-1} \propto \frac{x-iy}{r}$$

In coordinate polari:

$$m=1 \rightarrow \sin\theta e^{i\varphi}$$

$$m=0 \rightarrow \cos\theta$$

$$m=-1 \rightarrow \sin\theta e^{-i\varphi}$$

3 polinomi INDIPENDENTI

\Rightarrow base \Rightarrow la dim. dello spazio è 3 ed l è per forza = 1 -

I polinomi omogenei di grado 1 sono lo stesso spazio delle

armoniche sferiche generate da $l=1$.

Rappresentazione sferica

$$\begin{pmatrix} x+iy \\ z \\ x-iy \end{pmatrix}$$

Rappresentazione cartesiana

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se volevamo diagonalizzare, invece, L_x :

$$\begin{pmatrix} x \\ y+iz \\ y-iz \end{pmatrix}$$

L_y diagonalizzato:

$$\begin{pmatrix} z-ix \\ y \\ z+ix \end{pmatrix}$$

Il vantaggio di questa rappresentazione è che ammette un asse privilegiato (come, ad es., le polarizzazioni del fotone) -

PROBLEMA IN CAMPO CENTRALE

Oscillatore armonico 3dimensionale isotropo -

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{q}^2 =$$
$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 z^2$$

H è scalare \Rightarrow commuta con tutte le $L_i \Rightarrow$ posso cercare autofunzioni del tipo $|\bar{c}, \ell, m\rangle$.

Isotropia: i coefficienti nelle direzioni diverse sono gli stessi (m è sempre lo stesso ed anche ω) -

Per un oscillatore anisotropo con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ basterebbe scrivere $H = H_1 + H_2 + H_3$, dove le H_i commutano tra di loro \Rightarrow le soluzioni sono fattorizzabili

con $\psi_{\ell m} = \gamma_1(x) \gamma_2(y) \gamma_3(z)$, γ_i soluzione OAD -

Soluzioni a variabile separate sono sicuramente soluzioni di tale H . Infatti:

$$|m_1\rangle \rightarrow e^{-\frac{\omega_1 m_1 x^2}{2\hbar}} H_{m_1}(x) \quad \epsilon_{m_1}^1 = \frac{1}{2} \omega_1 (m_1 + 1/2)$$

eccetera

$$(H_1 + H_2 + H_3) \psi_{m_1}(x) \psi_{m_2}(y) \psi_{m_3}(z) = (E_{m_1}^1 + E_{m_2}^2 + E_{m_3}^3) \psi_{m_1} \psi_{m_2} \psi_{m_3}$$

Consideriamo questo spazio:

$$L^2(\mathbb{R}^3) \text{ ovvero } \psi \text{ t.c. } \int dV |\psi|^2 < \infty$$

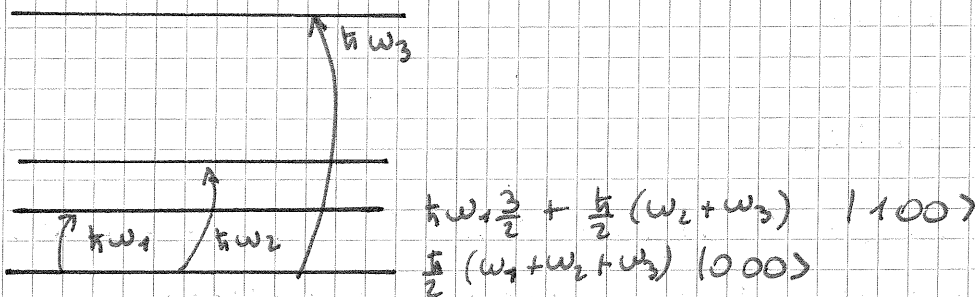
Questo è isomorfo allo spazio:

$$L^2(\mathbb{R}^3) = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$$

Quindi abbiamo trovato autovettori e autovalori:

$$|m_1 m_2 m_3\rangle \in \hbar \omega_1 (m_1 + 1/2) + \hbar \omega_2 (m_2 + 1/2) + \hbar \omega_3 (m_3 + 1/2)$$

Diagramma dei livelli energetici



Abbiamo un analogo delle curve di Lissajous:
 se $\exists p, q$ tali che $p\omega_1 = q\omega_3$, p, q interi,
 si ha degenerazione degli autovettori
 dell'energia -

$M \subset \mathbb{C}$ orbite chiuse \leftrightarrow $M \subset \mathbb{Q}$ degenerazione

Esempi:

legge di Keplero

(Teorema di Bertrand)

oscillatore armonico
isotropo

In meccanica classica infatti \exists la possibilità che
 esistano orbite con la stessa energia e
 momento angolare diverso, esempio:



In $M \subset \mathbb{Q}$ la chiamiamo degenerazione.

Teorema di Bertrand: le uniche due leggi che danno $\omega_1 = \omega_2$

a moti di questo tipo sono la legge di Keplero e l'OA isotropo.

Per la MQ, gli unici potenziali di questo tipo sono l'atomo di H e lo stesso oscillatore.

Consideriamo l'osc. anm. 3D isotropo:

$$N=2 \quad \frac{7}{2} \hbar \omega \quad \text{degen} = 6 \quad \begin{array}{l} |110\rangle |200\rangle \\ |101\rangle |020\rangle \\ |011\rangle |102\rangle \end{array}$$

$$N=1 \quad \frac{5}{2} \hbar \omega \quad \text{degen} = 3 \quad \begin{array}{l} |\frac{5}{2} 00\rangle \\ |0 \frac{5}{2} 0\rangle \\ |00 \frac{5}{2}\rangle \end{array} \quad \begin{pmatrix} x+iy \\ z \\ x-iy \end{pmatrix} e^{-\alpha r^2} \quad 3D$$

$$N=0 \quad \frac{3}{2} \hbar \omega \quad \text{degen} = 1 \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} |00\rangle \quad e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2+z^2)} = e^{-\alpha r^2} \quad 1D$$

$N=2 \Rightarrow$ degenerazione = 6 - \nexists interi l tali che $6 = l(l+1)$ -
Dovremo considerare valori semi-dispari -
Questo sottospazio dovrà essere riducibile - In quale modo?

05.05.2010

RIASSUNTO

Operatori con queste regole di commutazione:

$$[M_a, M_b] = i \epsilon_{abc} M_c \quad \vec{M} \equiv \vec{L} / \hbar \quad L_n \equiv \vec{L} \cdot \vec{n}$$

hanno autovettori del tipo:

$$L_n |l, m\rangle = m |l, m\rangle \quad - l \leq m \leq l$$

$$L^2 |l, m\rangle = l(l+1) |l, m\rangle$$

con una degenerazione $2l+1$ su m - ($-l \leq m \leq l \Rightarrow m$ può assumere tutti i valori $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ o intero o semi-intero aut aut!)
l può valere in linea di massima $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ (più lo 0)

ma ci sono restrizioni per ogni specifico sistema fisico -

Generatore delle rotazioni: $U(\vec{n}, \varphi) = e^{-i\varphi \vec{L} \cdot \vec{n} / \hbar}$

Abbiamo parlato dell'oscillatore armonico 3dimensionale isotropo, vedendo che i potenziali che ammettono orbite chiuse sul piano delle fasi sono degeneri.

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{r}^2 \equiv H_1 + H_2 + H_3 \Rightarrow \text{si possono separare le variabili} \\ \Rightarrow \text{autovettori totali} = \text{prodotto dei singoli}$$

Gli autovettori sono della forma: $|m_1\rangle |m_2\rangle |m_3\rangle \xrightarrow{RS} \Psi_1(x) \Psi_2(y) \Psi_3(z)$

($\in L^2(\mathbb{R}^3)$). Infatti sappiamo che $L^2(\mathbb{R}^3) = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$

ovvero che in $L^2(\mathbb{R}^3)$ possiamo scegliere delle basi fattorizzate -

Possiamo scrivere: $H = H_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_3 + \mathbb{1}_1 \otimes H_2 \otimes \mathbb{1}_3 + \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes H_3$

l' autovettore $|m_1\rangle|m_2\rangle|m_3\rangle$ appartiene all' autovalore

$$\hbar\omega (m_1 + m_2 + m_3 + 3/2) \equiv (N + 3/2) \hbar\omega$$

gli autovalori si sommano e gli autovett. si moltiplicano.

$$\frac{3}{2} \hbar\omega \xrightarrow{m=0} |000\rangle \xrightarrow{RS} e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)} = e^{-\alpha r^2} \rightarrow |l=0, m_m=0\rangle$$

Nota bene: $\vec{e}^2 |u\rangle = 0 \Rightarrow \langle u | \vec{e}^2 |u\rangle = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \langle u | e_x^2 |u\rangle + \langle u | e_y^2 |u\rangle + \langle u | e_z^2 |u\rangle = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow |e_x|u\rangle|^2 + |e_y|u\rangle|^2 + |e_z|u\rangle|^2 = 0$

e per la non degenerazione della norma:

$$\vec{e}^2 |u\rangle = 0 \Rightarrow \begin{cases} e_x |u\rangle = 0 \\ e_y |u\rangle = 0 \\ e_z |u\rangle = 0 \end{cases} \quad (\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0})$$

N.B.: con questo non si può ovviamente dire che \vec{e}^2 e gli e_m abbiano una BASE di autovettori in comune.
 ↳ solo il vettore nullo

Continuiamo:

$$\frac{5}{2} \hbar\omega \xrightarrow{m=1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{RS} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} e^{-\alpha r^2}$$

Abbiamo visto che questo è equivalente a scrivere:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} e^{-\alpha r^2} \equiv \begin{pmatrix} x+iy \\ z \\ x-iy \end{pmatrix} e^{-\alpha r^2} \rightarrow \begin{cases} |l=1, m_z=1\rangle \\ |l=1, m_z=0\rangle \\ |l=1, m_z=-1\rangle \end{cases}$$

legame tra m_z ed il coeff. del 2° termine del polinomio.

Abbiamo dunque introdotto le armoniche sferiche, che costituiscono una buona base:

$$Y_{1,\pm 1} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{x \pm iy}{r\sqrt{2}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} e^{\pm i\varphi} \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$$

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r} = \cos\theta \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$$

Avevamo imposto: $\int d\Omega Y_{l,m}^* Y_{l',m'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ [ortonormalità]

Lo spazio generato dalle 3 armoniche sferiche $Y_{1,m}$ è lo stesso generato dalle componenti di un vettore 3D \Rightarrow i vettori hanno $l=1$. Continuiamo:

$$\frac{7}{2} \hbar\omega \xrightarrow{m=2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma avevamo detto che ci aspettavamo spazi di dimensioni dispari! Dimostriamo che questo spazio 6 dimensionale NON è irriducibile. Vediamo come

sono fatte le funzioni d'onda -

Questi sono stati di O42 \Rightarrow solo spettro discreto

\Rightarrow autof. non degeneri; H commuta con $I \Rightarrow$

stati a parità definita -

Sono del tipo: $H_{nl} e^{-\alpha r^2}$

$$|100\rangle \xrightarrow{RS} xy e^{-\alpha r^2}$$

$$|101\rangle \xrightarrow{RS} xz e^{-\alpha r^2}$$

$$|101\rangle \xrightarrow{RS} yz e^{-\alpha r^2}$$

$$|200\rangle \xrightarrow{RS} \left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right) e^{-\alpha r^2}$$

$$\alpha = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

$$\frac{1}{a^2} = \frac{m\omega}{\hbar}$$

Alla fine scriveremo:

$$\frac{7}{2} \hbar \omega \longrightarrow \begin{pmatrix} x^2 & xy & yz \\ yx & y^2 & zx \\ zy & xz & z^2 \end{pmatrix} - \frac{a^2}{2} \mathbb{1} \quad (N=2)$$

$xy = yx$ e così via \Rightarrow questo tensore simmetrico genera 6 autof. indipendenti -

Come si comporta sotto rotazioni? Vedremo che è riducibile, ovvero che \exists una particolare c.l. di questi 6 monomi che è invariante per rotazioni.

Questa è $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$!

$$\langle r^2 | r^2 \rangle \longrightarrow \langle r'^2 | r'^2 \rangle = \langle r^2 | r^2 \rangle$$

Detta $\alpha_{ij} S^{ij} = \alpha_{ij} x^i x^j$ la generica c.l. dei suddetti monomi, applichiamo una rotazione:

$$\alpha_{ij} x^i x^j \longrightarrow \beta_{ij} x'^i x'^j$$

che è un vettore dello stesso spazio \Rightarrow questo spazio 6D è esso stesso invariante a rot.

L'altro sottospazio invariante è "la diagonale":

$$\delta_{ij} x^i x^j$$

Posso scomporre:

$$x^i x^j = \left(x^i x^j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2\right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \quad \text{ovvero:}$$

$$\begin{pmatrix} x^2 - \frac{1}{3} r^2 & xy & yz \\ y^2 - \frac{1}{3} r^2 & zx & \\ z^2 - \frac{1}{3} r^2 & & \end{pmatrix} - \frac{a^2}{2} \mathbb{1}_3 + \frac{1}{3} r^2 \mathbb{1}_3$$

$\xrightarrow{\text{invariante}}$

Il nuovo tensore è simmetrico e, per costruzione, a traccia nulla.

Vediamo un attimo le armoniche sferiche di $l=2$:

$$|l=2, m_z = \pm 2\rangle \longrightarrow (x \pm iy)^2 f(r) \propto Y_{2, \pm 2}$$

NB: $L_z(z|m\rangle) = z|l|m\rangle = z|m|m\rangle = m(z|m\rangle)$

$$|l=2, m_z = \pm 1\rangle \longrightarrow (x \pm iy) z \propto Y_{2, \pm 1} / f(r)$$

$$|l=2, m_z = 0\rangle \longrightarrow x^2 + y^2 - 2z^2 = r^2 - 3z^2 \\ = (x^2 - z^2) + (y^2 - z^2) \propto Y_{2,0} / f(r)$$

(Elevata imponendo $Y_{20} \perp Y_{00}$)

Si vede che: $Y_{2, \pm 2} = x^2 - y^2 \pm 2ixy = T_{11} - T_{22} \pm 2iT_{12}$

$$Y_{2, \pm 1} = T_{13} \pm iT_{23}$$

$$Y_{2,0} = (T_{11} - T_{33}) + (T_{22} - T_{33})$$

ma T_{11}, T_{22} e T_{33} non sono indipendenti: $(T_{11} + T_{22} + T_{33} = 0)$.

Posso ad esempio scrivere $T_{33} = -(T_{11} + T_{22})$

\Rightarrow il nostro spazio è la somma di uno spazio

5-D e di uno 1-D.

\hookrightarrow generato dalle armoniche sferiche \rightarrow generato dall'I.

$$\underline{6} = \underline{5} \oplus \underline{1}$$

$$l=2 \quad l=0$$

$$\hookrightarrow Y_{2,0}; Y_{2, \pm 1}; Y_{2, \pm 2}$$

Sovrapposizione di stati con $l=2$ ed $l=2-2=0$.

Torniamo indietro.

- Ogni auto stato $|z l m\rangle$ è $2l+1$ volte (non-dispari) degenera (degenerazione di rotazione) su m .
- È anche la cosiddetta degenerazione accidentale su l .

Prendiamo uno stato ad una certa energia data da N .

$N = m_1 + m_2 + m_3$. In quanti modi è decomponibile

$N?$ la risposta è $d_N = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$

Si dimostra che

$$\frac{9}{2} \text{ h.w.} \longrightarrow \underline{10} = \underline{3} \oplus \underline{7}$$

$$l=1 \quad l=3$$

$$(N=3)$$

\leftarrow entrambi generati da set di armoniche sferiche

$$N=4 \longrightarrow 15 \text{ volte degenerate} \longrightarrow \underline{15} = \underline{3} \oplus \underline{5} \oplus \underline{1}$$

$$l=1 \quad l=2 \quad l=0$$

stato N coincide in realtà con un autospazio di dimensio-
 Si vede che uno \checkmark
 $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ che è somma di spazi generati da armoniche
 sferiche date dai valori di l , da 0 a N o da 1 ad
 $N-1$ a seconda
 che N sia pari o dispari,
 spaziate di 2.

$$d_N = \frac{(N+1)(N+2)}{2} = \sum_{\substack{l \text{ pari} \\ (l \text{ dispari})}} (2l+1)$$

N pari \leftrightarrow autospazio =
 somma diretta degli
 spazi vettoriali generati
 dalle armoniche sferiche
 con tutti gli l pari,
 $0 \leq l \leq N$.
 N dispari \leftrightarrow analogo, $1 \leq l \leq N-1$

Eravamo partiti con queste regole di selezione:

$$M_a \equiv \epsilon_{aij} q_i p_j \Rightarrow [M_a, M_b] = i \epsilon_{abc} M_c$$

e avevamo trovato sia autovalori interi di M^2 che
 semi interi.

Queste tre matrici:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

definendo $\vec{S} \equiv \frac{1}{2} \vec{\sigma} \Rightarrow S_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

rispondono alle regole $[S_a, S_b] = i \epsilon_{abc} S_c$
 ed hanno autovalori semi interi: $(+\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2})$ per S_3 .

$$\vec{S}_1^2 = \vec{S}_2^2 = \vec{S}_3^2 = \frac{1}{4} \mathbb{1} \Rightarrow \vec{S}^2 = \frac{3}{4} \mathbb{1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) \mathbb{1} \quad [e(e+1)]$$

$$S_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{autovettori: } \uparrow \text{ e } \downarrow$$

Possiamo usare questa notazione:

$$\sigma_3 |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle, \text{ con } |+\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } |-\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\frac{\sigma_a}{2}, \frac{\sigma_b}{2} \right] = i \epsilon_{abc} \frac{\sigma_c}{2} \Rightarrow [\sigma_a, \sigma_b] = 2i \epsilon_{abc} \sigma_c$$

$$\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \sigma_c^2 = \text{identità su uno spazio 2-D}$$

$$\sigma_a \sigma_b = -\sigma_b \sigma_a$$

Possiamo quindi scrivere la relazione:

$$\sigma_a \sigma_b + \sigma_b \sigma_a = 2 \delta_{ab} \mathbb{I}$$

$$\sigma_a \sigma_b - \sigma_b \sigma_a = 2i \epsilon_{abc} \sigma_c$$



$$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} \mathbb{I} + i \epsilon_{abc} \sigma_c$$

Sommando membro a membro:

Come si scrivono, su questo spazio \mathbb{C}^2 , gli operatori di rotazione (di spin)?

Diagonalizziamo, ad esempio, σ_3 .

$$\sigma_3 |t_3\rangle = + |t_3\rangle$$

Vedremo che $\langle t_2 | t_3 \rangle \neq 0$.

gli autovettori delle componenti di $\vec{\sigma}$ sono ortogonali tra loro.

È sicuramente vero che $\alpha |t_3\rangle + \beta |-3\rangle$ genera

tutto \mathbb{C}^2 e che $\langle t_3 | -3 \rangle = 0$.

$\{|t_3\rangle; |-3\rangle\}$ è una base completa (ed ortogonale) per \mathbb{C}^2 .

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 \equiv 1$$

Prendiamo ad esempio α reale:

$$\alpha \rightarrow \cos \theta$$

$$\beta \rightarrow e^{i\chi} \sin \theta$$

$$\cos \theta |t_3\rangle + \sin \theta e^{i\chi} |-3\rangle \equiv |t_1\rangle$$

Troviamo θ e χ (per esprimere $|t_1\rangle$ in questa base)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta e^{i\chi} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta e^{i\chi} \end{pmatrix} \quad (\sigma_3 |t_1\rangle = |t_1\rangle)$$

$$\begin{pmatrix} \sin \theta e^{i\chi} \\ \cos \theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta e^{i\chi} \end{pmatrix}$$

$$\sin \theta e^{i\chi} \equiv \cos \theta \Rightarrow \chi = n\pi$$

$\Rightarrow |t_1\rangle$ ha entrambe le componenti $\neq 0 \Rightarrow$ non è \perp a $|t_3\rangle$ né a $|-3\rangle$.

Possiamo anche dimostrarlo in un altro modo:

rotazione di 90° attorno all'asse \hat{y}

$$U(\hat{y}, \frac{\pi}{2}) \frac{\sigma_3}{2} U^\dagger(\hat{y}, \frac{\pi}{2}) = \frac{\sigma_1}{2}$$

$$\Rightarrow U(\hat{n}, \varphi) = e^{-i\varphi \hat{n} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}}$$

Le U_n hanno tutte gli stessi autovalori, quindi ci aspettavamo che fossero legate da una trasformazione unitaria.

(TEOREMA DI VON NEUMANN)

Valutiamo questa trasformazione: $U(\vec{n}, \varphi) = e^{-i\varphi \vec{n} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}}$ $\sigma_3 \equiv U\sigma_3 U^\dagger$

(*) Scriviamo gli autovettori di σ_1 a partire da quelli di σ_3 .

$$U(\vec{n}, \varphi) \simeq \mathbb{1}_2 - i\frac{\varphi}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} + \frac{1}{2!} (-i\frac{\varphi}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n})^2 + \frac{1}{3!} (-i\frac{\varphi}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n})^3 + \dots$$

Valutiamo i termini di ordine pari e quelli di ordine dispari separatamente.

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})^2 = \sum_{i,j} \epsilon_{ijk} m_i \sigma_j \sigma_k = \sum_{i,j} m_i m_j \sigma_i \sigma_j = \sum_{i,j} m_i m_j (\delta_{ij} \mathbb{1} + \dots) = \sum_i m_i^2 (\mathbb{1}_2)$$

I termini con ϵ_{ijk} sono nulli per questioni di antisimmetria.

$$\Rightarrow (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})^2 = \mathbb{1}_2$$

Di conseguenza (notando che $(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})^3 = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$):

$$U(\vec{n}, \varphi) \simeq \mathbb{1} \left[1 + \frac{1}{2!} (-i\frac{\varphi}{2})^2 + \frac{1}{4!} (-i\frac{\varphi}{2})^4 + \dots \right] +$$

(di primi ordini)

$$- i \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3!} (-i\frac{\varphi}{2})^3 + \dots \right] =$$

$$\simeq \cos \frac{\varphi}{2} - i \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin \frac{\varphi}{2}$$

(*) Possiamo quindi valutare $U \frac{\sigma_3}{2} U^\dagger$:

$$U\left(\hat{y}, \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{4} - i \sigma_2 \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1} - i \sigma_2)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa è la rappresentazione di $U\left(\hat{y}, \frac{\pi}{2}\right)$ nella base in cui $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |+\rangle$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |-\rangle$.

$$U \sigma_3 U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1} - i \sigma_2) \sigma_3 (\mathbb{1} + i \sigma_2) \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

Le σ_i sono componenti di un momento angolare e sono quindi hermitiane.

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sigma_3 + i(\sigma_3 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3) + \sqrt{2} \sigma_3 \sigma_2 \right] \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sigma_3 - \sigma_2^2 \sigma_3 - i[\sigma_2, \sigma_3] \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \sigma_1 = \sigma_1 \quad \text{c.v.d.}$$

Si ottiene che $U \sigma_3 |+\rangle = U |+\rangle \Rightarrow$

$$U \sigma_3 U^\dagger U |+\rangle = U |+\rangle \Rightarrow \sigma_1 (U |+\rangle) = U |+\rangle$$

e possiamo identificare $U|+3\rangle \equiv |+\rangle$ ($\neq |+3\rangle$)
a meno di un fattore di fase.

$$|+_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|+3\rangle + |-3\rangle)$$

$$|-_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (-|+3\rangle + |-3\rangle)$$

Sono due vettori di norma 1 ed ortogonali tra loro (era ovvio, U è unitario e conserva l'ortogonalità).

Posso cercare autovettori di $\vec{\sigma} \cdot \vec{m} \forall \vec{m}$. Basta proiettare $\vec{\sigma}_3$ su $\vec{\sigma} \cdot \vec{m}$ ed applicare la U trovata agli autovettori di $\vec{\sigma}_3$.

Prendiamo un vettore qualsiasi $|S\rangle$.

$$U(\vec{m}, 2\pi) |S\rangle = ?$$

NB: per le armoniche sferiche $U(\vec{m}, 2\pi) Y_{\ell m} = Y_{\ell m} \forall \vec{m}$.

$$U(\vec{m}, 2\pi) |S\rangle = (\cos \pi - i \vec{\sigma} \cdot \vec{m} \sin \pi) |S\rangle = \\ = \cos \pi |S\rangle = -|S\rangle$$

Lo stato è lo stesso, ma il vettore che lo rappresenta ha cambiato segno.

$$|S\rangle \equiv \alpha |+_m\rangle + \beta |-_m\rangle \\ U|S\rangle = \alpha e^{-i\frac{\varphi}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{m}} |+_m\rangle + \beta e^{-i\frac{\varphi}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{m}} |-_m\rangle = \\ = \alpha e^{-i\frac{\varphi}{2} \sigma_m} |+_m\rangle + \beta e^{-i\frac{\varphi}{2} \sigma_m} |-_m\rangle = \\ = \alpha e^{-i\frac{\varphi}{2}} |+_m\rangle + \beta e^{+i\frac{\varphi}{2}} |-_m\rangle$$

E se $\varphi = 2\pi$:

$$U(2\pi) |S\rangle = -(\alpha |+_m\rangle + \beta |-_m\rangle) = -|S\rangle$$

Questo è conseguenza del fatto che gli autovalori di $\sigma \cdot \vec{m}$ sono, per definizione, semi-integer.

NB: se ℓ è semi-integer, lo è anche m .

Supponiamo di avere stati del tipo:

$$|\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle$$

Saperemo già che \exists anche stati del tipo

$$|1, \pm 1\rangle$$

Si come lo spazio degli stati è lineare, dobbiamo concludere che rappresenti uno stato fisico

$$|+\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 | \pm \rangle = \pm | \pm \rangle$$

$$4 \left(\left[\frac{\sigma_a}{2}, \frac{\sigma_b}{2} \right] = i \epsilon_{abc} \frac{\sigma_c}{2} \right) 4 \Rightarrow [\sigma_a, \sigma_b] = 2i \epsilon_{abc} \sigma_c$$

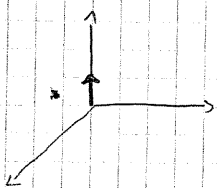
$$\sigma_a^2 = \mathbb{1}$$

$\sigma_a \sigma_b = -\sigma_b \sigma_a$ cioè le matrici anti commutano.

$$\sigma_a \sigma_b + \sigma_b \sigma_a = 2 \delta_{ab} \mathbb{1}$$

$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} \mathbb{1} + i \epsilon_{abc} \sigma_c$ Qui ci sono tutte le regole delle matrici definite prima.

Ci si può chiedere come si scrivono gli operatori di rotazione su questi stati.



$|+\rangle$ è un vettore polarizzato lungo z , ma $|-\rangle$ non può essere il coniugato perché altrimenti gli stati non sarebbero indipendenti.

$\sigma_3 | +_3 \rangle = + | +_3 \rangle$ se questo è il vettore disegnato in figura si vuole andare a vedere come è fatto $| +_3 \rangle$ e se sono stati ortogonali.

Intanto: $\alpha | +_3 \rangle + \beta | -_3 \rangle$ generano tutto lo spazio \mathbb{C}^2 e in più $\langle +_3 | -_3 \rangle = 0$ (sono ortonormali).

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ se per si prende $\alpha \in \mathbb{R}$
 $\cos \psi | +_3 \rangle + \sin \psi e^{i\chi} | -_3 \rangle$ dove $e^{i\chi}$ è una fase.

Si deve trovare per quale ψ e χ per trovare proprio lo stato che abbiamo disegnato.

$$\cos \psi | + \rangle + \sin \psi e^{i\chi} | - \rangle = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi e^{i\chi} \end{pmatrix}$$

Questo deve essere autovettore di σ_1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi e^{i\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi e^{i\chi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sin \psi e^{i\chi} \\ \cos \psi \end{pmatrix} \Rightarrow \cos \psi = \sin \psi e^{i\chi}$$

Proviamo un vettore le cui componenti sono diverse da 0 e non è ortogonale ne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$U\left(\hat{n}, \frac{\varphi}{2}\right) \frac{\sigma_3}{2} U^\dagger\left(\hat{n}, \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\sigma_1}{2} \quad \text{L'operatore di rotazione è:}$$

$$U(\hat{n}, \varphi) = e^{-i \hat{n} \cdot \frac{\sigma}{2} \varphi}$$

Scoprire questo legame tra le componenti, allora vuol dire che conoscendo gli autovettori di $\mathbb{1}$ allora ci basterà ricostruire gli autovettori anche dell'altro.

$$U(\vec{n}, \varphi) = \mathbb{1} - i \frac{\varphi}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} - \frac{1}{2!} \left(-i \frac{\varphi}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(-i \frac{\varphi}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n}\right)^3 + \dots$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})^2 = \sigma_i n_j \sigma_j n_i = n_j n_i \sigma_j \sigma_i = n_j n_i (\delta_{ij} \mathbb{1} + \dots) = n^2 \mathbb{1} = \mathbb{1}$$

Questo è simmetrico

Questo è un tensore antisimmetrico e $S_{ij} A_{ij} = -S_{ji} A_{ji}$

Ci siamo ricostruiti allora che $\forall n (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})^2 = \mathbb{1}$

$$U(\vec{n}, \varphi) = \mathbb{1} \left(1 + \frac{1}{2!} \left(-i \frac{\varphi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(-i \frac{\varphi}{2}\right)^4 + \dots\right) - i \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3!} \left(-i \frac{\varphi}{2}\right)^3 + \dots\right)$$

Questi sono i termini che vanno a ricostruire il $\cos \frac{\varphi}{2}$

$$U(\vec{n}, \varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} - i \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$U\left(\hat{y}, \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{4} - i \sigma_2 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1} - i \sigma_2)$$

$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Questa matrice rappresenta l'operatore nella base $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$U \sigma_3 U^\dagger = \sigma_1$ andiamolo a verificarlo

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1} - i \sigma_2) \sigma_3 \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1} + i \sigma_2) = \frac{1}{2} (\sigma_3 + i \sigma_3 \sigma_2 - i \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2) = \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_3 \sigma_2^2 + i (\sigma_3 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3)) = \frac{1}{2} - i [\sigma_2, \sigma_3] = \frac{1}{2} - i 2i \sigma_1 = \sigma_1$$

$$U \sigma_3 U^\dagger |+\rangle = U |+\rangle = \sigma_1 (U |+\rangle)$$

$$U |+\rangle = |+\rangle \quad \text{N.B.} \quad |+\rangle \neq |+\rangle$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|+\rangle + |-\rangle)$$

Entrambi i vettori $|+\rangle$ e $|-\rangle$ sono ortonormali e lo stesso vale per $|+\rangle$ e $|-\rangle$.

Se vogliamo una rotazione generica per esempio: $U(\vec{z}, \frac{\pi}{4})$.

Si prende ora il vettore di stato di spin $|S\rangle$ e si applica

una rotazione particolare: $U(\vec{n}, 2\vec{u})$.

Per le armoniche sferiche: $U(\vec{n}, 2\vec{u}) Y_{\ell m} = Y_{\ell m}$

$$U(\vec{n}, 2\vec{u}) |S\rangle = \cos \pi - i \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin \pi = -\mathbb{1} |S\rangle$$

non è lo stesso vettore, sebbene c'

lo stesso stato, ma non lo stesso vettore.

Preso $|S\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$
 $U|S\rangle = \alpha e^{-i\frac{\sigma \cdot \vec{n}}{2}} |+\rangle + \beta e^{-i\frac{\sigma \cdot \vec{n}}{2}} |-\rangle =$
 $= \alpha e^{-i\frac{\sigma}{2}} |+\rangle + \beta e^{i\frac{\sigma}{2}} |-\rangle$

$U(2\pi)|S\rangle = -(\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle) = -|S\rangle$

Si sta dicendo che $+$ e $-$ sono autovettori dello spin con autovaleori $\pm \frac{1}{2}$.

Sapendo che $-l \leq m \leq l \Rightarrow$ se $l = \frac{1}{2}$ anche $m = \pm \frac{1}{2}$, quando m è semintero allora i vettori corrispondenti sotto una rotazione di 2π cambiano segno.

Presi i vettori $|\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle$ e $|l, m\rangle$, allora solo che lo spazio dello M.Q è lineare allora uno stato del tipo

$\alpha|\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle + \beta|l, \pm l\rangle$ è uno stato possibile!

Il problema è che facendo una rotazione di 2π allora cambia il segno il primo vettore e quindi ci si ritrova che ruotando un vettore di 2π si finisce su uno ortogonale.

REGOLA DI SUPERSELEZIONE:

Non ci possono stare, nello stesso spazio di Hilbert, vettori con autovaleori contemporaneamente interi e seminteri.

MOMENTO MAGNETICO ELETTRONICO

Prendiamo: $\vec{\mu}_e = \frac{e\hbar}{2m_e c} g_e \vec{S}_e$ perché dove c'è spin c'è anche un momento magnetico.

$g_e = 2.0019$

Appena si mette insieme M.Q. con la relatività allora si trova $g = 2.00000\dots$ ma sperimentalmente si trova che g non è 2 preciso e questo viene fuori dalla teoria dei campi (di Dirac che misurò il conto). g_e è noto con 11 cifre significative.

$g_e - 2 = 0.0019$ ANOMALIA DELL'ELETTRONE

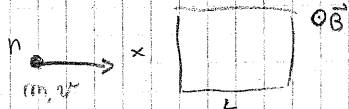
La teoria dei campi prevede anche l'esistenza di una particella con spin e massa (positivone) uguale ma carica opposta, questa fu predetta dall'equazione di Dirac (ma non da lui).

Il momento magnetico è proporzionale alla carica; anche il protone doveva avere spin semintero.

$\vec{\mu}_p = \frac{e\hbar}{2m_p c} g_p \vec{S}_p$

Anche il neutrone ha un momento magnetico per cui $g_n = 3.82$

Neutroni e protoni sono adroni (capaci di interazioni forti).



$$S_z = +\frac{1}{2} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \quad |\vec{p}\rangle \cdot (|\alpha+\rangle + |\beta-\rangle)$$

Il neutrone che passa attraverso il campo magnetico esce di sicuro nello stesso stato (stessa velocità e direzione), ma cosa si può dire dello spin?

$$H' = -\frac{e\hbar}{2m_N c} g_N B \frac{\sigma_z}{2}$$

$\frac{e\hbar}{2m_N c}$ "m del neutrone" g_N "costante" B "spin neutrone" $\frac{\sigma_z}{2}$

$$e^{-iH't/\hbar} = e^{-i \frac{e\hbar}{2m_N c} g_N B \frac{\sigma_z}{2} \frac{t}{\hbar}} = e^{-i \omega \frac{\sigma_z}{2} t}$$

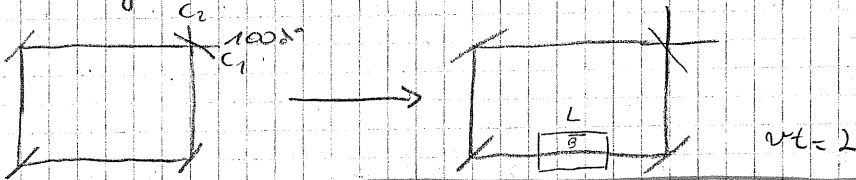
t è il tempo in cui il neutrone sta nel campo \vec{B}

$$e^{-i \omega \frac{t}{2} \sigma_z} = \cos\left(\omega \frac{t}{2}\right) - i \sin\left(\omega \frac{t}{2}\right) \sigma_z$$

$$|\vec{p}\rangle (|\alpha+\rangle + |\beta-\rangle) \rightarrow |\vec{p}\rangle \cdot \left(\alpha e^{+i \frac{\omega t}{2} \sigma_z} |\alpha+\rangle + \beta e^{-i \frac{\omega t}{2} \sigma_z} |\beta-\rangle \right)$$

Si può forzare il \vec{B} in modo che lo spin del neutrone si ribalti. Se questo fa -1 allora si è trovato un σ_z che lo spin del neutrone stesso per cambiare segno al vettore che indica lo spin della particella.

Se nell'interferometro di Bose-Hart si mette una regione di campo magnetico:



$U(2\pi) = -1$ è caratteristica di tutte le particelle con spin semi-intero.

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{p^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc} g \cdot \frac{\sigma_z}{2}$$

siamo ora in $L^2(\mathbb{R}^3) \oplus \mathbb{C}^2$

$$\langle x | A | + \rangle = \psi_A(x) | + \rangle$$

dove $|A\rangle$ e $|B\rangle$ sono vettori

$$\langle x | B | - \rangle = \psi_B(x) | - \rangle$$

permanente orbitali.

Si possono cercare autovettori esatti di σ_z .

$$\frac{\hbar^2}{2m} \psi_A''(x) | + \rangle - \frac{e\hbar B}{2mc} g \frac{1}{2} \psi_A(x) | + \rangle = E \psi_A | + \rangle$$

Questa è l'equazione di Schrödinger. B deve essere

definito in modo preciso. In questo caso:

$$B = \begin{cases} 0 & |B| > L \\ B_0 & |B| < L \end{cases}$$

(e quindi siamo nel caso della bucca di potenziale)

anche la scrittura $|\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle + |1, \pm 1\rangle$ -

Ma questo sotto ogni rotazione di 2π diventa ortogonale a se stesso -

ogni sistema ha per L^2 ed L_z solo autovalori interi o solo autovalori semi interi.

Regola di selezione

Gli autovalori del momento angolare sono o interi o semi interi.

Uno stesso sistema non può ammettere, per lo stesso momento angolare, sia autovalori interi che semi interi -

In fisica al momento di spin è associato un momento magnetico:

$$\underline{\mu}_e = \frac{e\hbar}{2m_e c} g_e \underline{S}_e$$

$$g_e \approx 2,0019... \quad [\text{fattore gromagnetico dell'e-}]$$

Si definisce anomalia dell'elettrone la quantità

$$g_e - 2 = 0,0019...$$

Sappiamo che anche il neutrone ha un momento magnetico, a dispetto della sua carica neutra -

$$\underline{\mu}_N = \frac{e\hbar}{2m_N c} g_N \underline{S}_N$$

$$g_N \approx 3,82 \quad [\text{fattore gromagnetico del neutrone}]$$

Questa deviazione dalla teoria elettromagnetica è dovuta a vari fattori:

- elettrodinamica quantistica relativistica;
- esistenza di altri tipi di interazioni accanto a quello elettromagnetico.

Per quanto riguarda le variazioni di spin, dunque, un eventuale campo magnetico agisce anche sui neutroni -

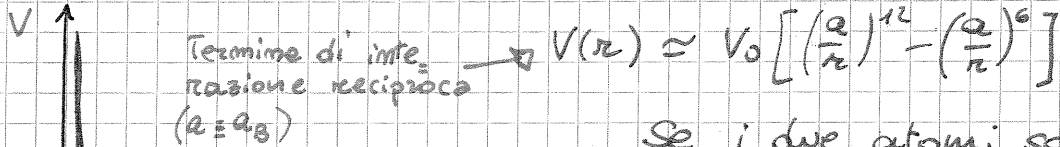
* evoluzione temporale stati di spin *

Per tutte le particelle di spin semi intero, $U(2\pi) = -1$.

Torniamo alle particelle con spin intero.

PROBLEMA DEI DUE CORPI

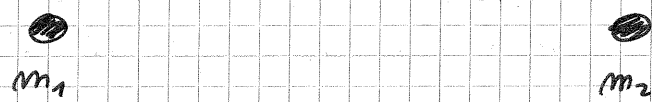
Esempio: molecola di NaCl.



Se i due atomi sono lontani, interagiscono solo di interazione dipolare (ognuno è complessivamente neutro) - Questa

situazione si ha per $r \gg$ raggio di Bohr.

L'interazione più forte che si ha tra due oggetti "puntiformi" complessivamente neutri è l'interazione dipolare.



$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 \equiv \vec{r} \quad M \equiv m_1 + m_2$$

Utilizziamo le coordinate del centro di massa: (e quelle del moto reciproco)

$$\begin{cases} \vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{p} \equiv (m_2 \vec{p}_1 - m_1 \vec{p}_2) \frac{1}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Questo cambiamento di variabili è

implementato da una

trasformazione CANONICA

$$([p_a, r_b] = -i\hbar \delta_{ab}) \Rightarrow \text{si conservano le regole di commutazione canoniche}$$

La nuova hamiltoniana è:

$$H' = \frac{\vec{p}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(r)$$

↳ moto del centro di massa ↳ moto reciproco ↳ interazione

Le coppie \vec{r}, \vec{p} ed \vec{R}, \vec{P} sono canoniche e commutano

tra di loro: $\exists U$ tale che

si riferiscono a variabili diverse

$$U \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} U^\dagger = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{r} \\ \vec{P} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

$$U H U^\dagger = H'$$

La nuova hamiltoniana si può scrivere a variabili separate:

$$H' = H_{CM} + H_{rel}$$

l'interazione V dipende dalla posizione relativa tra i due corpi.

e passiamo dallo spazio $L^2(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ ad $L^2(\vec{R}, \vec{r})$ -

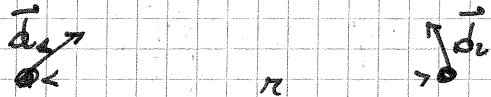
Possiamo fattorizzare le autofunzioni: (H' è sempre separabile)

$$e^{i\vec{P}\cdot\vec{R}} \psi(\vec{r}), \quad \in \frac{\vec{p}^2}{2M} + \epsilon \quad (\text{autovalore})$$

Il problema si riduce al cercare gli autostati del moto relativo: il CM è analogo ad una particella libera

$$H_{rel} \psi(\vec{r}) = \epsilon \psi(\vec{r})$$

Come si scrive l'interazione di dipolo?



$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 - 3(\vec{d}_1 \cdot \hat{r})(\vec{d}_2 \cdot \hat{r})}{|\vec{r}|^3}$$

e non è un campo centrale, perché i due dipoli sono vettori e l'interazione dipende dal loro orientamento.

Ma questo non è il problema che volevamo risolvere.

Problema dei 2 corpi:

$$\left[\frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(r) \right] \psi(\vec{r}) = \epsilon \psi(\vec{r})$$

... si riduce al problema di una particella in campo centrale.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] \psi(x, y, z) + V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \psi(x, y, z) = \epsilon \psi(x, y, z)$$

Conviene passare in coordinate polari.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \ell(\ell+1) + V(r) \right] \Psi(r, \theta, \varphi) = \epsilon \Psi(r, \theta, \varphi)$$

Le autofunzioni saranno del tipo: $R(r) \Theta(\theta, \varphi)$

In coordinate polari l' H si scriverà:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 r \right) + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \nabla_{\Omega}^2 + V(r)$$

* le cui autofunzioni sono armoniche sferiche.

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 r + V(r) + \frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \ell(\ell+1) \right] R = E R$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{V_{\text{eff}}(r)}$

Questa è unidimensionale (nella variabile $r \in [0, +\infty)$)

06.05.2010

Siamo in 3 dimensioni; campo centrale

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(r)$$

È un potenziale invariante per rotazione - Le autofunzioni saranno del tipo:

$$|l, m\rangle$$

Ora vogliamo scrivere il Laplaciano in coord. sferiche:

$$\vec{L}^2 = (\vec{q} \wedge \vec{p})^2 \quad (\text{in meccanica classica})$$

$$= \vec{q}^2 \vec{p}^2 \sin^2 \theta = \vec{q}^2 \vec{p}^2 (1 - \cos^2 \theta) = \vec{q}^2 \vec{p}^2 \left(1 - \frac{(\vec{q} \cdot \vec{p})^2}{\vec{q}^2 \vec{p}^2} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{L}^2 = \vec{q}^2 \vec{p}^2 - (\vec{q} \cdot \vec{p})^2 \quad \text{in meccanica quantistica}$$

però questi sono oggetti diversi.

Definiamo: $P_r \equiv \frac{1}{r} \vec{q} \cdot \vec{p}$ [IMPULSO RADIALE]

Di conseguenza si ricava:

$$\vec{L}^2 = r^2 \vec{p}^2 - r P_r^2 r$$

In coordinate polari:

$$P_r = -i\hbar \frac{1}{r} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \frac{x_i}{r} \text{ è una } \begin{matrix} \text{variabile} \\ \text{angolare} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 = r \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 = r \cos \theta \end{cases}$$

Notiamo che: $\frac{x_i}{r} = \frac{\partial x_i}{\partial r} \quad \forall i$

$$P_r = -i\hbar \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x_i} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r} \quad (\text{per il teorema di derivazione per le funzioni composte})$$

P_r ha come RS la derivata rispetto ad r .

Siamo in L^2 di r, θ, φ , ovvero:

$$\int |\Psi(r, \theta, \varphi)|^2 d\Omega r^2 dr < +\infty$$

Il prodotto scalare tra funzioni fattorizzate si scrive:

$$\int dr r^2 f^*(r) g(r) \cdot [\text{parte angolare}]$$

Ci può capitare di voler valutare $\langle f | p_r | g \rangle$. Ma p_r è hermitiano?

$$\begin{aligned} (f, p_r g) &= -i\hbar \int dr r^2 f^*(r) g'(r) = i\hbar \int dr \left[\frac{d}{dr} (r^2 f(r)) \right]^2 g(r) \\ &\stackrel{||?}{=} \\ (p_r f, g) &= i\hbar \int dr r^2 (f'(r))^* g(r) \neq i\hbar \int dr (r^2 f')^* g + 2r f^* g \end{aligned}$$

p_r non è hermitiano e non rappresenta dunque alcuna osservabile. La sua scelta è comunque giustificata dal fatto che ci permetterà di riutilizzare tutto quanto stabilito per il caso unidimensionale.

$$\frac{1}{r^2} \vec{L}^2 = \vec{p}^2 - \frac{1}{r} p_r^2 r \Rightarrow \vec{p}^2 = \frac{\vec{L}^2}{r^2} + \frac{1}{r} p_r^2 r$$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(r) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{1}{r} p_r^2 r + \frac{\vec{L}^2}{r^2} \right) + V(r)$$

Cerchiamo soluzioni fattorizzate:

$$|l, m\rangle \xrightarrow{RS} R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \equiv \Psi$$

L'eq. di S. diventa:

$$\frac{1}{2\mu} \frac{1}{r} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial r})^2 r R Y + \left[V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] R Y = E R Y$$

Moltiplicando per Y^* ed integrando in $d\Omega$ resta solo la parte radiale.

A seconda del valore di l , queste sono oo equazioni ordinarie, non a derivate parziali.

Moltiplichiamo tutto a sinistra per r :

$$\frac{1}{2\mu} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial r})^2 (rR) + \left[V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] (rR) = E (rR)$$

$$u \equiv rR \quad [\text{funzione radiale ridotta}]$$

In generale la soluzione dipenderà dal valore di l :

$$u_l \equiv rR_l$$

Stiamo in realtà cercando uno spettro discreto, con

è intero, ed ancora più in generale anziano:

$$u_{me} \equiv r R_{me}$$

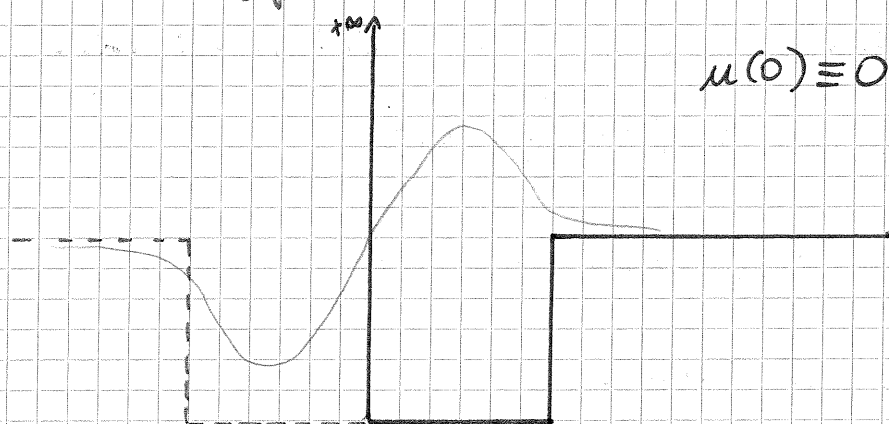
$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} u_{me}'' + \left[V(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu r^2} \right] u_{me} = E_{me} u_{me}$$

Cerco autofunzioni che soddisfino la condizione:

$$\int_0^{+\infty} dr r^2 R^2 < \infty \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} dr |u|^2 < \infty \quad (u_{me} \in L^2(\mathbb{R}))$$

L'unica differenza rispetto al caso unidimensionale è l'integrazione su soli valori positivi di r .

Possiamo riportarci al caso:



Vediamo che: $E_\ell < E_{\ell+1}$

$$\text{Impatti: } E_{\ell+1} - E_\ell = \frac{\ell+1}{\mu r^2} > 0$$

Non perdiamo di generalità considerando H_0 . Vediamo che questa NON SEMPRE ammette stati legati: il termine centrifugo alza l'energia.

Torniamo al problema fisico: dato un elettrone, qual è la probabilità di trovarlo ad una distanza $< a$ dal nucleo?

$$P(a) = \int_0^a dr r^2 R^2 = \int_0^a dr |u|^2$$

Se avessimo $u(0) \neq 0$, l'integrale andrebbe "linearmente" con a . Noi vogliamo che vada proprio a 0, invece: se fosse $u(0) \neq 0$ avremmo R divergente* in quel punto, il che porrebbe problemi di dominio per l'operatore Laplaciano. * più di r^2 !

l'estensione che potremmo fare sarà considerare solo le funzioni che in 0 si mantengono limitate (e ridefinire su di esse il logaritmo).

Per ottenere $R(r)$ di questo tipo occorre imporre:

$$u_{mp}(0) \equiv 0 \quad \text{se } R \text{ è limitata, } (r \cdot R)(0) = 0.$$

(oltre ad $u_{me}(+\infty) = 0$).

Come si applica il tubo?

Consideriamo un gas di molecole a bassa temperatura (interazioni tra molecole = trascurabili).

l' H totale: $H = H_1 + \dots + H_N$

l'energia totale sarà una quantità estensiva e sarà l'energia di una singola molecola.

$$U = N \bar{u}$$

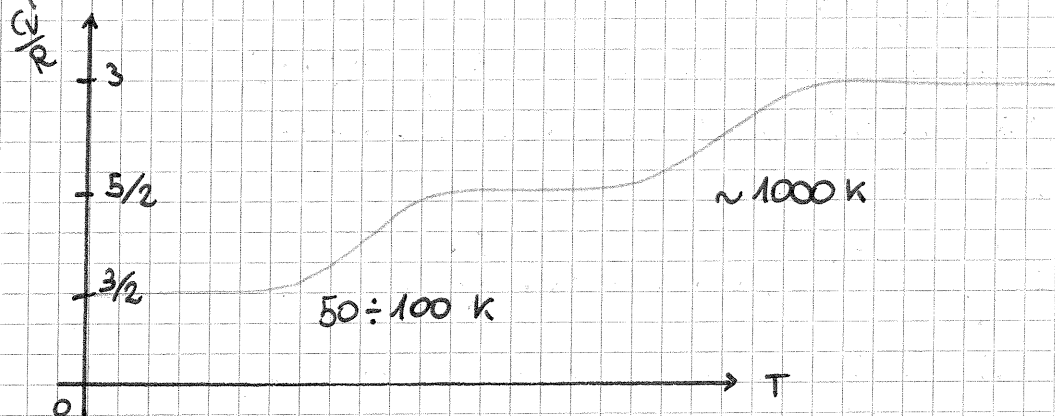
Se abbiamo esattamente una mole di gas:

$$U = N_A \bar{u} \quad c_v = \frac{\partial \bar{u}}{\partial T}$$

$$H = H_1 + \dots + H_{N_A}$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} = N_A k_B f(T)$$

Sperimentalmente si ha:



Come si stima il calore specifico di un sistema di atomi con 2 livelli energetici?

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \epsilon_1 \\ \downarrow \\ \text{---} \epsilon_0 \end{array} \quad \epsilon_1 - \epsilon_0 = \Delta \quad z(\beta) \text{ funzione di partizione}$$

$$\beta = \frac{1}{kT} \quad -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z(\beta) = U$$

$z(\beta)$ è la somma sugli stati; in questo caso:

$$z(\beta) = e^{-\beta \epsilon_0} + e^{-\beta \epsilon_1}$$

Ma questo sarebbe vero se avessimo una sola

molecole. Approssimativamente, il numero di stati possibili sarà:

$$\sum_{m_1, m_2, \dots, m_N} e^{-\beta(\bar{\epsilon}_{m_1}^{(1)} + \bar{\epsilon}_{m_2}^{(2)} + \dots + \bar{\epsilon}_{m_N}^{(N)})} \Rightarrow Z_{\text{tot}} = \prod z_{\text{part.}}$$

↑
produttoria

Se consideriamo identiche tutte le molecole:

$$Z = N z_1 \quad (\text{detta } z_1 \text{ la funzione per singola part.})$$

Alla fine:

$$-\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(z_1)^N = -N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(z_1) = -N \frac{1}{z_1(\beta)} \frac{\partial z_1}{\partial \beta}$$

$$\text{con } z_1(\beta) = e^{-\beta \epsilon_0} + e^{-\beta \epsilon_1}$$

ϵ_0 ed ϵ_1 sono entropi definiti a meno di una costante additiva. Come facciamo a definire "bene" z_1 ? Il calore specifico è una quantità ben definita, rappresenta l'energia che deve essere fornita al sistema perché la sua temperatura aumenti, globalmente, di 1 grado.

$$\bar{u} = N \frac{\bar{\epsilon}_0 e^{-\beta \epsilon_0} + \bar{\epsilon}_1 e^{-\beta \epsilon_1}}{e^{-\beta \epsilon_0} + e^{-\beta \epsilon_1}} = N \left[\bar{\epsilon}_0 \frac{e^{-\beta \epsilon_0}}{\dots} + \bar{\epsilon}_1 \frac{e^{-\beta \epsilon_1}}{\dots} \right]$$

I termini: $\frac{e^{-\beta \epsilon_i}}{e^{-\beta \epsilon_i} + e^{-\beta \epsilon_j}}$ sono la probabilità di

trovare il sistema nello stato ϵ_i ; $\bar{\epsilon}_i \cdot P_i$ è il contributo di ϵ_i all'energia media del sistema.

$$Z = \sum_n e^{-\beta \epsilon_n} \leftarrow \text{non è una } \prod_n ?$$

In alcuni casi di ϵ_n ce ne sono ∞ (corpo nero, oscillatore armonico ...).

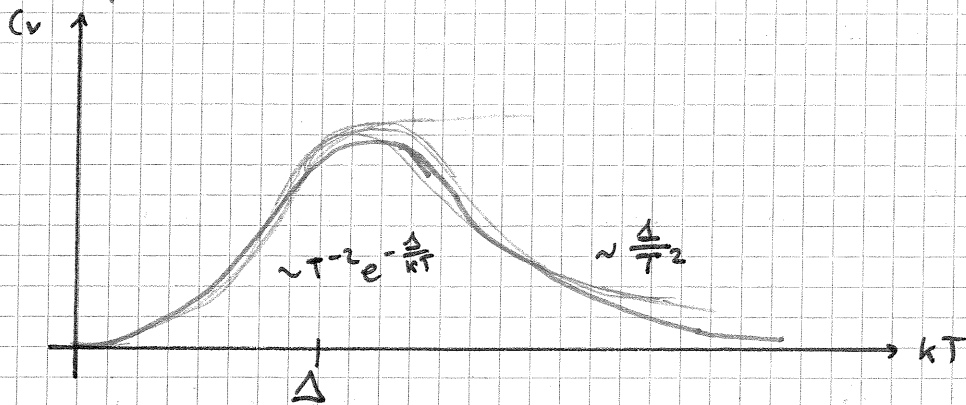
$$\bar{u} = N [\bar{\epsilon}_0 P_0 + \bar{\epsilon}_1 P_1]$$

$$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial T} \quad \beta = \frac{1}{kT} \Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial T} = -\frac{1}{kT^2}$$

$$-\frac{N}{kT^2} \frac{\partial u}{\partial \beta} \Big|_{\beta = \frac{1}{kT}} = \frac{\partial u}{\partial T} = C = -\frac{N k_B}{(k_B T)^2} \left[\bar{\epsilon}_0 \left[\frac{(-\bar{\epsilon}_0) e^{-\beta \epsilon_0}}{\dots} - e^{-\beta \epsilon_0} \dots \right] \right]$$

Vogliamo, per avere una definizione indipendente da costanti additive, definire C solo in funzione di Δ .

Ci aspettiamo che:



All'equilibrio sappiamo che: $\frac{N_1}{N_0} \sim e^{-\frac{\Delta}{kT}}$
 Per $T \rightarrow +\infty$ ($kT \gg \Delta$) avremo due livelli equipopolati ed il sistema si fa trasparente, non assorbe più il calore che gli diamo.
 Facendo i conti si ricava:

$$C_v = R \left(\frac{\Delta}{kT} \right)^2 \cdot \frac{e^{-\Delta/kT}}{(1 + e^{-\Delta/kT})^2}$$

Se il livello E_1 fosse degenere (es.: 10 volte), il picco su Δ si alza o si abbassa?

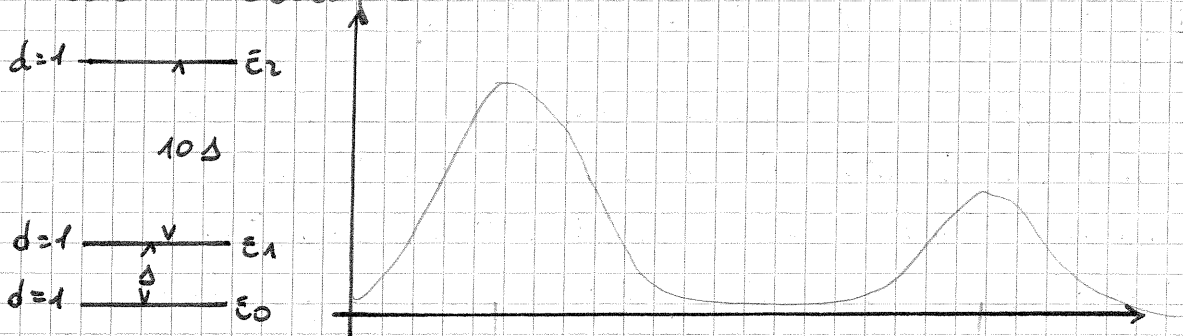
E se fosse E_0 quello degenere?

Nel primo caso si alza, nel secondo si abbassa.

L'altezza di $\max C_v$ è funzione della degenerazione.

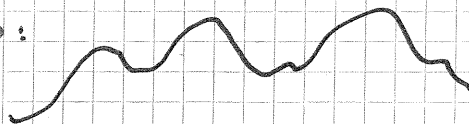
E se abbiamo ANCHE un altro livello E_3 ?

Avremo un altro valore Δ' per cui succederà qualcosa. Esempio:



A 10Δ vedo E_0 ed E_1 come se fosse uno stesso livello degenere due volte: il 2° picco sarà alto + o - la metà.

La vicinanza reale dei livelli energetici causa grafici del tipo:



Me. sistemi reali la scala dei livelli energetici è $\frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2}$. Quanto vale?

Sappiamo che a T ambiente $kT \approx \frac{1}{40}$ eV

Utilizzando il raggio di Bohr per a abbiamo:

$$\frac{\hbar^2}{m_e a_B^2} = 27 \text{ eV}$$

$$\frac{\hbar^2}{m_e a_B^2} \frac{\pi^2}{2} \frac{m_e}{M} \frac{a_B^2}{a^2} \approx 10^{-20} \text{ eV} \quad [\text{separazione tra i livelli energetici dei picchi}]$$

$\uparrow \sim 1 \text{ cm}^2$

Ev si stabilizza a $\frac{3}{2} R$ per i gas monoatomici. I gradi di libertà rotazionali e vibrazionali apportano contributi all'energia media solo da un certo punto in poi.

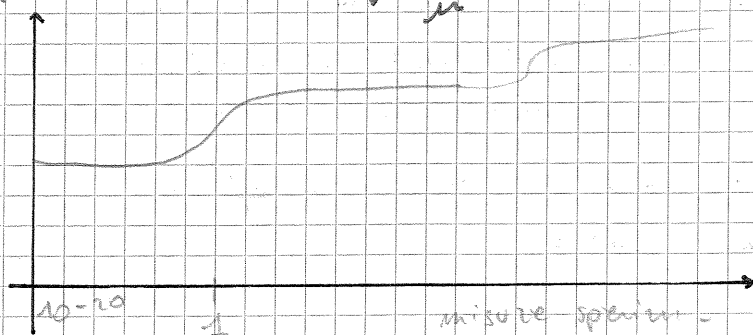
Per l'H di una molecola possiamo considerare e risolvere lo sviluppo di essa attorno ad un certo r_0 (a_3), fermandoci al 1° termine e semmai vedendone le correzioni tramite la teoria delle perturbazioni.

I gradi di libertà rotazionali si scougelano a temperature di qualche K.

Il moto del centro di massa, come abbiamo visto, va a $\frac{3}{2} R$ in circa 10^{-20} K.

A temperature ancora più alte si scougelano i gradi di libertà vibrazionali. Possiamo scomporre $V(r)$: $V(r) \approx V(r_0) + \frac{1}{2} V''(r_0) (r - r_0)^2 \dots$

V si allarga e si contrae, in forma di parabola, con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{V''(r_0)}{\mu}}$



NB: Con queste approssimazioni siamo portati a considerare stati di oscillazione armonica, che però non vanno a 0 in $r=0$. Si tratta di gaussiane del tipo:

$$e^{-\frac{(r-r_0)^2}{2a^2}} \quad \frac{1}{a^2} \equiv \frac{\mu\omega}{\hbar}$$

Vogliamo vedere quanto è alta nell'origine. Se è "praticamente" nulla ci va bene lo stesso.

Ocorre che $a \ll r_0$.

Questa disuguaglianza si traduce in:

$$\bar{E}_{rot} = \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2} \ll \hbar\omega^{vib}$$

Cioè l'approssimazione che abbiamo fatto è

valida per le molecole per le quali la scala di energia rotazionale è molto più piccola di quella vibrazionale.

Esercizi 11 - x

12.05.2010

Stiamo arrivando allo spettro dell'atomo d'idrogeno.

Per un atomo idrogenoide:

Applichiamo l'eq. di Schrödinger radiale che abbiamo già visto.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{ze^2}{r} \right] \psi = \bar{E} \psi$$

$$\psi = R_{nl}(r) Y_{lm}(\Omega) \quad u_{nl}(r) \equiv r R_{nl}(r)$$

m = massa ridotta dell' e^- rispetto al nucleo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} u_{nl}'' + \frac{\hbar^2}{2m r^2} \ell(\ell+1) u_{nl} = \bar{E}_n u_{nl} + \frac{ze^2}{r} u_{nl}$$

Cerchiamo lo spettro discreto. Doviamo risolvere questa equazione \forall valore di ℓ . In questo caso ℓ è intero, ed inoltre $\ell \geq 0$; $-\ell \leq m \leq \ell$

Come si comporta u_{nl} per r grande?

Cerchiamo la lunghezza caratteristica del problema:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[-\nabla^2 \psi + \frac{2m ze^2}{\hbar} \frac{1}{r} \psi \right] = \bar{E} \psi$$

$$\nabla^2 \psi = [L^{-2}] \Rightarrow \frac{2m ze^2}{\hbar} = [L^{-1}]$$

Riconosciamo: $a_B = \frac{\hbar^2}{m e^2} \approx 0.53 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$

Per un idrogenoide: $a_B^Z \equiv \frac{\hbar^2}{m Z e^2}$

Possiamo quindi imporre:

$$r \gg a_B^2 \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u_{nl} \approx E_n u_{nl} \Rightarrow$$

$$u_{nl}'' = -\frac{2mE_n}{\hbar^2} u_{nl}$$

$$= k_n^2 u_{nl}$$

$$\Rightarrow u_{nl} \approx A e^{-k_n r} + B e^{k_n r}$$

È abbiamo già visto che, per avere soluzioni

normalizzabili, $B=0$.

Posso provare:

$$u_{nl} = f(r) e^{-k_n r}$$

$$u_{nl}' = f' e^{-k_n r} - k_n f e^{-k_n r}$$

$$u_{nl}'' = f'' e^{-k_n r} - 2f' k_n e^{-k_n r} + k_n^2 f e^{-k_n r}$$

L'equazione diventa:

$$u_{nl}'' + \left(\frac{1}{r^2} l(l+1) + \frac{2mze^2}{\hbar^2 r} \right) u_{nl} = -\frac{2mE_n}{\hbar^2} u_{nl}$$

Quindi:

$$f'' e^{-k_n r} - 2f' k_n e^{-k_n r} + k_n^2 f e^{-k_n r} + \left(\frac{2mze^2}{\hbar^2} \frac{1}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) f e^{-k_n r} = \frac{2mE_n}{\hbar^2} f e^{-k_n r}$$

Semplificando l'esponentiale:

$$f'' - 2k_n f' + \left(\frac{2mze^2}{\hbar^2} \frac{1}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) f = 0$$

Ipotezziamo che f abbia un andamento a potenza, ovvero:

$$f(r) = \left(\sum_0^{\infty} a_n r^n \right) r^s \quad a_0 \neq 0 \quad f \equiv \sum_0^{\infty} a_n r^{n+s}$$

↳ polinomio

definendo r^s come il comportamento asintotico di f a piccole r , così da poter far partire la sommatoria da 0. Sarà una sommatoria o una serie?

Vogliamo trovare un metodo ricorsivo per calcolare gli a_n

a partire da a_{n-1} .

$$f' = \sum_0^{\infty} a_n (n+s) r^{n+s-1}$$

$$f'' = \sum_0^{\infty} a_n (n+s)(n+s-1) r^{n+s-2}$$

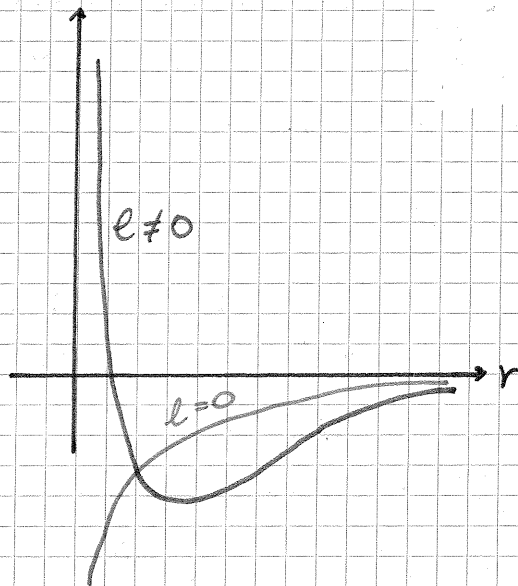
Cambiamo indice per la somma: $n \rightarrow i$

$$\sum_0^{\infty} a_i (i+s)(i+s-1) r^{i+s-2} - 2k_n \sum_0^{\infty} a_i (i+s) r^{i+s-1} +$$

$$+ \frac{2mze^2}{\hbar^2} \sum_0^{\infty} a_i r^{i+s-1} - \frac{l(l+1)}{r^2} \sum_0^{\infty} a_i r^{i+s-2} = 0$$

Dobbiamo trovare s . A piccola distanza il termine

$$\frac{1}{r^2} l(l+1) \text{ è dominante } \Rightarrow s = s(l)$$



Questa è una caratteristica dei potenziali che per $x \rightarrow 0$ divergono meno rapidamente di $1/x^2$.

L'unico numero quantico che contribuisce ad S è ℓ .

Prendiamo il termine $i=0$:

$$20 S(S-1) - \ell(\ell-1)20 = 0$$

(Un polinomio è nullo sse tutti i coeff. sono nulli, per termini alla stessa potenza)

$$S(S-1) = \ell(\ell-1) \Rightarrow S = \begin{cases} \ell+1 \\ -\ell \end{cases}$$

Vogliamo una u_{me} che valga 0 nell'origine \Rightarrow scartiamo la soluzione $S = -\ell$.

$$S = \ell + 1$$

$$u_{me} = e^{-k_n r} r^{\ell+1} \sum_0^{\infty} a_i r^i$$

Posso scrivere:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i (i+\ell+1)(i+\ell) r^{i+\ell-1} - 2k_n \sum_{i=0}^{\infty} a_i (i+\ell-1) r^{i+\ell} - \ell(\ell+1) \sum_{i=1}^{\infty} a_i r^i$$

Cambio variabile: $i' \equiv i-1$

$$\sum_0^{\infty} a_{i+1} (i+\ell+2)(i+\ell+1) r^{i+\ell} - 2k_n \sum_0^{\infty} a_i (i+\ell+1) r^{i+\ell} - \ell(\ell+1) \sum_0^{\infty} a_i r^{i+\ell} + \frac{2mze^2}{\hbar^2} \sum_0^{\infty} a_i r^{i+\ell} = 0$$

Posso semplificare i termini $r^{i+\ell}$, perché il polinomio sia nullo tutti i coeff. sono nulli. Risultato:

$$a_{i+1} (-\ell(\ell+1) + (i+\ell+2)(i+\ell+1)) = a_i [2k_n(i+\ell+1) - 2mze^2/\hbar^2]$$

$$a_{i+1} = \frac{2k_n(i+\ell+1) - 2mze^2/\hbar^2}{(i+\ell+2)(i+\ell+1) - \ell(\ell+1)}$$

Questa è un'equazione ricorsiva. Il valore di a_0 verrà definito con una normalizzazione, per ora possiamo imporre $= 1$.

$$R_{me} = r^{\ell} e^{-k_n r} \sum_0^{\infty} a_i r^i = f(r) e^{-k_n r}$$

Bisogna che R non diverga a grandi r . A grandi i :

$$a_{i+1} \approx \frac{2k_i}{i^2} a_i = \frac{2k}{i} a_i$$

$$a_0 \equiv 1$$

$$a_2 = 2ka_1 \quad a_3 = 2k^2 a_2 \quad a_4 = \frac{(2k)^3}{6} a_1$$

$$\Rightarrow a_{i+1} \approx \frac{(2k)^i}{i!}$$

Quindi a grandi i :

$$R_{nr} \approx r e^{-k_n r} \sum_1 \frac{(2kr)^i}{i!} \approx r e^{-k_n r} e^{-2kr} \approx e^{k_n r}$$

Diverge - Come posso fare? Trovo la serie e

lo faccio diventare un polinomio - Un esponenziale negativo sarà sempre dominante su un polinomio finito.

$$a_{\bar{l}+1} \equiv 0$$

$$k(\bar{l} + l + 1) = \frac{mze^2}{\hbar^2}$$

Definisco il numero quantico principale $n \equiv \bar{l} + l + 1$

e noto che $n \geq 1$.

Si ha: (esplicitando k_n)

$$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{mze^2}{\hbar} \frac{1}{n}$$

$$-\frac{2mE_n}{\hbar^2} = \frac{m^2 z^2 e^4}{\hbar^4} \frac{1}{n^2} \Rightarrow E_n = -\frac{m(z e^2)^2}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

$$E_n = -\frac{ze^2}{2a_B} \frac{1}{n^2}$$

Teorema del Viriale: per un potenziale omogeneo di grado -1 : $\bar{T} + \bar{V} = \bar{E}_n$; $2\bar{T} = -\bar{V}$

Possiamo scrivere: $\frac{\bar{V}}{2} = E$

In quanti modi posso variare n ? \bar{l} ed l possono variare a piacimento -

$$k_n = \sqrt{\dots} = \frac{mze^2}{\hbar^2 n} = \frac{1}{m a_B}$$

$$R_{nr} = r^l e^{-\frac{r}{na_B}} \sum_0^{\bar{l}} a_i r^i = r^l e^{-\frac{r}{na_B}} \sum_0^{\bar{l}} a_i r^i$$

Un, quante soluzioni ho? Per una data energia, qual è la degenerazione?

$$n \equiv 1 \Rightarrow \bar{l} = 0 \wedge l = 0 \quad R_{10} \approx e^{-\frac{r}{a_B}}$$

(resta da vedere la normalizzazione)

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad \Psi_{100} = \frac{e^{-\frac{zr}{a_3}}}{\sqrt{4\pi}}$$

Per l'adimensionalità e la normalizzazione:

$$\Psi_{00} = 2 \left(\frac{z}{a_3}\right)^{3/2} \frac{e^{-\frac{zr}{a_3}}}{(4\pi)^{1/2}}$$

$$\int_0^{\infty} dx x^n e^{-x} = n!$$

Vediamo ora $m=2$. Ci sono due scelte:

$$\begin{cases} l=1 \\ l=0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} l=1 \\ l=0 \end{cases}$$

Vediamo la prima: $\Psi_{200} = \left(\frac{z}{a_3}\right)^{3/2} e^{-\frac{zr}{2a_3}} \left(a_0 + a_1 \frac{zr}{a_3}\right) Y_{00}$

Normalizzando ed imponendo

l'ortogonalità con Ψ_{100} :

$$\Psi_{200} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{a_3}\right)^{3/2} e^{-\frac{zr}{2a_3}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{zr}{a_3}\right) Y_{00}$$

Vediamo la seconda:

$$l=1$$

$$\Psi_{21m} = \left(\frac{z}{a_3}\right)^{3/2} r e^{-\frac{zr}{2a_3}} \frac{1}{2\sqrt{6}} Y_{1m}(\Omega)$$

Sono 3 stati, o seconda dim.

Si nota che: $\Psi = R Y$

$$R = r e^{-\dots} \quad Y = \frac{\dots}{r e}$$

A piccoli r il comportamento è dato da quel fattore $r e$.

Vediamo $m=3$:

$$\frac{zr}{a_3} = \rho \quad \Psi_{300} = e^{-\rho/3} \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2}{3}\rho + \frac{2}{27}\rho^2\right)$$

$$\Psi_{31m} = e^{-\rho/3} Y_{1m}(\Omega) \rho \left(1 - \frac{\rho}{6}\right) \frac{8}{27\sqrt{6}}$$

...

Riassumendo:

$m \setminus l$	0	1	2	3	...
1	R_{10}	-	-	-	
2	R_{20}	R_{21}	-	-	
3	R_{30}	R_{31}	R_{32}	-	
4	R_{40}	R_{41}	R_{42}	R_{43}	
...					

fissata una riga, ho
 $\sum_{l=0}^{m-1} (2l+1) = n^2$ soluzioni.

(linearmente indipendenti e distinte da almeno uno dei numeri quantici)

Per soluzioni con stesso l l'ortogonalità è data da R_{me} , per soluzioni con l diverso da Y_{lm} .

Se facciamo $L_{\pm} |E, m\rangle$ su un $|E, m\rangle$ generico otteniamo $2l+1$ stati, tutti con la stessa energia, perché L_{\pm} commuta con H .

Nel caso che abbiamo esaminato ne abbiamo di più, n^2 .
 \Rightarrow degenerazione accidentale: data da diversi modi in cui è possibile ottenere, da l ed m , un dato n .

Questo si spiega considerando l'algebra di operatori cui appartengono L_x, L_y, L_z .

In questi casi il gruppo di invarianza dell'Hamiltoniana non è solo il gruppo delle rotazioni, ma è più grande.

Cioè abbiamo non solo $|E, l, m\rangle$ ma anche altri $|E, m\rangle$ che restituiscono stati con la stessa energia.

È un vettore che commuta con H e lascia invariata l'energia degli stati dell'idropensioide, ed è:

$$\vec{K} = \frac{1}{2m} (\vec{p} \wedge \vec{L} - \vec{L} \wedge \vec{p}) - ze^2 \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{Vettore di Lenz}$$

Le componenti di K formano un'algebra:

$$[K_a, K_b] = i \epsilon_{abc} K_c$$

$$[L_a, K_b] = i \epsilon_{abc} K_c$$

$$[K_a, K_b] = i \epsilon_{abc} L_c \quad \cdot (-2mH)$$

\vec{L} è un vettore assiale, \vec{p} ed \vec{r} sono piani, come \vec{K} .

Definendo: $\vec{M} = \frac{1}{\sqrt{-2mH}} \vec{K}$

$$\left[\frac{K_a}{\sqrt{-2mH}}, \frac{K_b}{\sqrt{-2mH}} \right] = i \epsilon_{abc} L_c$$

$$[M_a, M_b] = i \epsilon_{abc} M_c$$

Definiamo ora, cambiando base nello spazio vettoriale:

$$\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{L} + \vec{M}) \quad \vec{K} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{L} - \vec{M})$$

si ha:

$$[J_a, J_b] = i \epsilon_{abc} J_c$$

$$[K_a, K_b] = i \epsilon_{abc} K_c$$

$$[J_a, K_b] = 0 \quad \text{le due algebre commutano tra loro}$$

Pauliano di rotazioni:

$$\text{rot} \quad e^{-i\vec{n} \cdot \vec{L}} \quad e^{-i\vec{m} \cdot \vec{J}} \quad e^{-i\vec{k} \cdot \vec{K}}$$

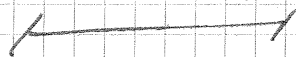
$$\text{dim. spazio generato} \quad 2l+1$$

$$(2j+1)(2k+1)$$

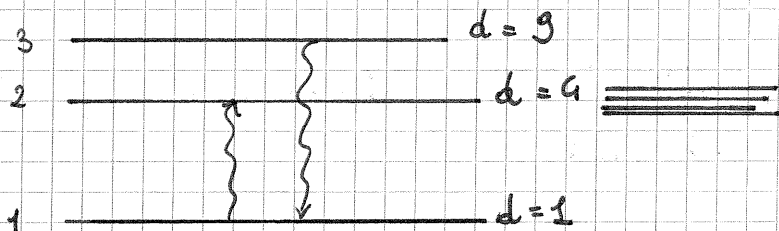
$$\vec{L} \cdot \vec{M} = 0, \vec{M} \cdot \vec{L} = 0 \Rightarrow j(j+1) = k(k+1)$$

$$\Rightarrow \text{se } 2j+1 = n, (2j+1)(2k+1) = n^2$$

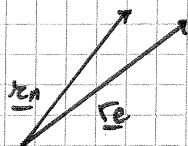
Mel caso dell' OAS il gruppo di invarianza e' ?
 Per l'atomo di H e' O_4 (rotazioni su \mathbb{R}^4).



Come si fa a separare i livelli energetici degeneri ?



Proviamo ad applicare un campo elettrico: ci sarai un termine di interazione di dipolo.

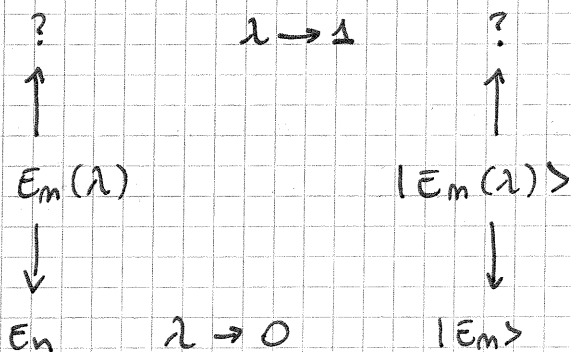


$$\vec{d} = e\vec{r}_+ - e\vec{r}_- = -e\vec{r}$$

$$H = H_0 + e\vec{E} \cdot \vec{r}$$

Se siamo in una situazione $H_\lambda = H_0 + \lambda H'$, H' si dice perturbazione e λ costante di accoppiamento.

E' difficile (impossibile) trovare gli autovettori esatti della nostra H , ma possiamo usare la teoria delle perturbazioni.



$$E_m(\lambda) \approx E_m(0) + \lambda \Delta E_m^{(1)} + \frac{\lambda^2}{2!} \Delta E_m^{(2)} + \dots$$

$$|E_m(\lambda)\rangle \approx |E_m(0)\rangle + \lambda |\Delta_m\rangle^{(1)} + \frac{\lambda^2}{2!} |\Delta_m\rangle^{(2)} + \dots$$

Riusciamo, al 1° ordine, a rimuovere la degenerazione?

Useremo i concetti di perturbazione, simmetria, regole di selezione.

Esercizio: trovare autovalori di una matrice -

$$\left| \begin{pmatrix} E_1 - \lambda & \Delta \\ \Delta & E_2 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(E_1 + E_2) + E_1 E_2 - \Delta^2 = 0$$

$$2\lambda = (E_1 + E_2) \pm \sqrt{(E_2 - E_1)^2 + 4\Delta^2} = (E_1 + E_2) \pm (E_2 - E_1) \sqrt{1 + 4\Delta^2 / (E_2 - E_1)^2}$$

$$\lambda_+ = \frac{1}{2} \left[(E_1 + E_2) + (E_2 - E_1) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\Delta}{E_2 - E_1} \right)^2 + \dots \right\} \right]$$

$$\lambda_- = \frac{1}{2} \left[(E_1 + E_2) - (E_2 - E_1) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\Delta}{E_2 - E_1} \right)^2 + \dots \right\} \right]$$

Se ho una matrice "a blocchi", il determinante è il prodotto dei det. dei 2 blocchi:

$$\left(\begin{array}{c|cc} \text{///} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \text{///} & \text{///} \\ 0 & \text{///} & \text{///} \end{array} \right)$$

↔

$$H = H_0 + e \vec{\epsilon} \cdot \vec{z}$$

Voglio calcolare gli elementi di matrice della perturbazione tra gli autovettori di H_0 .

$$\langle m' e' m' | z | m e m \rangle$$

(Avevo chiamato z la direzione di $\vec{\epsilon}$)

Regole di selezione

$$[z, L_z] = 0 \Rightarrow \Delta m = 0$$

$I z I^{-1} = -z \Rightarrow z$ connette solo stati con parità opposta (e pari con l' dispari)

$$u_{ne} = f(r) \cdot e^{-\kappa r} = r^{l+1} \sum_0^{n+1} a_i r^i \cdot e^{-\kappa r}$$

Nell'equazione da risolvere sostituisco al posto di s , la soluzione trovata, che è: $l+1$.

$$\sum_0 a_i (i+l+1)(i+l) r^{i+l-1} - 2\kappa \sum_0 a_i (i+l+1) r^{i+l} + \frac{2\mu z e^2}{\hbar^2 r} \sum_0 a_i r^{i+l} - l(l+1) \sum_0 a_i r^{i+l-1} = 0$$

Cambiando: $i = i'+1$

$$\sum_0 a_{i+1} (i+l+2)(i+l+1) r^{i+l} - 2\kappa \sum_0 a_i (i+l+1) r^{i+l} - l(l+1) \sum_0 a_{i+1} r^{i+l} + \frac{2\mu z e^2}{\hbar^2} \sum_0 a_i r^{i+l} = 0$$

Ora che tutte le somme partono da 0 si può raccogliere:

$$a_{i+1} (-l(l+1) + (i+l+2)(i+l+1)) = a_i \left[2\kappa(i+l+1) - \frac{2\mu z e^2}{\hbar^2} \right]$$

$$a_{i+1} = \frac{2\kappa(i+l+1) - \frac{2\mu z e^2}{\hbar^2}}{(i+l+2)(i+l+1) - l(l+1)} a_i \quad \left\| \begin{array}{l} \text{Si è trovata questa formula} \\ \text{ricorsiva, trovato } a_i \\ \text{si trovano tutti gli } a_i \end{array} \right.$$

a_0 si era supposto essere = 1 come normalizzazione intermedia. Autore però non va bene perché si era partiti da valori dell'energia negativi e in teoria stanno tutti bene, ma non è così.

$$\frac{u_{ne}}{r} = r^l e^{-\kappa r} \sum_0^{\infty} a_i r^i = R_{ne}(r)$$

Chi ci garantisce però che truncando la serie si conserva il comportamento asintotico: $e^{-\kappa r}$? Questo si deve lasciar stare.

Allora se si dice che i è grande rispetto a l :

$$a_{i+1} \approx \frac{2\kappa i}{i^2} a_i = \frac{2\kappa}{i} a_i \quad \text{questo è il comportamento asintotico per grandi } i.$$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_2 = \frac{2\kappa}{2} a_1 \\ a_3 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{2\kappa}{2} \cdot \frac{2\kappa}{1} a_1 \end{array} \right\} \Rightarrow a_i = \frac{(2\kappa)^i}{i!}$$

$$\text{Per grandi } r: R_{ne} \approx r^l e^{-\kappa r} \sum \frac{(2\kappa r)^i}{i!} = r^l e^{-\kappa r} e^{+2\kappa r} \approx e^{\kappa r}$$

ma questo è quello che si voleva evitare.

Allora si fissa $\bar{n} = a_{T+1} = 0$

Abbiamo quindi un polinomio di grado \bar{l} .

$$R_{ne} = r^l \cdot e^{-\kappa_n r} \sum_0^{\bar{l}} a_i r^i$$

Le condizioni da imporre e':

$$a_{\bar{l}+1} = 0 \Leftrightarrow \kappa(\bar{l}+1) = \frac{\mu z e^2}{\hbar^2}$$

$$n = \bar{l} + 1 \geq 1$$

n e' un nuovo numero definito e quel modo.

$$\sqrt{\frac{-2\mu E}{\hbar^2}} = \frac{\mu z e^2}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{n}$$

$$- \frac{2\mu E}{\hbar^2} = \frac{\mu^2 z^2 e^2}{\hbar^4} \cdot \frac{1}{n^2} \Rightarrow E_n = - \frac{\mu z^2 e^2}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{2n^2}$$

Se succede questo si mantiene il comportamento asintotico esponenziale.

$$E_n = - \frac{z e^2}{2a_B} \cdot \frac{1}{n^2}$$

valori medi



Il teorema del viriale diceva che $\bar{T} + \bar{V} = E_n$ $2\bar{T} = -\bar{V}$.

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\bar{V}}{2}} \text{ (con } \bar{V} \text{ che se come } \frac{1}{r} \text{)}$$

Fissato n pero' quante soluzioni si trovano per quel valore?

Dall'espressione si vede che \bar{l} e l possono variare a piacere.

$$R_{ne} = r^l \cdot e^{-\frac{r}{a_B} n} \sum_0^{\bar{l}} a_i r^i$$

$$\kappa_n = \sqrt{\frac{2\mu \cdot \mu(z e^2)^2}{\hbar^2 \cdot \hbar^2 \cdot 2n^2}} = \frac{\mu z e^2}{\hbar^2 n} = \frac{1}{n a_B}$$

Visto che all'esponenziale c'e' $\frac{1}{n}$ allora per $n=2$ si

ha una lunghezza caratteristica che e' il doppio di quella

per $n=1$

Nel caso piu' generale: $R_{ne} = r^l \cdot e^{-\frac{zr}{a_B n}} \sum_0^{\bar{l}} a_i r^i$

Cominciamo a trovare le soluzioni una volta fissato n :

$$n = \bar{l} + l + 1$$

$$\bullet n=1 \quad R_{10} = e^{-\frac{zr}{a_B}}$$

questa e' l'unica soluzione o meno del coeff. di normalizzazione

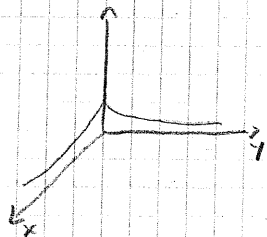
$$Ma \text{ fissato } l=0 \Rightarrow u=0 \text{ e: } \psi_{100} = 2 \cdot e^{-\frac{zr}{a_B}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot \left(\frac{z}{a_B}\right)^{3/2}$$

Si va a vedere se con quel 2 la funzione e' normalizzata.

$$\int dV \psi_{100}^2 = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int dr r^2 \left(\frac{z}{a_B}\right)^3 \cdot 4 \cdot e^{-\frac{2zr}{a_B}} = \text{posto } \frac{zr}{a_B} = \rho$$

$$= \int d\rho \cdot \rho^2 \cdot e^{-2\rho} \cdot 4 = 4 \int_0^\infty dx \cdot x^2 \cdot \frac{e^{-x}}{8} = \frac{4}{8} \cdot 2! = 1$$

La funzione è:



Questa ha una cuspidè nell'origine, anche con questo si puo' riuscirci a fare il Laplaciana, perché tanto c'è un teorema che ci dice che si puo' fare se la funzione è continua e limitata.

• $n=2$

$$\psi_{200} = \left(\frac{z}{a_B}\right)^{3/2} e^{-\frac{zr}{2a_B}} \left(a_0 + a_1 \frac{z \cdot r}{a_B}\right)$$

polinomio di grado 1 che viene moltiplicato

Senza calcolarlo però che si puo' dire di a_1 ? Questa ψ deve essere ortogonale alla prima e se a_1 fosse $+\frac{1}{2}$ non andrebbe bene perché sarebbe sempre positiva e non sarebbe ortogonale alla prima.

Quello che si trova è: $\psi_{200} = \left(\frac{z}{a_B}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{zr}{2a_B}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{zr}{a_B}\right) \gamma_{00}$

Dove $\gamma_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

Se invece $l=1$:

$$\psi_{21m} = \left(\frac{z}{a_B}\right)^{3/2} \cdot r e^{-\frac{zr}{2a_B}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} \gamma_{1m}(\Omega)$$

costante di normalizzazione che deriva da $\bar{l}=0$

• $n=3$

$$\psi_{300} = e^{-\frac{\rho}{3}} \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2}{3}\rho + \frac{2}{27}\rho^2\right) \quad \text{con } \rho = \frac{zr}{a_B}$$

$$\psi_{3-1m} = \rho \left(1 - \frac{\rho}{6}\right) e^{-\frac{\rho}{3}} \gamma_{1m}(\Omega) C$$

Questa ha momento angolare che vale 1, il termine tra parentesi è dato dal fatto che la ψ deve essere ortogonale a quella trovata prima.

$n \setminus l$	0	1	2	3
1	R_{10}	-	-	-
2	R_{20}	R_{21}	-	-
3	R_{30}	R_{31}	R_{32}	-
4	R_{40}	R_{41}	R_{42}	R_{43}

$l=0, \dots, n-1$

Fissata una riga le soluzioni che si possono trovare sono:

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2 \quad \text{soluzioni linearmente indipendenti}$$

Preso ψ_{100} e ψ_{21m} sono entrambe positive, allora come fanno ad essere ortogonali? Non lo sono, ma non ci interessa perché quelle che devono esserlo sono quelle della stessa colonna (con stesso l).

Avendo visto che fissata $E = |E, n, l\rangle$ applicando L_{\pm} si trovano $(2l+1)$ stati, (degen. su m)

Presi degli operatori che commutano con H , questi formano uno spazio vettoriale, e sono chiusi sotto regole di commutazione, abbiamo cioè un'Algebra di operatori.

In un campo centrale $\mathcal{L}(H)$ è degenere e l'esistenza di operatori che commutano con essa ma non tra di loro è assicurata.

Esiste un vettore conservato, invariante sotto applicazioni dell'hamiltoniana e questo vettore è il VETTORE DI LENZ:

$$\vec{K} = \frac{1}{2m} (\vec{p} \wedge \vec{L} - \vec{L} \wedge \vec{p}) - ze^2 \frac{\vec{r}}{r}$$

(Applicato ad un autostato di H , è ancora un autostato di H allo stesso autovalore).

$$\begin{aligned} [L_a, L_b] &= i \epsilon_{abc} L_c \\ [L_a, K_b] &= i \epsilon_{abc} K_c \\ [K_a, K_b] &= ? \end{aligned}$$

perché \vec{K} è un vettore!

I vettori polari non cambiano segno dalle componenti sotto inversioni spaziali (come \vec{B}), i vettori assiali (come \vec{E}) cambiano segno sotto inversioni spaziali.

\vec{L} è assiale; \vec{K} è polare

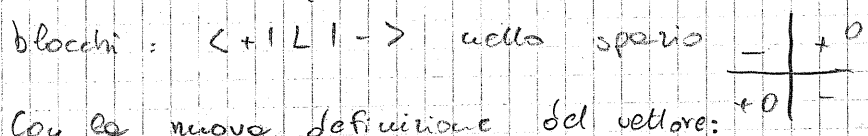
$$[K_a, K_b] = i \epsilon_{abc} L_c \cdot (-2m\mu H)$$

Allora definiamo un altro vettore, che non è proprio quello di Lenz:

$$\vec{M} \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\mu H}} \vec{K}$$

$$\left[\frac{K_a}{\sqrt{-2m\mu H}}, \frac{K_b}{\sqrt{-2m\mu H}} \right] = i \epsilon_{abc} L_c$$

I vettori \vec{L} e quelli \vec{K} hanno la stessa decomposizione a blocchi:



Con la nuova definizione del vettore:

$$[M_a, M_b] = i \epsilon_{abc} M_c$$

$$[L_a, M_b] = i \epsilon_{abc} M_c$$

Come base ora invece di \vec{L} e \vec{M} si prendono:

$$\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{L} + \vec{M}) \quad \vec{K} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{L} - \vec{M})$$

$$[J_a, J_b] = i \epsilon_{abc} J_c$$

$$[K_a, K_b] = i \epsilon_{abc} K_c$$

$$[J_a, K_b] = 0$$

Le rotazioni le avevamo definite: $e^{-i \vec{n} \cdot \vec{J}}$, ora invece:
 $e^{-i \vec{m} \cdot \vec{J}} \cdot e^{-i \vec{k} \cdot \vec{K}}$

(2j+1) (2k+1) Usando questi 2 nuovi autovettori si vanno a coprire spazi (2j+1)-dimensionale e anche (2k+1) dimensionale.

$$\frac{1}{2} [L^2 + M^2 + \vec{L} \cdot \vec{M} + \vec{M} \cdot \vec{L}] = j(j+1)$$

$$\frac{1}{2} [L^2 + M^2 - \vec{L} \cdot \vec{M} - \vec{M} \cdot \vec{L}] = k(k+1)$$

$$\Rightarrow j(j+1) = k(k+1)$$

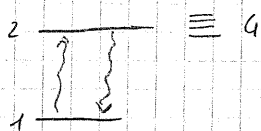
e quindi lo spazio generato da \vec{J} e da \vec{K} ha dimensione n^2 . Inoltre gli autovettori dell'hamiltoniana sono propri di $\frac{1}{n^2}$.

Questo metodo fu inventato da Pauli ed è una trattazione puramente algebrica e spiega la degenerazione dei livelli dell'atomo di idrogeno.

Nel caso dell'oscillatore tridimensionale lo spazio generato è invariante e mi genera il vettore di Leutz?

OSCILLATORE ARMONICO 3D (IDROGENO)

Questa mattina abbiamo trovato che lo stato E_n è degenero n^2 volte, ma se andiamo a fare spettroscopia cosa si trova? Come si fa a spiegarla questa degenerazione?



$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \quad E_2 - E_1 = 10.4 \text{ eV}$$

$\lambda = 1240 \text{ \AA} \Rightarrow$ questo λ è troppo corto per poter essere visto nel visibile.

Se si riesce a vedere quattro valori di λ diversi allora ci si convince che veramente un valore dell'energia è n^2 volte degenero.

Quando abbiamo un atomo che interagisce con un campo esterno l'interazione è essenzialmente a causa del momento di dipolo elettrico.

$$H \equiv H_0 - \vec{d} \cdot \vec{E} = H_0 + e \vec{E} \cdot \vec{r} \quad \begin{matrix} \vec{r}_n = \text{posizione nucleo} \\ \vec{r}_e = \text{posizione e} \\ (\vec{r} = \text{coordinata relativa}) \end{matrix}$$

Non si riescono a trovare autovettori esatti di questo hamiltoniano.

$$H \equiv H_0 + \lambda H' \quad \text{"perturbazione"}$$

ad esempio

$\lambda =$ costante di accoppiamento, che nel nostro caso è $\frac{1}{r}$ valore del campo elettrico esterno.

$$\begin{array}{ccc}
 E_u(\lambda) & |E_u(\lambda)\rangle \\
 \downarrow \lambda \rightarrow 0 & \downarrow \lambda \rightarrow 0 \\
 E_u & |E_u\rangle
 \end{array}$$

Ma come sono autovettori ed autovalori nel V_{coso} (mostro $(\lambda \equiv 1)$)?

$$|E_u(\lambda)\rangle = |E_u(0)\rangle + \lambda \Delta E_u^{(1)} + \frac{\lambda^2}{2!} \Delta E_u^{(2)} + \dots \quad (\text{Sviluppo in Serie})$$

$$|E_u(\lambda)\rangle = |E_u(0)\rangle + \lambda |\Delta E_u^{(1)}\rangle + \frac{\lambda^2}{2!} |\Delta E_u^{(2)}\rangle + \dots$$

Queste serie sono utili se si possono trascurare i termini successivi e quello di ordine k , cioè le serie devono essere rapidamente convergenti.

Per poter risolvere il problema proposto si devono connettere i concetti.

PERTURBAZIONI - SIMMETRIE - REGOLE DI SELEZIONE

Per il parametro λ che tende a zero ci aspettiamo piccole perturbazioni agli autovalori e agli autovettori.

Prendiamo una matrice Hermitiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 11 & 30 \\ 0 & 30 & 111 \end{pmatrix}$$

Di sicuro questa ha autovalori reali.

Se ci mettiamo in 2 dimensioni nel caso generale:

$$\begin{vmatrix} E_1 - \lambda & \Delta \\ \Delta & E_2 - \lambda \end{vmatrix} = \det(M - \lambda I) \equiv 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda(E_1 + E_2) + E_1 E_2 - \Delta^2 = 0$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{(E_1 + E_2) \pm \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - 4(E_1 E_2 - \Delta^2)}}{2} = \frac{(E_1 + E_2) \pm \sqrt{(E_2 - E_1)^2 + 4\Delta^2}}{2}$$

Si risolve l'equazione secondaria per trovare gli autovalori, che possono essere approssimati sviluppando in serie la $\sqrt{\quad}$.

$$2 \lambda_{\pm} = (E_2 + E_1) \pm (E_2 - E_1) \sqrt{1 + \frac{4\Delta^2}{(E_2 - E_1)^2}}$$

$$\lambda_{+} = \frac{1}{2} \left[(E_2 + E_1) + (E_2 - E_1) \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\Delta}{E_2 - E_1} \right)^2 + \dots \right) \right]$$

$$\lambda_{-} = \frac{1}{2} \left[(E_2 + E_1) - (E_2 - E_1) \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\Delta}{E_2 - E_1} \right)^2 + \dots \right) \right]$$

Se prendiamo $H = H_0 + \lambda H'$

$$\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \delta_1 & \Delta \\ \Delta & \delta_2 \end{pmatrix}$$

Si vede che i termini che veramente danno noia sono i Δ , cioè quelli fuori della diagonale.

$$\lambda_{\pm} = (E_2 + \lambda \delta_2 + E_1 + \lambda \delta_1) \pm \dots$$

Quindi $\lambda^+ \approx (E_2 + \lambda \delta_2) + \frac{1}{2} \lambda^2 \left(\frac{(2\Delta)^2}{(E_2 + \lambda \delta_2) - (E_1 + \lambda \delta_1)} \right) + \dots$

ci accoutentiamo di fare le correzioni solo al primo ordine in λ .

Quando il Δ è piccolo il termine fuori diagonale contribuisce solo al secondo ordine

Nel caso:

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$ Se ci si accoutente di un errore del 10% allora si può dire che gli autovalori sono 1 e 11. $\text{errore} \approx \left(\frac{3}{1-11} \right)^2 = \frac{9}{100}$

Per dire se un termine fuori diagonale ci dà noia o no lo dobbiamo confrontare con gli autovalori imperturbati relativi alla sua riga e alla sua colonna nella matrice

che rappresenta H .

$$\begin{matrix} \langle 1| & \langle 2| & \langle 3| & \langle 4| \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 8000 \\ 0 & 0 & 111 & 0 \\ 0 & 8000 & 0 & 4011 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

O, vuol dire che abbiamo trascurato degli elementi perché dovevano un contributo agli autovalori inferiore al 10% (= "quasi 0")

Questa matrice si può vedere come soluzione diretta di una matrice 1×1 e di una 3×3 .

$(1-\lambda)(M-\lambda \mathbb{1}_3)$ questo è il determinante, è il prodotto dei determinanti dei due blocchi.

Si può poi ordinare diversamente la base

$$\begin{matrix} \langle 1| & \langle 3| & \langle 2| & \langle 4| \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 111 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 8000 \\ 0 & 0 & 8000 & 4011 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Questo si può fare, e semplifica le cose se nella matrice ce ci sono molti zeri.

3 blocchi: $1 \times 1 \oplus 1 \times 1 \oplus 2 \times 2$

Quando un valore fuori diagonale non è trascurabile rispetto agli autovalori imperturbati allora si deve tenere conto di esso. Tornando al nostro problema con il momento di dipolo, la matrice è infinito dimensionale.

(Atomo di H immerso in un campo elettrico)

Questo effetto si chiama EFFETTO STARK, anche se per primo fu un fisico siciliano, Lo surdo, ad osservarlo.

$$H_\lambda = H_0 + \lambda H'$$

autostati di H, L^2, L_z

$$\hat{z} \begin{matrix} |100\rangle & |200\rangle & |211\rangle & |210\rangle & |21-1\rangle & |3\dots\rangle & \dots \end{matrix}$$

$\langle 100 $	O_z	O_p	O	\textcircled{A}	O	
$\langle 200 $	O_p	O_z	O	B	O	
$\langle 211 $	O	O	O_z	O	O	
$\langle 210 $	\textcircled{A}	B	O	O_z	O	
$\langle 21-1 $	O	O	O	O	O_z	
$\langle 3\dots $						

Chiamiamo z la di:

Si deve scrivere questa matrice.

termine di \vec{E} : $H_0 + e\vec{E} \cdot \vec{z}$

$$[H, L_z] = 0$$

il sistema rotazionale

Impatti con H_0 si commuta ancora, inoltre se il momento di dipolo non cambia, ed L_z quindi anche commuta.

Regola di selezione su L_z : $m = m'$. ($\Delta m = 0$)

allora si può cominciare a mettere degli 0 nella matrice. \Rightarrow per ottenere una matrice diagonale

$$[z, L_z] = 0 \Rightarrow \Delta m = 0$$

a blocchi

conviene mettere vicini etc. della base $|z, m\rangle$ con stesso m .

$$I z I^{-1} = -z$$

ment: $(-)^l$ $(-)^{l'}$ parità degli stati w, w'

Regola di selezione sulla parità: $w \cdot w' = -1$

z e' dispari non può connettere stati con stesso parità.

\Rightarrow gli elementi sulla diagonale sono tutti nulli.

Gli stati nella matrice 6×6 evidenziano hanno tutti uguale n

si deve poi paragonare A con 10.2 eV . ($E_2 - E_1$ impuri basti)

$$A = eE \langle 100 | z | 210 \rangle = eE a_0 \int d\rho \rho^2 R_{10}(\rho) \frac{z}{a_0} R_{20}(\rho) \int d\Omega Y_{10}^* \cos\theta Y_{20}$$

Questo e' il termine che decide la scala e le dimensioni.

e' tutto positivo e $\int d\Omega \cos\theta$

quindi questo e' un numero

Supponiamo $|E| = 10^4 \text{ V/cm} \Rightarrow e \cdot 10^4 \text{ V/cm} \cdot 10^{-8} \text{ cm} = e \cdot 10^{-4} \text{ V} = 10^{-6} \text{ eV}$

$\langle 100 | z | 210 \rangle$

Allora $A = 10^{-4} eN$ e se lo trascuriamo si fa un errore di 10^{-10} , e quindi lo possiamo trascurare.

Se ora prendiamo ad esempio:

$\langle 100, 99, 0 | \approx | 101, 100, 0 \rangle$ (le regole di selezione e parità sono

$$13.6 \left(\frac{1}{100^2} - \frac{1}{100^4} \right) \approx \frac{200}{10^6} \approx 2 \cdot 10^{-4}$$

rispettato, questo elemento di matrice $\neq 0$)

Facendo i conti più precisi si vedrebbe che al crescere di n la perturbazione è ancora più piccola. Però anche il SE tra i livelli imperturbati decresce, e di conseguenza la teoria delle perturbazioni perde significato. Allora siamo rimasti con il problema di dover definire il valore di B .

NB: Grazie alle regole di selezione, si riesce a ricondurre un sistema infinito dimensionale ad uno a dimensione finita, descritto da una matrice diagonale a blocchi.

$$\begin{array}{c|c} | 200 \rangle & | 210 \rangle \\ \hline \langle 200 | & 0 \\ \langle 210 | & 0 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ci sono quegli 0 perché, per qualunque elemento si prenda ^{in quella base} _{o entrambe} vengono violate una o due regole di selezione.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} | 200 \rangle & | 210 \rangle & | 211 \rangle & | 21-1 \rangle & \\ \hline \langle 200 | & 0 & B & 0 & 0 \\ \langle 210 | & B & 0 & 0 & 0 \\ \langle 211 | & 0 & 0 & & \\ \langle 21-1 | & 0 & & & 0 \end{array}$$

Risultato dei calcoli
 $B = eE a_0 \cdot 3$

Questa matrice non è diagonale

$$\begin{array}{l} 3eE a_0 \text{ --- } \\ 2 \text{ --- } -3eE a_0 \text{ --- } \\ 1 \text{ --- } \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} (| 200 \rangle + | 210 \rangle) \\ | 211 \rangle, | 21-1 \rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (| 200 \rangle - | 210 \rangle) \end{array}$$

Per diagonalizzare il blocco si può usare la base $| 200 \rangle \pm | 210 \rangle$!
Questi 2 stati, sotto inversione spaziale si scambiano tra di loro. Non c'è ragione di aspettarsi che gli autostati veri siano autovettori di L^2 .

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} | 300 \rangle & | 310 \rangle & | 320 \rangle & | 311 \rangle & | 321 \rangle \\ \hline \langle 300 | & 0 & A & 0 & \\ \langle 310 | & A & 0 & B & 0 \\ \langle 320 | & 0 & B & 0 & \\ \hline \langle 311 | & & & 0 & C_+ \\ \langle 321 | & & & C_+ & 0 \end{array}$$

Gli unici blocchi da sono $\neq 0$ sono quelli a cavallo della diagonale.

$$\begin{array}{c}
 |31-1\rangle |32-1\rangle |322\rangle |32-2\rangle \\
 \langle 31-1| \quad 0 \quad C_- \quad 0 \quad 0 \\
 \langle 32-1| \quad C_+ \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 \hline
 \langle 322| \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 \langle 32-2| \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

la matrice 3×3 è venuta diagonale e blocco
 del livello $m=3$

$n=3$ $|322\rangle |32-2\rangle$ questi sono gli stati imperturbati

Supponiamo $C_+ = |C| e^{i\phi}$ [l'energia non dipende dai fattori di fase]

$|31-1\rangle \rightarrow e^{-i\phi} |31-1\rangle$

$|321\rangle \rightarrow e^{-i\phi} |321\rangle$

$e^{-i\phi} \langle 321| \langle 311| \rangle = e^{-i\phi} |C| e^{i\phi}$

Affermiamo poi che C_+ e C_- sono "parenti".

$C_+ = \langle 311| \langle 321|$

$C_- = \langle 31-1| \langle 32-1|$

Se si prende: $I_x L_z I_x = -L_z$

ovvero, L_z ed I_x anticommutano: $I_x L_z = -L_z I_x$

$L_z I_x |u_z\rangle = -I_x L_z |u_z\rangle = -m_z I_x |u_z\rangle$

$I_x |u_z\rangle$ è ^{ancora} autovettore di L_z , ma con autovale opposto

$C_+ = \langle 311| I_x^2 \langle 321| = \langle 31-1| I_x \langle 32-1|$

$I_x |u_z\rangle$ di $|u_z\rangle$ e la costante di proporzionalità è proprio un fattore di fase. ($u_m = !$)

$C_- = |C| (-1)$
 $C_+ = |C|$

Gli autovalori delle matrici 2×2 sono $\pm C$ e gli autovettori corrispondenti sono:

$|321\rangle - |311\rangle; |32-1\rangle - |31-1\rangle$
 $|321\rangle + |311\rangle; |32-1\rangle + |31-1\rangle$

Facendo una combinazione di $|322\rangle$ e $|32-2\rangle$ ^{vettori trovati} non sono più auto
 vettori di L_z _{quella data dagli autostati con $m=0$}

Si devono ora trovare gli autovalori della matrice 3×3 , ma questa ha 2 righe proporzionali e il determinante allora è nullo. Quindi uno degli autovalori è 0.

$\begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A & 0 & B \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$Ay = 0$
 $Ax + Bz = 0$
 $Bz = 0$
 $A \neq 0 \Rightarrow y = 0$
 Preso $\begin{cases} x = -B \\ z = A \end{cases}$

il nostro vettore è $\begin{pmatrix} -B \\ 0 \\ A \end{pmatrix}$ e si trova che lo stato con

$n=3$ è 3 volte degenerato: $|322\rangle; |32-2\rangle; -B|300\rangle + A|320\rangle$

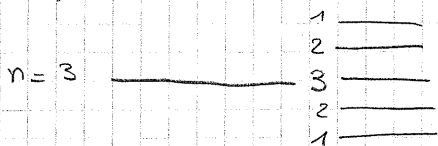
li restano poi gli altri 2 autovalori:

La traccia ed il determinante sono invarianti per cambiamenti di base

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ma $\lambda_1 = -\lambda_2$ perché la traccia era 0 prima e deve essere 0 anche ora.

Quindi non siamo riusciti a spezzettare completamente i livelli

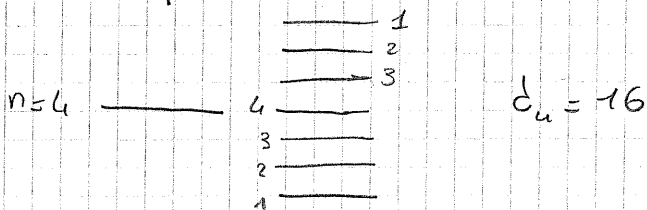


(I numeretti rappresentano il grado di degenerazione dei livelli)

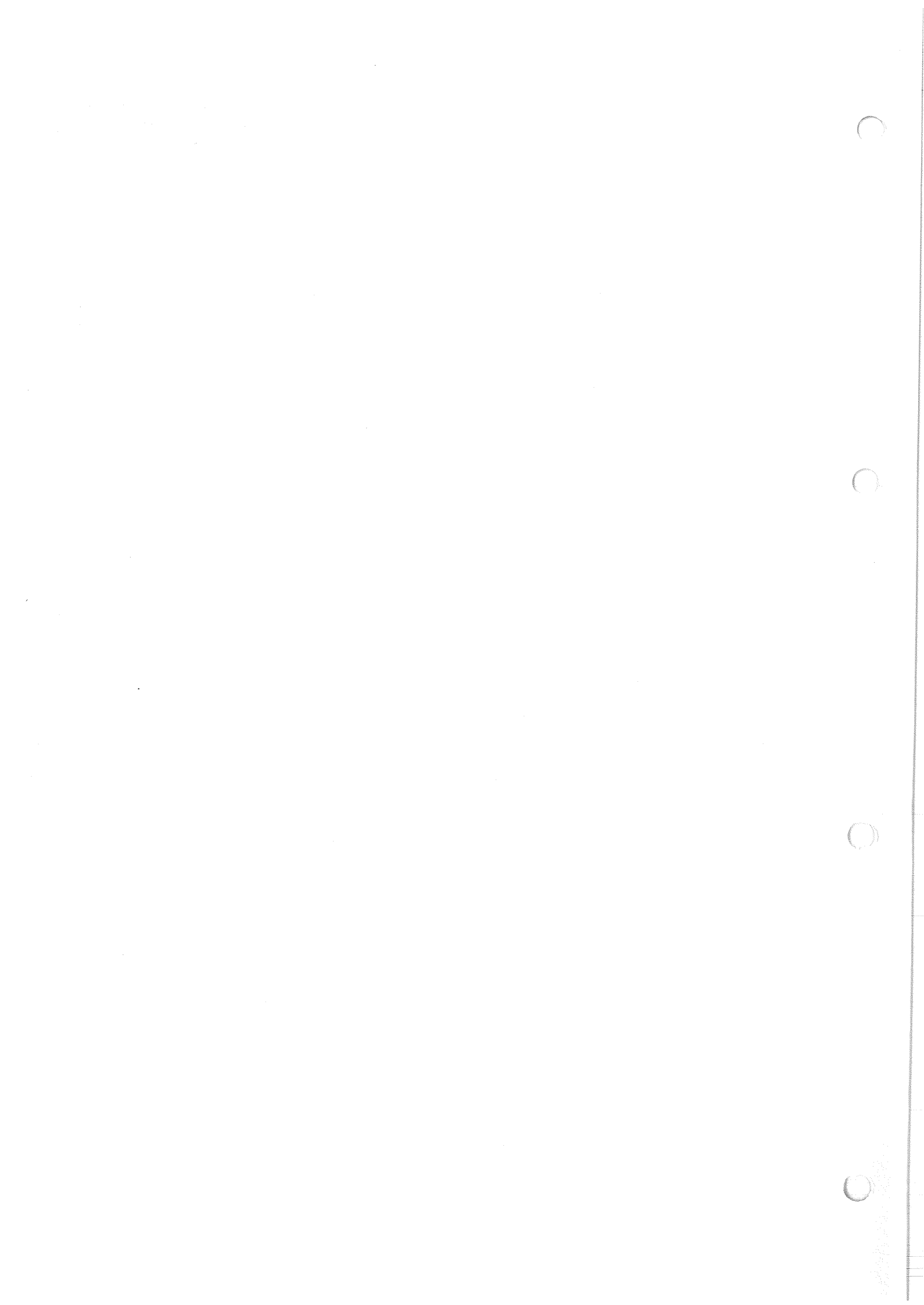
La cosa fondamentale era che H era invariante solo sotto rotazioni attorno all'asse z e non a tutte; ma, nel caso dell'hamiltoniano dell'atomo di idrogeno, commuta con tutti i generatori del gruppo O_4 . (Rotazioni 4D)

Si può connettere la M.Q. con la teoria dei gruppi per scendere a priori i gradi di degenerazione dei livelli.

Per esempio:



L'atomo di idrogeno si può approssimare con un oscillatore armonico quadridimensionale.



13/05/2010

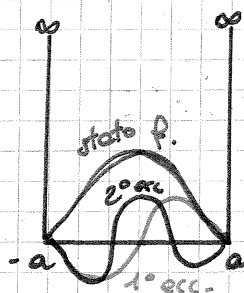
APPELLO SCRITTO ~ 16 GIUGNO

Esercizio 12.1

$[-a, a] \quad V(x) = \lambda \delta(x) \quad \lambda > 0$

$H = H_0 + V$

$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m\lambda_m^2}$



$\frac{\lambda_0}{2} = 2a$

$\lambda_1 = 2a$

$\frac{3}{2} \lambda_2 = 2a$

Lo spettro è discreto \Rightarrow autoval. non degeneri -

Teor. perturbativa al 1° ordine:

$H |0\rangle |1\rangle |2\rangle$

$\langle 0| E_0 + A_0 \quad 0 \quad 0$

$\langle 1| 0 \quad E_1 + A_1 \quad 0$

$\langle 2| 0 \quad 0 \quad E_2 + A_2$

Spettro non degeneri \Rightarrow la matrice è "somma diretta" di matrici $1 \times 1 \Rightarrow$ ci interessano solo gli elem. sulla diagonale -

$A_0 = \Delta E_0^{(1)}$

$\Delta E_0^{(1)} = \int_{-a}^a dx \psi_0^* V \psi_0$ (con ψ_0 normalizzata)

Sarebbe: $\Delta E_0^{(1)} = \frac{\int_{-a}^a dx \psi_0 V \psi_0}{\int_{-a}^a dx \psi_0 \psi_0}$ $f' \neq$ non serve

$\frac{1}{4a} = \frac{1}{\lambda_0} \quad \frac{2\pi}{4a} = \frac{2\pi}{\lambda_0} = k_0 \quad \psi_0 = \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$ non normalizzata

$\int_{-a}^a dx \cos^2\left(\frac{\pi}{2a} x\right) = \frac{2a}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \cos^2 y = \frac{2a}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \frac{1 + \cos 2y}{2} = 2a$

$\Rightarrow \psi_0 = \sqrt{\frac{1}{2a}} \cos\left(\frac{\pi}{2a} x\right)$

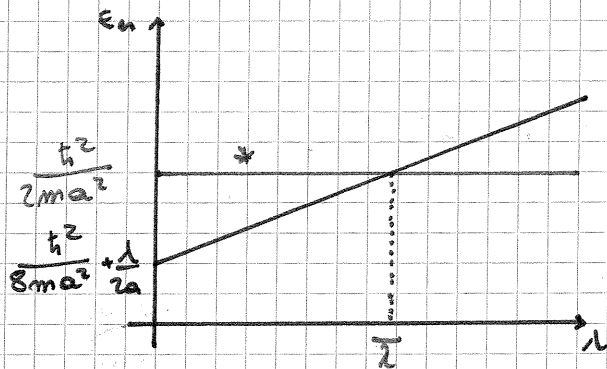
$\Delta E_0^{(1)} = \int_{-a}^a dx \psi_0 V \psi_0 = \frac{\lambda}{2a}$

$\delta(x)$ è una funzione pari e accoppia solo stati con la stessa parità:

$\langle 0 $	$\langle 2 $	$\langle 4 $	$\langle 6 $...	$\langle 1 $	$\langle 3 $	$\langle 5 $...
$\lambda/4a$	0	0						
$\langle 2 $								
$\langle 4 $								
$\langle 6 $								
...								
$\langle 1 $								
$\langle 3 $								
$\langle 5 $								
...								

$\int f(x) \delta(x) \sin x = 0 \quad \forall f(x)$

$$b) \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \lambda_n^2$$



* gli stati dispari sono autostati esatti di H (la correzione data da V è nulla)

è errata l'approssimazione a 0. degli elem. fuori diagonale.

Se fossimo capaci di applicare la teor. pert. a tutti gli ordini, $E_0(\lambda)$ non raggiungerebbe mai E_1 .

Gli autovalori di H_λ saranno sempre $>$ di quelli di H_0 , per che

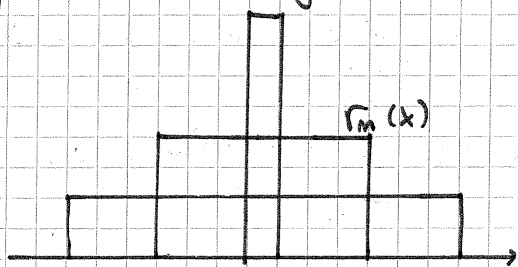
$$\begin{aligned} \langle A | (H_\lambda - H_0) | A \rangle &= \langle A | \lambda \delta(x) | A \rangle = \int_{-a}^a dx \psi^*(x) \lambda \delta(x) \psi(x) = \\ &= \lambda |\psi(0)|^2 > 0 \end{aligned}$$

$$c) \quad H_\lambda = \frac{p^2}{2m} + \lambda \delta(x)$$

Proprietà di δ :

$$\int dx \cdot 1 \cdot \delta(x) = \int dx \delta(x) = 1(0) = 1$$

$$\int r_n = 1$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) r_n(x) dx \stackrel{!}{=} f(0) = \int dx f(x) \delta(x)$$

$$r_n(x) \longrightarrow \delta(x)$$

è convergenza debole, non ha senso se non si integra prima (dopo aver moltiplicato per una funzione di prova $f(x)$).

Se $\delta(x)$ è ben definita solo su funzioni che in $x=0$ sono continue e limitate.

Gli autovettori di H_λ non saranno sempre C^∞ .

$$H_\lambda \psi_n(x) = E_n \psi_n(x) \quad \psi_n \in C$$

inoltre possiamo dire $\psi_n \in C^\infty$, o no?

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_n''(x) + \lambda \delta(x) \psi_n(x) = E_n \psi_n(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_n''(x) = (E_n - \lambda \delta(x)) \psi_n(x)$$

Integrando: (può cercare l'eventuale discontinuità in 0)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} (\psi'(\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon)) \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\lambda \psi_n(0) + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} E_n \psi_n(x) dx \right\} = -\lambda \psi_n(0)$$

Per $\psi_n(0) \neq 0$ si ha discontinuità nell'origine -

Tutti gli stati disponibili vanno bene e sono ∞ .

$$\psi_n'(0^+) - \psi_n'(0^-) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} \psi_n(0) \quad \text{Gli stati: pari?}$$

Dividiamo l'asse x in due zone, a destra (D) e a sinistra (S) della δ . Per una particella non vincolata:

$$\begin{cases} S \\ D \end{cases} \left\{ \psi_n'' = -\frac{2mE_n}{\hbar^2} \psi_n(x) \right.$$

Se la δ fosse attrattiva, ogni buca rettangolare che la approssima avrebbe almeno 1 stato legato

Si ha:



$$\psi_n = A e^{k_n x} \quad (S)$$

$$\psi_n = D e^{-k_n x} \quad (D)$$

$$D = A$$

Quanto vale la discontinuità di ψ_n' in 0 a seconda di A ?

$$-k_n A - k_n A = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} A \quad k_n = -\frac{\lambda m}{\hbar^2}$$

ma se la δ è attrattiva $\lambda < 0 \Rightarrow k_n = \frac{m|\lambda|}{\hbar^2}$

Per una δ repulsiva non è detta l'esistenza di uno stato legato -

Generalizzandolo: $\psi_n'(a^+) - \psi_n'(a^-) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} \psi_n(a)$ è vera IN OGNI PUNTO a in cui si abbia un potenziale $\lambda \delta(a)$.

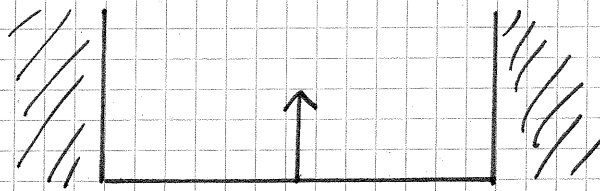
Torniamo al nostro problema -



$$\psi_n(0^+) = \psi_n(0^-)$$

$$\psi_n'(0^+) - \psi_n'(0^-) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} \psi_n(0)$$

NB: tutti gli stati sono legati, ma le loro energie sono > 0 .
 infatti non siamo in un caso di potenziale a buca
 che $\rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$.



$$S \begin{cases} A \sin kx + B \cos kx \\ D \begin{cases} A \sin kx - B \cos kx \end{cases} \end{cases}$$

sol. dispari

sol. pari \mathbb{Z}

$$S \begin{cases} A \sin kx + B \cos kx \\ D \begin{cases} -A \sin kx + B \cos kx \end{cases} \end{cases}$$

Consideriamo gli stati dispari. Condizioni di annullamento:

$$A \sin ka = B \cos ka$$

Continuità in 0: $B = 0$

$$\Rightarrow \sin ka = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{a}$$

ma già lo sapevamo. Cosa possiamo dire sugli stati pari?

$$A \sin ka = B \cos ka$$

Se ψ è già continua in 0. Applichiamo la condizione sulle $\psi'(0)$:

$$-kA - kA = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} B$$

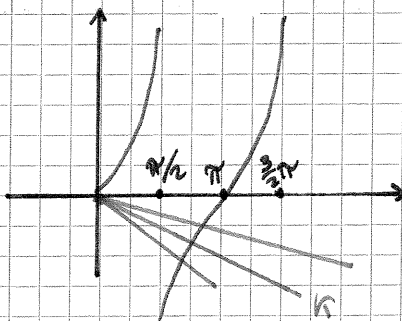
$$-2kA = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} B$$

Dividiamo membro a membro le due condizioni trovate:

$$-\frac{k}{\sin ka} = \frac{k_0}{\cos ka} \Rightarrow k = -(\tan ka) k_0$$

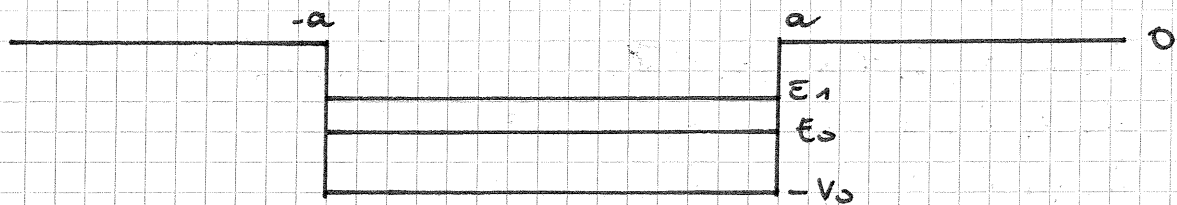
Aumentando λ , k_0 aumenta, k scende.

$$k_0 \rightarrow \infty \Rightarrow k \rightarrow \pi$$



Esercizio 12.3

$$m_1 = m_2 \equiv m$$



$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(x_1) + V(x_2) = H_1 + H_2$$

∃ stati legati?

H_1 e H_2 commutano. Gli autostati di H saranno del tipo $|E^1\rangle_1 |E^0\rangle_2$ (prodotto di autofunzioni delle 2 particelle).

Lo stato fondamentale:

$|E^0\rangle_1 |E^0\rangle_2$ (due particelle allo stato φ .)

Stati eccitati:

$|E^1\rangle_1 |E^0\rangle_2$ $|E^0\rangle_1 |E^1\rangle_2$ degenerazione di scambio = 2
 $|E^1\rangle_1 |E^1\rangle_1$

Questi stati sono tutti normalizzabili (esiste un polo al discreto) - lo spettro continuo non è normalizzabile ad 1 (lo è a δ) - $\langle k' | k'' \rangle = \delta(k' - k'')$

Se anche una sola particella è nel continuo, lo stato "totale" è nel continuo.

b) $\pi x_1 \pi^{-1} = x_2$ Operatore di scambio $\pi^2 = \mathbb{1}$
 $\pi p_1 \pi^{-1} = p_2$

$$\pi (H_1 + H_2) \pi^{-1} = H_1 + H_2 \Rightarrow [\pi, H] = 0$$

⇒ ∃ autovettori simultanei di H e π .

$$\pi |E^0\rangle_1 |E^0\rangle_2 = |E^0\rangle_1 |E^0\rangle_2$$

⇒ $|E^0\rangle_1 |E^0\rangle_2$ è un autovettore pari dell'operatore di scambio (i cui autovalori sono ± 1).

Quelli del 1° eccitato non ne sono autovettori (ed infatti erano degeneri per H), si scambiano tra di loro.

Grazie al teorema di degenerazione possiamo aspettarci che H fosse degenere: ∃ due operatori che commutano con H ma non tra di loro.

$$[I, H] = 0 \quad [\pi, H] = 0$$

$$[\pi, I] = ?$$

$$I = I_1 I_2 = (I_1 \otimes I_2)(I_1 \otimes I_2) \quad [I_1, I_2] = 0$$

$$I_1 x_1 I_1 = -x_1 \quad I_1 x_2 I_1 = x_2$$

$$I_1 p_1 I_1 = -p_1 \quad I_1 p_2 I_1 = p_2$$

Porto π ed I commutano:

$$\pi I_1 I_2 \pi^{-1} = \pi I_1 \pi^{-1} \pi I_2 \pi^{-1} = I_2 I_1 = I_1 I_2$$

Invece:

$$\pi I_1 = I_2 \pi \quad (\pi I_1 \pi^{-1} = I_2)$$

$$[I_1, H] = 0 \quad [\pi, H] = 0 \quad [\pi, I_1] \neq 0 \Rightarrow H \text{ degenera}$$

Per i livelli con degenerazione di scambio:

$$\pi |A\rangle = |B\rangle \quad \pi |B\rangle = |A\rangle$$

\Rightarrow gli autovettori di π sono $\frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle \pm |B\rangle)$, e sono anche autovettori di H .

$$d) V'(x_1, x_2) = \lambda \delta(x_1 - x_2), \quad \lambda > 0$$

L' H non è piú separabile.

Commuta ancora con π , ma non con I_1 .

Si trova che questa H non è degenera.

Applicando la teoria perturbativa, la degenerazione è rimossa già dal 1° ordine?

Questo stesso meccanismo (Principio di Pauli) si applica all' He .

Alcuni degli autostati di H non \exists perché non Pauli-ammissibili.

19/05/2010

$$H = H_1 + H_2 + \lambda \delta(x_1 - x_2) \quad \lambda > 0$$

$\lambda \delta(x_1 - x_2)$ parte repulsiva.

È una FORTE APPROSSIMAZIONE di due particelle con stessa carica.

Se trascuriamo $\lambda \delta(x_1 - x_2)$, le autof. di H imperturbata sono il prodotto delle autof. di singolo H_i .

$$\begin{aligned} & |E_0\rangle_1 |E_0\rangle_2 \\ & (|E_0\rangle_1 |E_1\rangle_2 \pm |E_1\rangle_1 |E_0\rangle_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & |E_1\rangle_1 |E_1\rangle_2 \end{aligned}$$

Oltre a questi livelli ci sono solo quelli del continuo.

Avevamo visto che:

$$\Pi H \Pi = H$$

$$\Pi |A\rangle_1 |B\rangle_2 = |B\rangle_1 |A\rangle_2$$

$$I_1 q_1 I_1 = -q_1 \quad I_1 O_2 I_1 = O_2$$

$$I_1 p_1 I_1 = -p_1$$

$$[\Pi, H] = 0 \quad [I, H] = 0 \quad [\Pi, I] \neq 0 \Rightarrow H \text{ è degenere.}$$

Traiamo perturbativamente l'effetto di $H' = \lambda \delta(x_1 - x_2)$ sugli autostati di $H_0 = H_1 + H_2$.

Quasi tutto lo spettro di H_0 è 2 volte degenere. H' rimuove la degenerazione?

Consideriamo lo stato $\frac{1}{\sqrt{2}} (|E_0\rangle_1 |E_1\rangle_2 \pm |E_0\rangle_2 |E_1\rangle_1)$ e restringiamo H a questo autospazio di energia $E_0 + E_1$.
Che base scelgo?

Ad esempio, $\{|E_0 E_1\rangle; |E_1 E_0\rangle\}$ non è una scelta conveniente. Chiamamolo invece $|+\rangle$ e $|-\rangle$ gli autostati di Π facciamo una scelta migliore:

H'	$ +\rangle$	$ -\rangle$
$\langle + $	S	0
$\langle - $	0	A

H' è pari, $|+\rangle$ e $|-\rangle$ hanno parità opposta \Rightarrow la matrice di H' in questa base è diagonale.

Se gli elementi di matrice S ed A sono diversi: avremo rimosso la degenerazione. Vediamo:

$$S = \langle + | H' | + \rangle = \lambda \int dx_1 dx_2 \frac{1}{2} (\psi_0(x_1) \psi_2(x_2) + \psi_1(x_1) \psi_0(x_2))^2 \delta(x_1 - x_2)$$

$$A = \langle - | H' | - \rangle = \lambda \int dx_1 dx_2 \frac{1}{2} (\psi_0(x_1) \psi_1(x_2) - \psi_1(x_1) \psi_0(x_2))^2 \delta(x_1 - x_2)$$

Voglio vedere se sono diversi, quindi:

$$S-A = \lambda \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 \psi_0(x_1) \psi_1(x_2) \psi_1(x_1) \psi_0(x_2) \delta(x_1 - x_2) =$$

$$= 2\lambda \int dx_1 (\psi_0(x_1) \psi_1(x_1))^2 \quad \lambda > 0$$

che è una quantità positiva! Siccome gli stati $|1\rangle$ e $|-1\rangle$ sono non degeneri abbiamo preso autof. $\in \mathbb{R}$, ma prendendole complesse veniva semplicemente un modulo quadro.

$$S \neq A$$

La degenerazione è sparita.

Un caso analogo è l'atomo di He:

$$H = \left(\frac{\vec{p}_1^2}{2m} - \frac{ze^2}{r_1} \right) + \left(\frac{\vec{p}_2^2}{2m} - \frac{ze^2}{r_2} \right) + \frac{e^2}{|\vec{r}_{1,2}|}$$

Se per H_0 abbiamo autovettori del tipo $|m_1 l_1 m_1\rangle$ e $|m_2 l_2 m_2\rangle$, non appena abbiamo anche 1 solo dei num. quantici diversi possiamo costruire stati simmetrici o antisimmetrici e degeneri per scambio.

La trattazione del caso 3D è analoga:

$$S-A = \lambda \frac{1}{2} \int d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \psi_0^*(\vec{x}_1) \psi_1^*(\vec{x}_2) \psi_1(\vec{x}_1) \psi_0(\vec{x}_2) \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

Vedremo che l'energia dello stato antisimmetrico è più alta bene di quello dello stato simmetrico.

$$\rho(\vec{x}_2) \equiv \psi_0(\vec{x}_2) \psi_1^*(\vec{x}_2) \quad \rho^*(\vec{x}_1) \equiv (\psi_0(\vec{x}_1) \psi_1^*(\vec{x}_1))^*$$

$$S-A = 2\lambda \int d\vec{x}_1 \rho(\vec{x}_1) \underbrace{\int d\vec{x}_2 \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \rho(\vec{x}_2)}_{\rho(\vec{x}_1)}$$

È un integrale di convoluzione e possiamo usare l'id. di Parseval:

$$2\lambda \int d\vec{k}_1 \hat{\rho}^*(\vec{k}_1) \frac{4\pi}{k_1^2} \rho(\vec{k}_1) > 0$$

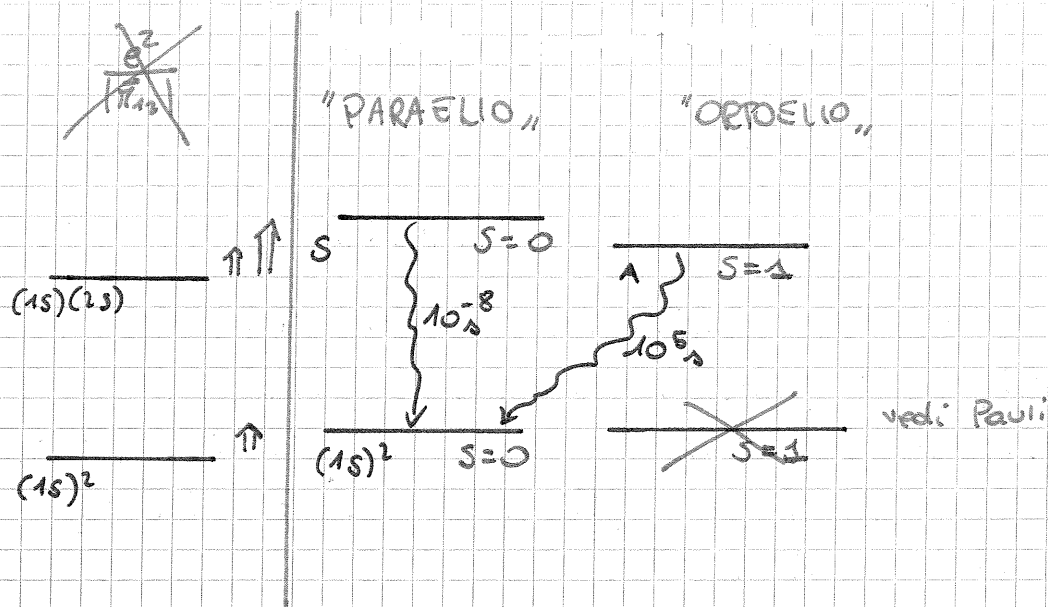
Si può dire che $S-A > 0$ anche perché rappresenta l'interazione elettrostatica di una distribuzione di carica con se stessa.

$H_1 + H_2 + \lambda \delta(x_1 - x_2) \equiv$ Approssimazione di e^- indipendenti.

$$(1s)^2 |100\rangle_1 |100\rangle_2$$

$$(1s)(2s) |100\rangle_1 |200\rangle_2 \pm |200\rangle_1 |100\rangle_2$$

$$(1s)(2p) \dots$$

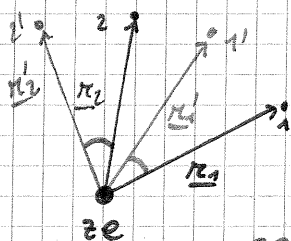


Consideriamo lo stato fondamentale. Se consideriamo anche lo spin, questo diventa 4 volte degenere: abbiamo 4 possibilità per sistemare i due elettroni ($\uparrow\uparrow$, $\uparrow\downarrow$, $\downarrow\downarrow$ e $\downarrow\uparrow$).

NB.: Perché lo stato S ha energia più alta dello stato A? Nello stato A la sovrapposizione tra le funz. d'onda manda la f. d'onda totale a 0 ($\psi_0\psi_1 - \psi_1\psi_0$ "K" $\psi_0\psi_1 + \psi_1\psi_0$), per cui il relativo integrale è più piccolo di quello per S.

Torniamo agli spin -

Spin totale $\vec{S} \equiv \vec{S}_1 + \vec{S}_2$



In approssimazione di e⁻ indip. L_1 è una costante del moto.

Proviamo i due elettroni:

se stiamo considerando anche il termine di interazione, la distanza tra i due e⁻ può variare e dunque l'energia cambia. Separatamente, L_1 ed L_2 non sono + costanti del moto. Ma se l'angolo sia α_1 che α_2 di uno stesso angolo non cambia nulla: il momento angolare totale è costante del moto. Il discorso vale anche per \vec{S} .

$|\pm\rangle_1 |\pm\rangle_2$

$S_z |++\rangle = (S_{1z} + S_{2z}) |++\rangle = -\frac{1}{2} |++\rangle - \frac{1}{2} |++\rangle = -1 |++\rangle$

$S^- |++\rangle = (S_1^- + S_2^-) |++\rangle$ (op. di discesa) = $|+-\rangle + |-+\rangle$

$$S^+(|+-\rangle - |-+\rangle) = 0 + 0 = 0$$

$|+-\rangle, |-+\rangle$, ed ogni loro comb. lineare hanno $S_z^{\text{Tot}} = 0$.

$$\begin{cases} |++\rangle \\ |--\rangle \\ |+-\rangle + |-+\rangle \end{cases} \quad S^2 = 1 \quad (\text{simmm.}) \quad \text{TRIPLETTO}$$

$$|+-\rangle - |-+\rangle \quad S^2 = 0 \quad (\text{anti-simmm.}) \quad \text{SINGOLETTO}$$

Principio di Pauli per le particelle con spin semi-intero, in natura, esistono solo stati globalmente antisimmetrici.

Operatore di Pauli = $\Pi_o \cdot \Pi_s$ $\Pi_o \Pi_s = -1$ (Pr. di Pauli)

(scambia sia orbita che spin)

Ad esempio, lo stato $(1s)^2$ non può che avere $S=0$

(orbita simmetrica e spin antisimmetrico).

Perché lo stato di ortoelio $|1s2s - 2s1s\rangle$ non transisce allo stato di paraelio $|1s)^2\rangle$ in un tempo ragionevole?

Questo accadrebbe se volesse

$$\langle 1s2s - 2s1s | e^{i(\vec{\pi}_1 + \vec{\pi}_2)} | (1s)^2 \rangle = 0$$

$S=1$ ↑ $S=0$
dipolo

Operatori che agiscono sulle coordinate spaziali "difficilmente" cambiano lo spin di una particella, quindi quell'elemento e tutti gli elem. di operatori multipolo sono $\neq 0$.

Fermioni \leftrightarrow autoval. di $\Pi_o \Pi_s = -1$
Bosoni \leftrightarrow autoval. di $\Pi_o \Pi_s = 1$

L'identicità delle particelle ha l'effetto di rendere simmetrico sotto scambio di particelle qualsiasi hamiltoniana di interazione tra di esse.

Se abbiamo 2 fermioni, il pr. di Pauli esclude l'esistenza degli stati $|0\rangle|1\rangle$ e $|1\rangle|0\rangle$, mentre ammette, a seconda dello spin, gli stat.

$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|1\rangle \pm |1\rangle|0\rangle) \equiv |\pm\rangle$. Prendiamo una qualsiasi osservabile O : (per quanto detto, è simmetrica)

$$\langle \pm | \hat{O} | \pm \rangle = \langle 0 | \langle 1 | \hat{O} | 0 \rangle_1 | 1 \rangle_2 \pm \langle 0 | \langle 1 | \hat{O} | 0 \rangle_2 | 1 \rangle_1 \longrightarrow$$

$$\int d\vec{x}_1 \int d\vec{x}_2 \psi_0(\vec{x}_1) \psi_1(\vec{x}_2) O(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \psi_0(\vec{x}_2) \psi_1(\vec{x}_1) \quad \text{INTEGRALE DI SCAMBIO}$$

Ma questo è $\neq 0$ solo per particelle le cui funzioni d'onda

sono apprezzabilmente sovrapposte - Soppiano che le particelle devono essere ad una distanza dell'ordine di a_0 , perché oltre questo distanza le loro f - vanno a 0 esponenzialmente - NB.: il principio di Pauli non si applica agli stati, ma ai vettori che li rappresentano -

In meccanica quantistica relativistica il principio di Pauli non ha da essere postulato, ma si ricava dal fatto che le particelle libere hanno energia positiva -

Transizioni da ground ad excited, anche se raramente, avvengono: è l'effetto dell'interazione spin-orbita, che mescola stati con spin e momenti angolari diversi. ($\underline{L} \cdot \underline{S}$ non commuta né con \underline{L} né con \underline{S}).

VEDI es 12.4

12.6

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 + g q^4 \equiv H_0 + \delta \frac{m \omega^3}{\hbar} q^4 \equiv H_0 + H'$$

$$[g] = ? \quad [\delta] = ? \quad [g] = \frac{[E]}{[q^4]}$$

Una volta avevamo definito $\frac{1}{a^4} \equiv \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2}$

$$g \equiv \delta \frac{\hbar \omega m^2 \omega^2}{\hbar^2} = \delta \frac{m \omega^3}{\hbar} \Rightarrow \delta \text{ adimensionale}$$

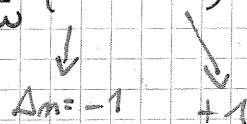
$\langle m'' | q^4 | m' \rangle \neq 0 \Rightarrow$ regole di selezione?

- stessa parità

possiamo esprimere q come: $q = \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2m\omega}} (a \pm a^\dagger)$

$$\langle 1 | a + a^\dagger | 0 \rangle = 0 + x$$

$$\langle 1 | a + a^\dagger | 3 \rangle = 0 + 0$$



$$q^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} [\underbrace{a^2 + a^{\dagger 2}}_{\Delta m = \pm 2} + \underbrace{a a^\dagger + a^\dagger a}_{\Delta m = 0}]$$

$\Rightarrow q^2$ ha regola di selezione $\Delta m = 0, \pm 2$

q " " " " $\Delta m = \pm 1$

q^4 " " " " $\Delta m = \pm 4, \pm 2, 0$

Per le potenze dispari si finisce ad 1, per quelle pari a 0

Calcolare correzioni al 1° ordine allo stato ψ .

$$\langle 0 | \delta \frac{m^2 \omega^3}{\hbar} q^4 | 0 \rangle = \delta \frac{m^2 \omega^3}{\hbar} \langle 0 | q^4 | 0 \rangle = \dots \langle 0 | q^2 q^2 | 0 \rangle =$$

$$= |q^2|_{05}^2$$

x^2 - una gaussiana non può venire 0.

$$\Delta E_0^{(1)} = \delta \frac{m^2 \omega^3}{\hbar} \frac{\hbar^2}{9 m^2 \omega^2} \langle 0 | (a \pm a^\dagger)^4 | 0 \rangle = \frac{\delta \hbar \omega}{9} \langle 0 | (a \pm a^\dagger)^4 | 0 \rangle$$

$$a|0\rangle = 0 \quad \langle 0|a^\dagger = 0$$

$$\Delta E_0^{(1)} = (\langle 0 | a a^\dagger a a^\dagger | 0 \rangle + \langle 0 | a a^\dagger a^\dagger a | 0 \rangle) \frac{1}{4} \hbar \omega \delta$$

Si può scrivere:

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

$$\Delta E_0^{(1)} = (\langle 0 | [a, a^\dagger] | 0 \rangle + \langle 0 | a a^\dagger a^\dagger a | 0 \rangle) \frac{\delta}{4} \hbar \omega =$$

$$= \frac{\delta}{4} \hbar \omega (1 + 2 \langle 2 | 2 \rangle) = \frac{3}{4} \delta \hbar \omega$$

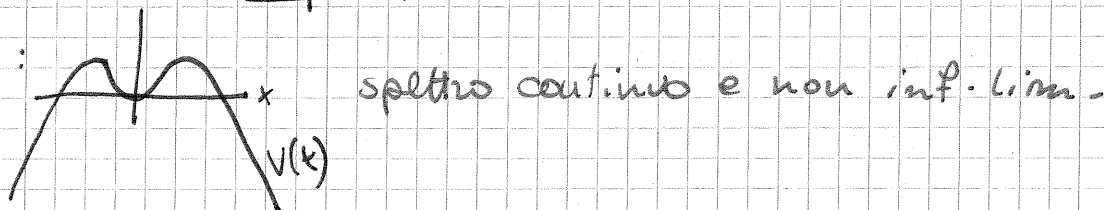
Si ricava al 2° ordine:

$$E_0(\delta) = \hbar \omega \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \delta - \frac{21}{8} \delta^2 + \dots \right)$$

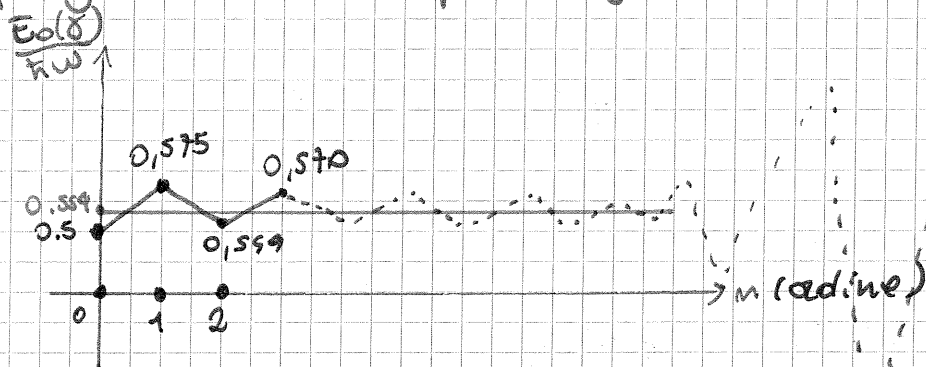
Per $g > 0$:



Per $g < 0$:



\Rightarrow per $g < 0$ il risultato perde significato.



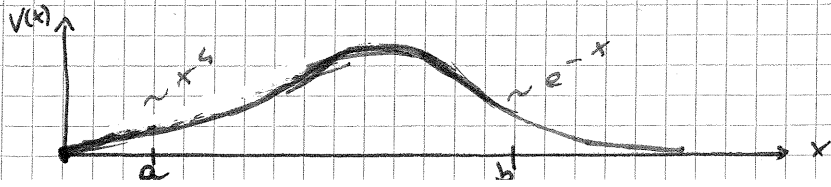
Questa serie potrebbe non convergere.

12.7

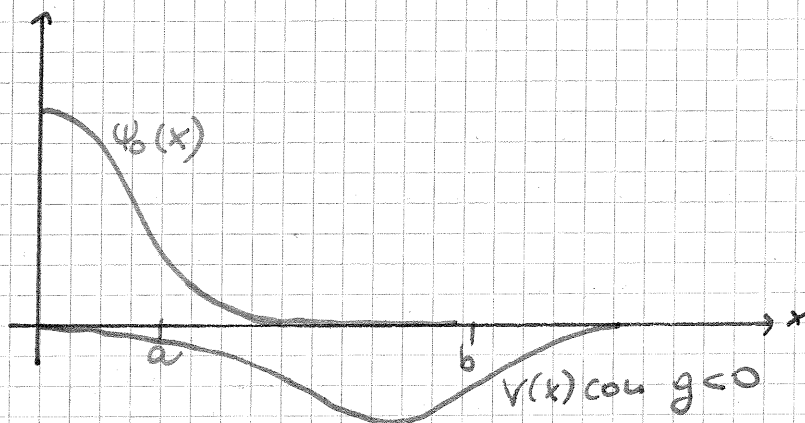
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + g x^4 e^{-\frac{x^2}{b^2}} \equiv V(x)$$

$$a \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$b \gg a$$



La $\psi_0(q)$ va a 0 esponenzialmente (gaussiana) per
 lunghezze $\approx a$: che $V(x)$ sia positivo o negativo cambia
 poco, purché l'andamento di ∞ lascia comunque
 discreto lo spettro -



Per $x \approx a$, l'esponenziale $\rightarrow e^0 = 1$, e la
 perturbazione è di fatto $\approx q^5$.

$$\Delta E_0^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi_0(x)|^2 V(x) = \hbar \omega \frac{3}{4} \gamma \left(1 - o\left(\frac{a}{b}\right)\right) \approx \hbar \omega \frac{3}{4} \gamma \left(1 - c \frac{a^2}{b^2} + \dots\right)$$

Calcolare c. $\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$

$$\Rightarrow \int dx e^{-\frac{m\omega}{\hbar} x^2} = \sqrt{\frac{\pi \hbar}{m\omega}}$$

$$\int dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\Delta E_0^{(1)} = \int dx |\psi_0|^2 g x^5 e^{-x^2/b^2} =$$

$$= \int dx \frac{g}{a \sqrt{\pi}} x^5 e^{-\frac{x^2}{L^2}}$$

$$\frac{1}{L^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$= \frac{g}{a} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx x^5 e^{-\frac{x^2}{L^2}}$$

$$= \langle e^{-\frac{x^2}{2L^2}} | g x^5 | e^{-\frac{x^2}{2L^2}} \rangle = g \frac{3}{4} L^5$$

$$\Delta E_0^{(1)} = \frac{gL^5}{a} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \gamma \hbar \omega \frac{L^5}{a^5} \frac{L}{a}$$

$$\left(\frac{L}{a}\right)^5 = \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^{5/2}}$$

$$\Delta E_0^{(1)} \approx \hbar \omega \frac{3}{4} \gamma \left(1 - \frac{5}{2} \frac{a^2}{b^2} + \dots\right)$$

20.05.2010

L'atomo di H ha una grande degenerazione dei livelli.

Quale perturbazione è meglio applicare per rimuoverla?

Che simmetria deve avere?

12.19, $V_0 \approx 10^{-2} eV$ $V_1 = \frac{V_0}{a_0^3} xy = \frac{V_0}{a_0^3} r^2 \sin^2\theta \cos\phi \sin\varphi =$
 $= \frac{V_0}{a_0^3} r^2 \sin^2\theta \frac{1}{2} \sin 2\varphi$

$\Delta m = m' - m'' = ?$ (per avere $\langle m' | V_1 | m'' \rangle$)

La perturbazione è pari \Rightarrow connette stati con la stessa parità.

$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{im\varphi} e^{-im'\varphi} = \langle m | m' \rangle = \delta_{m,m'}$ (ortogonalità di autostati di L_z)

$\langle m' | V_1 | m'' \rangle \propto \int \frac{d\varphi}{2\pi} e^{im'\varphi} e^{-im''\varphi} \sin 2\varphi = \int \frac{d\varphi}{2\pi} e^{im'\varphi} e^{-im''\varphi} (e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}) =$
 $= \int d\varphi e^{i(m'+2)\varphi} e^{-im''\varphi} - \int d\varphi e^{im'\varphi} e^{-i(m''+2)\varphi} \propto \delta_{m'+2, m''} - \delta_{m', m''+2}$

$\Rightarrow \Delta m = \pm 2$ per avere $\langle 1 | \neq 0$

$w \cdot w' = +1$ (stessa parità)

$z_{\pm} = x \pm iy$ $V_1 = \frac{V_0}{a_0^3} \frac{1}{2} (z_+ + z_-) \frac{1}{2i} (z_+ - z_-) = \frac{V_0}{4a_0^3} (z_+^2 - z_-^2)$

metodo analogo.

\Rightarrow Lo stato fondamentale resta imperturbato al 1° ordine.

($\Delta m = 0$) Vediamo il 2° livello energetico.

$|200\rangle |210\rangle |21-1\rangle |211\rangle$

$\langle 1 $	0	0	0
$\langle 1 0$	0	0	0
$\langle 1 0$	0	0	X
$\langle 1 0$	0	X	0

← blocchi della parità

$|210\rangle$ resta imperturbato. $\psi_{10} \approx z \Rightarrow \psi_{210} \approx z f(z)$

Gli elem. di matrice X sono diversi da 0?

$\langle 211 | xy | 21-1 \rangle =$

Per la regola di selezione la parte in φ è sicuramente $\neq 0$. Vediamo quelle in r :

$\int dr r^2 R_{21}^2 r^2$ R_{21} non si annulla mai, questo integrale > 0 .

La parte in θ : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\cos\theta \sin^2\theta \sin^2\theta$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\cos\theta (1 - \cos^2\theta)^2 \quad \cos\theta = x$$

$$2 \int_0^1 dx (1-x^2)^2 = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) 2 \neq 0$$

⇒ questo elemento di matrice è $\neq 0$.

$R_{21} = x e^{-\frac{\pi}{2a_0}} \leftarrow$ non ha nodi perché è lo stato fondamentale dell'eq. di Schrodinger radiale ridotta.

Questa perturbazione non è invariante a rotazioni attorno a \hat{z} .

12.16

• l'atomo è fermo \Rightarrow derivate prime nulle.

$$V(x, y, z) \approx \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{x=y=z=0} x^2 + \dots + \frac{1}{2!} \alpha_{ij} x_i x_j$$

Tensore del 2° ordine

sotto inversione di una sola coordinata il potenziale

non deve cambiare: $V^{(2)}(-x, y, z) \equiv V^{(2)}(x, y, z)$

(il cristallo è rigido).

⇒ I termini misti sono nulli e al 2° ordine lo sv. Wppò è del tipo $ax^2 + by^2 + cz^2$.

Per una cella del tipo
il potenziale al centro
è dispari.



(cristallo ionico),

$$V = \frac{V_0}{a_0^2} (ax^2 + by^2 + cz^2)$$

→ ragioni dimensionali

Tutti i potenziali quadratici possono essere scritti in questa forma.

Ci sono 3 casi:

1. $a = b = c$
2. $a = b \neq c$
3. $a \neq b \neq c \neq a$

Potenziale: $V(0,0,0) \equiv 0$ (campo centrale)

①

⇒ tutte le L_x, L^2 , tutte le I_i ed I sono costanti del moto.
Parlando all'atomo di H: $H = H_0 + V$. Per esso \exists un'altra costante del moto: il vettore di Leutz \vec{k}

La regola di selezione su L_z di un'hamiltoniana che commuta con L_z è: $\Delta m_l = 0$.

27/05/2010

es. 12.17

$$-\frac{e^2}{r} \rightarrow \frac{e^2}{r} + V(r)$$

$V(r)$ di segno costante per $r \leq a \ll a_B$

$$V(r) = 0 \quad r > a$$

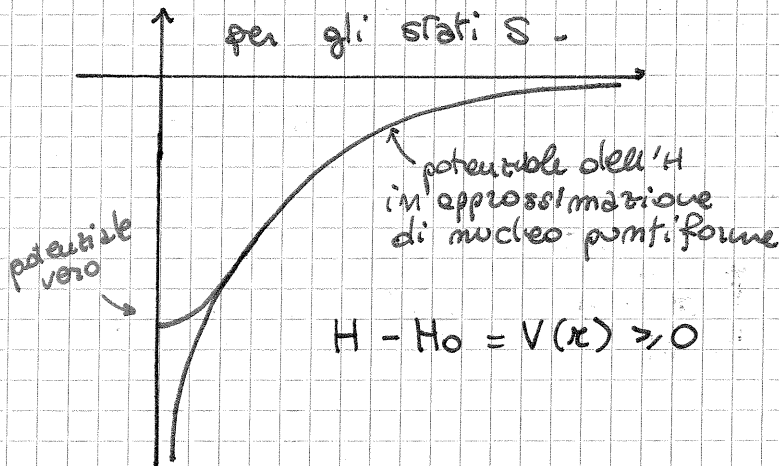
È una perturbazione a supporto compatto che lavora su lunghezze molto + piccole del raggio di Bohr. Ci aspettiamo che i livelli

energetici siano del tipo:

$$E_{m,l}^V = E_m^0 \left(1 + C_m \left(\frac{a}{a_B} \right)^{2(l+1)} + \dots \right)$$

Dipendono anche da l , perché si rimboccano (speriando) la degenerazione ^{accidentale}. Non dipendono da m perché V è radiale, non ha una direzione privilegiata.

Vedremo che la degenerazione verrà rimossa solo per gli stati S .



$$\langle m l_1 m_1 | V | m l_2 m_2 \rangle$$

Regola di selezione: $\Delta m = 0$, infatti: V è invariante per rotazioni e $[L, V] = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$

V commuta anche con $L^2 \Rightarrow \Delta l = 0$

La perturbazione, nella base $|m l m\rangle$, è già diagonale -

$$\langle m l m | V | m l m \rangle = \int d\varphi d\cos\theta dr r^2 R_{m,l} Y_{l,m}^* V(r) R_{m,l} Y_{l,m}$$

Possiamo prendere $\in \mathbb{R}$ le $R_{m,l}$, perché sono costruite a partire da uno spettro non degenere.

Pareutesi

$$L_+ \text{ operatore di salita per } L_z \Leftrightarrow [L_z, L_+] = +L_+$$

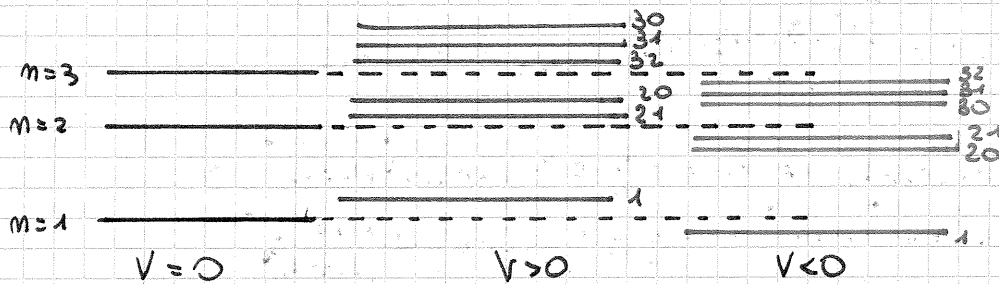
$$L_- \text{ " " discesa " " } \Leftrightarrow [L_z, L_-] = -L_-$$

$$\langle m | \langle m | V | m \rangle = \int x^2 dz R_{me}^2 V(x) \quad \text{valido } \forall \text{ perturbazione radiale}$$

(le ψ_{em} sono normalizzate)

Si vede chiaramente che il $\Delta E_m^{(1)}$ dipende da l !

Sappiamo $V(x) > 0$:

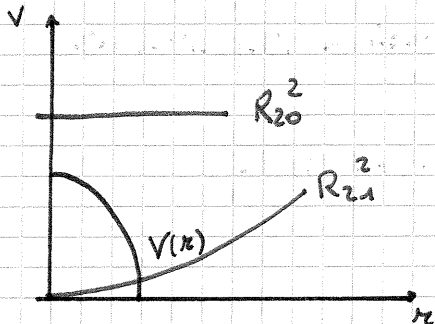


Per vedere come si perturbano i livelli bisogna vedere come sono fatte le R_{me} nella zona perturbata.

Sappiamo che le ψ sono del tipo:

$$r^l R_{me} \frac{P_l(x, y, z)}{r^2}$$

A noi interessano distanze piccole, per le quali $R_{me} \propto r^l$



Più alto è il momento angolare, più piccola è la perturbazione!

b) supponiamo che la carica del protone non sia e ma $e(1+\epsilon)$: il potenziale diventa:

$$-\frac{e^2}{r}(1+\epsilon)$$

Questo è un problema che sappiamo risolvere esattamente:

$$\bar{E}_m = -\frac{me^4}{2\hbar^2 m^2} \rightarrow -\frac{me^4(1+\epsilon)^2}{2\hbar^2 m^2} \approx \bar{E}_m^{(0)} - \frac{me^4 2\epsilon}{2\hbar^2 m^2} = \bar{E}_m^{(0)}(1+2\epsilon)$$

$$\Delta \bar{E}_m^{(1)} = \bar{E}_m^{(0)} 2\epsilon$$

$$V(x) \equiv -\frac{\epsilon e^2}{r}$$

$$\epsilon^2 \langle m | -\frac{e^2}{r} | m \rangle$$

Per il teorema del viriale si ha

$$2\bar{T} = -\bar{V}$$

grado di omogeneità di $\frac{p^2}{2m}$
 grado di omog. di $\frac{1}{r}$

Quindi $\bar{V} = 2E_{me}$

c) $V(r) = \frac{\epsilon \hbar^2}{2m_e r^2}$ Calcolo esattamente i livelli dell'atomo di H con questo potenziale - \bar{E} del tipo $\frac{A}{r^2}$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \frac{\epsilon \hbar^2}{2m r^2}$$

$$u_{me} = r R_{me}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2m r^2} \right] u_{me} = E_m u_{me}$$

(Problema imperturbato)

Applicando la perturbazione:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{\hbar^2 [\ell(\ell+1) + \epsilon]}{2m r^2} \right] u_{me} = E_m u_{me}$$

$$\begin{aligned} \ell(\ell+1) + \epsilon &\equiv \lambda(\lambda+1) \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1+4(\ell^2+\ell+\epsilon)} = \\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1+4\ell+4(\ell^2+\ell\epsilon+\epsilon^2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} (2\ell+1) \sqrt{1+\frac{4\epsilon}{(2\ell+1)^2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} + \frac{(2\ell+1)}{2} \sqrt{1+\frac{4\epsilon}{(2\ell+1)^2}}$$

(Sceita la soluzione per cui $\epsilon=0 \Rightarrow \lambda=\ell$)

Quanto vale λ al 1° ordine in ϵ ?

$$\lambda \approx \ell + \frac{1}{2} \left[\frac{(2\ell+1)2\epsilon}{(2\ell+1)^2} \right] = \ell + \frac{\epsilon}{2\ell+1}$$

Ora bisogna risolvere la precedente equazione imperturbata

scrivendo λ al posto di ℓ

$$\bar{E}_m^{(0)} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{(\bar{\nu} + \ell + 1)^2} \quad m \equiv \bar{\nu} + \ell + 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow \bar{E}_m^{(\epsilon)} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{(\bar{\nu} + \lambda + 1)^2}$$

$$\lambda - \ell \equiv \Delta \quad \Rightarrow \quad \lambda = \ell + \Delta \quad \Rightarrow \quad \bar{E}_m^{(\epsilon)} = -\frac{13,6 \text{ eV}}{(m + \Delta)^2}$$

Al prim'ordine:

$$E_m^{(1)} = \bar{E}_m^{(0)} + \Delta \bar{E}_m^{(1)} = \bar{E}_m^{(0)} \downarrow \dots$$

$$\frac{1}{(m+\Delta)^2} \approx \frac{1}{m^2} + \frac{\partial}{\partial \Delta} \left(\frac{1}{(m+\Delta)^2} \right) \Big|_{\Delta=0} \Delta = \frac{1}{m^2} - \frac{2}{m^3} \Delta = \frac{1}{m^2} - \frac{2}{m^2} \frac{\Delta}{m}$$

$$E_m^{(1)} \approx \bar{E}_m^{(0)} - \bar{E}_m^{(0)} \frac{2\Delta}{m}$$

Al prim'ordine in ϵ :

$$E_m^{(\epsilon)} = \bar{E}_m^{(0)} \left(1 - \frac{2}{m} \frac{\epsilon}{2\ell+1} \right)$$

$$\Delta E_{me}^{(1)} = \int dr r^2 R_{me}^2(r) \frac{\epsilon \hbar^2}{2mr^2} \quad (\text{teoria perturbativa})$$

$$\frac{\epsilon \hbar^2}{2m} \langle m \ell m | \frac{1}{r^2} | m \ell m \rangle$$

$$E_m^{(0)} \left(1 - \frac{2}{m} \frac{\epsilon}{2e+1} \right)$$

Risultato:

$$\langle m \ell m | 1/r^2 | m \ell m \rangle = \frac{1}{a_0^2} \frac{1}{m^3 (l+1/2)}$$

12-18

C^{VI} (carbonio ionizzato 5 volte)

nucleo = sfera unif. carica $R \approx 2,5 \cdot 10^{-13}$ cm

Potenziale di una sfera uniformemente carica

$$V(r) = \begin{cases} r > R \Rightarrow -\frac{ze^2}{r} \\ r < R \Rightarrow \text{teorema di Gauss:} \end{cases}$$



$$Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 = ze$$

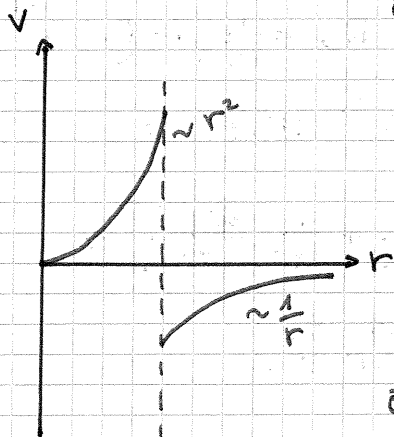
$$\Rightarrow \rho = \frac{3ze}{4\pi R^3}$$

$$q = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{3ze}{4\pi R^3} = ze \left(\frac{r}{R} \right)^3 =$$

$$= \phi(E) = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{ze}{4\pi} \frac{\pi}{R^3}$$

la forza è elastica ed attrattiva ($F = qE$), il potenziale è dunque positivo:

$$r < R \Rightarrow V(r) = \frac{ze^2}{8\pi} \frac{r^2}{R^3}$$



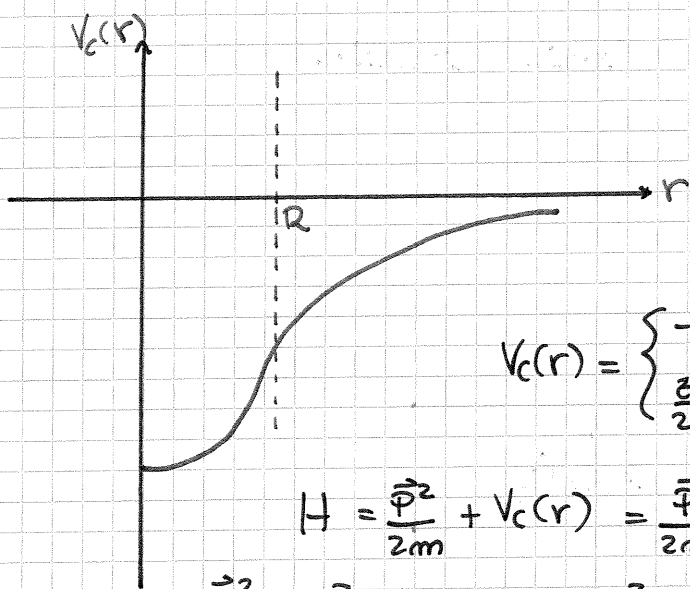
Per eliminare la discontinuità imponiamo $\neq 0$ la costante additiva del pot.

$$V(r) |_{r=R} = \frac{ze^2}{8\pi} \frac{r^2}{R^3} + C$$

Eliminiamo la discontinuità:

NB.: il fattore 4π non ci deve perché abbiamo usato il teor. di Gauss normalizzato:

$$C + \frac{ze^2}{2} \frac{1}{R} = -\frac{ze^2}{R} \Rightarrow C = -\frac{3}{2} \frac{ze^2}{R}$$



$$V_c(r) = \begin{cases} -\frac{ze^2}{r} & r > R \\ \frac{ze^2}{2R} \left(\frac{r^2}{R^2} - 3 \right) & r < R \end{cases}$$

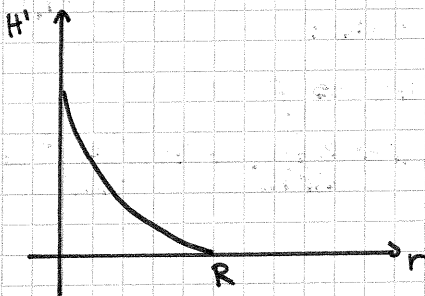
$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V_c(r) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{ze^2}{r} + \frac{ze^2}{r} + V_c(r)$$

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{ze^2}{r} \equiv H_0 \quad \frac{ze^2}{r} + V_c(r) \equiv H'$$

Questa è una perturbazione a corto raggio. Vediamo $H - H_0$:

Per $r > R$ è nulla. Per $r < R$:

$H - H_0 = \frac{ze^2}{r} + \frac{ze^2}{2R^3} r^3 - \frac{3}{2} \frac{ze^2}{R}$ è a segno definito ed è positivo in tutta la zona $r < R$:



$$\Delta E_{me}^{(1)} = \int_0^R dr H'(r) R_{me}^2(r) r^2$$

$$\rho \equiv zr/a_B \quad d\rho = \frac{z}{a_B} dr$$

$$H'(r) = ze^2 \left[\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{1}{2R} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\rho}{2} \right) e^{-\rho/2}$$

$$\Delta E_{me}^{(1)} = \frac{ze^2}{2} \int_0^{zR/a_B} d\rho \rho^2 \left(1 - \frac{\rho}{2} \right)^2 e^{-\rho} H'(\rho) =$$

$$= \frac{ze^2}{2} \int_0^{zR/a_B} d\rho \rho^2 \left(1 - \frac{\rho}{2} \right)^2 e^{-\rho} \left[\frac{z}{\rho a_B} - \frac{3}{2R} + \frac{1}{2R^3} \frac{a_B^2 \rho^2}{z^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{a_B} \right) z \int_0^{\varepsilon} d\rho \rho^2 \left(1 - \frac{\rho}{2} \right)^2 \left[\frac{z}{\rho} - \frac{3}{2} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon^2} \frac{e^2}{\varepsilon^3} \right]$$

$$\varepsilon \equiv R/a_B$$

L'esponenziale ha una lunghezza caratteristica molto più piccola delle nostre scale, quindi nella regione $(0, R)$ che consideriamo lo possiamo considerare praticamente costante $e^{-\rho} \approx 1$.

$$\propto \int dp \left[p - p^2 + \frac{1}{2} p^3 \right] \dots$$

Stiamo cercando le perturbazioni all'ordine + basso, possiamo eliminare i termini a potenze + alte di p .

$$\int dp p^2 \cdot 1 \cdot \left[\frac{z}{p} - \frac{3}{2z} + \frac{p^2}{2z^2 \epsilon^3} \right]$$

Si trova: $\Delta E_{2,0}^{(1)} = \frac{e^2}{a_B} z^4 \frac{z^2}{20} = \frac{e^2}{a_B} z^2 \left(\frac{zR}{a_B} \right)^2 \frac{1}{20}$

$$\Delta E_{2,1}^{(1)} = \frac{e^2}{a_B} z^2 \left(\frac{zR}{a_B} \right)^4 \frac{1}{24} \left(\frac{1}{9} - \frac{3}{2} \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \frac{1}{7} \right) = \frac{e^2}{a_B} z^2 \left(\frac{zR}{a_B} \right)^4 \frac{1}{980}$$

A secondo dello stato che stiamo considerando,

$$\Delta E_{ne}^{(1)} \sim \left(\frac{zR}{a_B} \right)^{2l+2} \quad 27,2 \text{ eV} \cdot z^2$$

12,19 $\text{He}^{++} - \mu^- \quad m_\mu \approx 207 m_e$

$$p^+ - e^- \leftrightarrow \text{lung. caratteristica} = a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$$

$$\text{He}^{++} - \mu^- \leftrightarrow \text{ " " } = ?$$

avant'è grossa l'orbita del mesone attorno al nucleo di He?

$$a_\mu = ?$$

Nell'espressione di a_B andrebbe usata la massa ridotta del sistema:

$$\mu_{pe} = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e} = m_e \left(\frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_p}} \right) \approx m_e \left(1 - \frac{m_e}{m_p} \right)$$

Per l'elio mesico invece:

$$\mu_{\text{He}\mu} \approx m_\mu \left(1 - \frac{m_\mu}{4 m_p} \right) = 207 m_e \left(1 - \frac{207 m_e}{4 m_p} \right)$$

la correzione è circa del 2,5% rispetto ad m_μ .

Trascuriamo quindi le correzioni di massa:

$$a_\mu^z = \frac{\hbar^2}{m_\mu z e^2} \quad z=2 \Rightarrow a_\mu^z = \frac{1}{2 \cdot 207} a_B \approx \frac{a_B}{914}$$

$$(a) \psi_{1,0,0}(r) = R_{10} Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot 2 e^{-r/a_\mu} = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} e^{-zr/a_\mu}$$

$$(b) r_0 \equiv 10^{-2} a_B \quad P(r \leq r_0) = \int_0^{r_0} dr r^2 R_{10}^2 \int d\Omega |Y_{00}|^2 = \int_0^{r_0} dr r^2 R_{10}^2 \approx 1 \quad (0,986)$$

(vedi integrale sulle soluzioni)

Quanto varrebbe, se il sistema fosse legato anche ad un e^- ,
l'energia di ionizzazione dell'elettrone?

TEOREMA DEL VIRIALE

Dato un sistema con energia $\frac{\vec{p}^2}{2M} + V$, con $\frac{\vec{p}^2}{2M} = T$, si ha:

$$2\bar{T} = k\bar{V}$$

dove k è il grado di omogeneità di V .

TEOREMA DI VON NEUMANN

Se una trasformazione conserva l'autoaggiunzione e le regole di commutazione canoniche, \exists un operatore U unitario che la implementa.

Regole di commutazione canoniche

$$[q_i, q_j] = 0 \quad [p_i, p_j] = 0 \quad [q_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}$$

TEOREMA DI STONE

Se una trasformazione è implementata da un gruppo di operatori unitari U , tali che

$$U(\alpha)U(\beta) = U(\beta)U(\alpha) = U(\alpha + \beta)$$

\exists un operatore autoaggiunto K tale che

$$U(\alpha) = e^{i\hbar K \alpha}$$

Identità di Baker-Campbell-Hausdorff

$$[S, T] \neq 0 \quad [[S, T], S] = 0 \quad [[S, T], T] = 0$$

$$\Rightarrow e^T e^S \text{ è fattorizzabile in } e^{T+S+\frac{1}{2}[T,S]}$$

SI DICONO COSTANTI DEL MOTO LE OSSERVABILI CHE COMMUTANO CON H , E QUINDI ANCHE CON L'OPERATORE DI EVOLUZIONE TEMPORALE, AVENDO DUNQUE VALORI MEDI INDIPENDENTI DAL TEMPO SU TUTTI GLI AUTOSTATI DI H . SI DICONO STAZIONARI GLI AUTOSTATI DI H SUI QUALI TUTTE LE OSSERVABILI HANNO VALORI MEDI INDIPENDENTI DAL TEMPO.

