METODI MATEMATICI DELLA FISICA I - Programma
Corso di laurea FTA - 6 CFU - a.a. 2008/09
docente: Maria I. Loffredo e-mail: loffredo@unisi.it

SPAZI VETTORIALI NELLA FISICA (Spazi a dimensione finita)

Numeri complessi - Rappresentazione cartesiana e polare - Esponenziale complesso: formula di Eulero - Radici n-esime di un numero complesso - Vettori e matrici in campo complesso- Prodotto scalare - Matrici come rappresentazioni di operatori lineari - Autovalori e autovettori - Diagonalizzazione - Matrici hermitiane - Trasformazioni unitarie - Cambiamenti di base in spazi lineari complessi - Problema agli autovalori per matrici hermitiane e unitarie - Funzioni di operatori: l'esponenziale - Proiettori e decomposizione spettrale di una matrice - Strutture vettoriali e principio di sovrapposizione - Matrici di Pauli

SPAZI VETTORIALI NELLA FISICA (Sistemi a infiniti gradi di liberta')

Passaggio da un numero finito ad un numero infinito di gradi di libertà: equazione delle onde e equazione del calore - Classificazione delle equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine - Problemi relativi allo sviluppo di Fourier nella ricerca delle soluzioni di equazioni differenziali alle derivate parziali - Spazi funzionali - Operatori differenziali lineari

SPAZI DI HILBERT - SERIE DI FOURIER

Cenni all'integrazione secondo Lebesgue - Prodotto scalare e norma - Spazi L^p - Spazi di Hilbert - Serie di Fourier - Identità di Parseval - Sistemi completi di vettori e spazi separabili - Equazione di D'Alambert in due dimensioni - Serie di Fourier dei segnali "onda quadra" e "dente di sega" - Serie trigonometriche e esponenziali

OPERATORI IN SPAZI A DIMENSIONE INFINITA

Operatori continui, limitati, autoaggiunti- Autovalori e autovettori - Spettro di un operatore - Problema di Sturm-Liouville - Polinomi di Hermite e operatori di creazione/distruzione

TRASFORMATA DI FOURIER

Dalla serie alla trasformata di Fourier - Analisi in frequenza e "principio di indeterminazione" - Proprietà della trasformata di Fourier negli spazi L^1 e L^2 - Teorema di inversione - Prodotto di convoluzione - Uso della trasformata di Fourier per risolvere equazioni differenziali - Applicazione alla soluzione dell'equazione del calore - Impedenza dei circuiti elettrici e trasformata di Fourier

DISTRIBUZIONI e FUNZIONI DI GREEN

Cenni di teoria delle distribuzioni - Funzione delta di Dirac e rappresentazioni esplicite - Funzione theta di Heaviside - "Derivata" di una distribuzione - Funzione di Green di un operatore differenziale lineare - Funzione di Green per l'equazione di Poisson e legge di Gauss - Richiami sul teorema di Gauss e quello di Stokes - Funzione di Green per l'equazione del calore - Calcolo esplicito della soluzione attraverso trasformata di Fourier e convoluzioni

FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA

Funzioni analitiche - Condizioni di Cauchy-Riemann - Analiticità e armonicità - Integrazione delle funzioni di variabile complessa - Teorema di Cauchy - Rappresentazione integrale di Cauchy - Sviluppi in serie in campo complesso - Serie di potenze - Sviluppi in serie di Taylor e di Laurent - Continuazione analitica (Weierstrass) - Zeri di una funzione olomorfa - Poli e singolarita' essenziali - Teorema dei residui - Calcolo di residui - Singolarità sul cammino di integrazione - Valor principale di un integrale - Lemma di Jordan - Funzioni analitiche polidrome: logaritmo e radice quadrata.

TESTI CONSIGLIATI

G. Cicogna, Metodi Matematici della Fisica, Springer (2008) ~ contiene anche metodi II
C. Rossetti, Metodi Matematici della Fisica, Levrotto&Bella Editori (2000) → + esercizi; sopratutto analisi complesso
G. Arfken and H. Weber, Mathematical Methods for Physicists, Academic Press (1995) → pieno di esercizi
H.F. Weinberger, A First Course on Partial Differential Equations, Blaisdell (Waltham) → ottimo sulle eq. differenziali
G. Cosenza, Lezioni di Metodi Matematici della Fisica, Bollati Boringhieri (2004) → 1° volume ("per matematici")

FORMULARIO

Derivate

Quadro riassuntivo delle derivate fondamentali e delle regole di derivazione

$$D[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$$

$$D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$D[cf(x)] = cf'(x) \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$D\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$Dg[f(x)] = g'[f(x)]\,f'(x)$$

$$D[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)}\left[g'(x)\log f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

$$Dc = 0 \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$Dx = 1$$

$$Dx^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$D[f(x)]^{\alpha} = \alpha[f(x)]^{\alpha-1}f'(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$D\operatorname{sen}x = \cos x$$

$$D\operatorname{sen}f(x) = f'(x)\cos f(x)$$

$$D\cos x = -\operatorname{sen}x$$

$$D\cos f(x) = -f'(x)\operatorname{sen}f(x)$$

$$D\operatorname{tg}x = 1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$D\operatorname{tg}f(x) = f'(x)(1+\operatorname{tg}^2 f(x)) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$$

$$D\operatorname{ctg}x = -1-\operatorname{ctg}^2 x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$D\operatorname{ctg}f(x) = f'(x)(-1-\operatorname{ctg}^2 f(x)) = -\frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}$$

$$D\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e$$

$$D\log_a f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$$

$$D\log x = \frac{1}{x}$$

$$D\log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$Da^x = a^x \log a$$

$$Da^{f(x)} = a^{f(x)}f'(x)\log a$$

$$De^x = e^x$$

$$De^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x)$$

$$D\arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D\arcsen f(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D\arccos f(x) = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$D\operatorname{arctg}x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$D\operatorname{arctg}f(x) = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$D\operatorname{arcctg}x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$D\operatorname{arcctg}f(x) = -\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

funz. inverse

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(a^2 \arcsen\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right)$$ a>0

Integrazione per parti

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \qquad (f, g \text{ derivabili})$$

f: ite finita; g': parte differenziale

Integrazione per sostituzione

posto: $x = \varphi(t)$ $\qquad \int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \qquad (\varphi \text{ derivabile})$

Integrazione delle funzioni razionali

- $\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx$

$\Delta > 0$ $\Rightarrow x^2+px+q = (x-\alpha)(x-\beta)$ $\quad (\alpha, \beta, \alpha \neq \beta$ radici reali di $x^2+px+q=0)$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx = \int \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)}\,dx$$

$$Ax - \beta A + Bx - \alpha B = 1$$

$$(A+B)x - \alpha B - \beta A = 1 \qquad \begin{cases} A+B=0 \\ \alpha B+\beta A= \end{cases}$$

ecc.

↳ somma di integrali più semplici

$$= \int \frac{1}{(\alpha-\beta)}\left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\right)dx = \frac{1}{\alpha-\beta}\ln\left|\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right| + c$$

* Da usare nel caso: $\int \frac{M(x)}{N(x)}\,dx$, già semplif... con $M(x)$ di grado inf... a $N(x)$ e coefficient... grado massimo $= 1$.

$\Delta = 0$ $\Rightarrow x^2+px+q = (x-\alpha)^2$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^2}\,dx = -\frac{1}{x-\alpha} + c$$

$\Delta < 0$ posto: $k^2 = q - \frac{p^2}{4}$ $\quad$ (è sempre >0)

$$\int \frac{1}{(x+p/2)^2+k^2}\,dx = \frac{1}{k}\arctg\left(\frac{x+p/2}{k}\right) + c$$

- $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx \qquad D[x^2+px+q] = 2x+p$

! $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$

$$ax+b = \frac{a}{2}2x + p - p + b = \frac{a}{2}2x + \frac{a}{2}p - \frac{a}{2}p + b = \frac{a}{2}(2x+p) - \frac{ap}{2} + b$$

$$\int \frac{a}{2}\cdot\frac{2x+p}{x^2+px+q} + \frac{-\frac{ap}{2}+b}{x^2+px+q}\,dx = \frac{a}{2}\ln|x^2+px+q| + \int \frac{2b-ap}{2}\cdot\frac{1}{x^2+px+q}\,d$$

vedi caso precedente

Definizioni

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)} \qquad \csc(x) := \frac{1}{\sin(x)}$$

PeriodicitÃ , simmetria e traslazioni

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi) \qquad \sin(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi) \qquad \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\tan(x) = \tan(x + \pi) \qquad \tan(x) = -\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x) \qquad \cot(-x) = -\cot(x)$$

Conseguenze del teorema di Pitagora

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

$$\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$$

Teoremi di addizione e sottrazione

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

$$\cot(x + y) = \frac{\cot(x) \cdot \cot(y) - 1}{\cot(x) + \cot(y)}$$

$$\cot(x - y) = \frac{\cot(x) \cdot \cot(y) + 1}{\cot(y) - \cot(x)}$$

$$\operatorname{cis}(x + y) = \operatorname{cis}(x)\operatorname{cis}(y)$$

$$\operatorname{cis}(x - y) = \frac{\operatorname{cis}(x)}{\operatorname{cis}(y)}$$

dove

$$\operatorname{cis}(x) := e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x).$$

Formula di duplicazione

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot^2(x) - 1}{2\cot(x)}$$

Formule di riduzione della potenza

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Formule di bisezione

$$\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos(x)}{2}\right)}$$

$$\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos(x)}{2}\right)}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}.$$

Posto $t := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, seguono le cosidette **formule parametriche**:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2} \quad , \quad \cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{e} \quad e^{ix} = \frac{1 + it}{1 - it}.$$

Prodotti espressi mediante somme

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2}$$

Somme espresse mediante prodotti

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

Funzioni trigonometriche inverse

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \begin{cases} \pi/2, & \text{se } x > 0 \\ -\pi/2, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$$

$\sin^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$, per â^' 1 < = x < = 1

$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$, per â^' 1 < = x < = 1

$$\sin^2(\arctan(x)) = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Tabella dei limiti notevoli

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$; $\frac{1}{\infty}=0$; $\frac{N}{\infty}=0$; $0\cdot\infty=N$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)=\infty$; $\frac{1}{0}=\infty$; $\frac{N}{0}=\infty$;

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}(x)}{x}\right)=1$; $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\text{sen}(x)}\right)=1$; $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\text{sen}(x)}{x}\right)=0$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg(x)}{x}\right)=1$; $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{tg(x)}\right)=1$; $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)=0$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right)=0$; $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{1-\cos(x)}\right)=\infty$; $\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$; $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}(ax)}{\text{sen}(bx)}=\frac{a}{b}\right)$; $\lim_{x\to 0}\left(x\cdot tg\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\text{indeter.}$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$; $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$; $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln|1+x|}{x}\right)=1$; $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\ln|1+x|}\right)=1$; $\lim_{x\to 0}\left(\ln|1+x|\right)=0$

$\lim_{x\to 0}\left(x\ln(x)\right)=0$; $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot\ln|a|}{a^x-1}\right)=1$; $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x\ln|a|}\right)=1$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}\right)=\ln|a|$; $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{a^x-1}\right)=\frac{\log(e)}{a}$; $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^a-1}{\ln|1+x|}\right)=a$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln|1+x|}{(1+x)^a-1}\right)=\frac{1}{a}$; $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^a-1}{x}\right)=a$; $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{(1+x)^a-1}\right)=\frac{1}{a}$

Si veda anche nel seguito il teorema di l'Hospital sulle forme indeterminate.

LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{nx} = e^{na}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$$

ANDAMENTO DELLE SERIE

$$\log n < n^\alpha < a^n < n! < n^n$$

Polinomi di Taylor

per $x \to 0$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) =$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k + o(x^n)$$

$(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)$ $\quad (2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2k = 2^k k!$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{24}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{[k]}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Serie Numeriche

Teoremi utili:

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

  $\left(\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ non converge}\right)$

- $a_n \geq 0 \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ o conv. o diverge

- *Criterio del confronto*

  $\{a_n\}\ \{b_n\} \subset \mathbb{R} \quad 0 \leq a_n \leq b_n$

  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge

- *Criterio del confronto asintotico*

  $\{a_n\}\ \{b_n\} \quad a_n \geq 0 \quad b_n > 0 \quad \forall n$

  $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$ cases:

  - $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento *
  - $\lambda = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
  - $\lambda = +\infty$: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

- *Criterio della radice*

  $a_n \geq 0 \quad \forall n$

  - $\exists r \in (0,1), \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 \ \sqrt[n]{a_n} \leq r \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
  - per infiniti indici $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

- *Criterio del rapporto*

  $a_n > 0 \quad \forall n$

  - $\exists r \in (0,1), \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
  - per infiniti indici $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

* *trovare una serie equivalente a quella data, ad esempio usando Taylor*

- $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge *(conv. assoluta)*

- *Criterio di Leibniz*

  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad a_n \geq 0$ *(segno alterno)*

  $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $a_n \geq a_{n+1} \ \forall n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge

Serie conosciute:

- *Serie geometrica*

  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ (q="ragione")

  - $|q| < 1$ converge a $\frac{1}{1-q}$
  - $q > 1$ diverge a $+\infty$
  - $q \leq -1$ è indeterminata

- *Serie armonica generalizzata*

  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

  - $\alpha > 1$ converge
  - $\alpha \leq 1$ diverge

- *Serie di Mengoli*

  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge a 1

Con profonda stima
e sincero affetto,

Arianna

CRITERIO DELLA RADICE (Corollario)

$a_n \geq 0 \quad \forall n$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

$\begin{cases} \ell < 1 \Rightarrow \text{converge} \\ \ell > 1 \Rightarrow \text{diverge} \end{cases}$

CRITERIO DEL RAPPORTO (Corollario)

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

$\begin{cases} \ell < 1 \Rightarrow \text{CONVERGE} \\ \ell > 1 \Rightarrow \text{DIVERGE} \end{cases}$

$(a_n \geq 0 \quad \forall n)$

Integrali Impropri

- **Proprietà**
  $f(x) \geq 0 \ \forall x \in I \Rightarrow \int_I f(x)$ (integrale improprio) $\exists$ sempre

- **Criterio del confronto**
  $f, g : I \to \mathbb{R}$ continue $0 \leq f(x) \leq g(x) \ \forall x \in I$
  $\int_I g(x)$ converge $\Rightarrow \int_I f(x)$ converge
  $\int_I f(x)$ diverge $\Rightarrow \int_I g(x)$ diverge

- **Criterio del confronto asintotico**
  $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ continue $f(x) \geq 0 \ \ g(x) > 0 \ \ \forall x \in I$

$$\exists \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \lambda \neq 0 & \int_a^b f(x)dx \text{ conv.} \iff \int_a^b g(x)dx \text{ conv.} \\ 0 & \int_a^b g(x)dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ conv.} \\ +\infty & \int_a^b g(x)dx \text{ div.} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ div.} \end{cases}$$

- $\int_a^b |f(x)|dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ converge

Integrali di confronto:

- $I = [a, b)$ $\quad \int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$
- $I = (a, b]$ $\quad \int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$

$\alpha < 1$ convergono
$\alpha \geq 1$ divergono

- $I = [a, +\infty)$ $\quad \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ $\quad \alpha > 1$ converge, $\alpha \leq 1$ diverge

- **Criterio dell'integrale**
  $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ monotòna decrescente, continua, $f(x) \geq 0 \ \forall x \geq 1$
  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge $\iff \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge

$\mathbb{C}$

$i^2 = 1$

$z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = x + iy \quad , \quad x, y \in \mathbb{R}$

$x = Re(z)$

$y = Im(z)$

- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$
- $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

Complesso coniugato di z

$z^* = x + i(-y)$

Modulo di z

$|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$

- $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
- $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$

Rappresentazione Polare

$x = r\cos\theta \qquad y = r\,sen\,\theta$

$z = r(\cos\theta + i\,sen\,\theta)$

$r = |z|$

Argomento di z

$Arg(z) = \theta$

- $z^* = r(\cos\theta - i\,sen\,\theta)$
- $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,sen(\theta_1 + \theta_2)]$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|$
- $Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$
- $|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$
- $Arg(z_1 / z_2) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$
- $z^n = r^n [\cos(n\theta) + i\,sen(n\theta)]$
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} [\cos(\theta/n) + i\,sen(\theta/n)]$

Rappresentazione esponenziale

$$z = r e^{i\theta}$$

- $|z| = r$

Formula di Eulero

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

Fattore di fase

$$e^{i\theta} \qquad (r = 1)$$

- $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$
- $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$
- $e^{-i\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$

Binomio di Newton

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n$$

Formula di De Moivre

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)$$

- $z^n = r^n e^{in\theta}$

$\mathbb{C}^n$

$u, v \in \mathbb{C}^n \Rightarrow \{u_i\}_1^n \{v_i\}_1^n \in \mathbb{C}$

Prodotto scalare tra u e v

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} u_i^* v_i$$

Norma di v

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}$$

- $(v, u) = (u, v)^*$
- $\lambda \in \mathbb{C} \quad (u, \lambda v) = \lambda (u, v) \wedge (\lambda u, v) = \lambda^* (u, v)$

Hermiticità $\iff A = A^\dagger \implies (u, Av) = (Au, v)$ $\quad A^\dagger = (A^T)^*$

- $u = v$: $(v, Av) = (v, Av)^* \implies (v, Av) \in \mathbb{R}$
- antihermiticità: $A = -A^\dagger$

Unitarietà $\iff U^\dagger U = \mathbb{1} \implies (Uu, Uv) = (U^\dagger U u, v) = (u, v)$

- $U^\dagger = U^{-1} \implies U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}$
- trasformazione di operatori: $T \xrightarrow{U} \tilde{T} = UTU^\dagger$
- la trasformazione unitaria preserva ortonormalità ed hermiticità.

Matrici di Pauli:

- $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
- $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Operazioni con matrici

- $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
- $\det(AB) = \det(BA)$
- $\det(A) = \det(UAU^\dagger)$
- $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(UAU^\dagger)$

Problema autovalori - autovettori

a autovalore, v autovettore $\quad Av = av$

gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa: $A(\alpha v) = \alpha Av = \alpha a v = a(\alpha v)$, $\alpha \in \mathbb{C}$

- Equazione secolare: $\det[A - a\mathbb{1}] = 0$
- Trasformazione unitaria:

$A \longrightarrow UAU^\dagger = \tilde{A} \qquad Av = av \longrightarrow \tilde{A}v = av$

Se A è hermitiana, gli autovalori sono reali, e gli autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali.

Normalità $\iff NN^\dagger = N^\dagger N$

- Matrici hermitiane e matrici unitarie sono anche normali.

Commutatore di A con B: $[A, B] = AB - BA$

Anticommutatore di A con B: $[A, B]_+ = AB + BA$

A e B commutano $\iff [A, B] = 0$

N commuta con $N^\dagger$; A commuta con A^m $\forall m$.

- $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$; $[AB, C]_+ = A[B, C]_+ - [A, C]_+ B$

FOURIER

Serie di Fourier

$\{e_i\}$ set ortonormale completo in H

H spazio di Hilbert $\qquad f \in H$

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \qquad a_i = (e_i, f)$$

Serie trigonometrica di Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$f: [-L, L] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx & \text{se } f \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } f \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx & f \text{ pari} \\ 0 & f \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\beta_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} 0 & f \text{ pari} \\ \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx & f \text{ dispari} \end{cases}$$

Set ortonormale di riferimento:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2L}};\ \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right);\ \frac{1}{\sqrt{L}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\}$$

$$a_0 = \sqrt{2L}\,a_0;\quad a_{2k-1} = \sqrt{L}\,\beta_k;\quad a_{2k} = \sqrt{L}\,\alpha_k$$

Serie esponenziale di Fourier

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k u_k(x)$$

$f: [-L, L] \longrightarrow \mathbb{C}$; Set ortonormale di riferimento:

$$\{u_k(x)\}_{k=0,\pm1,\pm2,\ldots} \quad \forall x \quad u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\frac{k\pi}{L}x}$$

$$b_k = \left(u_k(x), f(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2L}}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{-i\frac{k\pi}{L}x}\,dx$$

Cambiamento di variabili

Passare da $[-L, L]$ al generico $[\alpha, \beta]$

$y \in [-L, L] \qquad x \in [\alpha, \beta]$

$$y = \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\frac{2L}{\beta-\alpha}$$

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2L}y$$

Identità di Parseval

$\{e_i\}$ set ortonormale completo in H

H spazio di Hilbert $\qquad f \in H$

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(e_i, f)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2$$

Identità di Parseval generalizzata

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i)(e_i, y)$$

Trasformata di Fourier di $f(x)$

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x)\, dx$$

Antitrasformata di $\hat{f}(p)$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \hat{f}(p)\, dp$$

Uguaglianza di Parseval

$$\|\hat{f}\|^2 = 2\pi \|f\|^2 \qquad \text{se } f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$$

Uguaglianza di Parseval generalizzata

$$f, g \in L^2(\mathbb{R}) \qquad (\hat{f}, \hat{g}) = 2\pi (f, g)$$

Teorema di Inversione

Operatore trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R}) \qquad \mathcal{F}[f] = \hat{f}$$

$$\mathcal{F}^{-1}: L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}) \qquad \mathcal{F}^{-1}[g] = \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}[g^*]\right)^*$$

TABELLINA DELLE TRASFORMATE

$$f(t)=\begin{cases} e^{i\omega_0 t} & t\in[-T,T] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \hat{f}(\omega)=\frac{2}{\omega_0-\omega}\,\text{sen}[(\omega_0-\omega)T]$$

$$\delta(x-x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip(x-x')}\,dp \qquad \hat{\delta}(p)=1$$

$$f(x)=e^{-\alpha x^2} \qquad \hat{f}(p)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{p^2}{4\alpha}}$$

$$f(x)=\begin{cases} x\,e^{-x} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases} \qquad \hat{f}(p)=\frac{1}{(1+ip)^2}$$

$$f(x)=\begin{cases} 1 & |x|<a \\ 0 & |x|\geq a \end{cases} \qquad \hat{f}(p)=\frac{2}{p}\,\text{sen}(pa)$$

$$f(t)=\begin{cases} \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \qquad \hat{f}(\omega)=\frac{1}{R+i\omega L}$$

$$I(t)=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\int_{-\infty}^{t} V(t')\,e^{\frac{R}{L}t'}\,dt' \qquad \hat{I}(\omega)=\frac{\hat{V}(\omega)}{R+i\omega L}$$

$$f(x)=e^{-\alpha|x|} \qquad \hat{f}(p)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+p^2}$$

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\,e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \qquad \hat{g}(p)=e^{-p^2Dt}$$

$$T(k)=\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ikx}}{x}\,dx=\begin{cases} 1 & k>0 \\ -1 & k<0 \end{cases} \qquad \hat{T}(p)=\frac{1}{p}$$

FUNZIONI DI GREEN

Circuito RL $\quad RI+L\dot{I}=V(t) \quad\Rightarrow\quad G(t)=\begin{cases}\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$

Equazione di Poisson $\quad \nabla^2\psi=-\rho/\varepsilon_0 \quad\Rightarrow\quad G(\underline{r}_1-\underline{r}_2)=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{|\underline{r}_1-\underline{r}_2|}$

Equazione di diffusione $\quad \frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad\Rightarrow\quad G(x-y)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\,e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}}$

$y''-2y=x\,,\ y=y(x) \Rightarrow G(x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-\sqrt{2}x}$

FUNZIONI ANALITICHE

Una funzione si dice <u>ANALITICA</u> in un punto se il suo rapporto incrementale non dipende dal cammino percorso. Ovvero:

Condizioni di Cauchy - Riemann

$f = u + iv$. $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Un punto del dominio di f dove f non è analitica si dice <u>SINGOLARE</u>.

Derivate di una funzione analitica

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$$

Data una funzione analitica, sia la sua parte reale che la sua parte immaginaria sono funzioni <u>ARMONICHE</u>. Ovvero:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Integrale di una funzione analitica

$$\int_A^B f(z)\,dz = \int_A^B (u\,dx - v\,dy) + i\int_A^B (v\,dx + u\,dy)$$

TEOREMA DI CAUCHY

Γ curva chiusa che racchiude un dominio connesso f analitica in tutto il dominio racchiuso da Γ (S)

$$\Longrightarrow \oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

- si dimostra applicando il <u>Teorema di Stokes</u>:

$$\oint_\Gamma \underline{A}\cdot d\underline{l} = \iint_S (\nabla \wedge \underline{A})\cdot \hat{n}\, dS \Longrightarrow \oint_\Gamma \underline{A}\cdot d\underline{l} = \iint_S \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dx\,dy$$

e sostituendo, ad A_x e A_y, u e v con i segni appropriati.

Conseguenze del Teorema di Cauchy

- $\int_{A(\gamma_1)}^{B} f(z)dz = \int_{A(\gamma_2)}^{B} f(z)dz$ se f è analitica nel dominio tra γ_1 e γ_2.
- Vale il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\left.\begin{array}{l} D = \text{dom. di analiticità di } f \\ z, z_0 \in D \\ F(z) \equiv \int_{z_0}^{z} f(z')dz' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{dom. di analiticità di } F = D \\ F'(z) = f(z) \end{cases}$$

- RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DI CAUCHY

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z')}{(z'-z)^{n+1}} dz'$$

Γ è un cerchietto infinitesimo centrato in z.

- Sviluppo in serie di TAYLOR di f intorno al punto di analiticità z_0:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

$$c_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dz^k}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{k+1}} dz'$$

  - Si dimostra sviluppando la serie geom. di ragione $\frac{|z-z_0|}{|z'-z_0|}$, ricavando $\frac{1}{z'-z}$, e sostituendolo nella rappz. integrale di Cauchy.
- Sviluppo in serie di LAURENT di f intorno al punto di singolarità isolata z_0:

D = dom. di analiticità di f; $z \in D$

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j (z-z_0)^j$$

$$c_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{j+1}}$$

  - Si ricava tracciando due circonf. Γ' e Γ'' attorno a z_0, che racchiudono una parte di D, tali che:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{\Gamma''} \frac{f(z'')}{(z''-z_0)^{n+1}} dz'' - \oint_{\Gamma'} \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}} dz'\right]$$

Definendo $c_{-1} \equiv \text{Res}$ si ricava il

TEOREMA DEI RESIDUI

$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} \text{Res}_k$, dove n è il num. di singolarità contenute da Γ.

z_k polo di ordine $N \Rightarrow \text{Res}_k = \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \left[(z-z_k)^N f(z) \right]_{z=z_k}$

LEMMA DI JORDAN

γ_R = Semicirconferenza di raggio R centrata nell'origine e contenuta nel semipiano superiore o inferiore

$I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz \qquad f(z) = o\left(\frac{1}{|z|}\right)$

$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} I_R = 0$

Casi particolari:

$f(z) = e^{i\alpha z} g(z)$ basta che $\lim_{|z|\to\infty} g(z) = 0$

- $\alpha > 0 \Rightarrow \gamma_R$ sta nel semipiano superiore e $\lim_{R\to\infty} I_R = 0$
- $\alpha < 0 \Rightarrow \gamma_R$ sta nel semipiano inferiore e $\lim_{R\to\infty} I_R = 0$

VALOR PRINCIPALE

Si dice VALOR PRINCIPALE dell'integrale $\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)\,dx}{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)}$ il valore:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} \frac{f(x)\,dx}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)} + \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}+\varepsilon}^{x_k-\varepsilon} \frac{f(x)\,dx}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)} + \int_{x_n+\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)\,dx}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)} \right]$$

che equivale, passando al piano complesso, a calcolare l'integrale lungo un cammino che aggira gli z_k con semicirconferenze in senso orario o antiorario, e sommare al valore ottenuto il peso $\sum_{k=0}^{n} i\pi\,(\pm)\, f_k(z_k)$, dove $f_k(z) \frac{(z-z_k) f(z)}{\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}$, $1 \le k \le n$, e il segno dipende dal verso di percorrenza della semicirconferenza.

Index

Analisi complessa	*1*
Spazi vettoriali	*3*
Matrici hermitiane	*13*
Matrici unitarie	*14*
Matrici normali	*15*
Problema autovalori – autovettori	*18*
Completezza ed ortonormalità	*27*
Commutatori	*30*
Equazione delle onde	*38*
Serie trigonometrica di Fourier	*53*
Equazione del calore	*58*
Integrazione secondo Lebesgue	*64*
Spazi $L^p(I)$	*66*
Teorema di Fourier	*72*
Serie esponenziale di Fourier	*76*
Operatori	*80*
Proprietà degli operatori lineari	*85*
Autovalori di un operatore	*88*
Spettro di un operatore	*89*
Trasformata di Fourier	*92*
Convoluzione	*95*
Uguaglianza di Parseval generalizzata	*100*
Teorema di inversione	*101*
Proprietà della trasformata	*103*
Teorema di convoluzione	*105*
Baricentro e varianza	*107*
Circuito RL e funzione di Green associata	*111*
Funzione di Green	*115*
Distribuzioni	*121*
Proprietà della delta di Dirac	*125*
Funzioni analitiche	*127*
Condizioni di Cauchy-riemann	*128*
Derivata di una funzione analitica	*129*
Funzioni armoniche	*131*
Integrale definito di una funzione analitica	*135*
Teorema di Cauchy	*136*
Rappresentazione integrale di Cauchy	*141*
Serie di Taylor	*143*
Serie di Laurent	*145*
Teorema dei residui	*148*
Lemma di Jordan	*153*
Valor principale	*155*
Funzioni polidrome	*160*

METODI MATEMATICI DELLA FISICA

08/08/2009

Singolarità di una funzione = "qualcosa" che va all'infinito

Martedì	11-13	a Fisica	0 05
Mercoledì	11-13	a Matematica	-3 06
Giovedì	11-13	a Matematica	-3 06

Esame = scritto + orale

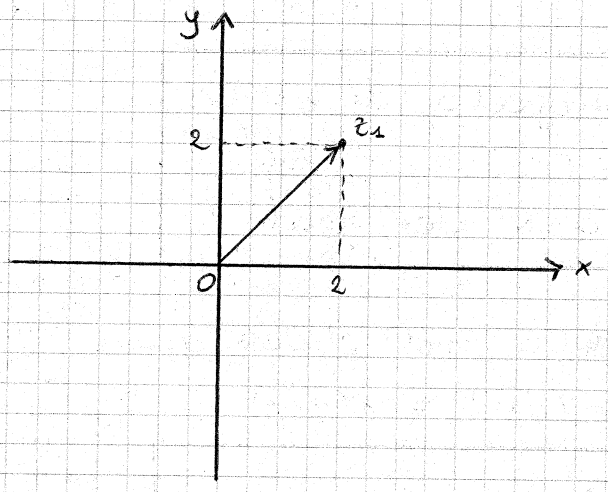
con la sufficienza allo scritto si può registrare il voto.

Numeri Complessi

$$z \equiv x + iy \qquad z \in \mathbb{C} \quad x, y \in \mathbb{R} \quad i^2 = -1$$

Posso vedere il num. complesso come la coppia ordinata di reali x e y:

$$z \equiv (x, y) \qquad x = \mathrm{Re}(z) \qquad y = \mathrm{Im}(z)$$



$z_1 = 2 + i2$

Ovviamente si può associare un vettore a z_1

$\overrightarrow{Oz_1}$ è un vettore che ha per componenti $\mathrm{Re}(z_1)$ e $\mathrm{Im}(z_1)$

(PIANO DI ARGAND)

$z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2$

$z_1 + z_2 \equiv (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ [SOMMA in $\mathbb{C}$]

Prodotto tra numeri complessi:

$$z_1 \cdot z_2 \equiv (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2 =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2) \quad [\text{PRODOTTO in } \mathbb{C}]$$

Somma e prodotto godono di proprietà commutativa, associativa e distributiva:

$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

$$z_1 - z_2 \equiv z_1 + (-1)\, z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$$

[SOTTRAZIONE in $\mathbb{C}$]

Quoziente:

$$z_1 / z_2 \equiv \frac{z_1}{z_2} = \{ z \in \mathbb{C} : z \cdot z_2 = z_1 \}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 x - y_2 y = x_1 \\ x y_2 + y x_2 = y_1 \end{cases}$$ Sistema di equazioni in $Re(z)$ e $Im(z)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ y = \dfrac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{cases} \iff x_2^2 + y_2^2 \neq 0 \Rightarrow \|z_2\|^2 \neq 0$$

[DIVISIONE in $\mathbb{C}$]

$$\equiv \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Se considero $z_1 = 1 + i0$:

$$\frac{1}{z_2} = \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{(-y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$ [RECIPROCO di z_2]

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

Si definisce complesso coniugato di z:

$$\overline{z} \equiv x + i\,(-y) \equiv z^*$$

(riflessione rispetto all'asse dei reali)

Sfruttando le proprietà della moltiplicazione:

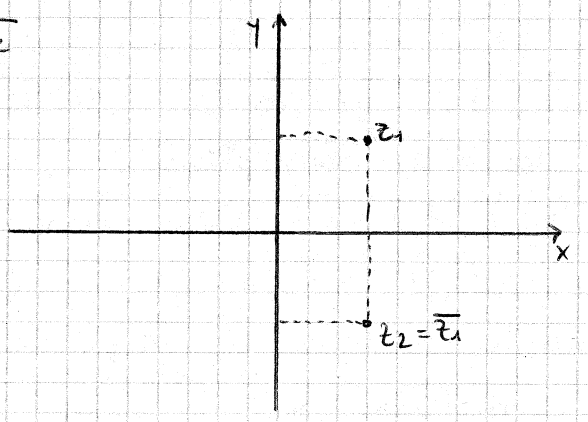
$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$$

Si definisce modulo di z:

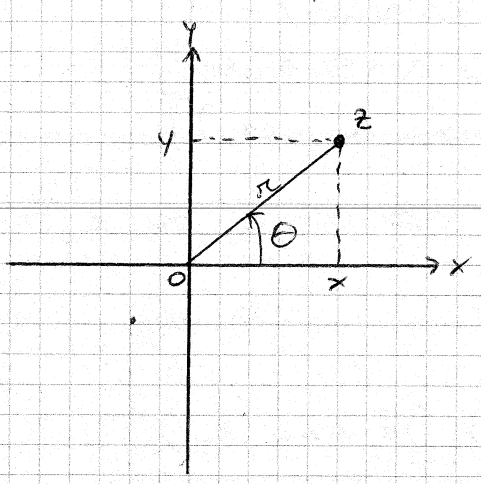
$$|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$



Un'altro rappresentazione è possibile in coordinate polari:



$$r = |z|$$

$$z = x + iy$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)}$$

RAPPRESENTAZIONE POLARE

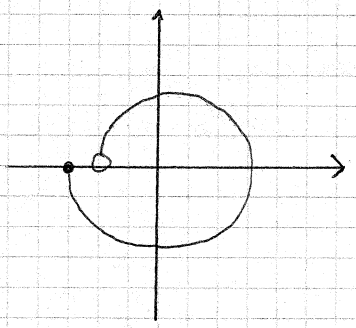
$$r^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

θ si dice ARGOMENTO di z ed è definito a meno di multipli di 2π.

$$\boxed{\theta = \text{Arg}(z)}$$

Di solito si definisce l'intervallo in cui varia θ in modo che l'ampiezza sia al più 2π:

$0 \le \theta < 2\pi$ oppure $-\pi \le \theta < \pi$ ...



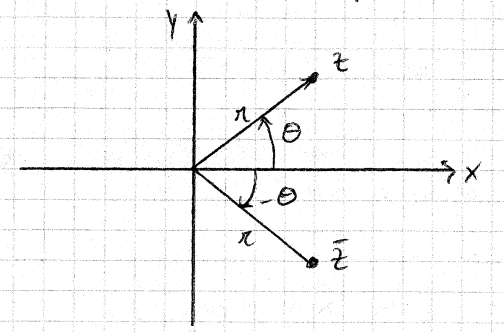
Caso: $-\pi \le \theta < \pi$

Il "taglio" è formato dal semiasse negativo delle ascisse.

$$\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)) = r(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)$$

$\cos x$ è pari $\Rightarrow$ $\text{Re}(z)$ costante

$\text{sen}\,x$ è dispari $\Rightarrow$ $\text{Im}(z)$ cambio segno



Potenze di numeri complessi.

La rappresentazione polare semplifica i calcoli.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + i\,(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) \right]$$
$$= r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) \right]$$

Una potenza n-esima è il prodotto di un z per se stesso n volte.

$$\boxed{\begin{aligned} |z_1 z_2| &= r_1 r_2 = |z_1|\,|z_2| \\ \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) &= \theta_1 + \theta_2 = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \end{aligned}}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2)$$

Si dimostra anche la disuguaglianza triangolare:

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

$$\boxed{z^n = r^n \left(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)\right)}$$

Naturalmente, anche se θ_1 e θ_2 variano in un intervallo, non è detto che la somma varii nello stesso intervallo.

Radici n-esime.

Supponiamo di voler risolvere:

$$w^n = z \qquad z, w \in \mathbb{C} \qquad z = x + iy = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

Supponiamo $w = \rho(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$.

Risolviamo:

$$\rho^n(\cos(n\phi) + i\operatorname{sen}(n\phi)) = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^n = r \Longrightarrow \rho = r^{\frac{1}{n}} \\ n\phi = \theta + 2k\pi \Longrightarrow \phi = \dfrac{\theta}{n} + k\dfrac{2\pi}{n} \end{cases}$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ ma $k=0$ e $k=n$ producono la stessa soluzione

$$\Rightarrow \underline{k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)\right) \qquad [n \text{ soluzioni}]$$

Risolvere: $w^3 = 1$

Le radici n-esime sono SEMPRE, sul piano di Argand, i vertici di un POLIGONO REGOLARE.

04-03-2009

Rappresentazione dei complessi: $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

FORMULE DI MOIVRE

Consideriamo i complessi di modulo 1:

$|z| = 1 \quad \Rightarrow r = 1$

In questo caso:

$z_1 \cdot z_2 \Rightarrow$ si sommano gli argomenti

$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$

$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \qquad \frac{z_1}{z_1} = z_1 \cdot \frac{1}{z_1} = 1$

Queste proprietà ricordano molto quelle degli esponenziali:

$e^a e^b = e^{a+b} \qquad e^a e^{-a} = 1$

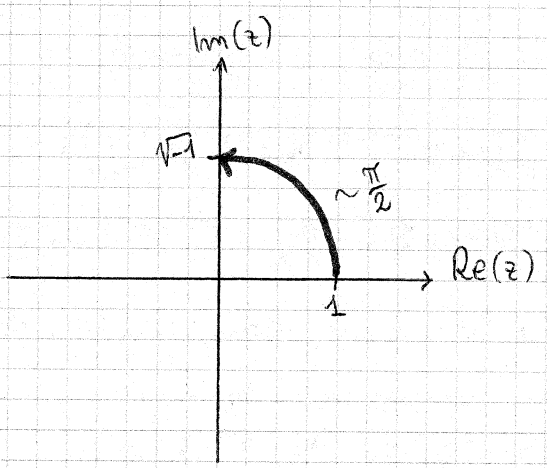
FORMULA DI EULERO

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

$e^{i\theta}$ è detto anche Fattore di fase ed ha il significato geometrico di una rotazione di angolo θ.

$z_1 e^{i\alpha} = r_1 e^{i\theta_1} e^{i\alpha} = r_1 e^{i(\theta_1 + \alpha)} \qquad (z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1))$

Se consideriamo il cerchio unitario, passiamo da un punto sulle ascisse ($x = 1$) ruotando di $\pi/2$ ad un punto sulle ordinate, questo sarà i.



Con queste formule si può esprimere tutta la trigonometria.

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$$

$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \text{sen}\,\theta$$

[queste espressioni mantengono le stesse proprietà delle funzioni seno e coseno]

Altra conseguenza importante:

$z = r e^{i\theta}$

facciamo l'n-esima potenza di $\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$:

$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n$ (binomio di Newton)

$= (\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta))$

$\Rightarrow$

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\,\text{sen}\,\theta$$
$$z^n = r^n e^{in\theta}$$
$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = [\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)]$$

Formula di de Moivre

Sviluppiamo il binomio di Newton:

$$\cos^n\theta + \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\,(i\,\text{sen}\,\theta)^1 + \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\,(i\,\text{sen}\,\theta)^2 + \dots$$

$i\,\text{sen}\,\theta$; $-\text{sen}^2\theta$

A segni alterni vengono fuori sia termini in i che termini reali.

Uguagliando secondo De Moivre si ottiene:

$$\cos(n\theta) = \cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\,\text{sen}^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\,\text{sen}^4\theta - \dots$$

$$\text{sen}(n\theta) = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\,\text{sen}\,\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\,\text{sen}^3\theta + \dots$$

(Abbiamo uguagliato parte reale con parte reale ed immaginario con immaginaria)

Anche queste sono formule di De Moivre.

- calcolare $\sin(14\,\Theta)$.

Passare dall'analisi reale all'analisi complessa semplifica o addirittura banalizza molti problemi.

SPAZI VETTORIALI a DIMENSIONE FINITA (n)

Li definiremo sui numeri complessi.

$v \in V$ vettore.

[Spazio LINEARE $\Longleftrightarrow$ uno o più sub. lineare di vettori dello spazio appartiene allo spazio stesso

$(V, +)$ è un gruppo. V è chiuso risp. alla somma (spazio lineare); $\exists$ elem. neutro; $\exists$ inverso.

I vettori sono enti intrinseci.

Se lo spazio è finito (a dim. n) $\exists$ n vettori linearmente indipendenti che formano la base di codesto spazio:

$$\left\{e^{(i)}\right\}_{i=1\ldots n} \qquad \underline{\text{BASE}}$$

Posso leggere ogni vettore dello spazio come c.l. dei vettori della base.

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i\, e^{(i)} = v_1 e^{(1)} + \ldots + v_n e^{(n)}$$

La somma su i si può sottointendere.

$$\equiv$$

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Le componenti di v sono complesse, quindi possiamo definire il complesso coniugato.

$$v^* = (v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*)$$

Operazioni definite:

- $u + v$
- cv, $\forall c \in \mathbb{C}$

Siccome i vettori della base hanno una certa lunghezza

e sono ortogonali tra loro ⇒ occorre definire una metrica ed una misura per gli angoli.
Usiamo una norma indotta dal prodotto scalare.

- Dato un prodotto scalare, ∃ una norma indotta da quel prodotto scalare.

PRODOTTO SCALARE

$$(u, v) = \sum_{j=1}^{n} u_j^* v_j \qquad [u, v \in V]$$

Proprietà

- $(v, u) = v_j^* u_j = (u, v)^* = (u_j^* v_j)^* = u_j v_j^*$
- (u, v) induce una NORMA.

NORMA

da $\mathbb{R}^3$ si deduce:

$|v| = (v_j^* v_j)^{1/2}$ che è uguale a $(v, v)^{1/2}$.

$$\Longrightarrow \boxed{\|v\| = (v, v)^{1/2}} \quad \text{NORMA di } v.$$

(Norma indotta dal prodotto scalare di numeri complessi)

Si prende un vettore coniugato per il prodotto scalare perché è l'unico modo per ottenere un reale dall'operazione.

---

u e v si dicono ortogonali sse $(u, v) = 0$

I vettori della base possono essere di modulo 1 ed ortogonali tra loro a due a due:
se succede, la base si dice ortonormale.

$\left(e^{(i)}, e^{(j)}\right) = \delta_{ij}$ (delta di Kroneker) $\Longleftrightarrow$ BASE ORTONORMALE

La base canonica è una delle basi ortonormali.

$$v = \sum_i v_i e^{(i)}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Scegliamo una base ortonormale.

$$\left(e^{(j)}, v\right) = \left(e^{(j)}, v_i e^{(i)}\right) =$$

Proprietà del prodotto scalare:
$\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow$
$(u, \lambda v) = u_j^* (\lambda v_j) = \lambda (u, v)$
$(\lambda u, v) = (\lambda u_j)^* v_j = \lambda^* (u, v)$

$= v_i \left(e^{(j)}, e^{(i)}\right)$ [j è l'indice libero, sto sommando su i]

$= \sum_{i=1}^{n} v_i \left(e^{(j)}, e^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i \delta_{ij} = v_j$!

Quindi posso scrivere:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \left(e^{(i)}, v\right) e^{(i)}$$ VALE SOLO PER LE BASI ORTONORMALI

$\Rightarrow$ le componenti di v sono le proiezioni di v sui versori della base.

Possiamo leggere i vettori come vettori colonne, cioè come matrici con una sola colonna e n entries (elementi della colonna).
Vogliamo estenderci al concetto di matrice.
Supponiamo di avere 2 spazi vettoriali:

V $\dim(V) = n$ $\quad V'$ $\dim(V') = m$

Introduco un'applicazione T:

$$T : V \longrightarrow V'$$

Introduco le basi:

$$\left\{e^{(i)}\right\}_{i=1\ldots n} \text{ in } V$$

$$\left\{e'^{(j)}\right\}_{j=1\ldots m} \text{ in } V'$$

Per capire cosa fa T basta vedere come agisce sui versori / vettori delle basi.

$$T e^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{(i)} e'^{(j)} \quad \text{(generico elemento di } V')$$

I coefficienti formano una matrice.

Come agisce T su un generico $v \in V$?

$$T v = T\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} (v_i \cdot T e^{(i)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{(i)} e'^{(j)} = v_i \alpha_j^{(i)} e'^{(j)} = v'$$

Fissate le basi, per conoscere T basta conoscere gli $\alpha_j^{(i)} \Rightarrow$ una trasformazione lineare è ben rappresentata da una matrice.

$\alpha_j^{(i)} \equiv T_{ji}$ — j indice di riga $(1 \dots m)$, i indice di colonna $(1 \dots n)$

(matrice $m \times n$ di numeri complessi)

$$T : V \to V'$$

$$v \xrightarrow{T} v'$$

$$v' = v_i T_{ji} e'^{(j)} \Longrightarrow \boxed{T_{ji} = (e'^{(j)}, T e^{(i)})}$$

(proiezioni di $T e^{(i)}$ sulla base di V')

05-03-2009

$v \in V$

$\dim(V) = n$

NORMA

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

1. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$, $\alpha \in \mathbb{C}$
3. $\|v\| = 0 \iff v = 0$

La norma definisce una metrica, un modo per calcolare le distanze.

PRODOTTO SCALARE

$$(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

1. $(u,v) = (v,u)^*$
2. $(u, \alpha v + \beta w) = \alpha(u,v) + \beta(u,w)$
3. $(v,v) \geq 0$ e $(v,v) = 0 \iff v = 0$

Un prodotto scalare induce SEMPRE una norma, in questo caso.

$$\|v\| = (v,v)^{1/2}$$

Viceversa, non necessariamente una norma deriva da un prodotto scalare.
Anche qui vale la disuguaglianza di Schwartz:

$$\boxed{|(u,v)|^2 \leq |u||v|}$$

$|(u,v)|^2 = |u||v| \iff v = c \cdot u$, $c \in \mathbb{C}$

$\Longrightarrow (u,v) = (u, cu) = c|u|^2 = |u||c \cdot u|$

Dimostrazione

$$|u+\lambda v|^2 = (u+\lambda v, u+\lambda v) =$$
$$= |u|^2 + |\lambda|^2 |v|^2 + \lambda^*(v,u) + \lambda(u,v) =$$
$$= |u|^2 + |\lambda|^2 |v|^2 + \lambda^*(u,v)^* + \lambda(u,v) = \dots$$

Scelgo $\lambda \in \mathbb{C}$: $\lambda = -\frac{(u,v)^*}{|v|^2}$

$$\Rightarrow |\lambda|^2 = \lambda^*\lambda = \frac{|(u,v)|^2}{|v|^4}$$

$$\Rightarrow 0 < |u+\lambda v|^2 = |u|^2 + \frac{|(u,v)|^2}{|v|^2} - \frac{|(u,v)|^2}{|v|^2} - \frac{|(u,v)|^2}{|v|^2} =$$
$$= |u|^2 - \frac{|(u,v)|^2}{|v|^2} > 0$$
$$\Rightarrow |u|^2 |v|^2 > |(u,v)|^2$$

Torniamo alle trasformazioni.

$$T: \underset{n}{V} \longrightarrow \underset{m}{V'}$$

Definisco le basi di V e V':

$$\{e^{(i)}\}_{i=1}^{n} \qquad \{e'^{(j)}\}_{j=1}^{m}$$

$$\Rightarrow T e^{(i)} = \alpha_j^{(i)} e'^{(j)}$$
(T applicata ad $e^{(i)}$)

$\alpha_j^{(i)}$ costituisce una tabella che descrive T.

T = trasformazione lineare = operatore lineare.

$T_{ji} \equiv \alpha_j^{(i)}$ $\quad$ j indice di riga, i indice di colonna

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)} & \dots & \alpha_1^{(n)} \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} & \dots & \alpha_2^{(n)} \\ \alpha_3^{(1)} & \alpha_3^{(2)} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & & \\ \alpha_m^{(1)} & \alpha_m^{(2)} & \dots & \alpha_m^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$v' = Tv = T(v_i e^{(i)})$$
$$= v_i T e^{(i)} = \alpha_j^{(i)} e'^{(j)} v_i$$
$$= v_i T_{ji} e'^{(j)}$$

Sottintesa le somme sull'indice ripetuto

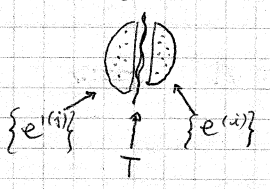
Somma su i e j

Si dimostra che:

$$\boxed{T_{ji} = \left(e'^{(j)}, T e^{(i)}\right)}$$

bra c ket
|||
proiezione

Si può vedere come un sandwich:



$$v_i T_{ji} e'^{(j)} = v'_j e'^{(j)} \quad \Longrightarrow \quad v'_j = v_i T_{ji}$$

Ma v'_j è la j-ma componente di v':

$$v'_j = \left(e'^{(j)}, v'\right) = \left(e'^{(j)}, Tv\right) = \left(e'^{(j)}, T v_i e^{(i)}\right)$$

$$= v_i \left(e'^{(j)}, T e^{(i)}\right)$$

$$\Longrightarrow v_i \left(T_{ji}\right) = v_i \left(e'^{(j)}, T e^{(i)}\right)$$

T_{ji} sono le proiezioni sulla base di V' dei vettori della base di V trasformati con T.

Se la trasformazione è da V a V il bracket agisce tra elementi della stessa base.

$v' = Tv$
↓ riga m ed. ↓ colonna n $\Longrightarrow$ T matrice $m \times n$

MATRICI HERMITIANE

A matrice $\quad A^T$ trasposta di A

$\underline{\left(A^T\right)^* = A^+}$ Matrice AGGIUNTA o Hermitiana coniugata ad A

$\left(A^+\right)_{ij} = A^*_{ji}$ + definisce l'OPERATORE AGGIUNTO

$A^T_{ij} = A_{ji}$

$$\underline{\left(u, A^+ v\right)} = u_i^* \left(A^+ v\right)_i = u_i^* A^+_{ij} v_j = u_i^* A^*_{ji} v_j =$$

$$= \left(A_{ji} u_i\right)^* v_j = \left(Au\right)^*_j v_j = \underline{\left(Au, v\right)}$$

$$\boxed{\left(u, A^+ v\right) = \left(Au, v\right)}$$

In generale non è detto, ma a volte succede che $A^+ = A$.

$$A^+ = A \iff A \text{ si dice Hermitiana}$$

A hermitiana $\Rightarrow (u, Av) = (Au, v)$

Supponiamo $u = v$: $(v, Av) = (Av, v)$

$\Rightarrow (v, Av) = (v, Av)^* \Rightarrow (v, Av) \in \mathbb{R}$

Alle grandezze fisiche sono associate matrici Hermitiane, perché corrispondono a numeri reali.

Esistono trasformazioni che conservano l'ortonormalità dei vettori?

MATRICI UNITARIE

(u, v) Voglio preservare il prodotto scalare.

$u \xrightarrow{M} \tilde{u} = Mu$

$v \xrightarrow{M} \tilde{v} = Mv$

$(u, v) \xrightarrow{M} (\tilde{u}, \tilde{v}) = (Mu, Mv)$

Voglio che valga: $(u, v) = (Mu, Mv)$

Definisco l'operatore aggiunto M^+:

$(Mu, Mv) = (M^+ Mu, v) = (u, v)$

$\iff M^+ M = \mathbb{1}$ (matrice identità)

$$M^+ M = \mathbb{1} \iff M \text{ matrice UNITARIA}$$

Facciamo un esercizio:

$\det[M^+ M] = \det[M^+] \det[M] = (\det[M])^* \det[M]$

$\Rightarrow \det[M^+ M] = |\det[M]|^2 = 1$

$\Rightarrow$ le matrici unitarie hanno determinante non nullo

$\Rightarrow$ non sono matrici singolari

$\Rightarrow \exists$ sempre l'inverso: M^{-1}

$$\Longrightarrow \quad M^+ M M^{-1} = \mathbb{1} M^{-1}$$

$$M^+ = M^{-1}$$

Quindi vale:

$$\boxed{M^+ M = M M^+ = \mathbb{1}}$$

$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$

Se invece che su $\mathbb{C}$ siamo su $\mathbb{R}$, prendere l'aggiunto di una matrice significa prendere il trasposto:

$A_{ji} \in \mathbb{R}$, $A^+ = A^T \Longrightarrow$

$$\begin{cases} \text{Hermitiane} \equiv \text{Simmetriche} \\ \text{Unitarie} \equiv \text{Ortogonali} \end{cases}$$

In $\mathbb{R}^3$ le ortogonali corrispondono a rotazioni rigide.

Ci sono anche, di nuovo in $\mathbb{C}$, le matrici normali:

MATRICI NORMALI

Vale: $N^+ N = N N^+$

(ma non fa per forza $\mathbb{1}$ come per le unitarie).

Esempio di matrici in $n=2$:

Matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dimostrare che sono Hermitiane.

Insieme alla matrice $\mathbb{1}$, queste costituiscono una base per $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

Tornando alla trasformazione T:

$$T: V \longrightarrow V' \qquad \text{pongo } V' = V$$

$$\Rightarrow T: V \longrightarrow V$$

facciamo un cambiamento di base con una matrice UNITARIA.

U unitaria trasforma basi ortonormali in basi ortonormali.

$$\begin{array}{ccc} v & \xrightarrow{U} & \tilde{v} = Uv \\ \Big\downarrow T & & \Big\downarrow \tilde{T} = ? \\ v' = Tv & \xrightarrow{U} & \tilde{v}' = Uv' \end{array}$$

In che modo sono collegati $\tilde{v}$ e $\tilde{v}'$?

$$\tilde{v}' = \tilde{T}\tilde{v} = \tilde{T}Uv$$
$$\tilde{v}' = Uv' = UTv = UTU^{-1}\tilde{v} \quad \Rightarrow \quad \tilde{T} = UTU^{-1}$$

$$\boxed{\tilde{T} = UTU^{+}} \quad \text{(perché } U \text{ unitaria)}$$

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{v} = Uv \\ \tilde{T} = UTU^{+} \end{cases}}$$

TRASFORMAZIONE CANONICA (UNITARIA)

Una generica trasformazione STS^{-1} si dice canonica o di SIMILITUDINE.

10-03-2009

H Hermitiana $\Longrightarrow H^+ = H$, $(v, Hv) = (H^+v, v) =$
$= (Hv, v) = (v, Hv)^* \in \mathbb{R}$

U Unitaria $\Longrightarrow$ $(u, v) = (\tilde{u}, \tilde{v})$

(u, v) $u \longrightarrow Uu = \tilde{u}$
$v \longrightarrow Uv = \tilde{v}$

$UU^+ = \mathbb{1} = U^+U$, $U^+ = U^{-1}$

$T : V \longrightarrow V$ $T \longrightarrow \tilde{T} = UTU^{-1}$ trasformazione di similitudine
Se in questa trasformazione U è unitaria, $\tilde{T} = UTU^+$ e una base ortonormale RESTA ortonormale.

A matrice qualsiasi $n \times m$
$A \longrightarrow UAU^{-1} \equiv \tilde{A}$
$Tr(A)$ è una operazione lineare
$Tr(A) = A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}$
$Det[A]$ non è lineare
Se passo da A ad $\tilde{A}$, come cambiano $Tr(A)$ e $det[A]$?
Per ora non sfrutto l'unitarietà di U.
$Tr(\tilde{A}) = Tr(UAU^{-1}) = Tr(UU^{-1}A)$
$det[\tilde{A}] = det[UAU^{-1}] = det[UU^{-1}A]$
Moltiplicando due matrici, la traccia e il determinante non cambiano: $Tr(AB) = Tr(BA)$, $det[AB] = det[BA]$.
$\Longrightarrow Tr(\tilde{A}) = Tr(\mathbb{1}A) = Tr(A)$
$det[\tilde{A}] = det[\mathbb{1}A] = det[A]$
U può essere o non essere unitario, ma sotto una trasformazione canonica non variano comunque Tr e det.
Supponiamo A hermitiana:
$A = A^+$
$A \longrightarrow \tilde{A} = UAU^{-1}$
L'hermiticità viene preservata dalla trasformazione canonica? $\tilde{A}^+ = ?$ $\underline{\tilde{A}^+ = \tilde{A}}$?

$(\tilde{A})^+ = (UAU^{-1})^+$ $\qquad$ $(AB)^+ = B^+A^+$

$\Rightarrow (UAU^{-1})^+ = (U^{-1})^+ A^+ U^+$

Soltanto se U è unitaria ($U^{-1} = U^+ = U$) si può scrivere:

$= (U^+)^+ A^+ U^+ = UA^+U^+ = UAU^+ \equiv \tilde{A}$ (per ipotesi $A = A^+$)

Se la trasformazione canonica non è fatta attraverso una matrice unitaria, il trasformato di una matrice hermitiana può non essere hermitiano.

U unitaria $\Rightarrow$ preserva ortonormalità e unitarietà

Problema autovalori - autovettori

A matrice $\quad v$ vettore $\quad A: V \to V \quad v \in V$

Esiste la possibilità che $\boxed{Av = av}$, $a \in \mathbb{C}$?

bisogna trovare sia gli autovettori (v) che gli autovalori (a) che verificano questa relazione.

Gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa:

$$A(av) = aAv = aav = a(av) \qquad a \in \mathbb{C}$$

Prendiamo una combinazione lineare di autovettori dell'autovalore a: essa è sempre autovettore dell'autovalore a.

Per ogni autovalore a esiste un sottospazio di autovettori. La dimensione di tale sottospazio si chiama DEGENERAZIONE dell'autovettore, o anche MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA.

Supponiamo che la dimensione (d) sia $= 1$:

In questo caso l'autovalore è non degenere, ma in generale non succede.

Per trovare una soluzione non banale occorre imporre l'EQUAZIONE CARATTERISTICA:

$$\det[A - \alpha \mathbb{1}] = 0 \iff n \text{ soluzioni } \in \mathbb{C}$$

L'equazione secolare è un sistema di grado n $\Rightarrow$ ha n soluzioni. Ma non è detto che siano tutte distinte $\Rightarrow$ MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA.

Due tipi diversi di molteplicità.
Quando la degenerazione è > 1, in genere la molteplicità algebrica NON coincide con la molteplicità geometrica e posso non riuscire a trovare n autovettori linearmente indipendenti.
↳ n dimensione dello spazio

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$\det[A - \lambda \mathbb{1}] = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (molteplicità algebrica)
$\Rightarrow$ 1 autovalore doppio.
Come sono fatti gli autovettori?

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x+y = x \\ y = y \end{cases}$$

L'unico autovettore <u>normalizzato</u> che trovo è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Doppio autovalore, unico autovettore. $d = 2$
Degenerazione dell'autovalore

Quando la matrice è hermitiana (nei $\mathbb{R}$ simmetrica) questo non succede.
Se passo da A ad $\tilde{A} = UAU^{-1}$ come cambiano autovalori e autovettori?

$$\tilde{A}\tilde{v} = \lambda \tilde{v}$$

Consideriamo l'equazione secolare associata al nuovo problema:

$$\det\left[UAU^{-1} - \lambda \mathbb{1}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \det\left[UAU^{-1} - \lambda UU^{-1}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \det\left[U(A - \lambda \mathbb{1})U^{-1}\right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow \det\left[A - \lambda \mathbb{1}\right] = 0$$ per quanto primo mostrato.

Gli autovalori sono gli stessi:

$$\tilde{v} = Uv \Longrightarrow \tilde{A}\tilde{v} = UAU^{-1}(Uv) = UA\mathbb{1}v = UAv = Ua v = a\,Uv = a\tilde{v} \Rightarrow \underline{\tilde{A}\tilde{v} = a\tilde{v}}$$

$$\begin{cases} v \to \tilde{v} \\ a \to a \end{cases}$$

Per dimostrare questo basta una generica trasformazione canonica, non operata attraverso una matrice unitaria.

Cosa succede se A è una matrice hermitiana?

$A = A^+$ $\quad \underline{Av = av}$, $v \neq 0$

Si dimostra che:

- gli autovalori sono <u>reali</u>: $a \in \mathbb{R}$
- autovettori relativi ad autovalori <u>distinti</u> sono <u>ortogonali</u>.

Dimostrazione punto 1

$Av \quad (v, Av) = (v, av) = a\|v\|^2 \quad \|v\|^2 > 0$

$(A^+ v, v)$

$(Av, v) \in \mathbb{R} \qquad a = \dfrac{(v, Av)}{\|v\|^2} \in \mathbb{R}$

$(v, Av)^*$

Dimostrazione punto 2

$Av = av \quad Au = bu \quad b \neq a \quad a, b \in \mathbb{R}$

$(u, Av) = (u, av) = a(u, v)$

$(v, Au) = b(v, u)$

Per le proprietà del prodotto scalare:

$(v, Au) = (Au, v)^* = (bu, v)^* = b(u, v)^* \quad (b \in \mathbb{R})$

$(v, Au)^* = b(v, u)^* = b(u, v)$

$(A^\dagger u, v) = (u, A^\dagger v) = (u, Av) = a(u, v)$

$\Longrightarrow b(u, v) = a(u, v)$

$(b-a)(u, v) = 0$

ma per ipotesi $b - a \neq 0 \Rightarrow (u, v) = 0$

$\Rightarrow u, v$ ortogonali.

Esempio

$n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2i & 0 \\ -2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^+ = \begin{pmatrix} 1 & +2i & 0 \\ -2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$\Rightarrow A$ hermitiana

Voglio trovare autovalori e autovettori.

- La traccia è la somma degli autovalori (se la matrice è diagonalizzata)

$\mathrm{Tr}[A] = \mathrm{Tr}[A \text{ diagonalizzata}] = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{Tr}[\tilde{A}] = 3$

$\det[A] = \det[\tilde{A}] = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 - 4 = -3$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

Se fossi in $n = 2$ avrei già la soluzione.

$\det[A - a\mathbb{1}] = 0$

$$\begin{Vmatrix} 1-a & 2i & 0 \\ -2i & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{Vmatrix} = (1-a)\left[(1-a)^2 - 4\right] =$$

$= (1 + a^2 - a - 4)(1 - a) = (1 - a)(a^2 - a - 3) = 0$

$\Rightarrow a_1 = 1$

$a_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1+3} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -1 \\ a_3 = 3 \end{cases}$ no degenerazione algebrica.

Come si trovano gli autovettori? $Av = av$

1°
$$\begin{pmatrix} 1 & 2i & 0 \\ -2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2iy = x \\ -2x + y = y \\ z = z \end{cases} \Rightarrow (0, 0, z) \quad \text{normalizzato: } (0, 0, 1)$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|v_1\| = 1$$

2° $(x, ix, 0)$

$$v_2 = \begin{pmatrix} x \\ ix \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \|v_2\| = 1 \Rightarrow (x, -ix, 0) \begin{pmatrix} x \\ ix \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3° $v_3 = (x, -x, 0) \xrightarrow{\|v_3\| = 1} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$

Verificare che $(v_1, v_2) = (v_2, v_3) = (v_1, v_3) = 0$.

11-03-2009

Data una matrice Hermitiana, il set dei suoi autovettori costituisce una base per lo spazio di dimensione n (matrice $n \times n$).

Esempio caso A: n autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2i & 0 \\ -2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = 3$$

Il set di autovettori è ortonormalizzato $(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)})$

N.B. Set di vettori linearmente indipendenti:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v^{(i)} = 0 \iff \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$$

n vettori a due a due ortogonali fra loro $\Longrightarrow$ questi sono linearmente indipendenti $\Longrightarrow$ costituiscono una base

Dimostrazione

$$\sum \alpha_i v^{(i)} = 0 \iff \sum \alpha_i \left(v^{(j)}, v^{(i)}\right) = 0 \iff \sum \alpha_i \delta_{ij} = 0$$

$$\iff \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots n$$

$\{v^{(1)}, \dots, v^{(n)}\}$ autovettori normalizzati di una hermitiana $n \times n$ con n autovalori distinti $\Longrightarrow$ costituiscono una base per lo spazio V_n (ortonormale)

$$UAU^{+} = \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ costituita dai suoi autovettori

E se gli autovalori non sono tutti distinti?
Supponiamo di avere un autovalore λ con degenerazione m: (λ degenere)

$\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_m$

λ = autovalore con molteplicità $m \leq n$

w = autovettore dell'autovalore λ

Set autovalori: $\{\lambda, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\}$
(questi sono n autovalori)

$\Rightarrow w$ è ortogonale agli autovettori degli autovalori successivi a λ:

$(w, v^{(k)}) = 0 \qquad k = m+1, \dots, n$

m autovalori coincidenti, $n-m$ autovalori distinti.

V_n = somma diretta di due spazi ortogonali tra loro

$V_n = V_m \oplus V_{n-m}$

I vettori di V_m sono tutti autovettori di A relativi all'autovalore degenere λ. In questo spazio posso sempre trovare m vettori linearmente indipendenti che ne costituiscono la base, con un processo di ortogonalizzazione. Questi saranno combinazione lineare di autovettori di $\lambda \Rightarrow$ sono anche questi autovettori di λ, linearmente indipendenti, ortogonali a due a due, normalizzati a 1. Sono anche ortogonali a tutti gli altri autovettori $v^{(k)}$ di A.

DIAGONALIZZAZIONE di una MATRICE

$\{v^{(1)}, \dots, v^{(n)}\}$ = autovettori di una base hermitiana
= base ortonormale per V_n

Se A non fosse hermitiana V_m e V_{n-m} non sarebbero ortogonali.

Tutto questo, tranne il fatto che gli autovalori siano reali, è vero anche per le matrici NORMALI:

$$NN^+ = N^+N$$

Prendo un qualsiasi vettore $u \in V_n$: posso esprimerlo come combinazione lineare degli elementi della base.

$$u = \sum_{j=1}^{n} (v^{(j)}, u)\, v^{(j)}$$

$$\|u\|^2 = (u, u) = \sum_{j=1}^{n} |(v^{(j)}, u)|^2$$

$u, w \in V_n$

$$(u, w) = \sum_{j=1}^{n} u_j^* w_j = \sum_{j=1}^{n} (u, v^{(j)})(v^{(j)}, w) \sim 1$$

(relazione di completezza)

α-esimo componente di u:

$$u_\alpha = \sum_{j=1}^{n} (v^{(j)}, u)\, v_\alpha^{(j)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} v_\beta^{(j)*} u_\beta v_\alpha^{(j)}$$

quindi $\sum\sum v_\beta^{(j)*} v_\alpha^{(j)}$ deve essere una delta di Kronecker.

$$u_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} v_\beta^{(j)*} v_\alpha^{(j)} \right) u_\beta = \sum_{\beta=1}^{n} \delta_{\alpha\beta} u_\beta = u_\alpha$$

La nostra base di autovettori è caratterizzata dalla relazione:

$$\sum_{j=1}^{n} v_\beta^{(j)*} v_\alpha^{(j)} = \delta_{\alpha\beta}$$

RELAZIONE DI COMPLETEZZA

C'è anche la relazione di ortonormalità tra i vettori della base:

$$\left(v^{(j)}, v^{(i)}\right) = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha^{(j)*} v_\alpha^{(i)} = \delta_{ij}$$

RELAZIONE DI ORTONORMALITÀ

La base è ortonormale e completa.

Definisco una matrice U tale che:

$$U^+ = \left(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)} \right)$$

è una matrice $n \times n$ costituita da autovettori colonna di A.

$$U = \begin{pmatrix} v^{(1)*} \\ v^{(2)*} \\ \dots \\ v^{(n)*} \end{pmatrix} \quad \text{(trasposta coniugata di } U^+ \text{)}$$

Dimostriamo che, grazie a completezza e ortonormalità, U è unitaria: $U^+U = UU^+ = \mathbb{1}$

$$\left(UU^+\right)_{ij} = U_{ik} \left(U^+\right)_{kj} \quad \text{(somma su } k\text{)}$$

$$= v_k^{(i)*} v_k^{(j)} = \delta_{ij} \text{ per l'ortonormalità.}$$

$$UU^+ = \mathbb{1}$$

$$\left(U^+U\right)_{ij} = \left(U^+\right)_{ik} U_{kj} = v_i^{(k)} v_j^{(k)*} = \delta_{ij} \text{ per la completezza}$$

$$U^+U = \mathbb{1} = UU^+ \Rightarrow U \text{ unitaria}$$

Abbiamo costruito una matrice a partire dalle basi degli autovettori di A. Le unitarie sono "fatte apposta" per i cambiamenti di base.

$$A \longrightarrow \tilde{A} = UAU^+ \quad (A \text{ generica in } V_n)$$

$$\left(UAU^+\right)_{ij} = \left(v^{(i)}, A v^{(j)}\right) \quad v \text{ autov. della hermitiana di partenza.}$$

Cosa succede se A è l'hermitiana di partenza? $v^{(i)}$ e $v^{(j)}$ sono suoi autovettori.

$$\left(v^{(i)}, A v^{(j)}\right) = \left(v^{(i)}, \lambda_j v^{(j)}\right) = \lambda_j \left(v^{(i)}, v^{(j)}\right)$$

$$= \lambda_j \delta_{ij} \Longrightarrow \tilde{A} \text{ diagonale}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$$

Una matrice hermitiana è sempre diagonalizzabile (e ha autovalori reali).

Riprendiamo l'esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2i & 0 \\ -2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A v^{(1)} = \lambda_1 v^{(1)} = 1\, v^{(1)}$$
$$A v^{(2)} = \lambda_2 v^{(2)} = -1\, v^{(2)}$$
$$A v^{(3)} = \lambda_3 v^{(3)} = 3\, v^{(3)}$$

Mi aspetto che:

$$A \to \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad v^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = UAU^+ = U(AU^+)$$

$$= \frac{U}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & -i & -3i \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$$

c.v.d.

12/03/2009

La realtà degli autovalori è propria solo delle matrici hermitiane.

$$N^+N = NN^+$$
$$H = H^+$$
$$U^+U = UU^+ = \mathbb{1}$$

Parliamo delle matrici normali:

$$[N, N^+] = NN^+ - N^+N = 0$$

La matrice commuta con la sua aggiunta.

COMMUTATORE di A con B

$$[A, B] = AB - BA$$

Se A e B commutano, il loro commutatore è nullo.

- $[A, A] = 0$
- $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

  infatti: $[AB, C] = ABC - CAB = ABC - ACB + ACB - CAB$
  $= A(BC - CB) + (AC - CA)B$

ANTICOMMUTATORE di A con B

$$[A, B]_+ = AB + BA$$

- $[AB, C]_+ = A[B, C]_+ - [A, C]_+ B$

Prendiamo due matrici A e B tali che $[A, B] = 0$ (A, B hermitiane).

$\Longrightarrow \exists$ una base comune di autovettori nella quale si possono diagonalizzare simultaneamente A e B.

Dimostrazione

$AB = BA \qquad Av = av \implies A(Bv) = a(Bv)$

$\Longrightarrow BAv = aBv$ $\quad Bv$ è ancora un autovettore dell'autovalore a.

$\Rightarrow w = Bv \qquad Aw = aw$

Se a non è degenere c'è solo una soluzione: $Bv \propto v$

$\Rightarrow Bv = bv$

v è autovettore di A relativo all'autovalore a,
v è autovettore di B relativo all'autovalore b.

$\Rightarrow$ il set di autovettori di A è una base in cui si diagonalizzano sia A che B.

Vale anche l'inverso:

Se A e B hanno una base comune di autovettori, allora A e B commutano.

Dimostrazione

Diagonalizzo A e $B \Longrightarrow$ le <u>matrici diagonali commutano sempre</u>.

Commutare con una certa matrice è una proprietà intrinseca?

Supponiamo $[A,B] = 0$

Operiamo una trasformazione attraverso un operatore unitario:

$A \longrightarrow \tilde{A} = UAU^+$

$B \longrightarrow \tilde{B} = UBU^+$

$\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ commutano?

$[\tilde{A}, \tilde{B}] = ?$

$\tilde{A}\tilde{B} = UAU^+UBU^+ = UABU^+ = UBAU^+ = UBU^+UAU^+ = \tilde{B}\tilde{A}$

$\Rightarrow \tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A} \Leftrightarrow [\tilde{A}, \tilde{B}] = 0.$

In realtà va bene qualsiasi trasformazione canonica.

(Bastava $UU^{-1} = \mathbb{1}$)

Supponiamo di avere una certa funzione applicata ad una matrice A:

$F(A)$ es.: e^A

Posso svilupparla con Taylor, tenendo presente che il commutatore di una potenza n-esima di A è sempre nullo. ($A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, ...)

$$e^A = \mathbb{1} + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

$A v = a v$

$F(A) v = ?$

Posso vederla come una somma infinita:

$$F(A) v = \left(\sum_s f_s A^s \right) v$$

$A^s v = a^s v$

$$F(A) v = \left(\sum_s f_s a^s \right) v \quad \text{combinazione lineare}$$

$$= F(a) v$$

$F(A)$ operatore, $F(a)$ numero complesso.

Grazie alla linearità dello spazio, si può affermare che, dato un operatore ed una funzione,

$$A v = a v \implies F(A) v = F(a) v$$

Si può ragionare in altro modo:

A hermitiana $\implies$ A diagonalizzabile

$$\exists\, U \in \underline{U(n)} : A \longrightarrow \tilde{A} = U A U^+ = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{pmatrix}$$

trasformazioni unitarie in n dimensioni

$$\Rightarrow F(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} F(a_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F(a_m) \end{pmatrix}$$

Vogliamo $F(A)$.

Usiamo la trasformazione inversa: $\tilde{A} \longrightarrow A = U^+ \tilde{A} U$

$$F(A) = U^+ \begin{pmatrix} F(a_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F(a_m) \end{pmatrix} U$$

Esercizio

Supponiamo di voler calcolare e^{A+B}:

$$e^{A+B} \neq e^A e^B$$

Solo in un caso $e^{A+B} = e^A e^B$: succede solo se $[A,B] = 0$.

$$e^{A+B} \longrightarrow \sum_k \frac{(A+B)^k}{k!}$$

$$e^A e^B \longrightarrow A^\ell B^{k-\ell} \longrightarrow \sum_k \sum_{\ell=0}^{k} \frac{A^\ell}{\ell!} \frac{B^{k-\ell}}{(k-\ell)!}$$

(per confrontare i termini k-esimi)

Metodo "del fisico":

$$\begin{cases} A \longrightarrow \tilde{A} = UAU^+ \\ B \longrightarrow \tilde{B} = UBU^+ \end{cases} \qquad \tilde{A}, \tilde{B} \text{ diagonali}$$

Valuto e^{A+B} sulla base comune; valuto $e^{\tilde{A}+\tilde{B}}$.

$$e^{\tilde{A}+\tilde{B}} = \begin{pmatrix} e^{a_1+b_1} & & 0 \\ & e^{a_2+b_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & e^{a_n+b_n} \end{pmatrix} = e^{\tilde{A}} e^{\tilde{B}}$$

$$[A,B] = 0 \Longrightarrow \boxed{e^{\tilde{A}+\tilde{B}} = e^{\tilde{A}} e^{\tilde{B}}} \quad \text{(si diagonalizzano insieme)}$$

$U^+ e^{\tilde{A}+\tilde{B}} U = ?$

$U^+ e^A U =$ (sviluppo con Taylor)

$= U^+ [\mathbb{1} + A + A^2/2 + \dots] U =$

$= U^+U + U^+AU + U^+A^2U/2 + \dots$

$= e^{U^+AU}$

Quindi:

$$U^+ e^{\tilde{A}+\tilde{B}} U = e^{U^+(\tilde{A}+\tilde{B})U} = e^{A+B}$$

$(U^+ e^{\tilde{A}} U = e^A, \quad U^+ e^{\tilde{B}} U = e^B)$

$U^+ e^{\tilde{A}+\tilde{B}} U = U^+ e^{\tilde{A}} e^{\tilde{B}} U = U^+ e^{\tilde{A}} U U^+ e^{\tilde{B}} U = e^A e^B = e^{A+B}$ c.v.d.

(partendo da $e^{\tilde{A}+\tilde{B}} = e^{\tilde{A}} e^{\tilde{B}}$)

L'esponenziale si fattorizza: $e^{A+B} = e^A e^B$

Esercizio

$U \in U(n) \iff \exists\, H$ hermitiano t.c. $U = e^{iH}$

Dimostrazione

- Come sono fatti gli autovalori di una matrice unitaria?

$Uv = \lambda v$

$(Uv, Uv) = (Uv, \lambda v) = (\lambda v, \lambda v) = \lambda^* \lambda (v, v)$

$$(Uv, Uv) = (U^\dagger U v, v) = (v, U^\dagger U v) = (v, v)$$

$$\Rightarrow (v, v) = \lambda^* \lambda (v, v)$$

$$\Rightarrow \lambda^* \lambda = 1 \Rightarrow \|\lambda\|^2 = 1 \qquad \boxed{|\lambda|^2 = 1}$$

Numero complesso di modulo 1 $\Rightarrow$ si trovano, nel piano complesso, sul cerchio unitario e sono fattori di fase del tipo $e^{i\theta}$.

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_i = e^{i\theta_i}}$$

Tornando alla dimostrazione.

$\Leftarrow$

$H = H^\dagger \Rightarrow H$ diagonalizzabile $\Rightarrow \exists\, P \in U(n)$:

$$H \longrightarrow \tilde{H} = P H P^\dagger \qquad (P P^\dagger = P^\dagger P = \mathbb{1})$$

$$\tilde{H} := D \quad \text{(diagonale)}$$

Valutiamo e^{iH}:

$$e^{iH} = e^{iP^\dagger D P} = P^\dagger e^{iD} P \qquad e^{iD} = \begin{pmatrix} e^{id_1} & & 0 \\ & e^{id_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & e^{id_n} \end{pmatrix}$$

$$\left(e^{iH}\right)^\dagger = \left(P^\dagger e^{iD} P\right)^\dagger = P^\dagger e^{-iD} P$$

Devo dimostrare che $\left(e^{iH}\right)\left(e^{iH}\right)^\dagger = \mathbb{1}$

$$(\quad)(\quad) = P^\dagger e^{iD} P P^\dagger e^{-iD} P = P^\dagger \mathbb{1} P = \mathbb{1} \qquad \text{c.v.d.}$$

$\Rightarrow$

$U \in U(n)$ U è anche normale $\Rightarrow$ può essere diagonalizzata e i suoi autovalori sono fattori di fase

$$\exists\, Q \in U(n) : \; U \longrightarrow \tilde{U} = Q U Q^\dagger = \begin{pmatrix} u_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_n \end{pmatrix}$$

$|u|^2 = 1 \qquad u_i = e^{i\theta_i}$

Prendo la matrice diagonale H' fatta così:

$$H' = \begin{pmatrix} \theta_1 & & 0 \\ & \theta_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \theta_n \end{pmatrix}$$

$H' \in \mathbb{R}^{n*m}$ simmetrica $\Rightarrow$ hermitiana

Considero la trasformata inversa:

$H := Q^+ H' Q \Rightarrow H$ hermitiana

$e^{iH} = U$ c.v.d.

Decomposizione spettrale di un operatore

n dimensioni.

$V = V_1 \oplus V_2$ V_2 complemento ortogonale di V_1

$v = v_1 + v_2$

Esistono operatori P di proiezione tali che:

$P_1 v = v_1$

$P_2 v = v_2$ $\underline{P_i}$ PROIETTORI

<u>Proprietà</u>

$P = P^+$

$P^2 = P$

$P_1 P_2 = 0$

Consideriamo i proiettori sui sottospazi associati agli autovettori

$P_1 \dots P_k$

Prendo un <u>generico</u> v

$P_i v$ = autovettore associato all'i-esimo autovalore.

$P_1 + \dots + P_k = \mathbb{1}$

Prendo un generico vettore u:

$A(u) = A(P_1 u + P_2 u + \dots + P_k u)$ (u proiettato lungo gli autovettori)

$= A(u_1 + \dots + u_k)$

u_i autovettori di A.

$$\Rightarrow A(u) = a_1 u_1 + \dots + a_K u_K = a_1 P_1 u + \dots + a_K P_K u =$$
$$= (a_1 P_1 + \dots + a_K P_K)\, u$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \sum_{i=1}^{K} a_i P_i}$$

Decomposizione spettrale di un operatore A

17/03/2009

→ Spazi vettoriali a infinite dimensioni

Linearità per tutti gli spazi studiati ⇒ principio di sovrapposizione.

Partiremo da un tipico problema (soluzione dell'equazione delle onde) → soluzione = spazio vettoriale di funzioni → dimensione infinita

EQUAZIONE DELLE ONDE in 1+1 DIMENSIONE (x, t)

La nostra incognita è una funzione $u = u(x, t)$: non basta più una equazione del tipo $\ddot{x} + x = 0$, dove compaiono solo derivate totali (ordinarie). Compariranno termini parziali in x, in t, o in entrambe $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \dots\right)$

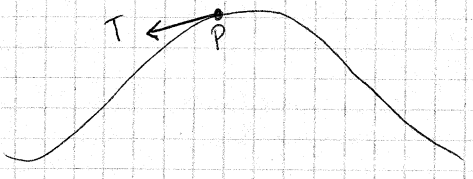
Cosa descrive l'equazione delle onde?

- disturbo propagato su una corda "pizzicata"
- cambiamenti di pressione dovuti ad uno stantuffo
- ...

In sostanza, la propagazione di un fenomeno ondulatorio.

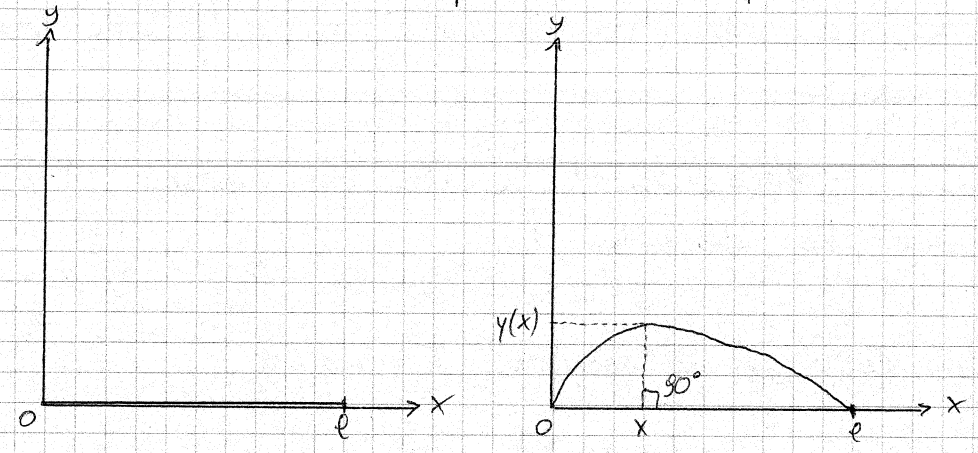
Per ora si lavorerà in una sola dimensione, ma anche in più dimensioni la tipologia di equazione non cambia, cambia solo la geometria.

Supponiamo di avere una corda di lunghezza ℓ in equilibrio sull'asse x. La corda è perfettamente elastica, ovvero non oppone alcuna resistenza alla sua deformazione ⇒ la tensione è di modulo costante e sempre tangente alla corda

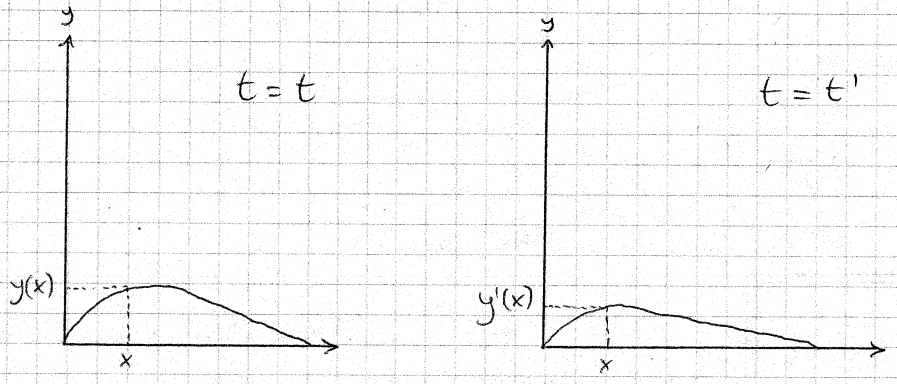


La tensione è la forza che la parte del filo a destra di P esercita sulla parte a sinistra.

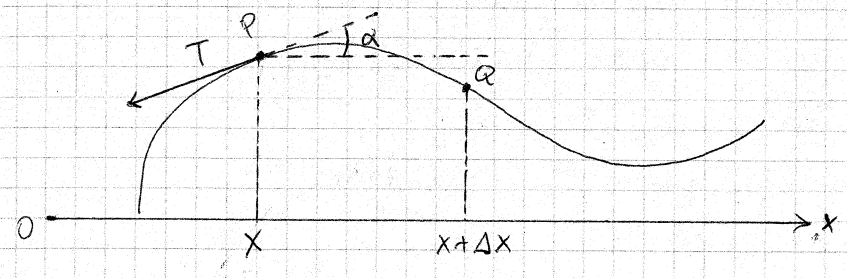
Trascuriamo la forza peso della corda e supponiamo che tutte le deformazioni della corda siano ortogonali, punto per punto, alla posizione di riposo.



Questo tipo di onda si dice trasversale.
Sull'asse delle ordinate misuriamo la deformazione corrispondente ad un certo punto sulla corda: $y = y(x)$
y varia anche in funzione del tempo.
Al tempo $t+dt$, in generale, $y(x)$ sarà diverso dall'$y(x)$ del tempo t.



Perciò introduciamo una funzione sia della coordinata sia del tempo. $u = u(x, t)$



$T_y = T \operatorname{sen}\alpha$
Le deformazioni sono piccole $\Rightarrow$
$T \operatorname{sen}\alpha \approx T \operatorname{tg}\alpha$

Per la definizione di tangente, $\operatorname{tg}\alpha := \frac{\partial u}{\partial x}$
$\Rightarrow T_y = T \frac{\partial u}{\partial x}$

- corda omogenea $\Rightarrow$ tensione costante in modulo
- deflessione solo ortogonale ad $x \Rightarrow$ nel bilancio delle forze ha valore solo T_y
- corda perfettamente flessibile $\Rightarrow$ T tangente alla corda in ogni punto.

Consideriamo l'elemento di corda con estremi P e Q: se la corda ha densità λ,

$$\Delta m \approx \lambda \Delta x$$

Applichiamo la legge di Newton $F = ma$:

$$\lambda \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_y|_{x+\Delta x} - T_y|_x = \Delta T_y$$

Posso vedere ΔT_y come un differenziale:

$$\Delta f(x) = f'(x) \Delta x$$

Quindi:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta T_y}{\Delta x} = \frac{\partial T_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial u}{\partial x}\right) = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Si ottiene dunque:

$$\lambda \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x$$

È vera $\forall \Delta x$, possiamo dividere per Δx:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

(PDE: partial differential equation)
EQUAZIONE DELLE ONDE

u è la funzione, trasversale rispetto ad x, che descrive lo spostamento istantaneo del tratto di corda.

Questa equazione descrive anche la propagazione della pressione lungo un tubo unidimensionale (in quel caso u è la pressione).
È la stessa equazione per tutti i fenomeni ondulatori unidimensionali.

Per risolvere una ODE (ordinary differential equation) "bastano" tante condizioni iniziali quanto è l'ordine dell'equazione.

Per risolvere una PDE devo imporre una condizione iniziale, ma devo fornire anche condizioni al contorno per ogni variabile indipendente:

$$\begin{cases} \text{PDE} \\ \text{condizioni iniziali } (t=t_0) \\ \text{condizioni al contorno} \end{cases}$$

Le condizioni al contorno dipendono pesantemente dalla geometria del problema.

Quali sono le dimensioni di T/λ?

$\frac{[T]}{[\lambda]}$ → A causa dell'equazione d'onda mi aspetto che sia uno spazio al quadrato su un tempo al quadrato.

$\frac{[L]^2}{[t]^2} = [v]^2$

Poniamo $T/\lambda := v$. v è un numero conosciuto (conosco T e λ, caratteristiche del sistema).

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Facciamo un cambio di variabili:

$$\{x, t\} \longrightarrow \{\xi, \eta\}$$

$$\begin{cases} \xi = x + vt \\ \eta = x - vt \end{cases}$$

$$u(x,t) \longrightarrow u\left(\xi(x,t), \eta(x,t)\right)$$

L'equazione diventa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot 2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = v \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -v$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = v\frac{\partial u}{\partial \xi} - v\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot v^2 + v\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} - v\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial t} - v\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2v^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + v^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

Sostituisco nell'equazione:

$$v^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2v^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + v^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - v^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2v^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - v^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

Rimane:

$$-4v^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

$-4v^2 \neq 0$ sempre

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

$u = u(\xi, \eta)$ La derivata seconda parziale mista è nulla. Posso leggere così:

$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = F(\eta)$, non dipende da ξ

$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \xi} = F(\xi)$

$$\int \frac{\partial u}{\partial \eta}\, d\eta = \int F(\eta)\, d\eta$$

$$u(\xi, \eta) = g(\eta) + f(\xi)$$

↑ parte costante

La soluzione più generale della nostra PDE è del tipo:

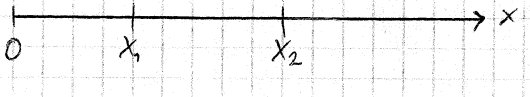
$$\boxed{u(x,t) = g(x - vt) + f(x + vt)}$$

(Sovrapposizione di due funzioni, una di ξ e una di η)

Consideriamo $\eta = x - vt$.

x_1, x_2

Scegliamo x_1 e x_2 tali che $x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$



$\Rightarrow x_2 - v t_2 = x_1 - v t_1$

Il profilo in η si propaga in maniera costante con velocità v, verso le x positive: la g è rappresentabile così, qualunque funzione sia.

Invertendo v con $-v$ si trova che il segnale in f viaggia a velocità costante $-v$, quindi nel verso opposto.

La soluzione generale, punto per punto e istante per istante, è la sovrapposizione di questi due segnali.

In seguito espliciteremo i due segnali.

18-03-2009

EQ. DELLE ONDE (EQ. di D'ALEMBERT)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{PDE}$$

$u = u(x,t)$

Dal punto di vista analitico stiamo parlando di un OPERATORE L:

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$L[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$L[u] = 0$ → eq. omogenea

$L[u] = F(x)$ → eq. non omogenea

L è un operatore lineare. Questo implica che

$L[\alpha u + \beta w]$ con u, w soluzioni di $L[u] = 0$

$\|\|$ (L lineare) $\qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$\alpha L[u] + \beta L[w]$

$L[u_p] = F(x) \qquad u_o = u - u_p$

$\Rightarrow L[u_o] = L[u] - L[u_p] = 0$

Quindi, come sempre, dato che l'operatore è lineare,

$u = u_o + u_p$ (sol. omogenea + sol. particolare)

Supponiamo di prendere una combinazione del tipo:

$$L[u] = A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D\frac{\partial u}{\partial t} + E\frac{\partial u}{\partial x} + Fu$$

Questa è l'espressione più generale di <u>operatore lineare del 2° ordine</u>.

A questo operatore si associa il POLINOMIO CARATTERISTICO ove contano solo i coefficienti A, B e C.

Valutiamo $B^2 - 4AC = \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{OPERATORE IPERBOLICO} \\ = 0 \Rightarrow \text{PARABOLICO} \\ < 0 \Rightarrow \text{ELLITTICO} \end{cases}$

Nel nostro caso:

$$B^2 - 4AC = +4v^2 > 0$$

Il nostro operatore è iperbolico.

Un esempio di operatore parabolico è l'equazione del calore (o anche l'operatore di Schrödinger), uno ellittico è l'equazione di Laplace.

Se fossimo in 3+1 dimensioni ($\mathbb{R}^3 + t$) cosa diventa l'operatore?

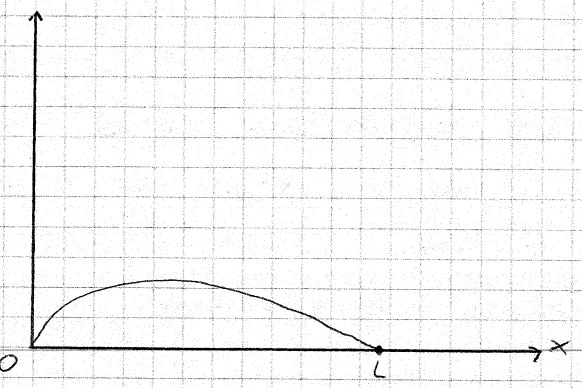
$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 u = 0$ (il Laplaciano di u è la somma delle derivate seconde spaziali di u).

Si dimostra che anche in questo caso l'equazione è iperbolica.

Se c'è isotropia il coefficiente è lo stesso ($-v^2$) per tutte le direzioni dello spazio.

Cerchiamo una soluzione di $L[u] = 0$.

- condizioni iniziali su t
- condizioni al contorno su x



Stiamo supponendo fissi gli estremi della corda.

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \text{(condizioni al contorno)} \end{cases} \quad (\forall t)$$

Supponiamo che la soluzione sia un prodotto di due funzioni, una che dipende dalla sola x ed una che dipende solo da t (separazione delle variabili).

$$u(x,t) := X(x)T(t)$$

Sostituiamo nell'equazione:

$$XT'' = v^2 X''T \quad (\text{ovvero: } XT_{tt} = v^2 X_{xx} T)$$

Divido tutto per XT:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{v^2}\frac{T''}{T}$$

A sinistra ho una funzione di x, a destra una funzione solo di t. C'è solo una soluzione: entrambi i termini devono essere costanti. Quindi:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{v^2}\frac{T''}{T} \equiv C$$

Restano due equazioni:

$$\begin{cases} X'' - CX = 0 \\ T'' - Cv^2 T = 0 \end{cases} \quad (\text{O.D.E.})$$

Risolviamo la prima:

$X'' - CX = 0$ differisce per un segno dall'eq. dell'oscillatore armonico.

Posso scrivere la soluzione generale così:

$$X(x) = Ae^{\sqrt{c}x} + Be^{-\sqrt{c}x}$$

Se c fosse reale avrei una combinazione di esponenziali (uno che cresce, uno che decresce); se c è complesso è una c.l. di termini oscillanti.

Sfruttiamo le due condizioni al contorno.

$$X(0) = 0 \qquad X(L) = 0$$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} X - cX = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$$

$$X(0) = 0 \iff A \cdot e^0 + Be^0 = 0 \iff B = -A$$

$$x(L) = 0 \iff A\left[e^{\sqrt{c}L} - e^{-\sqrt{c}L}\right] = 0$$

$$\Rightarrow e^{\sqrt{c}L} = \frac{1}{e^{\sqrt{c}L}}$$ Sui reali questo accade solo se $c = 0$

$\Rightarrow$ non esiste nessuna soluzione non nulla in $\mathbb{R}$. Ma siamo in $\mathbb{C}$, poi prenderemo la parte reale.

$\sqrt{c} := a + ib$ Sostituiamo: $(a, b \in \mathbb{R})$

$$e^{(a+ib)L} = e^{-(a+ib)L} \qquad \Rightarrow a = 0 \quad \text{(parte reale)}$$

$$\Rightarrow e^{ibL} = e^{-ibL} \Rightarrow bL = -bL + n2\pi$$

La soluzione è:

$$\begin{cases} \sqrt{c} = ib \\ bL = -bL + n2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{c} = i\frac{\pi}{L}n \\ b = n\pi/L \end{cases} \quad \text{(INFINITE SOLUZIONI)}$$

Torniamo al punto di partenza:

$$X(x) = Ae^{\sqrt{c}x} + Be^{-\sqrt{c}x}$$

$$X(x) = A\left(e^{in\frac{\pi}{L}x} - e^{-in\frac{\pi}{L}x}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \infty$$

Definiamo: $\boxed{k_n = n\frac{\pi}{L}}$

$$X(x) = A\left(e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}\right) = A \cdot 2i \cdot \text{sen}(k_n x)$$

(per le proprietà dei numeri complessi)

Chiamo $a_n = 2iA$. Restano infinite soluzioni:

$$\boxed{X_n(x) = a_n \,\text{sen}(k_n x)} \quad \forall n$$

Passiamo a $T(t)$. Ancora non abbiamo fissato condizioni iniziali.

$$c = (\sqrt{c})^2 = -\frac{\pi^2}{L^2} n^2 = -k_n^2$$

$$T'' - c v^2 T = 0$$

$$\Rightarrow T'' + k_n^2 v^2 T = 0 \quad \text{oscillatore armonico}$$

Di questa conosciamo già la soluzione:

$$\boxed{T_n(t) = E_n \cos(\omega_n t + \delta_n)},$$

definendo $\boxed{\omega_n^2 := k_n^2 v^2}$

Fissato n, ONDA STAZIONARIA

$$\boxed{u_n(x,t) = A_n \operatorname{sen}(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n)} \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

$A_n = a_n \bar{E}_n$

Abbiamo soluzioni $\forall n$, quindi infinite.
Ci si aspetta che la soluzione generale del problema sia una combinazione di tutte queste
$\longrightarrow$ serie di funzioni.
Non abbiamo ancora imposto tutte le condizioni per trovare la soluzione.
Ogni u_n di questo tipo è un'onda stazionaria, l'equivalente dei "modi normali".
Ogni onda è combinazione di onde stazionarie.

Ad ogni sinusoidale si associa una lunghezza d'onda: $(\operatorname{sen}(k_n x))$

$$\lambda_n := \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2\pi L}{n\pi} = \frac{2L}{n}$$

Ogni singolo contributo* si chiama suono puro ed ha ampiezza dipendente dal periodo $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$

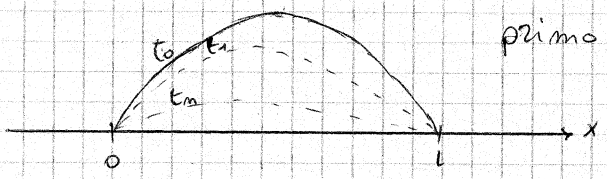
* sinusoidale

$n = 1$

$k_1 = \frac{\pi}{L}$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) = 0 \iff \frac{\pi}{L}x = k\pi \Rightarrow x = kL \;,\; k = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow$ la prima onda stazionaria si annulla solo in 0 e in L. Ha comunque ampiezza dipendente dal tempo.



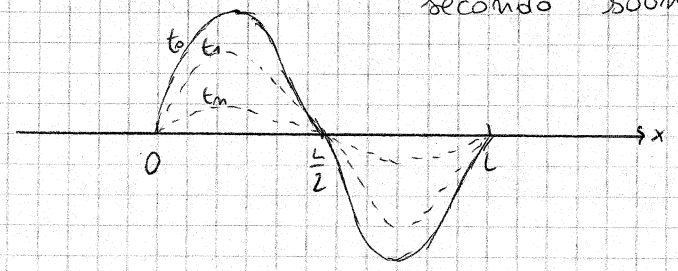
primo "suono puro"

$n = 2$

$k_2 = \frac{2\pi}{L}$

$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{L}x\right) = 0 \iff \frac{2\pi}{L}x = k\pi \Rightarrow x = \frac{kL}{2} \;,\; k = 1, 2, \ldots$

si annulla in $0, \frac{L}{2}, L$



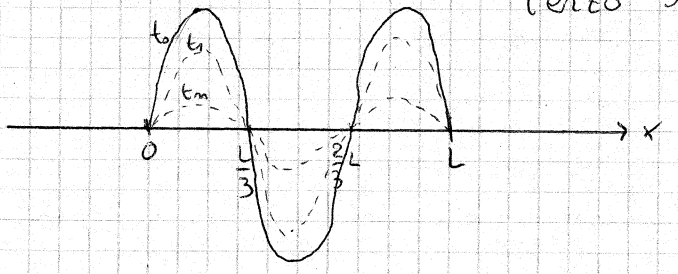
secondo "suono puro"

ampiezza sempre dipendente dal tempo.

$n = 3$

$k_3 = 3\frac{\pi}{L}$

$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{L}x\right) = 0 \iff \frac{3\pi}{L}x = k\pi \Rightarrow x = \frac{kL}{3}$



terzo "suono puro"

In seguito assegneremo le altre condizioni iniziali:

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$$

Poremo, per semplicità, $g(x)=0$.

Con queste condizioni, infine, il problema è ben posto.

La soluzione sarà una somma su n delle soluzioni onde stazionarie, del tipo:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(k_n x)\cos(\omega_n t + \delta_n)$$

Ovviamente A_n e δ_n verranno fissati utilizzando le nuove due condizioni iniziali.

Ad esempio, usando la prima:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(k_n x)\cos\delta_n$$

Usando la seconda:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(k_n x)\,\omega_n \operatorname{sen}(\omega_n t + \delta_n)$$

$$t=0 \Rightarrow -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(k_n x)\,\omega_n \operatorname{sen}\delta_n = 0$$

$$\Rightarrow \delta_n = 0 \quad \forall n$$

Domani lavoreremo su

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(k_n x)$$ che è una <u>SERIE di FOURIER</u>.

19-03-2009

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ problema ben posto.

Proliferazione di soluzioni:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(k_n x)\cos(\omega_n t) \quad \text{(Serie di funzioni)}$$

Con: $k_n = n\frac{\pi}{L}$ $\quad \omega_n = k_n v$ $\quad \delta_n = 0 \ \forall n$

Abbiamo sdo tradotto una situazione fisica in un modello matematico.

Ci aspettiamo che l'ampiezza a_n delle armoniche successive diminuiscano sempre di più perché la serie converga. Cerchiamo di determinare gli a_n.

PARENTESI MATEMATICA

$f(x)$ definita in un intervallo $[-L, L]$
generalmente continua (continua a tratti)
f' generalmente continua e limitata
Costruiamo la seguente serie:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Con:

$$a_0 \equiv \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n \equiv \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$\beta_n \equiv \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Questa si chiama Serie di Fourier di $f(x)$ relativa all'intervallo $[-L, L]$.

- La serie di Fourier converge $\forall x \in [-L, L]$
- La somma della serie è uguale a $f(x)$ $\forall x$: f è continua

- Se x_0 è un punto di discontinuità, la somma è uguale alla media in quel punto:
$$\sum = \frac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-)\right]$$
- Agli estremi, la serie converge a $\frac{1}{2}\left[f(-L)+f(L)\right]$

Se f è continua in $[-L, L]$ e $f(-L) = f(L)$, allora la convergenza è uniforme.

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Nei punti di discontinuità la convergenza non può essere uniforme $\Rightarrow$ è convergenza puntuale.

Ora, supponiamo vera la convergenza uniforme della serie di Fourier alla funzione f.
Integriamo tra $-L$ ed L ambo i membri:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{L} \alpha_0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \underbrace{\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)dx}_{*} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \underbrace{\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\right)dx}_{*}$$

$$* \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)dx = \frac{L}{n\pi}\left[\operatorname{sen} n\pi - \operatorname{sen}(-n\pi)\right] = \frac{2L}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi = 0$$

$$* \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\right)dx = \frac{-L}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)\right] = -\frac{L}{n\pi}\underbrace{\left[\cos(n\pi) - \cos(n\pi)\right]}_{=0}$$

Il coseno è una funzione pari, il seno è una funzione dispari.

$$\Rightarrow \int_{-L}^{L} f(x)dx = \alpha_0(2L) \Longrightarrow \alpha_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

Abbiamo trovato α_0.

Ora, moltiplichiamo ambo i membri per $\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ ed integriamo:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \alpha_0 \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = L \cdot \delta_{nm} \quad \text{(per le proprietà del coseno ortogonali)}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos^2\frac{n\pi}{L}x\,dx = \int_{-L}^{L} \frac{\left(1 + \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\right)}{2}dx = \frac{1}{2}\cdot 2L + 0 = L$$

$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 0$ (sono sempre ortogonali tra loro)

$\int \cos(\,)\cos(\,) = \int \operatorname{sen}(\,)\operatorname{sen}(\,) = L\,\delta_{nm}$

$\int \cos(\,)\operatorname{sen}(\,) = \int \operatorname{sen}(\,)\cos(\,) = 0$

Il "set" di seni e coseni ha solo elementi ortogonali a due a due.

Quindi resta:

$$\Longrightarrow \int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \alpha_m L = \frac{L}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \quad \text{ok.}$$

Lo spazio di queste funzioni è uno spazio vettoriale per il quale seno e coseno costituiscono una base:

$\left\{1;\ \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right);\ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\}_{n=1,\dots,\infty}$ è una base per lo spazio delle funzioni scalari di variabile reale definite in $[-L, L]$, generalmente continue.

È uno spazio di dimensione infinita.

Dobbiamo ancora normalizzare la base.

Definiamo il prodotto scalare in <u>questo</u> spazio:

$$(f, g) \equiv \int_{-L}^{L} f(x)^* g(x)\, dx$$

La norma indotta naturale è:

$$\|f\|^2 \equiv (f, f) = \int_{-L}^{L} f(x)^* f(x)\, dx = \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx$$

Ovviamente norma e prodotto così definiti vanno bene anche quando si lavora sui complessi.

$(1,1) = \int_{-L}^{L} 1\, dx = 2L \neq 1$ (base non normalizzata)

$\left(\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{2L}}\right) = \int_{-L}^{L} \frac{1}{2L} dx = \frac{2L}{2L} = 1$

Il primo elem. della base ortonormale è $1/\sqrt{2L}$.

$\left(\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right) = L\,\delta_{nm} = L \neq 1$

Il fattore normalizzante è $1/\sqrt{L} \Rightarrow$

Il secondo elemento della base ortonormale è $\frac{1}{\sqrt{L}}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ ed il terzo è $\frac{1}{\sqrt{L}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$.

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2L}};\ \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right);\ \frac{1}{\sqrt{L}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\}_n \quad n=1,2,\dots$$

è la base ortonormale per lo spazio delle f:
$f:[-L,L]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\wedge$ f generalmente continua su $[-L,L]$

Non abbiamo posto nessuna condizione su L, per ora basta che l'intervallo di definizione sia simmetrico rispetto all'origine.

Definiamo:

$$f^{(0)}(x)\equiv\frac{1}{\sqrt{2L}},\quad f^{(1)}(x)\equiv\frac{1}{\sqrt{L}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\quad f^{(2)}(x)\equiv\frac{1}{\sqrt{L}}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\ \dots$$

$\Rightarrow \left\{f^{(n)}\right\}_{n=0,1,2,\dots}$ base dello spazio $\left(\begin{array}{l} n=0 \Rightarrow 1/\sqrt{2L} \\ n \text{ dispari} \Rightarrow \dots \operatorname{sen}(\ ) \\ n \text{ pari} \Rightarrow \dots \cos(\ ) \end{array}\right)$

$$\left(f^{(n)}, f^{(m)}\right)=\delta_{nm}$$

Tornando alla serie:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{(n)}(x),\quad \text{con } a_n=\left(f^{(n)}, f\right)$$

$$\Rightarrow f = a_0 f^{(0)} + a_1 f^{(1)} + a_2 f^{(2)} + \dots$$

$$a_0=\left(f^{(0)}, f\right)=\int_{-L}^{L} f^{(0)}(x) f(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2L}}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx=\sqrt{2L}\,\alpha_0$$

$$a_n=\sqrt{L}\,\alpha_n$$

Ogni serie di Fourier è c.l. di seni e coseni, cioè di funz. dispari e funz. pari.
Mi aspetto che sviluppando in serie una f pari nella serie compariano solo coseni, ecc.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \to \text{cambio di variabile}$$

Nel primo integrale: $x\longrightarrow -x \Rightarrow f(x)\to f(-x)$, $dx\to -dx$

$$=-\int_{a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx=\int_{0}^{a} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(-x)\,dx=$$

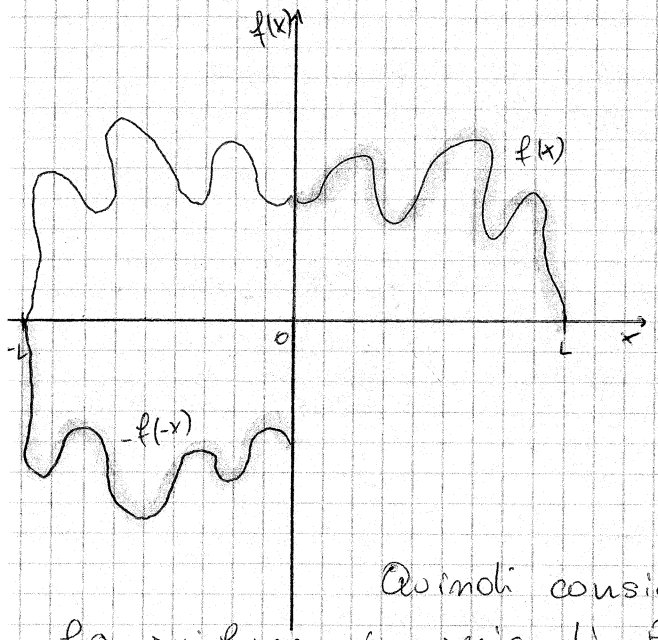
$$=\begin{cases} f \text{ pari} \Rightarrow f(-x)=f(x) \longrightarrow 2\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx \\ \\ f \text{ dispari} \Rightarrow f(x)=-f(-x) \longrightarrow 0 \end{cases}$$

Torniamo alle onde. Non abbiamo ancora utilizzato la condizione

$u(x,0) = f(x)$

Quindi:

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(k_n x)$ nell'intervallo $[0, L]$



Prolungo in modo pari la funzione nell'intervallo simmetrico
$\Rightarrow$ fz. pari

Ma posso anche prolungarla in modo dispari, cosicché nella serie possano comparire solo seni.

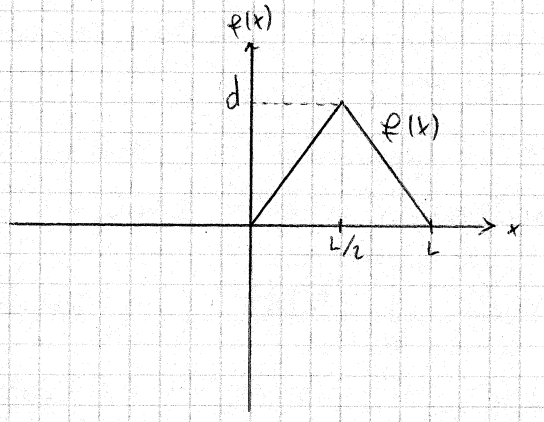
Quindi consideriamo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(k_n x)$ come lo sviluppo in serie di Fourier della $f(x)$ prolungata in modo dispari: $\bar{f}(x)$.

$$\bar{f}(x) \equiv \begin{cases} f(x) & [0, L] \\ -f(-x) & [-L, 0] \end{cases}$$

$\bar{f}$ coincide con f nel nostro intervallo fisico.

Adesso possiamo ricavare a_n sfruttando la serie di Fourier.

Esercizio



(Profilo iniziale della corda)

Sviluppare in serie di fourier e calcolare a_n.
Moltiplicare solo per i seni: la f è dispari (una volta prolungata).

Ho fissato la corda in 0 e in L $\Rightarrow$ non possono che uscirne solo seni.

24-03-2009

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos(\omega_n t)$$

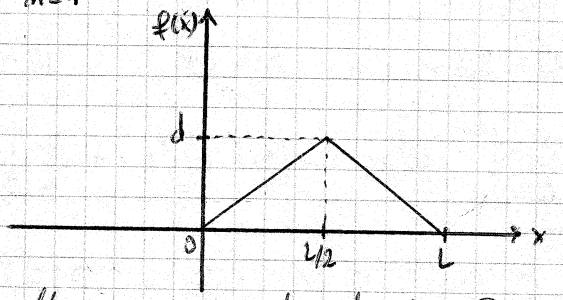
$$g(x) = 0 \Rightarrow \sum a_n \omega_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\delta_n = 0 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \delta_n = 0 \quad \forall n \quad \text{(sviluppo in serie della funz. identicamente nulla).}$$

Si ricava che $f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

Supponiamo che $f(x)$ sia del tipo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2d}{L}x & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ \frac{2d}{L}(L-x) & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$



Voglio passare ad un intervallo centrato in 0, quindi:

$[0,L] \longrightarrow [-L,L]$

Espressione della serie di Fourier formale:

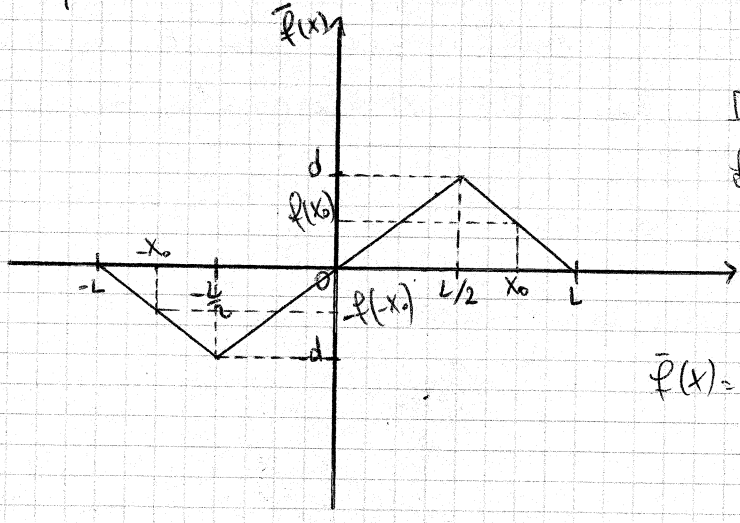
$$F(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{in } [-L,L]$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} F(x)\,dx \rightarrow \begin{cases} F \text{ pari} \Rightarrow = \frac{1}{L}\int_0^L F(x)\,dx \\ F \text{ dispari} \Rightarrow = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \rightarrow \begin{cases} F \text{ pari} \Rightarrow = \frac{2}{L}\int_0^L F(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \\ F \text{ dispari} \Rightarrow = 0 \end{cases}$$

$$\beta_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \rightarrow \begin{cases} F \text{ pari} \Rightarrow = 0 \\ F \text{ dispari} \Rightarrow = \frac{2}{L}\int_0^L F(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \end{cases}$$

Prolunghiamo la nostra funzione in $[-L,L]$ in modo che in $[0,L]$ resti così com'è. Possiamo prolungare in modo pari o in modo dispari. Scegliamo un prolungamento dispari per conservare i termini sinusoidali.



Definisco una nuova funzione $\bar{f}$ tale che:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{in } [-L,0] \\ f(x) & \text{in } [0,L] \end{cases}$$

Scriviamo $\bar{f}$ in serie di Fourier:

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Dove i β_n coincidono con gli a_n.

$\bar{f}$ è dispari

$$\Longrightarrow \beta_n = \frac{2}{L}\int_0^L \bar{f}(x)\, \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

In $[0, L]$ (dominio d'integrazione) $\bar{f}(x) \equiv f(x) \Longrightarrow$

$$\beta_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$f(x) = \frac{2d}{L} x$ in $[0, L/2]$ $\qquad f(x) = \frac{2d}{L}(L - x)$ in $[L/2, L]$

$$= \frac{2}{L}\int_0^{L/2} \frac{2d}{L} x\, \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} \frac{2d}{L}(L-x)\, \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$$\int_a^b x\, \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = -\frac{L}{n\pi} x \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + \int_a^b \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{L}{n\pi} x \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + \frac{L}{n\pi}\frac{L}{n\pi}\, \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\right]_a^b$$

$$a_n = \frac{2}{L}\left[\frac{2d}{L}\left(-\frac{L^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\, \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) - \frac{2d}{n\pi} L \cos(n\pi) + \right.$$

$$+ \frac{2dL}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) +$$

$$\left. - \frac{2d}{L}\left(-\frac{L^2}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\, \text{sen}(n\pi) + \frac{L^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{L^2}{n^2\pi^2}\, \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$a_n = \frac{8d}{n^2\pi^2}\, \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

Quindi, in questo caso, risulta:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8d}{n^2\pi^2}\, \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

I contributi delle armoniche decrescono come $1/n^2$.

Inoltre, per n pari, i coefficienti a_n si annullano.

Per n dispari si ha alternativamente $a_n = \frac{8d}{\pi^2 n^2}$ e $a_n = -\frac{8d}{\pi^2 n^2}$.

$$a_n = \begin{cases} n \text{ pari} \Rightarrow = 0 \\ n \text{ dispari} \Rightarrow = \begin{cases} \frac{8d}{n^2\pi^2} \\ -\frac{8d}{n^2\pi^2} \end{cases} \end{cases}$$

Tornando all'equazione d'onda:

$$u(x,t) = \frac{8d}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(4k+1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{4k+1}{L}\pi x\right) - \frac{1}{(4k+3)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{4k+3}{L}\pi x\right) \right] \cos(\omega_n t)$$

Infatti, di $4n$ in $4n$, la funzione mantiene lo stesso segno, mentre di 4 in 4 n (sempre dispari) ne mantiene un altro.

In forma sintetica:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sin}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos(\omega_n t)$$

Avevamo definito:

$$\omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{L} v$$

Fissata un'armonica (un contributo alla serie di Fourier), l'ampiezza varia nel tempo.
Il coseno è sempre una funzione periodica.
Voglio trovare gli istanti di tempo t_k per i quali $\frac{n\pi}{L} v\, t_k$ è multiplo di 2π:

$$\frac{n\pi}{L} v\, t_k = \begin{cases} 2k\pi & \text{(multiplo pari)} \Rightarrow \cos(\omega_n t_k) = 1 \\ & \Rightarrow u(x, t_k) = f(x) \\ (2k+1)\pi & \text{(multiplo dispari)} \Rightarrow \cos(\omega_n t_k) = -1 \\ & \Rightarrow u(x, t_k) = -f(x) \end{cases}$$

Nel primo caso, fissato n:

$$t_k = \frac{L\, 2k\pi}{n\pi v} = \frac{2kL}{nv} \xrightarrow{n=1} 0, \underset{+}{\frac{2L}{v}}, \underset{+}{\frac{4L}{v}}, \ldots$$

Nel secondo caso:

$$t_k = \frac{L(2k+1)\pi}{n\pi v} = \frac{(2k+1)L}{nv} \xrightarrow{n=1} \frac{L}{v}, \frac{3L}{v}, \frac{5L}{v}, \ldots$$

Periodicamente per multipli di L/v l'onda assume la forma iniziale, una volta positiva una volta negativa. Il periodo è $2L/v$. Armonica per armonica.

Un'altra equazione importante in fisica è l'equazione del Calore, che si ricava dalla equazione di continuità:

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v}) = 0$$

Dove ρv rappresenta il flusso di corrente.

$$\underline{J} = \rho \underline{v} = -D \nabla \rho \quad (\text{prima legge di Fick}) \qquad D \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (-D \nabla \rho) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} - D \nabla \cdot (\nabla \rho) = 0$$

$$\Rightarrow$$

EQUAZIONE DI DIFFUSIONE
Equazione del calore in 3+1 dimensioni

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho$$

Dove, per definizione,

$$\nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}$$

E' un problema della forma: $(u = u(x,t))$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(L,t) = T_0 = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

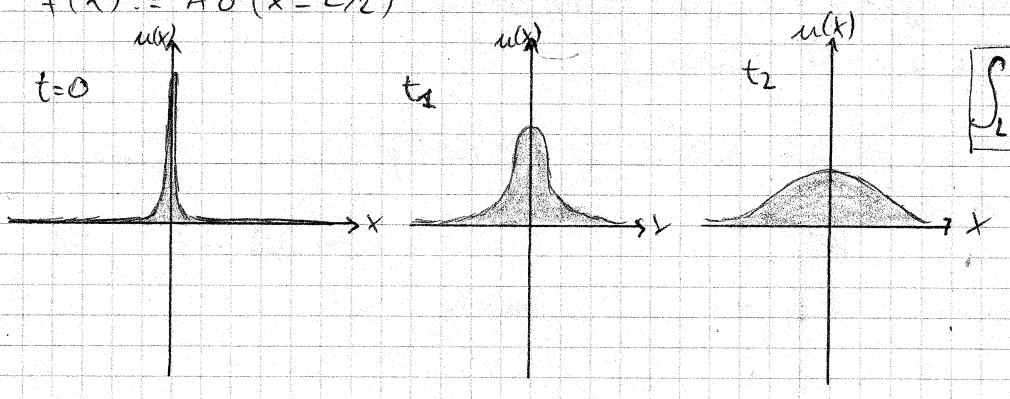
25-03-2009

EQUAZIONE DEL CALORE

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(L,t) = T_0 = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

La ricerca di soluzioni per questa equazione è molto simile a quella per le onde. 2° grado.

Problema ben posto in 1+1 dimensione.
Sbarra metallica di lunghezza L riscaldata artificialmente.
Faccio la separazione delle variabili:
$u(x,t) = X(x)T(t)$
($f(x)$ distribuzione delle temperature al tempo 0)
Un esempio di $f(x)$ è una δ di Dirac in un punto della sbarra, ad esempio nel mezzo:
$f(x) := A\delta(x - L/2)$



$$\int_L f(x)dx = 1 \quad \forall t$$

Proseguiamo:
$XT' = DX''T$ Divido per XT
$\frac{X''}{X} = \frac{1}{D}\frac{T'}{T}$ Come per le onde, non può che essere:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = c \\ \frac{T'}{T} = Dc \end{cases} \quad (c \text{ costante})$$

I valori di c sono determinati dalle condizioni al contorno:

$$\begin{cases} X(0) = X(L) = 0 \quad \forall t \\ X'' - cX = 0 \end{cases}$$

È esattamente come per le onde.

$\Rightarrow X_n(x) = A_n \sin(k_n x)$, $k_n = \frac{n\pi}{L}$
$c_n = -\frac{\pi^2 n^2}{L^2}$ ($\sqrt{c}$ è immaginario puro)

Per T le cose cambiano:
$T_n' + \frac{D\pi^2 n^2}{L^2} T_n = 0$ $D > 0$ sempre
$T_n(t) = \tilde{T} \exp\left[-\frac{D\pi^2 n^2}{L^2} t\right]$

Quindi, per ogni n, raggruppando i coefficienti, risulta:

$u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t)$

E la soluzione generale è:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(k_n x) \exp\left[-\frac{D\pi^2 n^2}{L^2} t\right]$$

——— Soluzione equazione di diffusione ———

⇒ l'evoluzione temporale è decrescente nel tempo.

Devo ancora utilizzare la condizione iniziale:

$t=0 \quad u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(k_n x)$

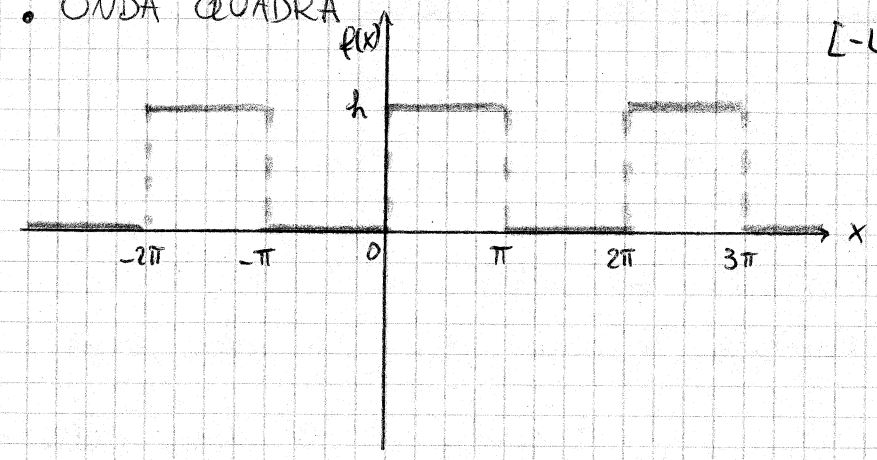
Da adesso possiamo utilizzare la serie di Fourier per la determinazione dei vari coefficienti.

Nell'approssimazione di sbarra infinita, riscaldata al centro, la funzione risulta una Gaussiana che si allarga, sempre normalizzata ad 1

[→ Trasformata di Fourier]

——— ESERCIZI SULLE SERIE DI FOURIER ———

- ONDA QUADRA



$[-L, L] \longrightarrow [-\pi, \pi]$

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) := f(x)$$

(Proviamo ad identificare la f con una serie di Fourier)

$\alpha_0 = ?\quad \alpha_n = ?\quad \beta_n = ?$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi} h \int_0^{\pi} dx = \frac{h}{2}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{h}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx = \frac{1}{n\pi} h \operatorname{sen}(nx)\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{h}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\,dx = -\frac{h}{n\pi}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} = \frac{h}{n\pi}\left(1-(\pm 1)\right)$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n \Rightarrow \beta_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ pari}) \\ \dfrac{2h}{n\pi} & (n \text{ dispari}) \end{cases}$$

Quindi:

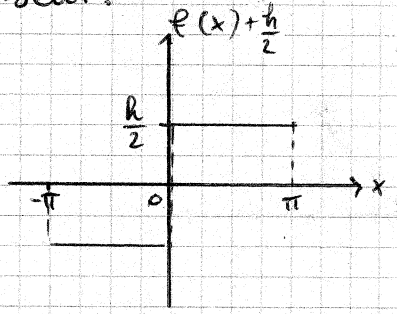
$$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}[(2k+1)x]}{2k+1}$$

Sviluppo in serie di Fourier dell'onda quadra.

$$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi}\left[\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5} + \dots\right]$$

I coefficienti calano come $\frac{1}{n}$, quindi le ampiezze al quadrato vanno come $\frac{1}{n^2}$, e quindi anche le energie.

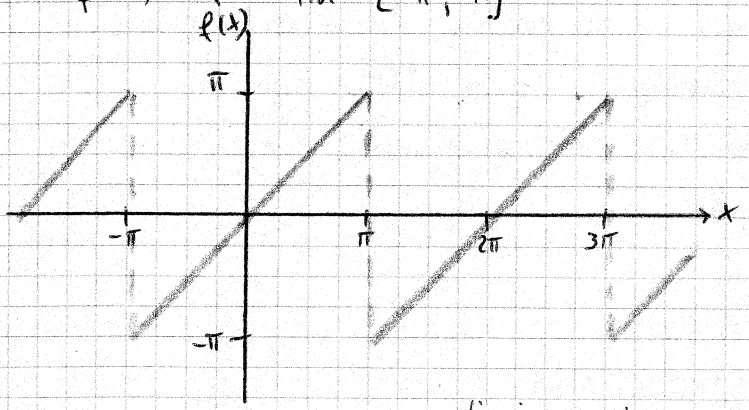
Compaiono solo i seni perché, spostando a sinistra dell'uguale il termine $\frac{h}{2}$, rimane a sinistra una funzione dispari e a destra una sommatoria di seni.



Per rendere dispari la funzione bastava traslare l'origine in alto di $\frac{h}{2}$. Per renderla pari, spostarla a destra di $\frac{\pi}{2}$.

- ONDA SAW TOOTH (DENTE DI SEGA)

$f(x) = x$ in $[-\pi, \pi]$



La f è dispari

$\Rightarrow \alpha_n = 0 \ \forall n$

$\alpha_0 = 0$

$\beta_n = ?$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx)\,dx \qquad \underbrace{\overset{\text{dispari}}{x} \cdot \overset{\text{dispari}}{\operatorname{sen} x}}_{\text{pari}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx =$$

$$= -\frac{2}{\cancel{\pi}}\left[(-1)^n \frac{\cancel{\pi}}{n}\right] = -\frac{2(-1)^n}{n}$$

Quindi:

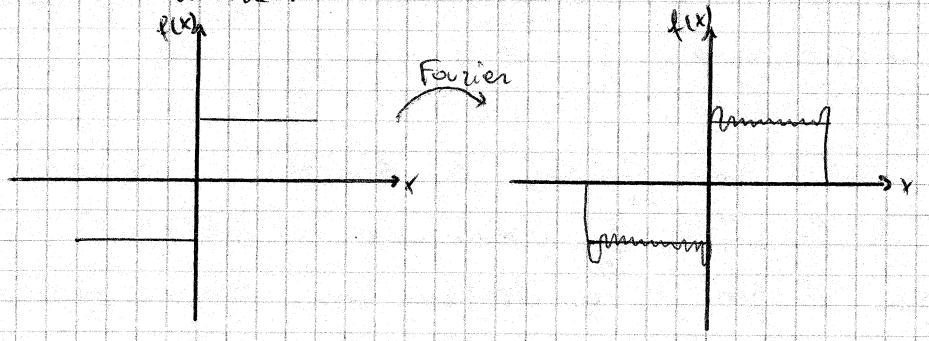
$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx)$$

Esplicitamente:

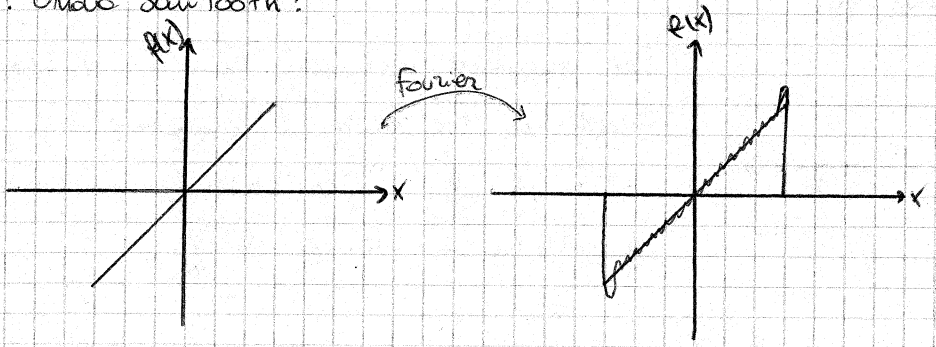
$$f(x) = 2\left[\sin x - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \dots\right]$$

Fenomeno di Gibbs: agli estremi, o in corrispondenza dei punti di discontinuità, la serie di Fourier NON approssima la funzione come negli altri punti.

es. Onda Quadra:



es.: Onda SawTooth:



Data una funzione ed il suo sviluppo in Serie di Fourier, ne è detto che la serie converga, ne è detto che converga proprio alla f. Non si sa nemmeno, se converge, in che modo converge.

Dobbiamo definire:

- Qual è lo SPAZIO DI FUNZIONI
- Qual è il TIPO DI CONVERGENZA
  - A cosa converge?

Lo spazio di funzioni che useremo è $L^2([-L,L])$.

È uno spazio di Hilbert delle funzioni al quadrato sommabile. Sommabile ≠ Integrabile

→ La f a cui converge sta nello spazio di partenza?

26.03.2009

GENERALIZZAZIONE DEL CONCETTO DI PRODOTTO SCALARE E DEL CONCETTO DI NORMA IN UNO SPAZIO VETTORIALE.

Prodotto scalare

$x, y \in V$

$V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(\cdot,\cdot) : x, y \in V \longrightarrow (x, y) \in \mathbb{C}$$

Proprietà:

1. $(x, y)^* = (y, x)$
2. $(x, x) \geq 0$
   $(x, x) = 0 \iff x = 0$
3. $\lambda \in \mathbb{C} \qquad (x, \lambda y) = \lambda (x, y)$
   $(\lambda x, y) = (y, \lambda x)^* = \lambda^* (y, x)^* = \lambda^* (x, y)$
4. $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$ (linearità)

Queste sono le proprietà che deve avere una funzione per essere definito prodotto scalare in V.

Dalla 4 discende:

$$(x+y, z) = (z, x+y)^* = (z, x)^* + (z, y)^* = (x, z) + (y, z)$$

Queste 4 proprietà assumono il nome di prodotto scalare.

Norma

$$\|\cdot\| : x \in V \longrightarrow \|x\| \in \mathbb{R}^+$$

Proprietà:

i) $\|x\| \geq 0$
   $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \qquad \lambda \in \mathbb{C}$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ [Disuguaglianza triangolare]

Supponiamo di avere un prodotto scalare (x, x) nello spazio V.

$(x, x) = (x, x)^* \Rightarrow (x, x) \in \mathbb{R}$
$(x, x) \geq 0$
$\Rightarrow$ Posso estrarre la radice.

$\sqrt{(x, x)} \equiv \|x\|$ Questa è una buona definizione di

una norma ⇒ Dato un prodotto scalare in uno spazio, posso sempre definire una norma.

Dimostrazione

i) $(x,x) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{(x,x)} \geq 0 \Rightarrow \|x\| \geq 0$

ii) $\|\lambda x\|^2 = (\lambda x, \lambda x) = \lambda^* \lambda (x,x) = |\lambda|^2 (x,x) =$
$= |\lambda|^2 \|x\|^2 \Longrightarrow \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

iii) Entra in gioco la <u>disuguaglianza di SCHWARTZ.</u>
<u>$|(x,y)| \leq \|x\| \|y\|$</u> → <u>Dimostrazione</u>

$\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \neq 0$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|x + \alpha (y,x) y\|^2 \geq 0$

$\|x + \alpha (y,x) y\|^2 = (x + \alpha (y,x) y,\ x + \alpha (y,x) y) =$

$(x,x) + \alpha^2 |(y,x)|^2 (y,y) + \alpha (y,x)(x,y) + \alpha (y,x)^* (y,x)$

$= \|x\|^2 + \alpha^2 |(y,x)|^2 \|y\|^2 + \alpha |(x,y)|^2 + \alpha |(y,x)|^2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Scelgo $\alpha = -\frac{1}{\|y\|^2} \in \mathbb{R} \quad (\alpha < 0) \Rightarrow$

$\|x + \alpha (y,x) y\|^2 = \|x\|^2 + \frac{|(y,x)|^2}{\|y\|^2} - \frac{2 |(y,x)|^2}{\|y\|^2} =$

$= \|x\|^2 - \frac{|(y,x)|^2}{\|y\|^2} \geq 0 \Longrightarrow \|x\|^2 \|y\|^2 \geq |(y,x)|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x\| \|y\| \geq |(x,y)|$

$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x,y) + (y,x) =$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x,y) + (x,y)^* = \|x\|^2 + \|y\|^2 +$

$+ 2\,\mathrm{Re}\{(x,y)\} \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 |(x,y)| \leq$

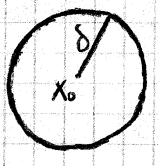
$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\| \Rightarrow$

$\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Questo vale anche negli spazi vettoriali infinito-dimensionali.
Una NORMA definisce in uno spazio vettoriale una struttura metrica.

$\|x-y\|$ esprime quanto x e y siano diversi tra di loro.



$\|x - x_0\| \leq \delta$ è la definizione di intorno di raggio δ di x_0.

NORMA ⟹ TOPOLOGIA nello SPAZIO V.

$\lim_n x_n = x_0 \iff \|x_n - x_0\| \to 0$

In uno spazio vettoriale posso avere diverse norme e diverse metriche, anche se in quello spazio non è definito il prodotto scalare.
Con la serie di Fourier avevamo definito:

in $[-L, L]$ $\quad (f,g) = \int_{-L}^{L} f^*(x) g(x)\, dx$ $\quad$ (con le premesse sullo sp. di funzioni in esame)

In questo caso risulta:

$$\|f\|^2 = (f,f) = \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx$$

E la disuguaglianza di Schwartz diventa:

$$|(f,g)|^2 \leq \|f\| \, \|g\|$$

$$\left| \int_{-L}^{L} f^*(x) g(x)\, dx \right|^2 \leq \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-L}^{L} |g(x)|^2 dx$$

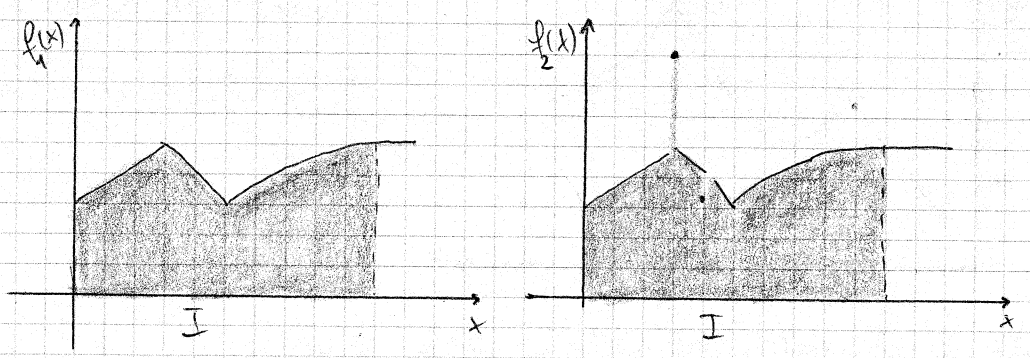
Occorre però assicurare che $\|f\|^2$ sia un integrale FINITO.

$$\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

Lo spazio vettoriale che soddisfa questa condizione si chiama $L^2(I)$, con I intervallo di $\mathbb{R}$.
Si chiama spazio di funzioni a quadrato sommabile.
In questo caso era $I = [-L, L]$

$$\boxed{\int_I |f(x)|^2 dx < +\infty \iff f \in L^2(I)}$$

Nell'integrazione secondo Riemann, gli integrali di due funzioni che differiscono solo per punti non differiscono:



$$\int_I f_1(x) dx = \int_I f_2(x) dx$$

Ma noi vogliamo che:

$\|f\| = 0 \Longrightarrow f = 0$

E l'integrale di Riemann non ce lo assicura.

$\Longrightarrow$ INTEGRAZIONE SECONDO LEBESGUE

(identifico funzioni quasi del tutto uguali, ovvero che differiscono soltanto su un insieme a misura nulla)

Se $f_1(x) = 0 \quad \forall x \in [0, +\infty)$

ed $f_2(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in [0,+\infty) - \{x_1; x_2; x_3\} \\ a & x = x_1 \\ b & x = x_2 \\ c & x = x_3 \end{cases}$ (ESEMPIO)

allora $f_1 \equiv f_2$.

Cosa è la MISURA di un insieme?

Preso $E \subset \mathbb{R}$, associo ad E $\mu(E) \in \mathbb{R}$

Proprietà:

- $\mu(E) \geq 0$
- $\mu(\phi) = 0$ → (ma non necessariamente un insieme a misura nulla è il vuoto)
- $E = [a,b] \Rightarrow \mu(E) = b - a$
- $E = E_1 \cup E_2$ ho due casi:
  - $E_1 \cap E_2 = \phi \Longrightarrow \mu(E) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$
  - $E_1 \cap E_2 \neq \phi \Longrightarrow \mu(E) = \mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1 \cap E_2)$

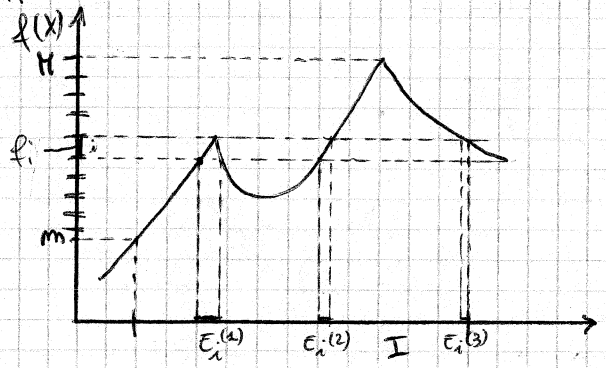
Generalizzando:

$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \Rightarrow$

$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$

- Invariante sotto traslazione

Supponiamo di avere una funzione:



$E_i = E_i^{(1)} \cup E_i^{(2)} \cup E_i^{(3)}$

$\sum_i f_i \cdot \mu(E_i) \equiv \sigma$

Divido l'intervallo dei valori della $f(x)$.

Il valore σ dipende da quanto è fitta la partizione di $[m, M]$.

fissata la partizione, $\sigma : f \longrightarrow \sum f_i \mu(E_i)$

> Una volta fatto il limite per il n° di intervallini di $[m, M]$ che va all'infinito,
>
> $$\sigma \equiv \int_I f(x)\,dx = \text{integrale secondo Lebesgue di } f \text{ su } I.$$

È una operazione diversa dall'integrale di Riemann. L'integrale improprio è una generalizzazione dell'integrale di Riemann; l'int. di Lebesgue fornisce una libertà ancora maggiore.

> Si dimostra che la misura di un insieme NUMERABILE di punti è nulla.

—— ESEMPIO ——

- Funzione di Dirichlet:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases} \qquad (\mathbb{Q} \text{ è numerabile})$$

$$\int_{\mathbb{R}} D(x)\,dx = 1 \cdot \mu(E_1) + 0 \cdot \mu(E_2) = 1 \cdot \mu(E_1) + 0 \cdot 0$$

Si differenzia da $f(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ solo per i punti di E_2, quindi ho lo stesso integrale. Ad esempio,

$$\int_0^1 D(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$$

- Insieme NUMERABILE ≡ insieme che può essere messo in corrispondenza BIUNIVOCA con $\mathbb{N}$. (~ insieme di finiti o infiniti punti isolati)
- Una funzione integrabile secondo Lebesgue si dice SOMMABILE.

31-03-2009

∃ insiemi NON MISURABILI secondo Lebesgue?
Sotto $\mathbb{R}$ no. Le uniche eccezioni richiedono l'utilizzo dell'<u>Assioma della scelta</u>: $\forall$ insieme $\neq \emptyset$, $\exists f \in$ insieme: $f($insieme$) \in$ insieme. Si dimostra che ∃ un insieme, l'insieme di Vitali, che non è Lebesgue-misurabile.

intervallo $[0,1]$
$x = y$ se $x - y \in \mathbb{Q}$
l'insieme di queste identità è un'infinità non misurabile.
(insieme di Vitali)

funzioni integrabili
- L-integrabili, o Sommabili [Lebesgue]
- Integrabili [Riemann]

L-integrabile $\Longleftrightarrow$ SOMMABILE
$\Rightarrow$ funzioni che su $\mathbb{R}$ si differenziano solo per insiemi a misura nulla sono IDENTICHE ("quasi ovunque identiche")
Insieme a misura nulla: insiemi finiti di punti, o infinità numerabili.
Adesso $\boxed{\|f\| = 0 \not\Longrightarrow f(x) = 0 \ \forall x}$

Quasi ovunque = q.o. = a.e. = almost everywhere
Stiamo definendo le funzioni q.o. identiche secondo Lebesgue:

Proprietà

1. $F(x)$ sommabile
   $|f(x)| \leq F(x) \ \forall x$
   $\Longrightarrow f(x)$ sommabile
2. $f(x)$ sommabile $\Longleftrightarrow |f(x)|$ sommabile

Lo spazio delle funzioni sommabili sull'intervallo I si chiama $L^1(I)$, infatti:

$$\boxed{L^1(I) \equiv \left\{ f : f : I \longrightarrow \mathbb{R} \wedge \int_I |f(x)|\,dx < +\infty \right\}}$$

In questo spazio possiamo definire una norma:

$$\boxed{\|f\|_1 \equiv \int_I |f(x)|\,dx} \qquad \text{Norma } L^1$$

Si dimostra che $L^1(I)$ è completo rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$

(TEOREMA DI RIESZ)

Completezza dello spazio $\Longleftrightarrow$ ogni successione di Cauchy è convergente

$\{x_n\} \in S$, $x \in S$, $\{x_n\}$ è di Cauchy $\Leftrightarrow x_n \longrightarrow x$

Devo dimostrare che $\|x_n - x\|_1 \to 0$

$\|x_n - x\|_1 \longrightarrow x_n, x$ funzioni $\longrightarrow \|f_n - f\|_1 \to 0$

$x_n \longrightarrow x \Rightarrow x_n$ convergente $\Longrightarrow x_n$ è di Cauchy

ovvero: $\|x_n - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\|$

$\|x_n - x_m\| \to 0$ $\Longleftarrow$ $\|x_n - x\| \to 0$, $\|x - x_m\| \to 0$

3. Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata

$\{f_n\}$ $\forall n$ f_n sommabile

$f_n(x) \longrightarrow f(x)$ q.o.

Se $\exists$ $F(x)$ sommabile tale che $|f_n(x)| \leq F(x)$

$\Longrightarrow$ f è sommabile e

$$\lim_n \int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$$

Posso scambiare l'integrale con l'operazione di limite. È una proprietà delle successioni uniformemente convergenti. Il teor. di Lebesgue ne è la generalizzazione. Sotto quelle ipotesi, si ricava:

- $f \in L^1(I) \Rightarrow L^1(I)$ completo
- $\lim$ e $\int$ scambiabili

Come esiste $L^1(I)$, esistono gli spazi $L^p(I)$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ (sottinsieme qualsiasi di $\mathbb{R}$).

$$L^p(I) \equiv \left\{ f : \int_I |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

In $L^p(I)$ si definisce la norma L^p:

$$\|f\|_p \equiv \left[\int_I |f(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

Gioca un ruolo importante l'insieme delle funzioni a quadrato sommabile:

$$L^2(I) = \left\{ f : \int_I |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}$$

- $L^2(I)$ è uno <u>SPAZIO VETTORIALE</u>. Infatti:
  $f, g \in L^2(I) \Longrightarrow$
  - <u>$f+g \in L^2(I)$?</u> $|f+g|^2 \le |f+g|^2 + |f-g|^2 =$ (Pone i conti)
    $= 2|f|^2 + 2|g|^2 = 2(|f|^2 + |g|^2)$
    $\int f+g \le \int f + \int g$ che sono entrambi finiti
    $\Longrightarrow \int f+g$ finito $(< +\infty)$
  - <u>$\alpha f \in L^2(I)$</u>

Definisco la norma L^2:

$$\|f\|_2 = \left[\int |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} \equiv \|f\|$$

In $L^2(I)$ posso definire anche un prodotto scalare che induce la norma L^2:

$$(f, g) \equiv \int_I f^*(x)\, g(x)\, dx$$

La norma indotta è:

$$(f, f)^{1/2} = \|f\| = \sqrt{\int_I |f(x)|^2 dx} = \|f\|_2$$

$(f, g) < +\infty$? $\quad f^* g$ sommabile $\Leftrightarrow |f^* g|$ sommabile

$|f^* g| = |f||g| \le \frac{1}{2}|f|^2 + \frac{1}{2}|g|^2 \Rightarrow |f^* g|$ sommabile

$\left[0 \le (|f| - |g|)^2 = |f|^2 + |g|^2 - 2|f||g| \ge 0 \right]$

$\Longrightarrow \int_I f^*(x)\, g(x)\, dx \; \exists$ finito $\Rightarrow (f, g)$ ha senso.

In questo spazio esiste la generalizzazione del teorema di Riesz e si chiama Teor. di Riesz - Fischer:

→

Teorema di Riesz - Fischer

$L^2(I)$ è COMPLETO rispetto alla norma naturale $\|\cdot\|_2$.

$$f_n \to f$$

$$\|f_n - f\| \to 0$$

$$\int_I |f_n(x) - f(x)|^2 dx \longrightarrow 0$$

Tornando al discorso sul <u>teorema di Fourier</u>:

$I = [-L, L]$

$f \in L^2([-L, L])$

$$\{\varphi^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}} ; \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right); \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\}$$ BASE ORTONORMALE

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi^n(x), \quad a_n = (\varphi^n(x), f(x))$$

Tutto fatto in $L^2([-L, L])$.

a_n = coefficienti di Fourier.

La serie definisce la successione delle somme parziali di Fourier. Si dimostra che questa è di Cauchy $\Rightarrow$ la serie converge. Il teor. di Fourier ci assicura che converge proprio ad f. <u>Quindi</u>:

La <u>serie di Fourier</u> è la serie che <u>meglio approssima</u> la <u>funzione</u> in quello <u>spazio</u>.

Dimostreremo il teorema di Fourier in modo più generale.

<u>SPAZIO DI HILBERT</u> = Spazio in cui posso definire un prodotto scalare tale che lo spazio sia completo rispetto alla norma indotta da quel prodotto scalare.

Spazio pre-Hilbertiano: non ho completezza.

<u>Spazio di BANACH</u>: completo rispetto alla norma, non per forza indotta dal prodotto scalare.

Gli $L^p(I)$ sono spazi di Banach.

$L^2(I)$ è uno spazio di Hilbert.

Dimostrazione del Teor. di fourier in uno sp. di Hilbert.

H spazio di funzioni di Hilbert di dimensione infinita.
Posso sempre trovare $x_1, \dots, x_m \in H$, linearmente indipendenti $\forall n$.

$|\cdot| \longrightarrow \{e_i\}_{i=1\dots+\infty}$ set di vettori lin. indip. ortonormalizzati.

$\{e_n\}_{n=1\dots+\infty}$

Prendo $x \in H$ (generico).
Fisso n intero.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

Calcolo $\left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|$.

Quali sono gli a_i per i quali questa distanza è minima?
Ovvero, qual è la combinazione lineare di elementi della base che meglio approssima x?

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|^2 = \left(x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i,\ x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right) =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i (x, e_i) - \sum_{i=1}^{n} a_i^* (e_i, x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i^* a_j \underbrace{(e_i, e_j)}_{\delta_{ij}} =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(e_i, x)|^2 + \sum_{i=1}^{n} |a_i - (e_i, x)|^2$$

$$\sum [a_i^* - (e_i, x)^*][a_i - (e_i, x)] =$$

$$= \sum |a_i|^2 - \sum a_i^* (e_i, x) - \sum a_i (x, e_i) + \sum |(e_i, x)|^2$$

aggiunto e tolto

$\sum_{i=1}^{n} a_i a_j^* = \sum |a_i|^2$

assume il valore minimo quando $\sum_{i=1}^{n} |a_i - (e_i, x)|^2$ è nullo. Ovvero, quando:

$$\boxed{a_i = (e_i, x)}$$

01.06.2009

H spazio di Hilbert

$x \in H$

$\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ set di vettori ortonormali lin. indip. in H

Fisso n finito

Valuto:

$$\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \|$$

Quali sono gli $a_1 \dots a_n$ che rendono minima questa norma?

$a_i \equiv (e_i, x)$ (proiezioni di x lungo gli e_i)

$\Rightarrow$ la combinazione lineare che meglio approssimo x è la proiezione ortogonale di x sul sottospazio generato dai primi n vettori di $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

$$\sum_{i=1}^{n} (e_i, x)\, e_i$$

(e_i, x) si chiamano COEFFICIENTI DI FOURIER.

Si vede che, in questo caso:

$$0 \leq \| x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \| = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(e_i, x)|^2 \qquad \forall n \text{ finito}$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \qquad \forall n \text{ finito}$$

Mandiamo $n \longrightarrow \infty$: la serie numerica degli $|a_i|^2$ è maggiorata da $\|x\|^2$, quindi converge:

$$n \to \infty \qquad \|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2$ si chiama DISUGUAGLIANZA DI BESSEL.

Ci sono naturalmente situazioni in cui vale l'uguaglianza.

$\sum a_i e_i$ è una SERIE:

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$, $a_i = (e_i, x)$ si chiama SERIE DI FOURIER di x relativa al set di vettori $\{e_i\}_{i=1 \dots n}$.

Definisco la SOMMA PARZIALE di Fourier:

$$\bar{x}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

Esiste $\lim_n \bar{x}_n$? $\quad \bar{x}_n \xrightarrow{n \to \infty} \bar{x}$ $\quad$ E cos'è $\bar{x}$?

Per dire che il lim esiste basta dimostrare che $\{\bar{x}_n\}$ è di Cauchy:

$\| \bar{x}_n - \bar{x}_m \|^2_{m\,n} = \| \sum_{i=m+1}^{n} a_i e_i \|^2 = \left(\sum_{i=m+1}^{n} a_i e_i , \sum_{j=m+1}^{n} a_j e_j \right) =$
$= \sum_{i=m+1}^{n} |a_i|^2$

Per n, m sufficientemente grandi, poiché $\sum |a_i|^2$ converge, $\sum_{i=m+1}^{n} |a_i|^2 \longrightarrow 0$ ($\{\bar{x}_n\}$ è quindi di Cauchy).

Quindi posso scrivere:

$\bar{x}_n \xrightarrow{n\to\infty} \bar{x} \in H$. ($\bar{x}$ SOMMA DELLA SERIE)

Si dice che il set $\{e_i\}$ è COMPLETO se, $\forall x \in H$, $\| x - \bar{x}_n \| \to 0$. Ovvero, $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$, con $a_i = (e_i, x)$.
Ogni set ortonormale completo si chiama BASE.

Ovvero, la Serie di Fourier di x converge ad x stesso.
In generale, $\bar{x} \neq x$.

Teorema di Fourier

H sp. di Hilbert
$\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ set ortonormale completo
$x \in H$
$\Rightarrow$ La serie di fourier di x relativa a $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge ad x.

- Completezza dello spazio
  Ogni successione di Cauchy converge a un elemento dello spazio
- Completezza della base
  Ogni serie di Fourier converge all'elemento dello spazio che l'ha generata.

Data una base, il teorema di Fourier dice che la serie di Fourier di x relativa a quella base converge ad x.
Ma come si stabilisce che una base è completa?

Teorema

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

i) $\{e_i\}$ è COMPLETO: ovvero, $\forall x \in H$, x coincide con la sua serie di Fourier.

ii) $\left\{\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\right\}_m$ è DENSO in H

iii) $\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(e_i, x)|^2$ (IDENTITÀ DI PARSEVAL)

iv) L'unico vettore ortogonale a tutti gli e_i è il vettore nullo: $\forall i, (e_i, x_0) = 0 \Longrightarrow x_0 = 0$ (PROPRIETÀ DI CHIUSURA del set ortonormale)

Le affermazioni sono equivalenti:

$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$

Dimostrazioni.

- $(i) \Rightarrow (ii)$

$\forall x \in H$, $\bar{x}_n \longrightarrow x$ in norma $\iff \|x - \sum_{i=1}^{n} (e_i, x) e_i\| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

Comunque prendo x, lo posso approssimare quanto voglio con le somme parziali di Fourier.

Quindi $\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\}_n$ è denso.

- $(ii) \Rightarrow (iii)$

$a_i = (e_i, x)$; $\|x - \sum_{i=1}^{n} (e_i, x) e_i\| = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(e_i, x)|^2$

Per $n \to \infty$ il termine a sinistra $\to 0$, quindi $\sum_{i=1}^{n} |(e_i, x)|^2$ converge ad $\|x\|^2$.

- $(iii) \Rightarrow (iv)$

$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(e_i, x)|^2$; applico l'identità ad x_0.

$\|x_0\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(e_i, x_0)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |0|^2 = 0$

$\|x_0\|^2 = 0 \Rightarrow \|x_0\| = 0 \iff x_0 = 0$

Vedi sul Rosetti dimostrazione di chiusura per la base di $L^2([-L, L])$

- $(iv) \Rightarrow (i)$

$\{e_i\}_{i=1\dots n}$ è chiuso; $x \in H$; costruisco la serie di Fourier: $\sum_{i=1}^{\infty} (e_i, x) e_i \equiv \bar{x}$ H completo $\Rightarrow \bar{x} \in H$

Prendo un $j \in \mathbb{N}$. e_j. Calcoliamo $\forall j$ il prodotto $(e_j, \bar{x} - x)$. Se questo fa 0, $\bar{x} - x = 0 \Rightarrow \bar{x} = x$.

$$(e_j, \bar{x} - x) = \left(e_j, \sum_{i=1}^{\infty} (e_i, x) e_i\right) - (e_j, x) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} (e_i, x)(e_j, e_i) - (e_j, x) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} (e_i, x)\, \delta_{ij} - (e_j, x) =$$
$$= (e_j, x) - (e_j, x) = 0 \Rightarrow \bar{x} = x. \quad \text{CVD.}$$

Dobbiamo però dimostrare che la proprietà di linearità del prodotto scalare vale anche per somme infinite (CONTINUITÀ del prodotto scalare).

$x_n \longrightarrow x \quad \|x_n - x\| \to 0$ (Successione di vettori convergente ad x)

Voglio dimostrare che:

$\forall y \in H, \quad (y, x) = (y, \lim_n x_n) = \lim_n (y, x_n)$

Calcoliamo questa differenza:

$|(y,x) - (y, x_n)| = |(y, x - x_n)|$ (per ora n è finito)

Uso Schwartz: $|(y, x - x_n)| \leq \|y\| \|x - x_n\|$

Per $n \to \infty$, $\|x - x_n\| \to 0$

$\Longrightarrow n \to \infty \quad |(y,x) - (y, x_n)| = 0$

$n \to \infty \quad (y,x) = (y, x_n)$. C.V.D.

Abbiamo quindi 4 modi equivalenti per dimostrare la completezza di un dato set ortonormale $\{e_i\}$.

$x, y \in H$

Se $\{e_i\}$ è una "BASE", questi coincidono con le loro serie di Fourier:

$a_i = (e_i, x) \qquad x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$

$b_i = (e_i, y) \qquad y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i$

Cosa succede se calcolo (x, y)?

Usiamo due volte la continuità del prodotto scalare:

$$(x,y) = \lim_n \left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i, y\right) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} a_i^* (e_i, y) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* b_i = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i)(e_i, y)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} e_i)(e_i = 1$$

Usando una notazione diversa:

BRA ⟨ KET

$\langle x | y \rangle$

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x | e_i \rangle \langle e_i | y \rangle$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |e_i\rangle\langle e_i| \equiv 1 \quad \text{(Completezza)}$$

$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} (x,e_i)(e_i,y)$ si chiama IDENTITÀ DI PARSEVAL GENERALIZZATA.

Infatti:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x,e_i)(e_i,x) = \sum_{i=1}^{\infty} (e_i,x)^*(e_i,x) = \sum_{i=1}^{\infty} |(e_i,x)|^2$$

Cosa succede se lo spazio di Hilbert considerato è, ad esempio, $L^2([-L,L])$? Si dice che L^2 è uno spazio separabile:

Uno spazio di Hilbert è SEPARABILE se è possibile trovare al suo interno un set di vettori ortonormali completo.

In questo caso,

$$\{e_i\} = \{\varphi^{(n)}\}_n = \left\{\frac{1}{\sqrt{2L}}\,;\, \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,;\, \frac{1}{\sqrt{L}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\}_n$$

In $L^2([-L,L])$ il prodotto scalare è:

$$(f,g) = \int_{-L}^{L} f^*(x)\,g(x)\,dx$$

$$a_i \equiv a_n = (\varphi^{(n)}(x),\, f(x))$$

Si dimostra che il set $\{\varphi^{(n)}\}$ è completo (usando la proprietà di chiusura). vedi libro Rossetti

Quindi si può dire che:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\varphi^n(x)$$

(vale il teorema di Fourier)

Esempio: <u>onda quadra</u>

$$f(x) = \begin{cases} -1 & [-\pi, 0) \\ 1 & (0, \pi] \end{cases}$$

Avevamo calcolato i coefficienti di Fourier:

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ 4/\pi \cdot n & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \iff \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{\pi(2k+1)^2} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

La serie dei reciproci dei quadrati dei numeri dispari converge, e converge a $\frac{\pi^2}{8}$.

Dimostreremo che $\{\varphi^n\}_n$ non è l'unica "BASE" per $L^2([-L,L])$

02-06-2009

La Serie di Fourier è la serie che meglio approssima una funzione in uno spazio di Hilbert separabile.
Spazio separabile ⇒ possono esistere anche più d'una base.
In $L^2([-L,L])$ avevamo:
$\left\{\frac{1}{\sqrt{2L}}; \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{k\pi}{L}x; \frac{1}{\sqrt{L}}\text{sen}\frac{k\pi}{L}x\right\}$
che è un buon set ortonormale completo. Ma ci interessa anche un altro set ortonormale completo in questo spazio:

$$\{u_k(x)\}_k \quad \forall x \; u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{\frac{i\pi kx}{L}}$$

con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
Posso definire $\omega_k \equiv k\,2\pi/2L$.
Quindi, una serie di Fourier può essere:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k u_k(x), \quad b_k = (u_k(x), f(x))$$

Calcoliamo i coefficienti di Fourier b_k:

$$b_k = \int_{-L}^{L} u_k^*(x) f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\omega_k x}\,dx$$

Questo serie si chiama SERIE ESPONENZIALE DI FOURIER, la precedente SERIE TRIGONOMETRICA DI FOURIER.
Nel caso $L = \pi$ si ha:

$$b_k = \left[\int_{-k}^{k} f(x) e^{-ikx}\,dx\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx)$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k u_k(x)$$

Posso dividere i k negativi, positivi e nulli:

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} e^{-inx}$$

($k=0$; $k>0$; $k<0$)
Paragoniamola alla serie trigonometrica.

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n e^{inx} + b_{-n} e^{-inx}\right] =$$

$$= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left[b_n(\cos(nx) + i\,\text{sen}(nx))\right] + \left[b_{-n}(\cos(nx) - i\,\text{sen}(nx))\right]\right\} =$$

$$= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(b_n + b_{-n}) \cos(nx) + i (b_n - b_{-n}) \operatorname{sen}(nx) \right]$$

Definendo $c_n \equiv b_n + b_{-n}$ e $s_n \equiv i(b_n - b_{-n})$ si ha:

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos(nx) + s_n \operatorname{sen}(nx) \right)$$

da cui risulta che serie trigonometrica e serie esponenziale sono la stessa serie, o comunque si può passare dall'uno all'altro con facilità.

Se una funzione è pari, nella base servono solo costante e coseno; se f è dispari sono sufficienti costante e seno.

Analizziamo l'ortonormalità della base esponenziale:

$$(u_k(x), u_{k'}(x)) = \int_{-L}^{L} u_k^*(x) u_{k'}(x)\, dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} e^{-i\frac{\pi}{L}kx} e^{i\frac{\pi}{L}k'x} dx =$$

$$= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} e^{-i\frac{\pi}{L}(k-k')x} dx$$

per $k = k'$ resta: $\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} 1\, dx = \frac{2L}{2L} = 1$

per $k \neq k'$ si dimostra che risulta 0.

$\Rightarrow (u_k(x), u_{k'}(x)) = \delta_{kk'} \Rightarrow \{u_k(x)\}_{k=0,\pm1,\dots}$ è ortonormale.

Il concetto di "BASE" è proprio del caso finito-dimensionale. Nel caso infinito-dimensionale il set di direzioni a due a due ortogonali si chiama "solo" SET ORTONORMALE (di vettori linearmente indipendenti).

Fino ad ora ci siamo sempre ricondotti ad intervalli simmetrici rispetto all'origine. Come si fa a passare ad un intervallo generico?

$[-L, L] \longrightarrow [\alpha, \beta]$

Occorre un cambiamento di variabile (dilatazione o contrazione, + traslazione).

Esempio:

$[-\pi, \pi] \longrightarrow [\alpha, \beta]$

$y \in [-\pi, \pi]$; $x \in [\alpha, \beta]$

$y = \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \frac{2\pi}{\beta-\alpha}$ ← rapporto tra le due lunghezze

$2L \longleftrightarrow \beta - \alpha$; $L \longleftrightarrow \frac{\beta-\alpha}{2}$

Operazione inversa:

$x = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2\pi} y$

traslazione, dilatazione

Esempio: $y = \pi \Rightarrow x = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{(\beta-\alpha)}{2} = \beta$

$y = -\pi \Rightarrow x = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$

Cambiamento di variabili

$[-L, L] \ni y$; $[\alpha, \beta] \ni x$

$[-L, L] \longrightarrow [\alpha, \beta]$

- $y = \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \frac{2L}{\beta-\alpha}$
- $x = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2L} y$

Supponiamo H sp. di Hilbert separabile, $\{e_n\}$ set ortonormale completo.

$x \in H$

Posso leggere x attraverso il set dei suoi coeff. di Fourier:

$x \longrightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots\}$

$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ (PARSEVAL)

È come leggere un vettore in termini delle sue componenti.

$\{a_n\}_n$ coeff. di Fourier di $x \in H$. Questo insieme costituisce uno spazio detto ℓ^2, che è di Hilbert. In questo spazio:

$a, b \in \ell^2 \quad (a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n$ PRODOTTO SCALARE

La norma indotta $(a, a) = \|a\|_{\ell^2}^2$ coincide con $\|x\|^2$ grazie alla diseguaglianza di Parsefal:

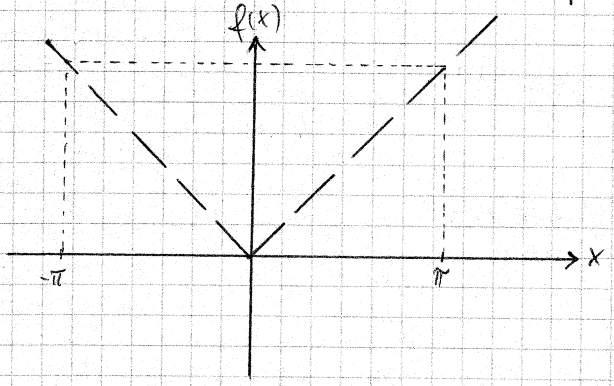
C'è ISOMORFISMO tra la norma di $x \in H$ e la norma di $\{a_n\}_n \in \ell^2$.

(Se H è separabile)
ℓ^2 è lo spazio di tutte le successioni $\{a_n\}_n$ di coeff. di Fourier degli elementi di H separabile, essendo quindi gli $a_n = (e_n, x)$. $\{a_n\}_n$ converge sicuramente.

. . . . . .

ESERCIZIO

- Determinare lo sviluppo in serie di Fourier trigonometrica della funzione:
$$f(x) = |x| \quad , \quad x \in [-\pi, \pi]$$
- Dimostrare che la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4$$
utilizzando la serie precedente e l'identità di Parseval.



$f(x)$ è pari.
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi^n(x) \quad \text{con}$$
$$\{\varphi^n\}_n = \left\{\frac{1}{\sqrt{2L}}; \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right); \frac{1}{\sqrt{L}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\}$$
e $a_n = (\varphi^n(x), f(x))$

$a_0 = (\varphi^0(x), f(x)) \qquad L = \pi$

$f(x) \in L^2([-\pi, \pi])$? $\quad \|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$?

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx = 2\int_0^{\pi} |x|^2 dx = 2\int_0^{\pi} x^2 dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^3 < +\infty$$

quindi $f \in L^2([-\pi, \pi])$.

$$(\varphi^0(x), f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}}$$

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), f(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)|x|\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} \cos(nx)\,x\,dx =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[(-1)^n - 1\right]\cdot\frac{1}{n^2} \begin{cases} n \text{ pari } 0 \\ n \text{ dispari } -2\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}n^2} \end{cases}$$

Quindi:
$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{(-4)}{\pi n^2}\cos(nx) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)}{\pi(2k+1)^2}\cos[(2k+1)x]$$

Ad esempio: valutare $f(x)$ in 0.

$$0 = \frac{\pi^2}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2} \Rightarrow$$ vedi serie reciproci num. dispari.

Usiamo l'id. di Parseval:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$$

$$\frac{2}{3}\pi^3 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{\pi(2k+1)^4} + \left(\frac{\pi^2}{4\sqrt{2\pi}}\right)^2$$

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\pi^3 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{\pi(2k+1)^4}$$

$$\frac{1}{6}\pi^3 \cdot \frac{1}{2^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4 \pi}$$

$$\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

07/04/09

OPERATORI IN SPAZI DI HILBERT

Siamo in spazi a dimensione infinita.

$H \qquad L^2(-L, L)$

Definiamo un'applicazione $T: H \longrightarrow H'$

in generale, $H' \neq H$

Ci interessano le trasformazioni lineari:

supponiamo $x, y \in H \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

Questo si chiama operatore lineare tra H ed H'.

Dato un operatore T, non sempre questo può essere definito su tutto H. Esempio: prendiamo $H = L^2(-L, L)$

$T = \frac{d}{dx}$ che agisce su $f(x) \in L^2(-L, L)$

Ma non è detto che tutte le funzioni di L^2 siano derivabili. Inoltre:

$f(x)$ derivabile $\quad T(f) = \frac{df}{dx} \qquad T(f) \in ?$

Se prendo un set ortonormale completo $\{e_i\}$ in H, se conosco gli effetti di T su tutti gli e_i, non è detto che questo implichi conoscere come agisce T su ogni elemento dello spazio, perché questo ha dimensione infinita.

La difficoltà è capire se $\exists$, e come si chiama, il sottoinsieme di H dove si può agire.
Non è nemmeno detto che, definendo T sugli e_i, si possa sicuramente definire T su un generico $x \in H$.

Supponiamo che H sia un generico V di dim. n finita:

$H \longrightarrow V_n$

$\{e_i\}_{i=1\dots n}$ $\quad Te_i \quad , i=1\dots n$

$x \in V_n, \quad x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$

$Tx = \sum_{i=1}^{n} a_i Te_i$, e gli Te_i sono conosciuti.
La somma è finita.

Posso sempre applicare T ad un qualsiasi elemento di H, ma non è detto che ne conosca l'effetto.

$Te_i \qquad \forall x \in H \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$

posso dire che $Tx = \sum_{i=1}^{\infty} a_i Te_i$?

Posso applicare la linearità ad una combinazione lineare infinita? Non è ovvio.

> Chiamiamo DOMINIO dell'operatore T il sottinsieme di H dove è definito T. Si indica con D e vale sempre $D \subseteq H$.

$x \in D \Rightarrow$ ha senso considerare Tx.
$Tx \in H'$

> Chiamiamo $D' \subseteq H'$, collezione di tutte le immagini degli $x \in D$ tramite T, codominio dell'operatore T. E' detto anche range, o immagine.

$x_0 \in D$

L'operatore T si dice CONTINUO in x_0 se e solo se

$$\|x - x_0\| \longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad \|Tx - Tx_0\| \longrightarrow 0$$

Per verificare che un operatore sia continuo su tutto il dominio basta verificare che lo sia in un punto, ad es. in 0:

ipotesi: T continuo in 0 : $x \to 0 \Rightarrow Tx \to 0$

$x \to x_0 \Rightarrow Tx \to Tx_0$?

$x - x_0 \longrightarrow 0 \quad T(x - x_0) \to 0$

$Tx - Tx_0 \to 0 \Rightarrow T$ continuo in x_0.

Un operatore lineare applicato al vettore nullo, infatti, restituisce il vettore nullo. (i coeff. $\alpha, \beta, \ldots$ tendono a 0)

Supponiamo T continuo.

$x \in H$ qualsiasi.

$x \in H \Rightarrow$ vale il teorema di fourier.

Per ogni x posso costruire le somme parziali x_n di fourier e farne il limite:

$x_n \longrightarrow x$ (x_n converge ad x)

$x = \lim_n x_n = \lim_n \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ ai coefficienti di fourier.

Questo vale se $\{e_i\}$ è una base.

T continuo, $x_n \longrightarrow x$

$\Longrightarrow \quad Tx_n \longrightarrow Tx = T\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right)$

$$\lim_n T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = Tx$$

$$\lim_n \sum_{i=1}^{n} a_i Te_i$$

T continuo in x
$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$
$\Longrightarrow \quad Tx = \lim_n \sum_{i=1}^{n} a_i Te_i$

$$T\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) \neq \sum_{i=1}^{\infty} a_i T e_i$$

Lo scambio dell'operazione di limite con l'operatore T non è sempre ammesso.
Ovviamente il discorso vale se si conosce T applicato a tutti gli e_i.
Non è comunque detto che $\sum_{i=1}^{\infty} a_i T e_i$ converga.

$x \in D \quad x \neq 0$
$T: H \longrightarrow H'$
T si dice LIMITATO se e solo se

$$\sup_{x \in D} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = k < +\infty$$

Inoltre, se T è limitato, k si chiama NORMA dell'operatore T e si indica con $\|T\|$.

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$$

Teorema

Continuità e limitatezza sono equivalenti.

Dimostrazione

Supponiamo T continuo. T è limitato?
Supponiamo per assurdo che T non sia limitato:
$\forall n \; \exists \; x_n : \|Tx_n\| > n \|x_n\|$
Definisco y_n n-esimo elemento di una successione:

$$y_n \equiv \frac{x_n}{n\|x_n\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Bigg\} \Longrightarrow Ty_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

T continuo

$$\Longrightarrow \|Ty_n\| \longrightarrow 0 \quad n \to \infty$$

Ma $\|Ty_n\| = \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|} > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1$ e non può tendere a 0.

Supponiamo T limitato. T è continuo?

$$x - x_0 \to 0 \overset{?}{\Rightarrow} Tx \to Tx_0$$

$$\|x - x_0\| \to 0$$

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \|x - x_0\| \longrightarrow 0 \quad \text{c.v.d.}$$

($\|T\|$: costante; $\|x - x_0\| \to 0$)

⇒ per controllare la continuità basta controllare la limitatezza.

$x \in H$ $\{e_i\}$ $\{x_n\}$ somme finite di Fourier

$x = \lim_n x_n$

posso valutare $T x_n = T \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = \sum_{i=1}^{n} a_i T e_i$

Mi basta controllare la limitatezza di T sulle x_n.

$\sup_{x_n \in F} \frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|}$ $\{x_n\}$ è DENSO in H. $F = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

CONTROLLO LA LIMITATEZZA SU F (somme parziali).

... Supponiamo T limitato su F.

$\|T\| \equiv K_F$

$\{Tx_n\}$ è una successione di elementi di H'.

è di CAUCHY!

$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq K_F \|x_n - x_m\|$

Quindi: T limitato su $F \Rightarrow \{Tx_n\}$ è di Cauchy

⇒ converge. Chiamiamo y il limite di questa successione.

$Tx_n \longrightarrow y \overset{\text{definizione}}{\equiv} Tx$

(Posso estendere la continuità di T a tutto lo spazio H).

08/04/2003

T trasformazione lineare da uno spazio di Hilbert ad un altro spazio di Hilbert.

$$T: H \longrightarrow H'$$

Non tutti gli operatori della fisica quantistica sono limitati.

$D(T)$ dominio dell'operatore T
$R(T)$ immagine (range) dell'operatore T
$R(T) = \{y \in H' : \exists\, x \in D(T) \text{ t.c. } Tx = y\}$

In generale $R(T)$ non coincide con tutto H': T non è surgettivo (suriettivo) su tutto H', ma solo su $R(T)$.
T può essere iniettivo tra $D(T)$ ed $R(T)$.
Se T è una trasformazione BIUNIVOCA (suriettiva e iniettiva) $\Rightarrow \exists\, T^{-1}: R(T) \longrightarrow D(T)$

$T^{-1}: y \in R(T) \longrightarrow x \in D(T)$ t.c. $Tx = y$
$(x = T^{-1}y)$

Posso considerare le operazioni:

$TT^{-1} = \mathbb{1}_{R(T)}$
$T^{-1}T = \mathbb{1}_{D(T)}$

Sono due operatori identità diversi: uno è definito sullo spazio $R(T)$ e l'altro sullo spazio $D(T)$.

Si chiama NUCLEO di T, detto anche KERNEL, e si indica con $\ker(T)$, l'insieme
$\{x \in D(T) : Tx = 0 \in R(T)\}$

$\ker(T) \neq \emptyset$ perché T lineare $\Rightarrow \{0\} \in \ker(T)$
$x - x = 0 \quad T0 = T(x-x) = Tx - Tx = 0$
Si dimostra che:

T iniettiva $\iff \ker(T) = \{0\}$

$T: H \longrightarrow H'$

Si definisce AGGIUNTO di T, e si indica con T^+, l'operatore

$T^+: H' \longrightarrow H$

tale che:

$x \in D(T)$, $y' \in D(T^+)$ $\quad D(T) \subseteq H$ $\quad D(T^+) \subseteq H'$

$(y', Tx) = (T^+ y', x)$

Si dimostra che:

$$T \text{ limitato} \iff \exists\, T^+ \wedge \|T^+\| = \|T\|$$

Esempio 1

$H \equiv L^2(\alpha, \beta)$

$T = \frac{d}{dx}$

$\exists\, T^+$? Dove è definito?

$(f, Tg) \qquad g \in L^2(\alpha, \beta)$

$Dom\, T = \{ g \in L^2(\alpha,\beta) : \exists\, g' \in L^2(\alpha,\beta) \}$

$\Rightarrow g \in D(T)$

$$(f, Tg) = \int_\alpha^\beta f^*(x)\, g'(x)\, dx$$

L'integrale deve esistere $\Rightarrow f$ deve appartenere ad L^2

Integro per parti:

$$(f, Tg) = f^* g \Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f^{*\prime}(x)\, g(x)\, dx = f^* g \Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta (-f^{*\prime}(x))\, g(x)\, dx$$

$$= f^* g \Big|_\beta^\alpha + \left(-\frac{df}{dx}, g\right)$$ Posso estrarre la definizione di T^+ da questa uguaglianza:

$$T^+ f = -\frac{d}{dx}(f) = -Tf \Rightarrow T^+ = -T$$

Ma dove è definito?

Ridefinisco $D(T) = \{g \in L^2(\alpha,\beta) : \exists g' \in L^2(\alpha,\beta) \wedge g(\alpha) = g(\beta) = 0\}$

perché $f^* g \Big|_\alpha^\beta$ deve essere nullo.

Ma c'è un altro modo, meno restrittivo.

Deve essere nulla la quantità:

$$f^*(\beta) g(\beta) - f^*(\alpha) g(\beta)$$

"basta" porre uguali a due termini:

$$D(T) = \{g \in L^2(\alpha,\beta) : \exists g' \in L^2(\alpha,\beta) \wedge g(\alpha) = g(\beta)\} \equiv D_0$$

$$D(T^+) = \{f \in L^2(\alpha,\beta) : f' \in L^2(\alpha,\beta) \wedge f(\alpha) = f(\beta)\} = D_0$$

Se definisco l'operatore $T = \frac{d}{dx}$ su D_0, esiste l'aggiunto, cioè T^+, ed è uguale a $-T$, definito sempre su D_0.

Esempio 2

$T \equiv i\frac{d}{dx} \qquad T^+ = ?$

$$(f, Tg) = \left(f, i\frac{dg}{dx}\right) = \int_\alpha^\beta f^*(x)\, i g'(x)\, dx =$$

$$= i f^*(x) g(x) \Big|_\alpha^\beta - i \int_\alpha^\beta f^{*\prime}(x) g(x)\, dx =$$

$$= i f^*(x) g(x) \Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \left(i\frac{df}{dx}\right)^* g(x)\, dx = \left(i\frac{df}{dx}, g\right) = (Tf, g)$$

$\Rightarrow$ su D_0, per questo operatore, vale:

$$(f, Tg) = (Tf, g) \qquad T = T^+$$

In realtà questo operatore è SIMMETRICO.

> Se per l'operatore T posso trovare un dominio $D_0 \subseteq D(T)$ per cui $(f, Tg) = (Tf, g)$, T si dice simmetrico, o hermitiano, su D_0.
> D_0 deve essere DENSO in H.

Se T è simmetrico in D_0, e $D(T) \equiv D(T^+)$, si scrive $T = T^+$ e si dice che T è autoaggiunto.

Esercizio

$T = \frac{d^2}{dx^2}$ dimostrare che è simmetrico.
trovare D_0 tale che T sia autoaggiunto.

Si possono definire operatori unitari come nel caso finito-dimensionali, così come i proiettori. Per i proiettori si dimostra $P^+ = P$.

Come si risolve il problema autovalori - autovettori nel caso infinito-dimensionale?

$$T : H \longrightarrow H \qquad x \in D(T)$$

$$Tx = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{C} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda \text{ autovalore} \\ x \text{ autovettore di } \lambda \end{cases}$$

Se H è a dimensione infinita, o di Hilbert, quasi mai si trovano autovalori.

ESEMPIO

$H \equiv L^2(\alpha, \beta) \quad T : H \to H \quad Tf = xf(x)$

$xf(x) = \lambda f(x)$? Sto cercando autofunzioni non nulle che soddisfano questa equazione.

$(x - \lambda) f(x) = 0$

A parte $x = \lambda$, l'unica soluzione è $f(x) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \lambda \\ \neq 0 & x = \lambda \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ è q.o. nulla $\Rightarrow f$ è la funzione nulla.

Questo operatore non ammette autovalori né autofunzioni.

ESEMPIO

$T f = i \frac{df}{dx} \qquad f \in L^2(\mathbb{R})$

$i \frac{df}{dx} = \lambda f \Rightarrow \frac{df}{dx} = -i\lambda f \Rightarrow$

$\frac{df}{f} = -i\lambda dx \Rightarrow \int \frac{df}{f} = -i\lambda \int dx \Rightarrow f(t) = e^{-i\lambda x} \dots$

... che non è una funzione L^2 su tutto $\mathbb{R}$.

Solo se l'intervallo è finito: $\int_\alpha^\beta |e^{-i\lambda x}|^2 dx = \beta - \alpha < +\infty$

Se l'intervallo è tutto $\mathbb{R}$:

$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\lambda x}|^2 dx = 2\int_0^\infty dx = +\infty$

Teorema

T simmetrico $\Rightarrow$ { T ha autovalori reali; autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali }

Si definisce SPETTRO dell'operatore T l'insieme dei $\sigma \in \mathbb{C}$ tale che:
$(T - \sigma \mathbb{1})$ non ammette inverso limitato.

E' l'analogo dell'equazione secolare:
$\det(T - \lambda \mathbb{1}) = 0 \Rightarrow \lambda \in \{\sigma\}$

In dimensione FINITA lo spettro si riduce allo SPETTRO PUNTUALE, che è l'insieme degli autovalori.

Spettro puntuale:
$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ Tx = \lambda x\} = \{\lambda : T - \lambda \mathbb{1} \text{ non è invertibile}\}$

Spettro continuo:
$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda \mathbb{1}) \text{ ha inverso illimitato con dominio denso in } H\}$

Spettro residuo:
$\sigma_R(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda \mathbb{1}) \text{ ha inverso con dominio non denso in } H\}$

$\sigma(T) \equiv \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_R(T)$

Si definisce insieme risolvente di T

$\rho(T) = \mathbb{C}\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda \mathbb{1})$ ha inverso limitato con dominio denso in $H\}$

Supponiamo di passare da $L^2(\alpha,\beta)$ a $L^2(\mathbb{R})$.
Come sono collegati L^2 ed L^1 in entrambi i casi?

- intervallo finito $\quad L^2(\alpha,\beta) \subset L^1(\alpha,\beta)$

$f(x) = \frac{1}{(x-a)^k} \qquad a \in (\alpha,\beta)$

$\int_\alpha^\beta |x-a|^{-k} dx \qquad (L^1)$

$= \frac{|x-a|^{-k+1}}{-k+1}$ Voglio che questa quantità converga.

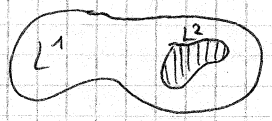
$\longrightarrow 0$ sse $-k+1 > 0 \Rightarrow k < 1 \Rightarrow f \in L^1(\alpha,\beta)$

$\int_\alpha^\beta |x-a|^{-2k} dx \qquad (L^2)$

$= \frac{|x-a|^{-2k+1}}{-2k+1}$

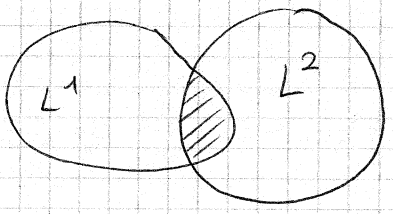
$\longrightarrow 0$ sse $k < 1/2 \Longrightarrow f \in L^2(\alpha,\beta) \qquad 1/2 < 1$

Ogni funzione L^2 è anche L^1.



- intervallo infinito

$\Rightarrow$ al più, L^2 ed L^1 hanno un'intersezione.



Controllare le funzioni del tipo $\frac{1}{|x|^\alpha}$ integrando $|f|$ e $|f|^2$ su tutto $\mathbb{R}$.

15/04/2009

VERSO LA TRASFORMATA DI FOURIER

Lo sviluppo di Fourier è uno sviluppo in serie.
Data una funzione $f \in L^2(-\pi, \pi)$ (ad esempio), essa è sviluppabile in serie rispetto alla base di $L^2(-\pi, \pi)$ data da $\{\varphi^{(n)}(x)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\right\}_{n=1,2,\dots}$
Ovvero:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi^{(n)}(x)$$

$$a_n = (\varphi^{(n)}(x), f(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^{(n)}(x) f(x)\,dx$$

Abbiamo valutato anche una dilatazione data da un cambio di variabili:

$$x \longrightarrow \frac{\pi}{L} x$$

$$L^2(-\pi, \pi) \longrightarrow L^2(-L, L)$$

Vogliamo studiare cosa succede mandando L all'infinito.

$$L \longrightarrow \infty$$

Cosa succede in $L^2(\mathbb{R})$?
Un altro set ortonormale completo che genera $L^2(-L, L)$ è la base esponenziale:

$$\{u_k(x)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\frac{k\pi}{L}x}\right\}_{k=0,\pm1,\pm2,\dots}$$

Posso scrivere $f \in L^2(-L, L)$ in questo modo:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k u_k(x)$$

$$b_k = (u_k(x), f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^{L} e^{-i\frac{k\pi}{L}x} f(x)\,dx$$

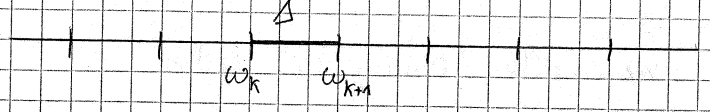
Quindi:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2L}} b_k e^{i\frac{k\pi}{L}x}$$

Faccio due definizioni:

$$\Delta \equiv 2\pi / 2L \qquad \omega_k \equiv k\pi/L = k\Delta$$

k è detto numero d'onda, mentre ω è l'analogo di una frequenza.



$$\Delta = \omega_{k+1} - \omega_k \equiv \Delta\omega$$

Voglio passare ad una rappresentazione continua delle

frequenze, mandando $\Delta = \Delta\omega \to 0$.
Mandare Δ a 0 significa mandare π/L a 0, ovvero mandare L all'infinito:

$$\Delta\omega \longrightarrow 0 \implies L \longrightarrow \infty$$

Lo spazio delle frequenze si dice spazio duale.
Definisco:

$$\hat{f}(\omega_k) \equiv \int_{-L}^{L} e^{-i\omega_k x} f(x)\,dx$$

$$b_k \equiv \frac{\hat{f}(\omega_k)}{\sqrt{2L}}$$

$$f(x) = \sum_k b_k u_k(x) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\pm\infty} \hat{f}(\omega_k) e^{i\omega_k x} \right) \cdot \frac{1}{2L}$$

$$\frac{1}{2L} = \frac{\Delta}{2\pi} \longrightarrow f(x) = \frac{\Delta}{2\pi} \sum \hat{f}(\omega_k) e^{i\omega_k x}$$

Operando questo passaggio al continuo, $\Delta\omega \sim d\omega$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum \hat{f}(\omega_k) e^{i\omega_k x} \Delta$$

$L \to \infty$
$\Delta \to 0$
$\Delta \sim d\omega$

In questo limite posso riscrivere f:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} \quad \left[\begin{matrix}\text{INTEGRALE}\\ \text{DI FOURIER}\end{matrix}\right]$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx \quad \left[\begin{matrix}\text{TRASFORMATA DI}\\ \text{FOURIER DI } f(x)\end{matrix}\right]$$

Questo si chiama sviluppo in integrale di Fourier di f. $f(x)$ si dice anche antitrasformata di $\hat{f}(\omega)$.
$\hat{f}$ "vive" nello spazio duale delle frequenze.
A volte si notano notazioni diverse per integrale e trasformata. Cambia solo qualche coefficiente ma il risultato finale è invariante.

$[-L, L] \ni x$

ω variabile "coniugata" ad x

Naturalmente lo sviluppo si applica anche a fenomeni temporale, non solo spaziali.

Tipicamente, la "vera" ω ha a che fare con segnali temporali. Quindi:

$f(x)$, $x \in [-L, L]$ ⟵ (p) (momento cinetico)

$f(t)$, $t \in [-T, T]$ ⟵ (ω) (pulsazione)

La trasformata di Fourier si usa soprattutto per risolvere le equazioni differenziali associate alle maglie di un circuito. Si trovano le impedenze (nello spazio duale), si risolvono semplici eq. algebriche.

Dunque:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad , \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) e^{ipx} dp \quad , \quad \hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x)\, dx$$

ESEMPIO

Fornisco onde sinusoidali ad un circuito per un intervallo finito di tempo:

$$f(t) = \begin{cases} e^{i\omega_0 t} & t \in [-T, T] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questo è un TRENO D'ONDE. Se non fosse finito nel tempo sarebbe un'onda piana.

ω_0 frequenza dominante.

Riusciamo a leggere questo segnale nello spazio duale?

A questo treno d'onde è associato il NUMERO D'ONDE:

$$n = \omega_0 \frac{2T}{2\pi} = \frac{\omega_0}{\Delta} \qquad \omega_0 = n\Delta$$

(posso vedere Δ come un "quanto" di frequenze e vado a vedere quante volte Δ entra nella frequenza dominante).

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T}^{T} e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \int_{-T}^{T} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt \qquad \text{(combinazione di seni e coseni)}.$$

Il seno non contribuisce perché è una funzione dispari integrata su un intervallo "pari" (simmetrico risp. all'origine ...).

$$= 2\int_{0}^{T} \cos[(\omega_0 - \omega)t]\, dt = \frac{2\,\mathrm{sen}[(\omega_0 - \omega)T]}{\omega_0 - \omega} = \hat{f}(\omega)$$

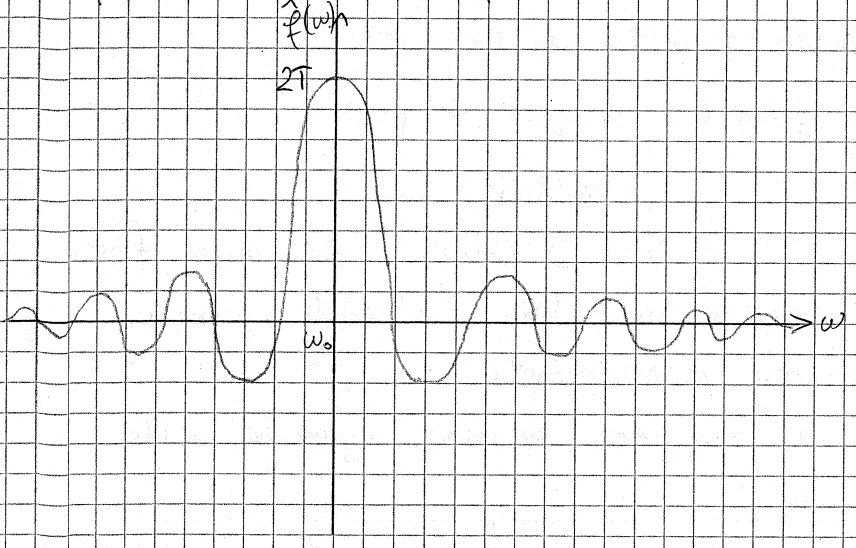
$$\hat{f}(\omega) = \frac{2\,\sin[(\omega_0 - \omega)T]}{\omega_0 - \omega}$$

moltiplichiamo e dividiamo per T per vedere che succede per $\omega \to \omega_0$:

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \to 0} 1 \quad \text{(max per seno)}$$

$$\omega \to \omega_0 \qquad \frac{2\,\sin[(\omega_0 - \omega)T]}{\omega_0 - \omega} \to 2T$$

Il picco è in corrispondenza di ω_0:



Se avessi un segnale temporalmente infinito avrei una sola onda monocromatica, con una sola frequenza, con una sola riga sullo spettro delle frequenze.
Invece in $[-T, T]$ si hanno contributi a diverse frequenze, ma sempre più piccoli, con il picco in ω_0.

Più grande è T, più spanpagliato è il segnale nel tempo, più cresce il picco e più è "stretto" sulle ω. C'è una sorta di principio di INDETERMINAZIONE: se aumento l'informazione nel tempo, devo necessariamente stringere l'informazione in ω.

Tornando all'esercizio:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{+A} \hat{f}(p)\, e^{-ipx}\,dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ipy}\,dy\right] e^{ipx}$$

($\hat{f}(p)$)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y) \int_{-A}^{+A} dp\, e^{ip(x-y)}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y) \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \frac{e^{ip(x-y)}}{2\pi}$$

Definisco:

$$\delta(x-y) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{ip(x-y)}$$

[DELTA DI DIRAC (rappresentazione integrale)]

Risulta:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y)\,\delta(x-y)$$ ovvero $f * \delta$

Si definisce CONVOLUZIONE di f con g e si indica con $f*g$ la funzione $\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y)\, g(x-y)$.

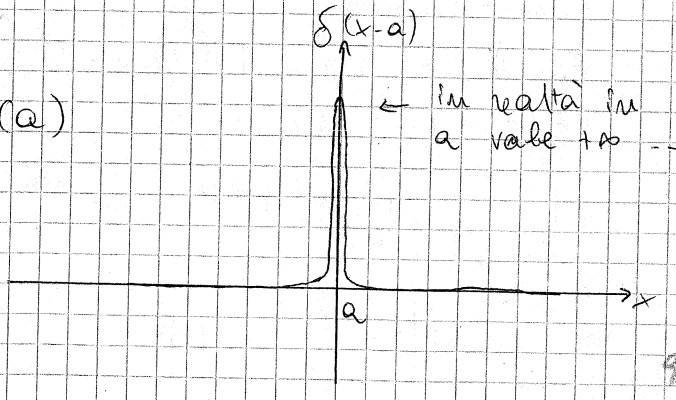
Quindi, la δ di dirac definita così, se convoluta con f, mi rida la f stessa.

L'integrale di δ su tutta la retta reale è 1:

$$f(x) \equiv 1 \qquad 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\,\delta(x-y)$$

Altra proprietà:

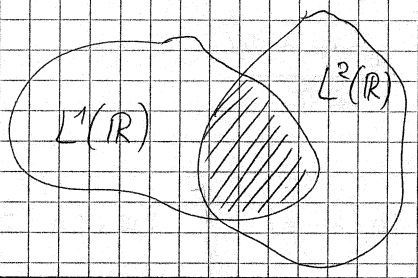
$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x-a) f(x)\,dx = f(a)$$



In realtà, riducendo la δ ad un intervallino di larghezza a e altezza incognita, sapendo che $\int \delta$ fa 1, l'altezza deve essere $1/a$.

Sono veramente legittimi tutti i passaggi che abbiamo fatto? Quanto devo restringere lo spazio delle funzioni per poter calcolare trasformata e antitrasformata?

- Non è più scontato che una funzione L^2 sia L^1:



$f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow$ LA SUA TRASFORMATA DI FOURIER ESISTE SEMPRE

Dimostrazione

$$\hat{f}(p) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ipx} dx$$

$$|\hat{f}(p)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ipx} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) e^{-ipx}| dx$$

$|e^{-ipx}|$ (è un fattore di fase) $= 1$

$$\Rightarrow |\hat{f}(p)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$$

$$f \in L^1 \Rightarrow |\hat{f}(p)| < +\infty$$

$\hat{f}(p)$ è continua: se $p \to p_0$ $\hat{f}(p) \to \hat{f}(p_0)$

Dimostrazione

$\varepsilon \in \mathbb{R}$ $\forall p$ $|\hat{f}(p+\varepsilon) - \hat{f}(p)| = ?$

$$|\hat{f}(p+\varepsilon) - \hat{f}(p)| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[e^{-i(p+\varepsilon)x} - e^{-ipx} \right] dx \right| \leq \int_{-A}^{+A} |f(x)| \left| e^{-i(p+\varepsilon)x} - e^{-ipx} \right| dx$$

$$= \int_{-A}^{+A} |f(x)| \left| e^{-i\varepsilon x} - 1 \right| dx \qquad \varepsilon \to 0$$

questo quantità va a 0?

Posso portare il limite dentro l'integrale?
Sì, per il Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata.

$|f(x)||e^{-i\varepsilon x}-1|$ è sicuramente dominata dal suo massimo, ovvero $2|f(x)|$, che è sommabile.
Quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon\to 0}\left(|f(x)||e^{-i\varepsilon x}-1|\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 = 0 \quad \text{c.v.d.}$$

Vedremo che potremo definire un operatore:

$$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R})$$

(continuo e limitato).
$\mathcal{F}$ è proprio l'operatore trasformata di Fourier.

16/04/2009

$$f(x)\in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \exists\, \hat{f}(p) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ipx}dx \quad \text{(Trasformata)}$$

Lo sviluppo in integrale di Fourier è:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(p)e^{ipx}dp$$

Ma questo integrale esiste? Se esiste, deve produrre la $f(x)$.

Rappresentazione integrale della Delta di Dirac

$$\delta(x-x')=\frac{1}{2\pi}\int dp\, e^{ip(x-x')}$$

Abbiamo dimostrato che in L^1 la $\hat{f}$ esiste sempre e $\hat{f}: p \longrightarrow \hat{f}(p)$ è continua.

- Indico con $C^0(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue su $\mathbb{R}$.

Posso definire un operatore $\mathcal{F}$ su C^0 tale che:

$$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R})$$
$$\mathcal{F}: f \in L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}[f] \equiv \hat{f}$$
Operatore trasformata di Fourier

Vogliamo dimostrare che questo operatore è continuo rispetto alle norme in L^1 e C^0:

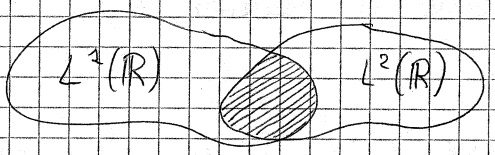
$$\begin{array}{l} f \xrightarrow{\|\ \|_1} \phi \\ \|f-\phi\|_1 \longrightarrow 0 \end{array} \overset{?}{\Longrightarrow} \hat{f} \xrightarrow{\|\ \|_{C^0}} \hat{\phi}$$

$$\|\hat{f}-\hat{\phi}\|_{C^0} = \max_{p\in\mathbb{R}} |\hat{f}(p)-\hat{\phi}(p)| = \max_{p\in\mathbb{R}} \left| \int [f(x)-\phi(x)]\, e^{-ipx}\, dx \right| \leq$$
$$\leq \max_{p\in\mathbb{R}} \int \left| [f(x)-\phi(x)]\, e^{-ipx} \right| dp = \max_{p\in\mathbb{R}} \int |f(x)-\phi(x)|\, dx = \|f-\phi\|_1$$

Quindi, $\|\hat{f}-\hat{\phi}\|_{C^0} \leq \|f-\phi\|_1$, e la convergenza di f a ϕ in L^1 implica la convergenza di $\hat{f}$ a $\hat{\phi}$ in C^0.

- L'operatore $\mathcal{F}$ è CONTINUO.

Non è ancora detto che, se una funzione è L^1, la sua trasformata di Fourier sia ancora L^1, quindi non c'è l'operazione inversa assicurata. Questo invece si verifica lavorando su L^2.
Un Teorema ci assicura cosa succede in $L^1 \cap L^2$:



Teorema

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \exists\ \hat{f} \wedge \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \wedge$$
(uguaglianza di Parseval $\rightarrow$) $\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$

Dimostrazione

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(p)|^2\, dp = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \overbrace{f^*(x)}^{\hat{f}^*(p)}\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipy} \overbrace{f(y)}^{\hat{f}(p)}\, dy =$$
$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f^*(x) f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-ip(y-x)} \cdot \frac{1}{2\pi} \right] \cdot 2\pi$$

L'ultimo integrale è una δ di Dirac!

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f^*(x) f(y)\, \delta(y-x) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \delta(y-x)\, dy =$$
$$= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f^*(x) f(x) = 2\pi \|f\|_2^2$$

Infatti la δ di Dirac è l'analogo, nel continuo, della δ di Kroneker: di tutti i termini che vengono sommati sopravvive solo quello relativo all'annullarsi dell'argomento della δ.

La δ è, naturalmente, normalizzata a 1; la δ non è una funzione bensì una distribuzione.
L'identità di Parseval dimostra la prima parte del teorema.

Posso estendere il risultato ad $L^2(\mathbb{R})$ intero? Sì, perché $L^1 \cap L^2$ è denso in L^2. Ovvero:

Teorema

$L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$.

Da questo discende:

1. $\exists \{f_n\}_n$, se $f \in L^2(\mathbb{R})$, appartenente a $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, tale che $f_n \longrightarrow f$, ovvero $\|f_n - f\|_2 \longrightarrow 0$
2. $\{\hat{f}_n\}$ succ. convergente in $L^2(\mathbb{R})$
   $\mathcal{F}[f] = \lim_n \hat{f}_n \equiv \hat{f}$
3. La definizione delle $\hat{f}$ è univoca: $f_n, g_n \longrightarrow f$
   $\{f_n\}, \{g_n\}$, $\lim_n \hat{f}_n = \lim_n \hat{f}_n$

Dimostrazione

1. $f \in L^2(\mathbb{R})$ definisco $f_n(x) \equiv \begin{cases} f(x) & |x| \le n \\ 0 & |x| > n \end{cases}$

   Vediamo che le f_n appartengono a $L^1 \cap L^2$. Le f_n sono L^2 perché è L^2 f.

   $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)|\,dx < +\infty$?

   $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)|\,dx = \int_{-n}^{n} |f(x)|\,dx < +\infty$ perché $[-n, n]$ è un intervallo finito, ove tutte le funzioni L^2 sono anche L^1.

   Quindi $\{f_n\}_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ c.v.d.

   Dimostriamo che $f_n \longrightarrow f$

   $\|f_n - f\|_2^2 \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0$?

   $\|f - f_n\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f - f_n|^2\,dx = \int_{|x|>n} |f(x)|^2\,dx =$

   $= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx - \int_{-n}^{n} |f(x)|^2\,dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ c.v.d.

   Abbiamo trovato una successione $\in L^1 \cap L^2$ convergente a f nella norma L^2. È quindi di Cauchy.

2. $\{\hat{f}_n\}$ succ. delle trasformate di Fourier di tutte le $\{f_n\}$.
$\hat{f}_n = \mathcal{F}[f_n] \in L^2(\mathbb{R})$
Vale Parseval:
$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2^2 = 2\pi \|f_n - f_m\|_2^2 \Rightarrow \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f_n - f_m\|_2$
$\{f_n\}$ è di Cauchy $\Longrightarrow \{\hat{f}_n\}$ è di Cauchy.
L^2 è completo $\Longrightarrow \lim_n \hat{f}_n \in L^2(\mathbb{R})$
Ovvero, $\exists\, \hat{f} \equiv \lim_n \hat{f}_n$, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$
Chiamo $\hat{f}$ TRASFORMATA DI FOURIER della funzione f da cui siamo partiti.

3. $f_n \longrightarrow f$ $\quad$ $\hat{f}, \hat{g}$ sono trasformate di f e
$g_n \longrightarrow f$ $\quad$ appartengono a $L^2 \Rightarrow$ vale Parseval.

$$\|\hat{f}_n - \hat{g}_n\| = \sqrt{2\pi}\, \|f_n - g_n\| = \sqrt{2\pi}\, \|(f_n - f) - (g_n - f)\| \leq$$
$$\leq \sqrt{2\pi}\,[\underbrace{\|f_n - f\|}_{\to 0} + \underbrace{\|g_n - f\|}_{\to 0}]$$
$$\Longrightarrow \lim_n \hat{f}_n = \lim_n \hat{g}_n .$$

Abbiamo fornito un metodo operativo per definire la trasformata di Fourier di una $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\hat{f} \equiv \mathcal{F}[f] = \lim_n \hat{f}_n = \lim_n \int_{-n}^{n} f(x)\, e^{-ipx}\, dx ,$$

essendo $\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ipx}\, dx$

$\|\hat{f}\|^2 = \lim_n \|\hat{f}_n\|^2$ perché il prodotto scalare è continuo

$(\hat{f}, \hat{f})$ $\qquad$ $(\hat{f}_n, \hat{f}_n)$

$\|\hat{f}\|^2 = \lim_n \|\hat{f}_n\|^2 = \lim_n 2\pi \|f_n\|^2$

(Parseval vale su tutto $L^2(\mathbb{R})$).

Vale anche la generalizzata:

Uguaglianza di Parseval generalizzata

$f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$$(\hat{f}, \hat{g}) = 2\pi (f, g)$$

Se $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\exists\ \mathcal{F}^{-1}$?

Abbiamo dimostrato che $\mathcal{F}$, definito su L^2, rimane su L^2:

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$\mathcal{F}$ è un operatore lineare da L^2 in L^2, continuo.
Voglio dimostrare che $\mathcal{F}$ è INVERTIBILE, ovvero iniettivo e suriettivo.

Teorema

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$
$$\mathcal{F}[f] = \lim_{n} \int_{-n}^{n} f(x) e^{-ipx}\, dx$$

- $\mathcal{F}$ INIETTIVO: $\mathcal{F}[f_1 - f_2] = 0 \Longrightarrow f_1 = f_2$

Infatti: $0 = \|\hat{f}_1 - \hat{f}_2\| = \sqrt{2\pi}\, \|f_1 - f_2\| \Rightarrow \|f_1 - f_2\| = 0$

- $\mathcal{F}$ SURIETTIVO: $g \in L^2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \exists\ f \in L^2(\mathbb{R})$ t.c. $\mathcal{F}[f] = g$

Per costruzione:

$$\frac{1}{2\pi}\, \hat{g}^* = \frac{1}{2\pi} \left(\mathcal{F}[g^*]\right)^* \equiv f.$$

Dimostrazione:

(Ovviamente in questo caso $f = \mathcal{F}^{-1}[g]$)

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ipx}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\, dx\, e^{-ipx} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dp'\, g^*(p')\, e^{-ip'x}\right]^*}_{= \mathcal{F}[g^*]} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{e^{-ipx}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp'\, g(p')\, e^{ip'x} = \int_{-\infty}^{+\infty} dp'\, g(p') \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-i(p-p')x} \cdot \frac{1}{2\pi} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dp'\, g(p')\, \delta(p - p') = g(p) = \hat{f}(p).$$

Quindi:

Teorema di inversione

Data una $g \in L^2$, posso definire

$$\mathcal{F}^{-1}: g \in L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}^{-1}[g] = f = \frac{1}{2\pi} \left(\mathcal{F}[g^*]\right)^*$$

Lezione merc. 29 alle 9:00 a Matematica

29/04/2009

TRASFORMATA DI FOURIER DI f

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ipx}\, dx$$

- $\exists$ sicuramente in L^1
- $\exists$ sicuramente in L^2 ed $\in L^2 \cap L^1$
- In $L^1 \cap L^2$ $\quad \|\hat{f}\|^2 = 2\pi \|f\|^2$
- In L^2:

$$\hat{f}(p) = \lim_m \int_{-m}^{m} f(x)\, e^{-ipx}\, dx$$

ed $\exists$ antitrasformata: $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(p)\, e^{ipx}\, dp$

RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DELLA δ DI DIRAC

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip(x-x')}\, dp$$

- $\Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(p) = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x-x_0)\, dx = f(x_0)$

OPERATORE TRASFORMATA DI FOURIER

$$\mathcal{F}(f) \equiv \hat{f}(p), \text{ oppure } \hat{f}(\omega) \text{ se } f = f(t)$$

Quando esiste $\dfrac{d\hat{f}(p)}{dp}$?

Per definizione:

$$\frac{\hat{f}(p+\varepsilon) - \hat{f}(p)}{\varepsilon} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \frac{\left[e^{-i(p+\varepsilon)x} - e^{-ipx}\right]}{\varepsilon}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ipx}\, \frac{\left[e^{-i\varepsilon x} - 1\right]}{\varepsilon}\, dx$$

Il modulo dell'integrale è $\leq$ l'integrale del modulo.

$$\left| \frac{e^{-i\varepsilon x} - 1}{\varepsilon} \right| |f(x)| = \left| \frac{e^{-i\varepsilon x} - 1}{i\varepsilon x} \right| |i x f(x)|$$

Sviluppando in serie di Taylor al prim'ordine, questa

funzione risulta maggiorata da $|x f(x)|$.

$$\Rightarrow \frac{d\hat{f}(p)}{dp} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)| dx$$

Quindi, non basta controllare $|f(x)|$, ma è il prodotto $|x f(x)|$ che, se finito, assicura l'esistenza della derivata prima di $\hat{f}(p)$.

Quindi, deve essere:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f \in L^1 \\ \cdot\ xf \in L^1 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ \frac{d\hat{f}(p)}{dp}$$

Iterando il procedimento, ad esempio, si ha:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f \in L^1 \\ \cdot\ x^2 f \in L^1 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ \frac{d^2\hat{f}(p)}{dp^2}$$

Se ciò è vero, si ha convergenza "totale"
$\Rightarrow$ posso scambiare derivata e integrale
(Teor. convergenza dominata, di Lebesgue)

$$\frac{d\hat{f}(p)}{dp} = \frac{d}{dp}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ipx} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)(-ix)] e^{-ipx} dx =$$

$$= \mathcal{F}[-ix f(x)]$$

1° proprietà

$$\frac{d^k}{dp^k}\mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}[(-ix)^k f(x)]$$

Esistono le cosiddette funzioni a decrescenza rapida per le quali vale $x^k f(x) < +\infty\ \forall x\ \forall k$
$\Rightarrow$ la loro $\mathcal{F}[f]$ è infinitamente derivabile.

Vediamo invece com'è fatta $\mathcal{F}[f'(x)]$.

Per definizione:

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ipx} dx$$

Uso l'integrazione per parti:

$$\mathcal{F}[f'(x)] = f(x) e^{-ipx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ip) e^{-ipx} dx =$$

$$= f(x) e^{-ipx} + ip\, \mathcal{F}[f(x)]$$

- Se $f \in L^1$ e $f' \in L^1 \implies f(x) e^{-ipx} = 0$

Sotto queste ipotesi, vale:

2° proprietà

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right] = (ip)^k \mathcal{F}[f(x)]$$

Com'è la $\mathcal{F}$ di f traslata?

$$\mathcal{F}[f(x+x_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+x_0) e^{-ipx} dx =$$

$(x+x_0 \equiv y \implies dx = dy)$

$$= e^{ipx_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ipy} dy$$

3ª proprietà

$$\mathcal{F}[f(x+x_0)] = e^{ipx_0} \mathcal{F}[f(x)]$$

4° proprietà

$$\mathcal{F}[e^{-ip_0 x} f(x)] = \mathcal{F}_{(p-p_0)}[f]$$

Vediamo la convoluzione di f_1 con f_2:

$$(f_1 * f_2)(y) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(x-y)\, dx$$

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(\gamma)] = ?$$

$$\mathcal{F}\left[(f_1 * f_2)(\gamma)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\gamma\, e^{-i p \gamma} (f_1 * f_2)(\gamma) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\gamma\, e^{-i p \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f_1(x) f_2(x-\gamma) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f_1(x) \int_{-\infty}^{+\infty} d\gamma\, e^{-i p \gamma} f_2(x-\gamma) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f_1(x) \cdot e^{-i p x}\, \mathcal{F}[f_2(\gamma)] =$$

$$= \mathcal{F}[f_1(x)] \cdot \mathcal{F}[f_2(\gamma)]$$

5ª proprietà

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \mathcal{F}[f_1]\, \mathcal{F}[f_2]$$

6ª proprietà

$$\mathcal{F}[f_1 f_2] = \mathcal{F}[f_1] * \mathcal{F}[f_2]$$

ESEMPIO

Gaussiana in una dimensione.

$$e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Scegliamo: $\sigma^2 = \frac{1}{2\alpha}$; $\mu = 0$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = e^{-\alpha x^2}$$

Com'è la $\mathcal{F}$ di una gaussiana?

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-i p x}\, dx$$

La Gaussiana è L^2?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx < +\infty ? \qquad (= \|f\|^2)$$

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha x^2}\, dx = \qquad \left(\sqrt{2\alpha}\, x \equiv z \;\Rightarrow\; 2\alpha x^2 = z^2 \;\Rightarrow\; dx = \frac{dz}{\sqrt{2\alpha}} \right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz \cdot \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} < +\infty \qquad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} \right)$$

Torniamo alla trasformata:

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-ipx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha x^2 + ipx)} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\alpha x^2 + ipx - \frac{p^2}{4\alpha} + \frac{p^2}{4\alpha}\right)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\alpha} x + \frac{ip}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} e^{-\frac{p^2}{4\alpha}} dx =$$

$$= e^{-\frac{p^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} =$$

$$\left(z = \sqrt{\alpha} x + \frac{ip}{2\sqrt{\alpha}} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{p^2}{4\alpha}} = \hat{f}(p)$$

La trasformata di una Gaussiana è ancora una Gaussiana, nello spazio duale.

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\alpha} \sim \frac{1}{\alpha} \; ; \; \mu_x = 0$$

$$\sigma_p^2 = 2\alpha \sim \alpha \; ; \; \mu_p = 0$$

NO (rifare i calcoli)

Data una $f(x)$, posso definire il BARICENTRO $\overline{x}$ come:

$$\overline{x} \equiv \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} x |f(x)|^2 dx \; , \quad M = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \|f\|^2$$

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x \|f\|^2 dx}$$

$f \in L^2 \Rightarrow \nexists \, \overline{x}$

Vale Parseval: $\|\hat{f}\|^2 = 2\pi \|f\|^2 = 2\pi M$

$$M = \frac{\|\hat{f}\|^2}{2\pi}$$

Quanto fa $\overline{(x - \overline{x})^2}$?

$$\overline{(x-\bar{x})^2} = \frac{1}{M}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{x})^2\,|f(x)|^2\,dx$$

Questa quantità misura quanto si discostano i valori di f dalla media

"Larghezza" del segnale:

$$(\Delta x)^2 = \text{"VARIANZA in } x\text{"} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{M}(x-\bar{x})^2\,|f(x)|^2\,dx$$

Definiamo il baricentro spettrale:

$$\bar{p} = \frac{1}{M}\int_{-\infty}^{+\infty} p\,|\hat{f}(p)|^2\,\frac{dp}{2\pi}$$

$$(\Delta p)^2 = \text{"VARIANZA in } p\text{"} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi M}(p-\bar{p})^2\,|\hat{f}(p)|^2\,dp$$

Dimostreremo il PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE:

$$\Delta x\,\Delta p \geq \frac{1}{2}$$

($=$ vale sse $f(x)$ è una gaussiana)

$\bar{x} = 0 \leftarrow$ f centrata nell'origine

$(\Delta x)^2 \equiv \overline{x^2} = \frac{1}{M} \int x^2 |f(x)|^2 dx$ Calcoliamo la norma seguente:

$$0 \leq \left\| \frac{p - \bar{p}}{2(\Delta p)^2} \hat{f}(p) + \frac{d\hat{f}(p)}{dp} \right\|^2 =$$

$$= \int \frac{(p-\bar{p})^2}{4(\Delta p)^4} |\hat{f}(p)|^2 dp + \dots = $$

$$= \frac{2\pi M (\Delta p)^2}{4(\Delta p)^4} + \dots = \frac{\|\hat{f}\|^2}{4(\Delta p)^2} + \dots =$$

$$= \frac{2\pi \|f\|^2}{4(\Delta p)^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d\hat{f}(p)}{dp} \right|^2 dp + \dots =$$

$$= \dots + \| \mathcal{F}[-ix f(x)] \|^2 + \dots =$$

(integrazione per parti)

$$= \dots + \frac{1}{2(\Delta p)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (p - \bar{p}) \left[\hat{f}(p)^* \frac{d\hat{f}(p)}{dp} + \left(\frac{d\hat{f}(p)}{dp} \right)^* \hat{f}(p) \right] dp =$$

$$= \dots + \frac{1}{2(\Delta p)^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (p - \bar{p}) \hat{f}(p) \frac{d\hat{f}^*(p)}{dp} dp - \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^*(p) \frac{d}{dp} \left(\hat{f}(p)(p - \bar{p}) \right) dp \right] =$$

$$= \dots + \frac{1}{2(\Delta p)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(p)|^2 dp =$$

$$= \frac{2\pi \|f\|^2}{4(\Delta p)^2} + \| \mathcal{F}[-ix f(x)] \|^2 - \frac{2\pi \|f\|^2}{2(\Delta p)^2} =$$

$$= -\frac{2}{4} \frac{\pi \|f\|^2}{(\Delta p)^2} + 2\pi \| x f(x) \|^2 =$$

$$= -\frac{2\pi \|f\|^2}{4(\Delta p)^2} + 2\pi M (\Delta x)^2 \geq 0$$

$$2\pi \|f\|^2 \left[(\Delta x)^2 - \frac{1}{4(\Delta p)^2} \right] \geq 0$$

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \geq 1/4$$

$$\Delta x \Delta p \geq 1/2 \quad \text{C.V.D.}$$

Vediamo il caso dove vale l'uguaglianza:

$$\|A\| = 0 \iff A = 0$$

$$-\frac{(p - \bar{p})}{2(\Delta p)^2} \hat{f}(p) = \frac{d\hat{f}(p)}{dp}$$ è una equazione differenziale.

$$\int \frac{d\hat{f}(p)}{\hat{f}(p)} = -\int \frac{(p - \bar{p})}{2(\Delta p)^2} dp$$

$$\ln[\hat{f}(p)] = -\frac{(p - \bar{p})^2}{4(\Delta p)^2} \Rightarrow \hat{f}(p) \sim e^{-\frac{(p-\bar{p})^2}{4(\Delta p)^2}}$$

$\hat{f}$ GAUSSIANA in $p \Rightarrow f$ gaussiana in x

Il segnale che rende minima l'indeterminazione è un segnale gaussiano.

ESERCIZIO

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-x} & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases} \qquad \hat{f} = \frac{1}{(1+ip)^2}$$

- $\hat{f}(p) = ?$ trovarla con calcolo esplicito e con le proprietà della trasformata della derivata.
- Dimostrare che

$$x e^{-x} = g_1 * g_2 \quad , \quad g_1(x) = g_2(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

① $$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ipx} = \int_0^{+\infty} x e^{-x} e^{-ipx} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} x e^{-x(1+ip)} dx \qquad \text{per parti:}$$

$$= -\frac{x e^{-x(1+ip)}}{(1+ip)} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{1+ip} \int_0^{+\infty} e^{-x(1+ip)} dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{1+ip} \left(-\frac{1}{1+ip} e^{-x(1+ip)} \right) \Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{(1+ip)^2} = \hat{f}(p) \qquad \text{(con calcolo esplicito)}$$

Altro metodo.

$$\mathcal{F}[f'] = ip\, \mathcal{F}[f]$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x} - f(x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$\boxed{x \geq 0}$

$$\mathcal{F}[f'] = \mathcal{F}[e^{-x}] - \mathcal{F}[f]$$

$$ip\, \mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[e^{-x}] - \mathcal{F}[f]$$

$$(1+ip)\, \mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[e^{-x}] \Rightarrow \mathcal{F}[f] = \frac{1}{1+ip} \mathcal{F}[e^{-x}] =$$

$$= \frac{1}{1+ip} \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-ipx} dx = \frac{1}{1+ip} \int_0^{+\infty} e^{-x(1+ip)} dx = \frac{1}{(1+ip)^2}$$

(2)

$g_2(x-y) = \dots$, $x-y>0 \Rightarrow y<x$

$$g_1 * g_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(y)\, g_2(x-y)\, dy = \int_0^x e^{-y} e^{-(x-y)}\, dy =$$

$$= \int_0^x e^{-y-x+y}\, dy = e^{-x} \int_0^x dy = x e^{-x}$$

ESERCIZIO

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x|<a \\ 0, & |x|>a \end{cases}$$

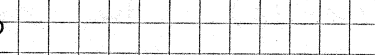
Dimostrare che $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\, dt = \pi$ usando l'identità di Parseval.

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ipx}\, dx = \int_{-a}^{a} e^{-ipx}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{ip} e^{-ipx}\Big|_{-a}^{a} = -\frac{1}{ip}\left(e^{-ipa} - e^{ipa}\right) =$$

$$= \frac{1}{ip}\left(e^{ipa} - e^{-ipa}\right) = \frac{1}{ip}\, 2i \operatorname{sen} pa =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}(pa)}{p} \cong$$



Parseval: $\|\hat{f}\|^2 = 2\pi \|f\|^2$

$$\|f\|^2 = \int_{-a}^{a} 1^2\, dx = 2a \Rightarrow \|\hat{f}\|^2 = 4\pi a$$

$$\|\hat{f}\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{2\operatorname{sen}(pa)}{p}\right|^2 dp = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\operatorname{sin}^2(pa)}{p^2}\, dp = 4\pi a$$

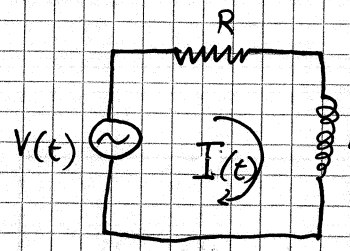
Cambio variabile: $pa = t \quad dp = dt/a$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{t^2 a^2}\, \frac{dt}{a} = \pi a \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\, dt = \pi$$

05/05/2009

TRASFORMATA DI FOURIER
FUNZIONE DI GREEN

- Ricerca soluzioni circuito RL



$$RI + L\frac{dI}{dt} = V(t)$$

$I = I(t)$ incognita

[input] $= V(t)$ [output] $= I(t)$

E' un sistema lineare di cui vogliamo analizzare la risposta.

Analizziamo IN ed OUT tramite le loro trasformate di Fourier, supponendo che si possa fare:

$$V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \hat{V}(\omega) e^{i\omega t} \qquad \text{(Antitrasformata)}$$

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \hat{I}(\omega) e^{i\omega t} \qquad \text{(Antitrasformata)}$$

Questo è lo studio in frequenza del nostro sistema.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[R\hat{I}(\omega) + L(i\omega)\hat{I}(\omega) - \hat{V}(\omega)\right] e^{i\omega t} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \mathcal{F}^{-1}[\dots] = 0 \Longleftrightarrow \dots = 0$$

Questo equivale a:

$$(R + i\omega L)\hat{I}(\omega) = \hat{V}(\omega)$$

che è un'equazione algebrica.

$$\hat{V}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t) e^{-i\omega t} dt \qquad [\text{nota}]$$

$$\hat{I}(\omega) = \frac{\hat{V}(\omega)}{R + i\omega L}$$

Conoscendo $\hat{I}(\omega)$, in linea di principio, si calcola $I(t)$.

Impedenza del circuito RL = $Z(\omega) \equiv R + i\omega L$

L'impedenza analizza la risposta in frequenza

del nostro circuito.
Si definisce:

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{z(\omega)} = \frac{1}{R + i\omega L} = \text{Ammettenza del circuito RL}$$

Risulta che:

$$\hat{I}(\omega) = \hat{V}(\omega)\,\hat{y}(\omega)$$

Definisco:

$$G(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[\hat{y}(\omega)]$$

Funzione di Green associata al circuito RL

Allora, per il teorema sulle convoluzioni, avremo:

$$I(t) = V(t) * G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t')\,G(t'-t)\,dt'$$

Troviamo $G(t)$ e calcoliamo $I(t)$.
La funzione di Green è detta anche **PROPAGATORE**.
Infatti la formula esprime la propagazione di molti segnali in t', tramite G, da t' a t, e successivamente la loro somma. Naturalmente si suppone sempre la linearità del sistema (per la validità del principio di sovrapposizione).
Si sommano gli effetti del segnale in ingresso su tutto il periodo propagandone gli effetti all'istante t che si vuole conoscere. Effetto totale = somma effetti singoli.
Calcoliamo $G(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{y}(\omega)]$

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \qquad \hat{f}(\omega) = ?$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-at}\,e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{a + i\omega}$$

La nostra funzione, analoga, è:

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{R + i\omega L} = \frac{1/L}{\frac{R}{L} + i\omega}$$

Che implica:

$$a \equiv R/L$$

Segue che:

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{y}(\omega)] = y(t) \equiv G(t) = \begin{cases} \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

In maniera concisa si può scrivere:

funzione "gradino" $= \Theta(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

$$G(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \Theta(t)$$

Facciamo la convoluzione della $V(t)$ con la $G(t)$:

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t') G(t'-t)\, dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t') \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}(t-t')} \Theta(t-t')\, dt'$$

($t'-t$ e $t-t'$ sono equivalenti poiché la funzione di Green è simmetrica)

La presenza di $\Theta(t-t')$ implica che l'integrando esiste solo se $t>t'$, ovvero $t'<t$ (fissato t).

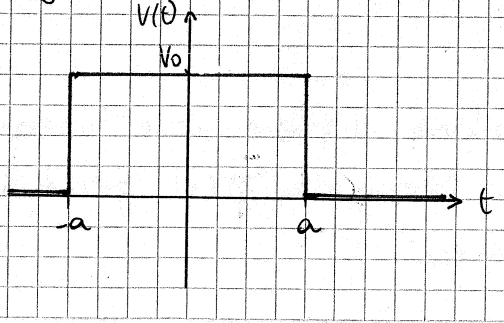
$$I(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} V(t') e^{-\frac{R}{L}(t-t')}\, dt' =$$

$$= \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \int_{-\infty}^{t} V(t') e^{\frac{R}{L}t'}\, dt'$$

A questo punto occorre conoscere il segnale in ingresso $V(t')$.

L'integrale mostra che c'è un effetto di <u>causalità</u> tra V e I, e le uniche cause che concorrono alla risposta al tempo t sono quelle precedenti (si somma fino a t).

Scegliamo una $V(t)$:



$$V(t) = \begin{cases} V_0 & t \in (-a, a) \\ 0 & t \notin (-a, a) \end{cases}$$

Abbiamo 3 casi: $t<-a$; $-a<t<a$; $t>a$

- **1° caso** $t<-a$

$$I(t)=0$$

- **2° caso** $-a<t<a$

$$I(t)=\frac{V_0 e^{-\frac{R}{L}t}}{L}\int_{-a}^{t} e^{\frac{R}{L}t'}dt' = \frac{V_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t'}\right]_{-a}^{t} =$$

$$= \frac{V_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}\left[e^{\frac{R}{L}t} - e^{-\frac{R}{L}a}\right] =$$

$$= \frac{V_0}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t+a)}\right]$$

- **3° caso** $t>a$

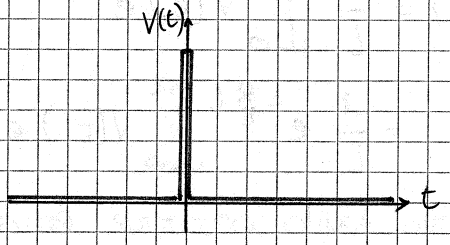
$$I(t) = \frac{V_0 e^{-\frac{R}{L}t}}{L}\int_{-a}^{a} e^{\frac{R}{L}t'}dt' = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}\left[e^{\frac{R}{L}a} - e^{-\frac{R}{L}a}\right]$$

Alla fine dei conti:

$$I(t)=\begin{cases} 0 & t<-a \\ \frac{V_0}{R}\left[1-e^{-\frac{R}{L}(t+a)}\right] & -a<t<a \\ \frac{V_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}\left[e^{\frac{R}{L}a}-e^{-\frac{R}{L}a}\right] & t>a \end{cases}$$

Supponiamo di avere un segnale che tende ad un impulso, ovvero:

$$V(t') \longrightarrow \delta(t')$$



$$I(t) \longrightarrow \frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{L}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t')\,e^{\frac{R}{L}t'}dt' = \frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{L} = G(t)$$

La <u>funzione di Green</u> corrisponde alla <u>risposta</u> del sistema a cui è associata quando il segnale in ingresso è un <u>impulso</u> (ovvero una Delta di Dirac).

Generalizziamo.

Supponiamo di avere un operatore differenziale lineare L_x che agisce su una funzione incognita $\varphi(x)$ generando una risposta nota $f(x)$, ovvero:

$$L_x[\varphi(x)] = f(x)$$

Si definisce **funzione di Green associata all'operatore** L_x la funzione G tale che:

$$L_x[G(x-y)] = \delta(x-y)$$

Ovvero la funzione così definita:

$$G(x-y) = L_x^{-1}[\delta(x-y)]$$

Per la quale risulta conosciuta l'incognita $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y)\, G(x-y)$$

Esercizio: risolvere $y'' - 2y = x$

$L_x \equiv \frac{d^2}{dx^2} - 2 \qquad f(x) = x$

Usare la trasformata di Fourier e la funzione di Green.

La trasformata di Fourier della delta di Dirac è 1.

06/05/2009

$L_x \varphi(x) = f(x)$ Eq. diff. non omogenea

$L_x G(x,y) = \delta(x-y)$ Eq. associata

Vogliamo risolvere l'equazione differenziale:

$$y'' - 2y = x \qquad y = y(x)$$

Rappresentazione integrale δ di Dirac

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}\, dp$$

Antitrasformata di Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(p)\, e^{ipx}\, dp$$

Ne segue che:

$$\hat{\delta}(p) = 1$$

Associamo la f. di Green y_1 al nostro problema:

$$y_1'' - 2y_1 = \delta(x-y)$$

$$y_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}_1(p)\, e^{ipx}\, \frac{dp}{2\pi} \qquad \hat{y}_1(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(x)\, e^{-ipx}\, dx$$

Leggiamo il problema nello spazio delle p:

$$-p^2 \hat{y}_1(p) - 2\hat{y}_1(p) = 1$$

$$\hat{y}_1(p) = -\frac{1}{2+p^2}$$

Sarebbe come scrivere:

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(ip)^2 \hat{y}_1(p) - 2\hat{y}_1(p) - 1\right] e^{ipx}\, \frac{dp}{2\pi}$$

Ci riportiamo ad un risultato precedente:

$$f(x) = e^{-\alpha|x|}$$

ovvero:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} & x > 0 \\ e^{\alpha x} & x < 0 \end{cases}$$

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ipx}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha x} e^{-ipx}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} e^{-ipx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha - ip} + \frac{1}{\alpha + ip} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + p^2}$$

Confrontando con la nostra $\hat{y}_1(p)$, bisogna supporre $\alpha = \sqrt{2}$. Utilizziamo il risultato:

$$\hat{y}_1(p) = -\frac{1}{2+p^2} \Longrightarrow y_1(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\sqrt{2}|x|}$$

che è la funzione di Green associata all'operatore $Lx = \frac{d^2}{dx^2} - 2$.

Per trovare la soluzione al problema, faccio la convoluzione del termine noto con la funzione di Green: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, G(x-y)\, dy$.

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, y_1(x-y)\, dy$$

[La f. di Green dipende da $x-y$ perché è invariante sotto traslazione]

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{y}{2\sqrt{2}}\, e^{-\sqrt{2}|x-y|}\, dy =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\int_{-\infty}^{x} y\, e^{-\sqrt{2}(x-y)}\, dy + \int_{x}^{+\infty} y\, e^{-\sqrt{2}(y-x)}\, dy\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[e^{-\sqrt{2}x} \int_{-\infty}^{x} y\, e^{\sqrt{2}y}\, dy + e^{\sqrt{2}x} \int_{x}^{+\infty} y\, e^{-\sqrt{2}y}\, dy\right] =$$

integro per parti:

$$y(x) = -\frac{x}{2}$$

che è la soluzione del nostro problema.

La funzione di Green è una caratteristica dell'operatore, non della specifica equazione nella quale questo compare.

Vediamo com'è fatta la funzione di Green per l'equazione di Poisson e per l'equazione di diffusione (equazioni alle derivate parziali).

L' <u>EQUAZIONE DI POISSON</u> descrive, data una densità di carica ρ, il potenziale elettrostatico associato:

$$\nabla^2 \psi = -\rho/\varepsilon_0$$

La soluzione che già conosciamo è:

$$\psi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i}$$

ovvero, passando al continuo:

$$\psi(\underline{0}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\underline{r}')\, d^3r'}{|\underline{r}'|}$$

o, fuori dell'origine:

$$\psi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\underline{r}')\, d^3r'}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

Occupiamoci della funzione di Green associata:

$$\nabla^2 G = -\delta(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \qquad G = G(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

<u>Teorema di Green</u>

$$\iiint_V (\psi \nabla^2 G - G \nabla^2 \psi)\, d^3\underline{r}_2 = \iint_S (\psi \nabla G - G \nabla \psi) \cdot \hat{n}\, dS$$

L'ipotesi è che, mandando il volume all'infinito, i campi siano abbastanza regolari da andare a 0 $\Rightarrow$ l'integrale va a 0.

Risulta che:

$$\int_V \varphi \nabla^2 G \, d^3\underline{r}_2 = \int_V G \nabla^2 \varphi \, d^3\underline{r}_2$$

Sostituendo la G:

$$-\int \varphi(\underline{r}_2)\,\delta(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)\, d^3\underline{r}_2 = -\int G(\underline{r}_2 - \underline{r}_1)\,\frac{\rho(\underline{r}_2)}{\varepsilon_0}\, d^3\underline{r}_2$$

Quindi:

$$\varphi(\underline{r}_1) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho(\underline{r}_2)\, G(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)\, d^3\underline{r}_1$$

Confronto con l'espressione fisica di $\varphi(\underline{r}_1)$:

$$G(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}$$

f. di Green associata all'operatore di Poisson

Legge di Gauss

$$\iiint_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) d^3r = \begin{cases} 0 & \text{se } V \text{ non include l'origine} \\ -4\pi & \text{altrimenti} \end{cases}$$

-4π si dice **angolo solido**.

Questa legge si può scrivere, equivalentemente, così:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{4\pi r}\right) = -\delta(r)$$

Spostandoci dall'origine ad un punto $\underline{r}_1$, e valutando il punto $\underline{r}_2$, risulta:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{4\pi\,|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}\right) = -\delta(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

Che rappresenta l'eq. di Poisson applicata alla relativa f. di Green. È esattamente lo stesso risultato, ricavato con una legge diversa.

Vediamo l'equazione di diffusione, ovvero del calore.

Equazione del calore in 1+1 dimensione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < +\infty$$

D = coefficiente di diffusione

Applichiamo una condizione iniziale:

$$u(x,0) = f(x)$$

Per ora teniamo t fissato e troviamo la trasformata di Fourier di $u(x)$:

$$\hat{u}(p,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, u(x,t)\, e^{-ipx}$$

dove t è un parametro.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi}\, \hat{u}(p,t)\, e^{ipx}$$

Inseriamo la trasformata nell'equazione:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = D(-p^2)\,\hat{u}(p,t)$$

Questa è ancora un'equazione differenziale, non algebrica, dato che abbiamo utilizzato solo una trasformata. Ma la sappiamo risolvere:

$$\frac{\Delta \hat{u}}{\hat{u}} = -p^2 D \Delta t$$

Integro:

$$\int \frac{\Delta \hat{u}}{\hat{u}} = -\int p^2 D \Delta t \implies$$

$$\ln \hat{u} = -p^2 D t + \text{costante}(p)$$

In definitiva:

$$\hat{u}(p,t) = A(p)\, e^{-p^2 D t}$$

Applichiamo la condizione iniziale.

$$\hat{u}(p,0) = A(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, u(x,0)\, e^{-ipx} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ipx} = \hat{f}(p)$$

Che è la trasformata di Fourier del dato iniziale.

$$\hat{u}(p,t) = \hat{f}(p)\, e^{-p^2 D t}$$

Per "tornare indietro" basta fare l'antitrasformata.

Osserviamo che, per t fissato, $\hat{u}$ è una Gaussiana in p.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi}\, \hat{f}(p)\, e^{-p^2 D t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y)\, e^{-ipy} e^{-p^2 D t} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi}\, e^{-ipy} e^{-p^2 D t} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dy \left[\int_0^{+\infty} 2 \cdot \frac{dp}{2\pi} \cos(py)\, e^{-p^2 D t} \right]$$

Si può anche non svolgere questo integrale (riconducibile ad una Gaussiana). Usiamo il teorema sulle convoluzioni.

Definiamo:

$$e^{-p^2 D t} \equiv \hat{g}(p)$$

Se riusciamo a trovare $g(x)$ la soluzione è semplice:

$$u(x,t) = f * g$$

Utilizziamo un risultato precedente:

$$\mathcal{F}\left[e^{-\alpha x^2}\right] = e^{-p^2/4\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\frac{1}{4\alpha} \equiv Dt \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4Dt}$$

Risulta:

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

E quindi la soluzione diventa:

$$u(x,t) = f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} dy\right] \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}$$

Soluzione della equazione del calore

[Verificare che questo equivale all'integrale precedente]

Si nota che la condizione iniziale si comporta come il termine non omogeneo di una D.E. (se me fa la convoluzione con il PROPAGATORE).

$$G(x-y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}}$$

f. di Green associata all'operatore di diffusione

07/06/2009

TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI (CENNI)

Si possono definire le **distribuzioni** considerandole **successioni di funzioni** ordinarie per cui, anche se **non convergenti**, l'operazione di **limite** acquista un preciso significato se preceduta da **moltiplicazione** degli elementi della successione per una funzione di prova e da **integrazione** su un certo intervallo.

Partiamo da cose "note": la δ di Dirac. Le daremo una **interpretazione in senso debole**, ovvero nell'ambito della Teoria delle distribuzioni.

DELTA DI DIRAC

- Rappresentazione integrale:
$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{ipx}\, dp$$
- Utilizzo:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$$

Potremmo definirla come un **funzionale**, ovvero:
$$\delta_{x_0} : f \longrightarrow f(x_0)$$
ma questa definizione non ha senso nell'ambito della integrazione secondo Lebesgue (è quasi ovunque nulla).
Inoltre non è nemmeno una funzione sommabile:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{ipx} \right| dp = +\infty$$
Addirittura, nel punto 0:
$$\delta(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{0}\, dp = +\infty$$
Proviamo con un integrale improprio:
$$x \neq 0;\ \frac{1}{2\pi} \lim_m \int_{-m}^{m} e^{ipx}\, dp = \frac{1}{2\pi} \lim_m \left[\frac{e^{imx} - e^{-imx}}{ix} \right] =$$
$$= \lim_m \frac{\sin(mx)}{\pi x}$$
Questo limite **non esiste**.

Possiamo comunque dare senso all'utilizzo della δ associato a funzioni particolarmente "buone".

SPAZIO DI SCHWARTZ

Si definisce $S(\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni, dette **funzioni test**, di classe $C^\infty(\mathbb{R})$, tali che $\forall k, k' \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x)$ tende a 0 più velocemente di qualsiasi potenza di x, ovvero:

$$\forall k, k' \in \mathbb{N} \quad \lim_{|x|\to\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{x^{k'}} = 0$$

Un esempio di funzione di prova è la **gaussiana**

DEFINIZIONE DELLA δ DI DIRAC IN SENSO DEBOLE

$$\delta(x) \cong \lim_n \frac{\sin(nx)}{\pi x}, \quad x \neq 0$$

Ma non è un "=" che implica convergenza. Il significato è:

$$\int_a^b \delta(x) f(x)\,dx = \lim_n \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\sin(nx)}{x} f(x)\,dx$$

La definizione è questa, che è quella che avevamo dato all'inizio.

Il "=" vale solo sulla seconda espressione, la prima è simbolica.

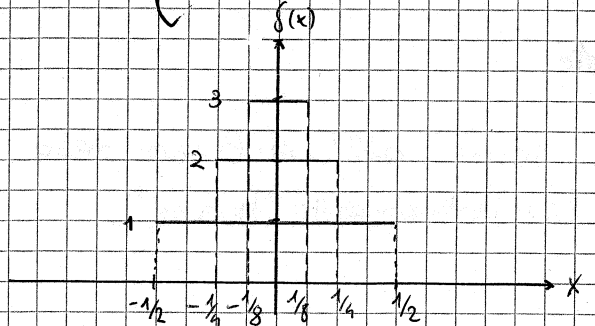
Questo significa <u>definire una distribuzione in senso debole</u>.

Naturalmente la $f(x)$ deve essere una funzione di prova.

Si chiamano **distribuzioni** perché si definisce il comportamento **globale** distribuito sull'intervallo (a,b), non quello puntuale. La moltiplicazione per $f(x)$ e l'integrazione su (a,b) si chiamano **SMOOTHING**.

Definiamo:

$$\delta_n(x) \equiv \begin{cases} n & -\frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Questa successione non converge nemmeno puntualmente:

$x=0$ $n>m$ $n=2m$ $|\delta_n(0)-\delta_m(0)| = |2m-m| = m \not\to 0$ (non è di Cauchy)

Ma devo controllare se converge la seguente:

$$\lim_m \int_{\mathbb{R}} \delta_m(x) f(x)\,dx =$$

$$= \lim_m m \int_{-1/2m}^{1/2m} f(x)\,dx$$

Utilizziamo il <u>teorema della media</u>:

$$= \lim_m m f(\xi)\frac{1}{m} = \lim_m f(\xi) = f(0),$$

con $\xi \in (-\frac{1}{2m}, \frac{1}{2m})$.

Converge a $f(0)$ perché ξ è costretta a spostarsi verso il centro dell'intervallo.

Abbiamo appena definito in senso debole la **delta di Dirac**:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x)\,dx \equiv \lim_m \int_{\mathbb{R}} \delta_m(x) f(x)\,dx = f(0)$$

Un'altra possibile definizione è:

$$\tilde{\delta}_m(x) = \frac{1}{\pi}\frac{m}{1+m^2x^2}$$

che per $x=0$ tende a $+\infty$, mentre per $x\neq 0$ tende a 0.

Come si <u>generalizza</u> tutto questo?

Presa una successione $\{g_m(x)\}_m$, si dice che essa converge in senso debole alla funzione $\gamma(x)$ se $\lim_m \int_a^b g_m(x) f(x)\,dx \equiv \int_a^b \gamma(x) f(x)\,dx$ esiste ed è finito.

- Quando due distribuzioni sono uguali?
- Esiste la derivata di una distribuzione?

Rispondiamo alla prima domanda.

Consideriamo due successioni convergenti a distribuzioni:

$\{g_m\} \longrightarrow \gamma(x)$

$\{h_m\} \longrightarrow \chi(x)$

Si dice che $\gamma(x)$ coincide con $\chi(x)$ se
$\forall f \in F \quad \lim_m \int_a^b g_m(x) f(x)\,dx = \lim_m \int_a^b h_m(x) f(x)\,dx$,
F è lo spazio delle funzioni di prova.
Questo NON implica che $\{g_m\} \approx \{h_m\}$.

Rispondiamo alla seconda domanda.
Se $\{g_m\}$ converge in senso debole a $\gamma(x)$, è
vero che $\{g_m'\}$ converge in senso debole a $\gamma'(x)$?
In generale la risposta è NO.
E infatti:

$$\int_a^b \frac{d\,g_m(x)}{dx} f(x)\,dx =$$

integro per parti:

$$= g_m(x) f(x)\Big|_a^b - \int_a^b g_m(x) \frac{df(x)}{dx}\,dx$$

Se il fattore finito fosse nullo, a parte un segno -,
la definizione potrebbe anche essere corretta.
Ma deve essere anche $f'(x) \in F$. In queste
condizioni si ha:

$$\lim_m \int_a^b g_m'(x) f(x)\,dx = -\lim_m \int_a^b g_m(x) f'(x)\,dx$$

L'ultimo limite è controllabile: $\exists$ ed è finito,
perché l'ipotesi è che g_m definisca una distribuzione.
Definisco:

$$\int_a^b \gamma'(x) f(x)\,dx \equiv -\lim_m \int_a^b g_m(x) f'(x)\,dx$$

Per la definizione di $\gamma(x)$, avrò

$$\lim_m \int_a^b g_m(x) f(x)\,dx \equiv \int_a^b \gamma(x) f(x)\,dx$$

Risulta:

$$\int_a^b \gamma'(x) f(x)\,dx = -\int_a^b \gamma(x) f'(x)\,dx$$

Qual è la più generica successione che converge in senso debole alla δ?

$\{d_m(x)\}_m$ Insieme delle d_m che conv. a δ

$d_m(x) = m\,P(mx)$

P funzione pari $(P(-y) = P(y))$ $P(z)$ pari e normalizzata ad 1

$\int_{-\infty}^{+\infty} P(y)\,dy = 1$

Con le d_m definite così, risulta:

$$\lim_m \int_a^b d_m(x) f(x)\,dx = \lim_m \int_a^b m\,P(mx) f(x)\,dx = \int_a^b \delta(x) f(x)\,dx$$

Esempi:

- $P_1(y) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\, e^{-ay^2}$
- $P_2(y) = \frac{a}{\pi(1+a^2y^2)}$
- $P_3(y) = \frac{\sin(ay)}{\pi y}$
- $P_4(y) = \frac{\sin^2(ay)}{\pi a y^2}$
- $P_5(y) = \frac{a}{2}\exp[-a|y|]$

PROPRIETÀ DELLA δ DI DIRAC

→ $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

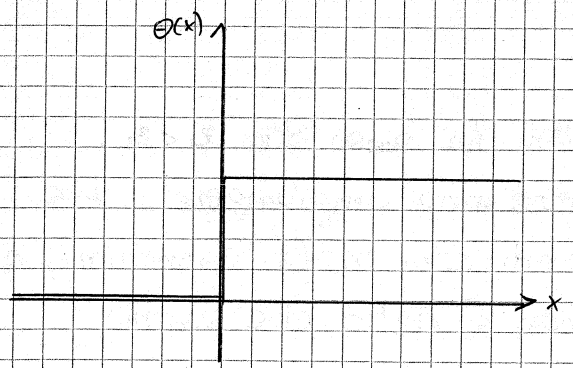
→ $\delta(F(x)) = \sum_m \frac{\delta(x-x_m)}{|F'(x_m)|}$, $F(x_m) = 0$

Sottocaso:

$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x+a) + \delta(x-a)}{2|a|}$

RELAZIONE TRA Θ E δ

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



Calcoliamo:

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(y)\,dy = \Theta(x)$$

Questo permette di definire $\Theta'(x)$:

$$\Theta'(x) = \delta(x)$$

12.05.2009

FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA
(FUNZIONI ANALITICHE)

$z = x + iy$ variabile

$z \in \mathbb{C}$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $\qquad f(z) \in \mathbb{C}$

Si dice **monodroma** una funzione che ad un complesso associa un complesso che ha una sola rappresentazione; si dice **polidroma** altrimenti.

Applichiamo il concetto di **limite**:

z_0

$|z - z_0|$ (struttura metrica $\Rightarrow$ intorno)

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

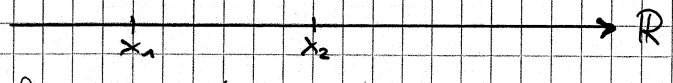
La continuità è ben definita.

Associamo un dominio D alla funzione.

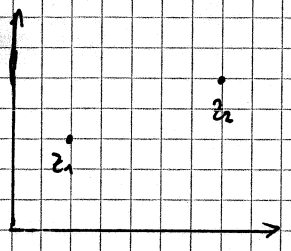
Vogliamo capire com'è fatta la derivata.

Data $f(z)$, com'è fatta $\frac{df}{dz}$?

Nel piano complesso non c'è un ordinamento.



Ha senso dire $x_1 < x_2$.



Non ha senso dire $z_1 < z_2$.

Possiamo congiungere i due punti con molti cammini, ma non è detto che siano equivalenti.

Formalmente, si ha:

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Riscriviamo i termini:

$$\Delta z \equiv \Delta x + i\,\Delta y$$

$$f(z) = u + iv$$

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left[\frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\Delta x + i\,\Delta y} \right]$$

A meno di infinitesimi di ordine superiore, è come:

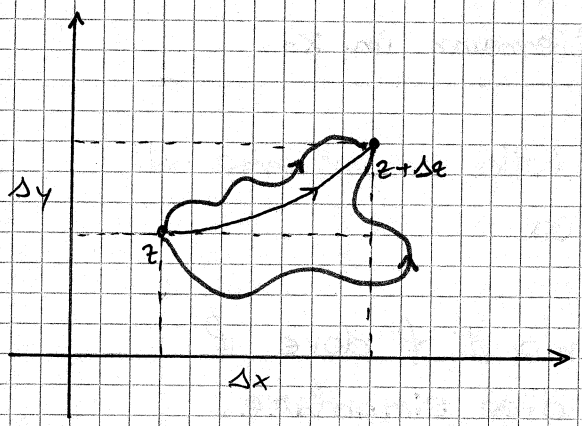
$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{\Delta x + i\Delta y} \left[\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y \right] \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}$$

Studiamo il comportamento del limite.

Definiamo:

$$m \equiv \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Questo rapporto indica la tangente al cammino tra z e $z+\Delta z$. Però dipende dal cammino percorso:



Possiamo esplicitare questa dipendenza mettendo in evidenza un Δx:

$$\frac{df}{dz} = \left(\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \right) \frac{1}{1+im} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \right) + m\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]$$

Vorremmo rendere questa espressione **indipendente da** m. Il concetto di limite sta già insito in m.

$$\frac{df}{dz} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + im\frac{\partial v}{\partial y} \right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - im\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \cdot \frac{1}{1+im}$$

Deve valere che:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Affinché sia:

$$\frac{df}{dz} = \left[\frac{\partial u}{\partial x}(1+im) + i\frac{\partial v}{\partial x}(1+im)\right]\cdot\frac{1}{1+im}$$

Ovvero, sparisce la dipendenza da m.

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

E' una definizione univoca di derivata di f rispetto a z.

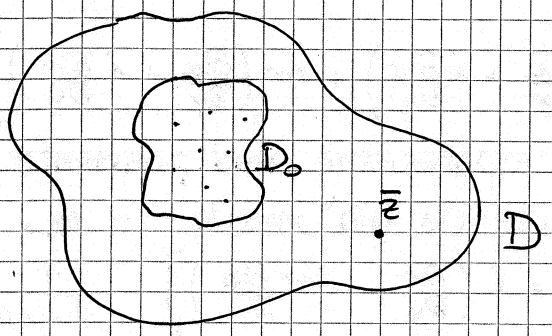
Condizioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad x_0 \in D$ f continua in x_0
f si dice analitica, regolare o olomorfa in x_0 se rispetta le condizioni di Cauchy-Riemann in x_0.

Spesso è possibile trovare tutto un insieme di punti D_0 dove f è analitica.

Un punto $\bar{z}$ del dominio di f dove f non è analitica si dice **singolare**.



$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$$

In un punto di analiticità queste due operazioni sono collegate:

$$\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}$$

Ovvero:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Che è un altro modo di scrivere le condizioni di Riemann:

$$f = u + iv$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}(u + iv) \qquad \left[-i = \frac{1}{i}\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Questo è solo uno dei vari modi equivalenti per definire $\frac{df}{dz}$: valgono anche

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{df}{dz} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$$

MODI EQUIVALENTI PER DERIVARE UNA FUNZIONE ANALITICA

Ora definiremo anche la primitiva di una funzione analitica.

Paragoniamo queste due funzioni:

$$f_1(z) = |z|^2$$

$$f_2(z) = z^2$$

La prima non è analitica, la seconda sì. Infatti:

1. $f_1(z) = x^2 + y^2 = u_1(x,y) + v_1(x,y)\,i$

$u_1(x,y) = x^2 + y^2$

$v_1(x,y) = 0$

Tutte le derivate di v_1 sono nulle. Invece:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 2x \; ; \; \frac{\partial u_1}{\partial y} = 2y$$

f_1 è dappertutto NON analitica, tranne che nell'origine.

2. $f_2(z) = z^2 = (x+iy)(x+iy) = x^2 - y^2 + i(yx + xy) =$

$= x^2 + 2ixy - y^2 =$

$= (x^2 - y^2) + i(2xy)$

$u_2(x,y) = x^2 - y^2$

$v_2(x,y) = 2xy$

In quali punti è analitica?

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v_2}{\partial x}$$

f_2 è analitica in ogni punto. Calcoliamone la derivata:

$$\frac{df_2}{dz} = 2z \qquad \text{infatti:}$$

$$\frac{df_2}{dz} = \frac{\partial v_2}{\partial y} + i\frac{\partial v_2}{\partial x} = 2x + 2iy = 2(x+iy) = 2z$$

(Utilizzando il secondo modo per derivare).

Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{1}{z}$. Ci aspettiamo che $\frac{df}{dz} = -\frac{1}{z^2}$ valga in tutti i punti diversi dall'origine.

§ Per essere analitica, una funzione
§ deve almeno dipendere da tutta
§ la variabile complessa z.

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{(x+iy)(x-iy)} \quad \text{(razionalizzazione)}$$

$$= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

Finire i conti.

Un altro caso di funzione non analitica è z^*. Infatti questa non dipende da $x+iy$ bensì da $x-iy$. In questo caso sarebbe:

$$u(x,y) = x$$

$$v(x,y) = -y$$

FUNZIONI ANALITICHE E FUNZIONI ARMONICHE

Le funzioni armoniche sono le soluzioni dell'<u>eq. di Laplace</u>: $\Delta\phi = 0 \iff \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$

> Data una funzione analitica, sia la sua parte reale sia la sua parte immaginaria sono funzioni armoniche.

Infatti:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

$$\Delta v =$$

Supponiamo di conoscere solo la parte reale di una funzione. Le condizioni di C.R. consentono di risalire a meno di una costante alla sua parte immaginaria.

$$u(x,y)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy$$

Possiamo integrare questa relazione.

Esempio

$$u(x,y) = \cos x\, e^{-y}$$

E' armonica?

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y}(-\operatorname{sen} x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-y}(-\cos x) = -u$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-y}\cos x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-y}\cos x = u$$

$$u + (-u) = 0 = \Delta u$$

E' armonica.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-y}\cos x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y}(-\operatorname{sen} x)$$

$$\int \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,dx = \int e^{-y}\cos x\,dx$$

$$v(x,y) = e^{-y}\operatorname{sen} x + g(y)$$

Con $g(y)$ costante rispetto ad x.

$$\int \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\,dy = \int e^{-y}(-\operatorname{sen} x)\,dx$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-y}\operatorname{sen} x + g'(y) = \frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y}(-\operatorname{sen} x)$$ (modi equivalenti)

$$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(x,y) = g_0$$

g_0 costante risp. a x e ad y. Quindi:

$$f(z) = \cos x\, e^{-y} + i\, e^{-y}\operatorname{sen} x + i g_0$$

Supponendo inoltre $f(0) = 1$ si può ricavare $g_0 = 0$.

Ci aspettiamo in f una dipendenza da z:

$$f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) = e^{-y}e^{ix} = e^{i(x+iy)} = e^{iz}$$

Ora vogliamo dimostrare che una funzione armonica è parte reale o immaginaria di una f. analitica.

$u(x,y)$ t.c. $\Delta u = 0$

$$v(x,y) = v(x_0,y_0) + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dv$$

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

dv risulta un differenziale esatto $\Rightarrow$ l'integrale non dipende dal cammino percorso.

DIFFERENZIALE ESATTO

$$dv = v_x\,dx + v_y\,dy$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

Infatti, nel nostro caso:

$$v_x = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad v_y = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

E, siccome u è armonica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

ESERCIZIO

$v = x^2 - y^2$

Verificare che v è armonica e ricostruire u.

Risultato: $f(z) = iz^2$

13/05/2009

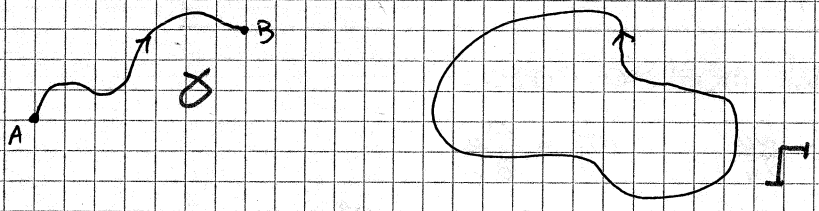
Funzioni analitiche e funzioni armoniche sono strettamente correlate.

Cauchy - Riemann

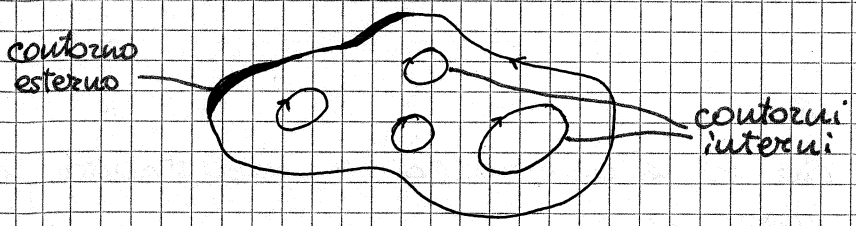
$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$
- $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

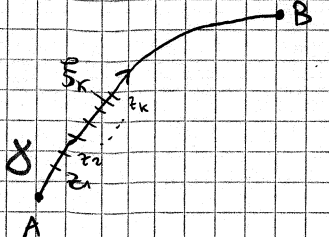
Nel piano complesso avremo a che fare con integrali su cammini γ aperti, o chiusi (Γ).



Per convenzione, sul cammino Γ il verso di percorrenza positivo è quello antiorario.
Suppongo di avere come dominio una regione non **semplicemente connessa** ("un graviera"):



Il verso positivo dei cammini interni è quello orario, perché (come prima) decido di percorrere la curva lasciando i punti del dominio sulla sinistra.
Supponiamo di avere una curva aperta.



$$I = \int_{(\gamma)} f(z)\,dz$$

Vogliamo dare un senso a questa scrittura.

- Partizione della curva
- Valutare f in ogni intervallino
- ξ_k punto medio dell'intervallo k-esimo.

$$I \equiv \lim_n I_n \equiv \lim_n \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) f(\xi_k)$$

Se usiamo la notazione complessa:

$$z_k = x_k + i y_k$$

$$f(\xi_k) = f_k = u_k + i v_k$$

$$I = \lim_n \sum_{k=1}^{n} [(x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1})][u_k + i v_k]$$

Oppure:

$$I_n = \sum \{ [u_k(x_k - x_{k-1}) - v_k(y_k - y_{k-1})] + i [u_k(y_k - y_{k-1}) + v_k(x_k - x_{k-1})] \}$$

$$\lim_n I_n = \int_A^B (u\,dx - v\,dy) + i \int_A^B (v\,dx + u\,dy)$$

Quindi:

$$\int_A^B f(z)\,dz \equiv \int_A^B (u\,dx - v\,dy) + i \int_A^B (v\,dx + u\,dy)$$

Questo ci permette di formulare la **disuguaglianza di Darboux**:

Disuguaglianza di Darboux

$$|I| = \left| \int_A^B f(z)\,dz \right| \leq M \ell$$

$$M \equiv \max_{z \in \gamma} |f(z)|$$

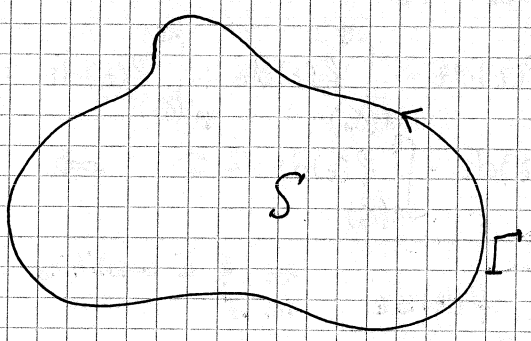
$\ell = \overset{\frown}{AB}$ (lunghezza della curva)

Dimostrazione

$$|I_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} f_k (z_k - z_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k| |z_k - z_{k-1}| \leq M \sum_{i=1}^{n} |dz_k| \leq M\ell$$

(questo è vero anche al limite)

Ora siamo pronti a formulare il Teorema di Cauchy. Prendiamo un dominio semplicemente connesso con contorno Γ.



Teorema di Cauchy

S semplicemente connesso, con contorno Γ
$f(z)$ olomorfa in S
$\Rightarrow \oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$

Dimostrazione

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \oint_\Gamma (u\,dx - v\,dy) + i \oint_\Gamma (v\,dx - u\,dy)$$

Applichiamo il teorema di Stokes al piano:

Teorema di Stokes

$$\oint_\Gamma \underline{A}\cdot d\underline{\ell} = \iint_S (\nabla \wedge \underline{A})\cdot \hat{n}\, dS$$

$$\oint_\Gamma \underline{A}\cdot d\underline{\ell} = \oint_\Gamma (A_x\,dx + A_y\,dy) = \iint_S \left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right) dx\,dy$$

Applichiamo questa relazione:

$A_x \equiv u$

$A_y \equiv -v$

$$\oint_\Gamma (u\,dx - v\,dy) = \iint_S \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$$

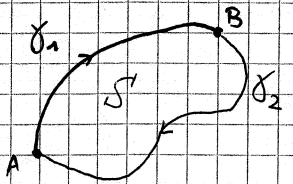
$$\oint_\Gamma (v\,dx - u\,dy) = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\Rightarrow \oint_\Gamma f(z)\,dz = -\iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + i \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Ma $\forall z \in S$ $f(z)$ è analitica, quindi valgono le condizioni di Cauchy-Riemann, quindi le somme dentro gli integrali sono nulle:

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = -\iint_S 0\,dx\,dy + i \iint_S 0\,dx\,dy = 0$$

CONSEGUENZE:



$\Gamma \equiv \gamma_1 \cup \gamma_2$

$$0 = \oint_\Gamma f(z)\,dz = \int_{A(\gamma_1)}^{B} f(z)\,dz + \int_{B(\gamma_2)}^{A} f(z)\,dz =$$

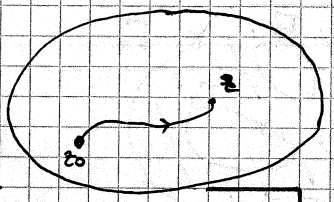
$$= \int_{A(\gamma_1)}^{B} f(z)\,dz - \int_{A(\gamma_2)}^{B} f(z)\,dz = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\int_{A(\gamma_1)}^{B} f(z)\,dz = \int_{A(\gamma_2)}^{B} f(z)\,dz \qquad \text{se } f \text{ è analitica in } S$$

E' un risultato molto simile alla definizione di campi conservativi e funzioni di stato. A noi serve per definire la primitiva di una funzione analitica.

Fissato z_0, con z variabile, è ben definito questo integrale:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z')\,dz'$$



si dimostra che:

> D dominio di analiticità di f
> $z_0 \in D$
> $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z')\,dz'$
> $\Rightarrow$ D dom. di analiticità di F
> $\wedge$ $F'(z) = f(z)$

Dimostrazione

$$F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$$

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z')\,dz' = \int_{z_0}^{z} (u\,dx' - v\,dy') + i\int_{z_0}^{z} (v\,dx' - u\,dy')$$

$$\Rightarrow U = \int_{z_0}^{z} (u\,dx' - v\,dy') = U(z) \qquad z = x + iy$$

$$V = \int_{z_0}^{z} (v\,dx' - u\,dy') = V(z) \qquad z_0 = x_0 + iy_0$$

Derivo rispetto a z:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = u \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -v$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = v \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = u$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \wedge \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

cioè valgono le condizioni di Cauchy-Riemann e $F(z)$ risulta analitica. [Le C.R. sono necessarie e sufficienti per l'analiticità]. Scelgo uno dei 4 modi per derivare F:

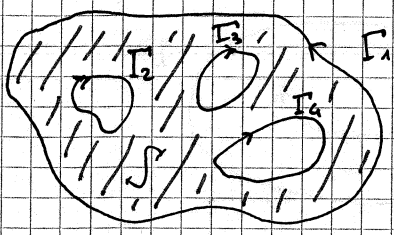
$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = u + iv = f$$

cioè $F'(z) = f(z)$.

$\int_{z_0}^{z} f(z')\,dz'$ è una primitiva di $f(z)$.

Ora sappiamo, data una funzione analitica, derivarla o integrarla infinite volte, ottenendo sempre funzioni con lo stesso dominio di analiticità.

E se D non è semplicemente connesso?



S si dice **molteplicemente connesso**.

$\Gamma \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$

Risulta che:

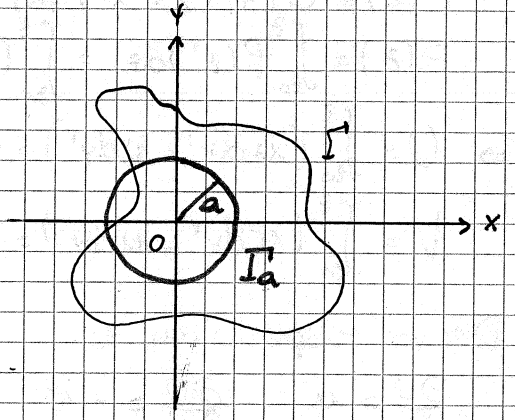
$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

ESERCIZIO

Vogliamo calcolare l'integrale $\oint_\Gamma \frac{dz}{z}$.

Sappiamo che $\frac{1}{z}$ è analitica dappertutto tranne che in 0. Qual è Γ?

Supponiamo che Γ contenga l'origine. Ci aspettiamo che $\oint_\Gamma \frac{dz}{z} \neq 0$.



Risultato: $\oint_\Gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$

Sappiamo che possiamo deformare il cammino mantenendo costante l'integrale.

Bisogna che la nuova Γ, però, non passi per l'origine.

Γ_a è una circonferenza di centro O e raggio a.

Lungo Γ_a si ha:

$\forall z \in \Gamma_a \quad z = a e^{i\theta}$ (hanno modulo costante)

$dz = a\,i\,d\theta\, e^{i\theta} = z\,i\,d\theta$

Sostituisco:

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z} = \oint_{\Gamma_a} \frac{z\,i\,d\theta}{z} = \oint_0^{2\pi} i\,d\theta = 2\pi i$$

La singolarità in 0 ha un peso che vale $2\pi i$.

Cosa cambio se calcolo $\oint_\Gamma \frac{dz}{z - z_0}$?

Nulla.

L'integrale vale:

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = \begin{cases} 0 & \Gamma \text{ non contiene } z_0 \\ 2\pi i & \Gamma \text{ contiene } z_0 \end{cases}$$

Si dimostra imponendo:

$z - z_0 \equiv a e^{i\theta}$

ESERCIZIO

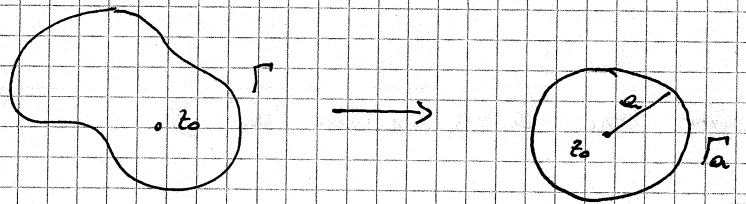
Calcolare: $\oint_\Gamma (z-z_0)^n dz$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Supponiamo che Γ contenga il punto di singolarità z_0.

Risultato:

$$\oint_\Gamma (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Infatti:



$z - z_0 = a e^{i\theta}$

$dz = (z-z_0)\, i\, d\theta$

$$\oint_\Gamma (z-z_0)^n dz = \oint_{\Gamma_a} i\, d\theta\, (z-z_0)^{n+1} = i \oint_{\Gamma_a} d\theta\, a^{n+1} e^{i(n+1)\theta} =$$

$$= i a^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}\, d\theta = 0 \text{ se } n \neq -1$$

Per $n = -1$:

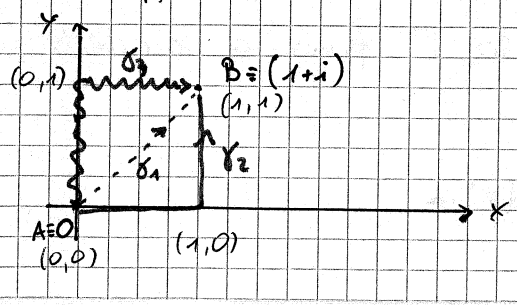
$$= i a^0 \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \quad \text{C.V.D.}$$

- ESERCIZIO PER CASA

Dimostrare che $\oint_{\Gamma_1} \frac{z^2}{z-2} = 0$ dove Γ_1 è il cerchio unitario centrato nell'origine.

- ESERCIZIO 2

Calcolare $\int_{\gamma_k} |z|^2 dz$ dove $k = 1, 2, 3$. Giustificare la differenza dei risultati. I tre cirquiti sono:



Risultati:

$I_1 = \frac{2}{3}(1+i)$

$I_2 = \frac{1}{3}(1+4i)$

$I_3 = \frac{1}{3}(4+i)$

14/05/2009

ALTRE CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI CAUCHY

Teorema di Cauchy

$f(z)$ analitica $\forall z \in D$

D semplicemente o molteplicemente connesso

Γ circuito chiuso tutto contenuto in D

$$\Longrightarrow$$

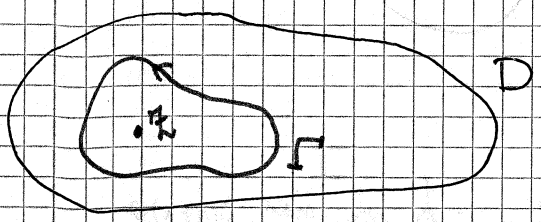
$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

Abbiamo verificato che:

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} =$$

$$\oint_\Gamma dz\,(z-z_0)^n =$$

Supponiamo di prendere una curva chiusa in D:



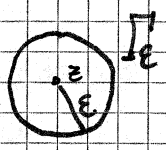
Prendiamo un punto z dentro Γ: allora vale

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z')}{z'-z}\,dz'$$

Rappresentazione integrale di Cauchy

La funzione integranda, $\frac{f(z')}{z'-z}$, è dappertutto analitica, tranne nel punto di singolarità $z'=z$.

Allora prendiamo un cerchietto di raggio ε centrato in z:



Escludiamo questa regione dall'area che ci interessa.

Possiamo deformare a piacimento Γ fino a renderlo Γ_ε:

$$\oint_\Gamma \frac{f(z')}{z'-z}\,dz' = \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z')}{z'-z}\,dz' =$$

$$= \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z') + f(z) - f(z)}{z' - z}\, dz' = \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z' - z}\, dz' + \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z}\, dz' =$$

$$= f(z) \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{dz'}{z - z'} + \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z}\, dz' =$$

$$= 2\pi i\, f(z) + \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z}\, dz'$$

Per il teorema di Darbou si ha:

$$\left| \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z}\, dz \right| \leq \frac{M \ell}{\varepsilon} = 2\pi M$$

$M = \text{Max} \left| f(z') - f(z) \right|$; $\ell = 2\pi\varepsilon$; $\varepsilon = z - z'$

Naturalmente, se $\varepsilon \to 0$, $M \to 0$ perché $z' \to z$.

Quindi, per $\varepsilon \to 0$, si ha:

$$\oint_\Gamma \frac{f(z')}{z' - z}\, dz' = 2\pi i\, f(z)$$

E dunque:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z')}{z' - z}\, dz$$

Il **teorema della media** è uno dei prodotti di questo risultato.

Deriviamo questa rappresentazione:

$$\frac{df}{dz} = \frac{+1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z')}{(z' - z)^2}\, dz' \qquad \left(\begin{array}{l} \text{Scambio l'integrale} \\ \text{con la derivata} \end{array} \right)$$

Ogni volta che deriviamo aumenta la potenza al denominatore:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{+2}{2\pi i} \oint \frac{f(z')}{(z' - z)^3}\, dz'$$

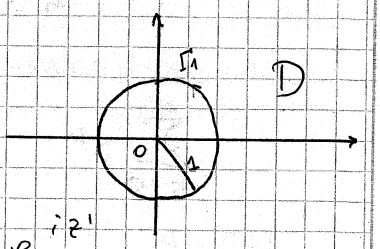
$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z')}{(z' - z)^{n+1}}\, dz'$$

Rappresentazione integrale di Cauchy

ESEMPIO

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{e^{iz}}{z^3}\, dz = \quad \Gamma_1 \text{ circonferenza di raggio 1 e centro 0}$$

$$= \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz'^2} \left[e^{iz'} \right]_{z=0} = -\frac{2\pi i}{2} = -\pi i$$



Infatti: $n + 1 = 3 \Rightarrow n = 2$

$z' \equiv z$

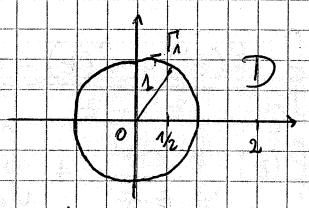
"z" (singolarità) $\equiv 0$

$f(z') \equiv e^{iz'}$

$(z' - z)^3 \equiv z'^3$

ESEMPIO 2

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{(z'-2)^{-2}}{(2z'-1)}\,dz' = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma_1} \frac{(z'-2)^{-2}}{(z'-1/2)}\,dz'$$



$f(z') = (z'-2)^{-2}$ ha una singolarità in $z'=2$

(Siamo nel caso $n=0$)

Comunque, $z'=2$ non è contenuto in Γ_1, quindi non ci interessa: Γ_1 delimita una regione tutta contenuta in D. Possiamo anche estendere Γ_1 purché $r<2$.

$$\frac{1}{2}\oint_{\Gamma_1} \frac{(z'-2)^{-2}}{(z'-1/2)}\,dz' = \frac{1}{2}\,2\pi i\, f(z)\Big|_{z=1/2} = \pi i\,\frac{4}{9}$$

SVILUPPI IN SERIE DI FUNZIONI ANALITICHE

Supponiamo di avere una successione di funzioni con lo stesso dominio di analiticità:

$$f_1(z), \dots, f_k(z)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \quad \text{converge ad una funzione?}$$

Utilizziamo le somme parziali:

$$\lim_n S_n(z) = f(z) \Rightarrow \text{la serie converge ad } f(z)$$

Vediamo cosa succede con le **serie di potenze**.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

Questa serie ha una regione di convergenza che è un **cerchio** di raggio ρ (detto **raggio di convergenza**), e converge uniformemente ad una funzione analitica. Esiste l'analogo del criterio di Cauchy-Hadamard:

$$\rho = \lim_n \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

In particolare, la <u>serie geometrica</u>:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \qquad \rho = 1 \qquad \text{converge sse } |z|<1$$

Infatti:

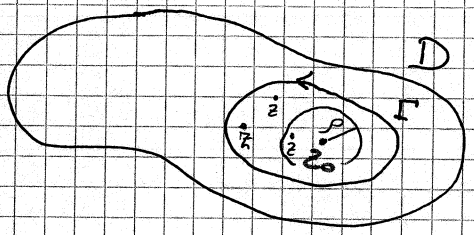
$$S_n(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z} \longrightarrow \frac{1}{1-z} \quad \text{se } |z|<1$$

Questo risultato ci permette di definire gli sviluppi in serie delle funzioni analitiche:

1 → Sviluppi in serie di Taylor

2 → Sviluppi in serie di Laurent

SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR



$z' \in \Gamma$

z interno alla regione staccata da Γ

z_0 "

z_0 p.to di analiticità

Se prendiamo z dentro al cerchio di raggio ρ:

$$\left| \frac{z-z_0}{z'-z_0} \right| = \frac{|z-z_0|}{|z'-z_0|} < 1$$

Costruiamo una serie geometrica con, come ragione, questo rapporto.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{z-z_0}{z'-z_0} \right]^k = \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{z'-z_0}} = \frac{z'-z_0}{z'-z}$$

Ricavo $(z'-z)^{-1}$:

$$(z'-z)^{-1} = \frac{1}{z'-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(z'-z_0)^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(z'-z_0)^{k+1}}$$

Poiché questa serie converge uniformemente, posso scambiare somma con integrale.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z')}{z'-z} dz' =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \oint_\Gamma \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z')(z-z_0)^k}{(z'-z_0)^{k+1}} dz' =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$$

$$C_k \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{k+1}} dz' = C_k(z_0)$$

Questo è lo sviluppo in serie di Taylor di f intorno al

punto di analiticità z_0. Notiamo che:

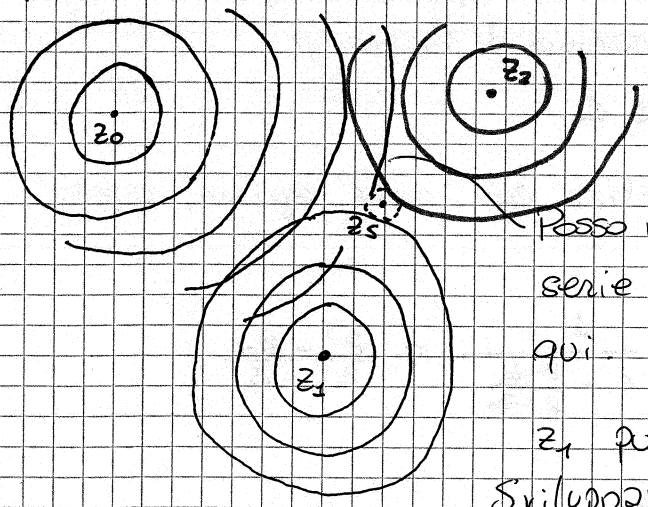
$$c_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dz^k}(z_0)$$

Sviluppo in serie di Taylor intorno a z_0

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

$$c_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dz^k}(z_0)$$

CONTINUAZIONE ANALITICA ALLA WEIRSTRASS



z_0 punto di analiticità

z_s punto di singolarità

Posso valutare lo sviluppo in serie intorno a z_0 fino a qui.

z_1 punto di analiticità

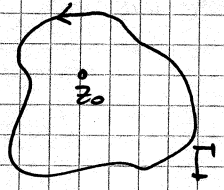
Sviluppando intorno a z_1 raggiungo zone che non raggiungevo con z_0. Lo stesso posso fare con $z_2, z_3, \ldots$

La "zona proibita" intorno a z_s può essere ristretta a piacimento.

19/05/2009

→ Serie di Laurent
→ Teorema dei residui
→ Lemma di Jordan

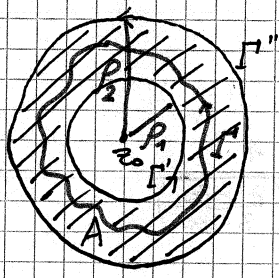
Abbiamo visto che $f(z)$ può essere sviluppata in serie di Taylor intorno a z_0 con:



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{n!} \frac{d^n f(z)}{dz^n}\Big|_{z=z_0}$$

Supponiamo che z_0 sia un **punto di singolarità isolata**.
Posso estendere i risultati a questo caso?
Posso considerare un dominio "a corona" intorno a z_0, che chiamiamo A:



Risulta che:

$$\forall z \in A,$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

(con $\rho_1 < \rho_2$ e $\Gamma \subset A$ (Γ circonda z_0)). Questo si chiama **sviluppo in serie di Laurent**.

Dimostrazione

A non è semplicemente connesso. $\forall z \in A$ vale:

$$2\pi i f(z) = \oint_{\Gamma'' \cup \Gamma'} \frac{f(z')dz'}{z'-z} =$$

$$= \oint_{\Gamma''} \frac{f(z'')dz''}{z''-z} + \oint_{\Gamma'(-)} \frac{f(z')dz'}{z'-z} =$$

$$= \oint_{\Gamma''} \frac{f(z'')dz''}{z''-z} - \oint_{\Gamma} \frac{f(z')dz'}{z'-z}$$

$\Gamma'_{(-)}$ verso di percorrenza orario

Per default si percorrono le curve chiuse in senso antiorario. Valutiamo i due integrali.

$$|z''-z| < |z''-z_0|$$

$$\frac{|z''-z|}{|z''-z_0|} < 1$$

$$\frac{|z-z_0|}{|z''-z_0|} \leq 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{z''-z_0}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{z''-z_0}} = \frac{z''-z_0}{z''-z}$$

↑ serie geometrica convergente

$$\frac{1}{z''-z} = \frac{1}{z''-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(z''-z_0)^n}$$

Sostituisco negli integrali: il primo integrale diventa

$$\oint_{\Gamma''} \frac{f(z'')}{z''-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(z''-z_0)^n}\, dz'' =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\oint_{\Gamma''} \frac{f(z'')\, dz''}{(z''-z_0)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n$$

Allo stesso modo per il secondo integrale. Definisco:

$$a_n \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma''} \frac{f(z')\, dz''}{(z''-z_0)^{n+1}}$$

Se

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_{\Gamma''} - \oint_{\Gamma'} \right]$$

allora

$$f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'}$$

Calcoliamo il secondo contributo.

$$\frac{1}{z'-z} = \frac{1}{z'-z_0-(z-z_0)} = \frac{(-1)}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)}$$

$$\frac{|z'-z_0|}{|z-z_0|} < 1 \qquad (\rho > \rho_1)$$

Posso leggere $\frac{1}{z'-z}$ come la somma di un'altra serie geometrica

$$\frac{1}{z'-z} = \frac{(-1)}{(z-z_0)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)^m$$

Quindi il secondo contributo diventa:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} \frac{f(z')(-1)}{z-z_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z'-z_0)^m}{(z-z_0)^m}\, dz' =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(z-z_0)^{m+1}}, \qquad b_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} f(z')\,(z'-z_0)^m\, dz'$$

Infine:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z-z_0)^{-(m+1)}$$

Definisco:

$$\kappa \equiv m+1$$

Diventa:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{k-1}}{(z-z_0)^k}$$

Pongo $k \equiv -n \Rightarrow k=1 \Rightarrow n=-1$; $k=+\infty \Rightarrow n=-\infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{k-1}}{(z-z_0)^k} \equiv \sum_{n=-\infty}^{-1} b_{-n-1} (z-z_0)^n$$

Quindi pongo:

$$c_n \equiv \begin{cases} a_n & n=0,1,2,\dots \\ b_{-n-1} & n=-1,-2,\dots \end{cases} \quad \text{[PARTE PRINCIPALE]}$$

e acquista significato la scrittura

Sviluppo in serie di Laurent

z_0 singolarità isolata

$z \in$ Dom. di analiticità di f

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Per il Teorema di Fourier, infatti, posso deformare Γ' e Γ'' fino a farli coincidere con un qualsiasi Γ tutto compreso in A.

b_{-n-1} ha la stessa forma di a_n, quindi posso considerarli come un unico coefficiente c_n.

Si dice, per la forma di A, che la serie di Laurent converge per anelli.

Come si usa questo risultato?

In questo caso non posso identificare i coefficienti c_n con le derivate di f in z_0, perché f in z_0 non è analitica.

Se la parte principale ha infiniti termini, si dice che f ha in z_0 un punto di singolarità essenziale:

$$\forall N,\ c_n \neq 0 \quad \forall n < -N$$

Se gli c_n si limitano ad un certo termine, si dice che f ha in z_0 un polo di ordine N:

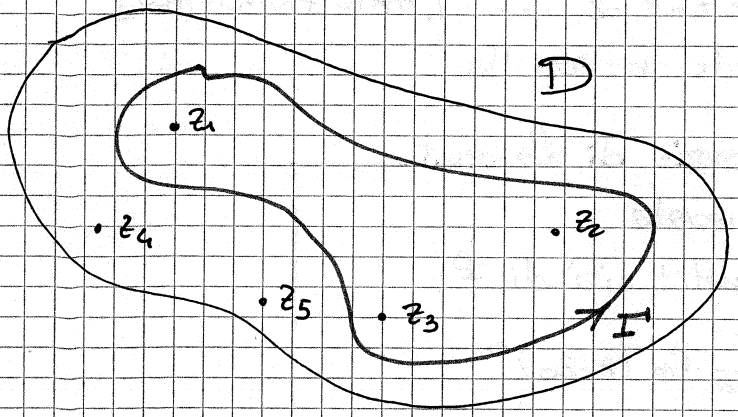
$$\exists N : c_n = 0 \quad \forall n < -N$$

Definiamo $c_{-1} \equiv \text{Res}$ (RESIDUO)

$$c_{-1} = b_{-1+1} = b_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(z')\,dz'$$

Teorema dei Residui:

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{N} \text{Res}_k$$



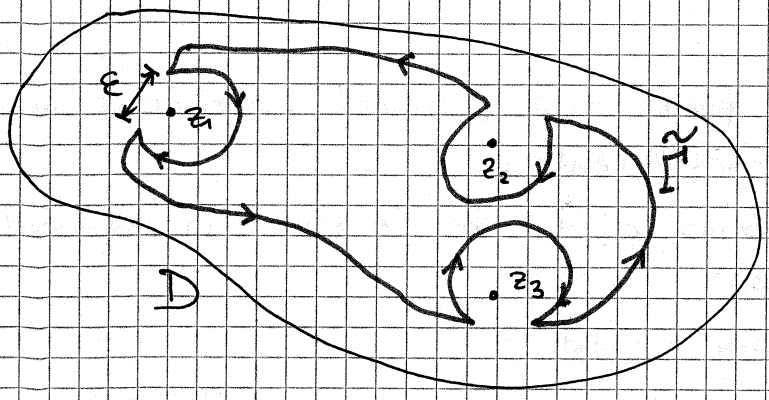
z_i $i = 1 \dots 5$ singolarità

contano solo i pesi delle singolarità interne al cammino Γ.

Il peso di ogni singolarità è il suo residuo associato.

Dimostrazione

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = ?$$

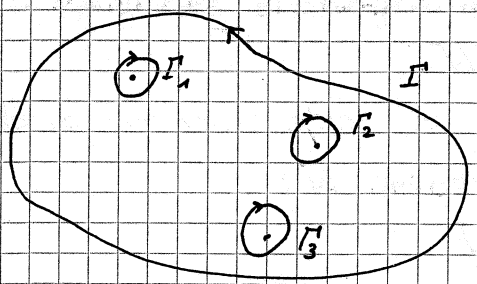


$\varepsilon \to 0$
$\tilde{\Gamma} \to \Gamma$

I tratti "circolari", per $\varepsilon \to 0$, percorsi in sensi opposti, non danno contributi. $\tilde{\Gamma}$ non contiene singolarità

$\Rightarrow$ posso usare il teorema di Cauchy.

Posso vedere $\tilde{\Gamma}$ anche così:



$$\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma_{1_{(-)}} \cup \Gamma_{2_{(-)}} \cup \Gamma_{3_{(-)}}$$

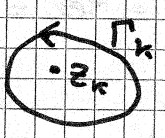
$$\oint_{\Gamma'} f(z)dz = 0 = \oint_{\Gamma} f(z)dz - \int_{\Gamma_1} f(z)dz - \oint_{\Gamma_2} f(z)dz - \oint_{\Gamma_3} f(z)dz$$

Si ricava:

$$\oint_{\Gamma} = \oint_{\Gamma_1} + \oint_{\Gamma_2} + \oint_{\Gamma_3}$$

Poi:

$$Res_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} f(z')dz'$$



Quindi:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \left[Res_1 + Res_2 + Res_3 \right]$$

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{3} Res_k$$

Usiamo invece lo sviluppo di Laurent:

$$\oint_{\Gamma_k} f(z)dz = \oint_{\Gamma_k} dz \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_k)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \oint_{\Gamma_k} (z-z_k)^n dz = 2\pi i\, C_{-1}$$

come avevamo già visto.

UTILIZZO PRATICO

- z_0 polo di ordine N

Il residuo corrispondente si può calcolare in questo modo:

$$Res = \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \left[(z-z_0)^N f(z) \right]_{z=z_0}$$

Dimostrazione

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

$$(z-z_0)^N f(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n+N}$$

$$n+N \equiv m \qquad n = m-N$$

$$(z-z_0)^N f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} c_{m-N} (z-z_0)^m$$ È una serie di Taylor,

posso derivare $N-1$ volte:

$$\frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^N f(z) \right]_{z=z_0} = m \sum_{n=0}^{\infty} c_{m-N} (z-z_0)^{m-1} \Big|_{z=z_0} = m\, c_{m-N}$$

Generalizzando:

$$\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\left[(z-z_0)^N f(z)\right]_{z=z_0} = (N-1)!\, C_{-1}$$

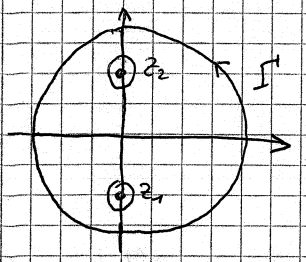
In particolare, per $N=1$:

$$C_{-1} = Res = \lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0) f(z)\right]$$

Esempio $\qquad \frac{1}{z^2+1} = f(z)$

$z^2+1=0 \Rightarrow z^2=-1 \Rightarrow z_{1,2} = \pm i$ (poli)

$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$



Γ circonferenza Γ_2 (centrata in 0, raggio 2)

$$\oint_{\Gamma_2} f(z)\,dz = ?$$

$$\oint_{\Gamma_2} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1,2} Res_k =$$

$$= 2\pi i\left[\lim_{z\to z_1}\left((z-z_1) f(z)\right) + \lim_{z\to z_2}\left((z-z_2) f(z)\right)\right] =$$

$$= 2\pi i\left[\lim_{z\to i}\frac{z+i}{(z+i)(z-i)} + \lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z+i)(z-i)}\right] =$$

$$= 2\pi i\left[-\frac{1}{2i} + \frac{1}{2i}\right] = 2\pi i\left[\frac{i}{2} + \left(-\frac{i}{2}\right)\right] = 0$$

Si compensano i residui.

Un altro modo per calcolare l'integrale è vedere com'è fatta f sulla Γ_2 e integrare:

$z = 2e^{i\theta}$ ...

20/05/2009

Lemma di Jordan – Valore principale

Torniamo sulla regola pratica per il calcolo dei residui.
Occorre pesare ogni singolarità interna al circuito con il suo residuo.

Supponiamo z_0 polo di ordine N:

$$Res = \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \left[(z-z_0)^N f(z) \right]_{z=z_0}$$

Costruiamo per corone circolari la serie di Laurent per un polo di ordine N:

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

$$(z-z_0)^N f(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n+N}$$

$$m = n + N$$

$$(z-z_0)^N f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} c_{m-N} (z-z_0)^m$$

$$\frac{d}{dz} \left[(z-z_0)^N f(z) \right]_{z=z_0} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m-N}\, m\, (z-z_0)^{m-1} \Big|_{z=z_0}$$

Per $z=z_0$ si annulla tutto tranne per $m=1$: $0^0 = 1$

$$= c_{m-N}\big|_{N=1} = c_{m-1}$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[(z-z_0)^N f(z) \right]_{z=z_0} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m-N}\, m(m-1)(z-z_0)^{m-2} \Big|_{z=z_0} =$$

$$= 2 c_{m-N}\big|_{N=2} = c_{m-2} \cdot 2$$

$$\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \left[(z-z_0)^N f(z) \right]_{z=z_0} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m-N} (z-z_0)^{m-(N-1)}\, m(m-1)\dots(m-N+1) \Big|_{z=z_0} =$$

$$= \frac{m!}{[m-(N-1)]!} c_{m-N} (z-z_0)^{m-N+1} \sum_{0 \le m}^{\infty} \Big|_{z=z_0} =$$

$$= \sum_{m=N-1}^{\infty} c_{m-N} \frac{m!}{(m-N+1)!} (z-z_0)^{m-N+1} \Big|_{z=z_0} = \text{si annulla tutto tranne } m = N-1$$

$$= (N-1)!\, c_{-1} \qquad \text{C.V.D.}$$

Se $N=1$, la "derivata zer-esima" coincide con il valore della funzione al limite per $z \to z_0$.

ESERCIZIO

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\cos\theta} \stackrel{?}{=} \pi/2$$

Vogliamo ricondurci al teor. dei residui.

$$z = e^{i\theta} \qquad dz = i\,d\theta\, e^{i\theta} = i\,d\theta\, z \qquad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}$$

z varia sul cerchio unitario centrato nell'origine.

L'integrale diventa:

$$\frac{1}{i}\oint_{\Gamma_1} \frac{dz}{z\left(5+3\frac{z+z^{-1}}{2}\right)} = \frac{1}{i}\oint_{\Gamma_1} \frac{dz}{\frac{z}{2}\left[10+3z+\frac{3}{z}\right]} =$$

$$= \frac{1}{i}\oint_{\Gamma_1} \frac{2z}{10z+3z^2+3}$$

Cerchiamo le singolarità annullando il denominatore:

$$3z^2+10z+3=0 \qquad z_1 = -1/3 \qquad z_2 = -3$$

Solo z_1 è racchiusa dal cerchio unitario.

L'integrale diventa:

$$\frac{2}{i}\cdot 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\left(-\tfrac{1}{3}\right)$$

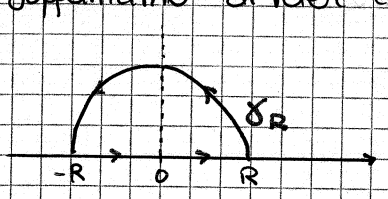
Calcoliamo il residuo.

$$\lim_{z\to -\frac{1}{3}} \left(z+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{3(z+1/3)(z+3)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{-1/3+3} = \frac{1}{8}$$

Quindi:

$$\frac{2}{i}\cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{8} = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$$

Supponiamo di voler calcolare il seguente integrale:



$$I_R = \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Lemma di Jordan

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \text{Arg } z < \pi \\ \lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{R\to\infty} I_R = 0$$

Dimostrazione

$z = R e^{i\theta} \qquad 0 \le \theta \le \pi \qquad dz = R i\, d\theta\, e^{i\theta}$

$$I_R = \int_0^\pi i R\, e^{i\alpha R(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)} f(Re^{i\theta})\, e^{i\theta}\, d\theta$$

Vediamo $|I_R|$.

$$|I_R| \le \int_0^\pi e^{-\alpha R \,\text{sen}\,\theta} \left| f(Re^{i\theta}) \right| d\theta\, R$$

$$M_R \equiv \max_{[0,\pi]} \left| f(Re^{i\theta}) \right|$$

$$|I_R| \le M_R R \int_0^\pi e^{-\alpha R \,\text{sen}\,\theta}\, d\theta = R M_R\, 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \,\text{sen}\,\theta}\, d\theta$$

Valutiamo la funzione $\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$.

Nell'intervallo $[0, \pi/2]$ vale:

$$\frac{2}{\pi} \le \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} \le 1 \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\text{sen}\,\theta \ge \frac{2\theta}{\pi}$$

$$|I_R| \le 2 M_R R \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \frac{2\theta}{\pi}}\, d\theta = 2R M_R \left(-\frac{\pi}{2\alpha R}\right) e^{-\alpha R \frac{2\theta}{\pi}} \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{\alpha} M_R \left(1 - e^{-\alpha R}\right)$$

$$|I_R| \le \pi M_R \left[\frac{1 - e^{-\alpha R}}{\alpha}\right] \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{\pi M_R}{\alpha} \longrightarrow 0 \qquad \text{c.v.d.}$$

Cosa succede se $\alpha \to 0$? Posso sviluppare l'esponenziale intorno ad $\alpha = 0$:

$\alpha \to 0$

$$|I_R| \le \pi M_R \left[\frac{1 - 1 + \alpha R}{\alpha}\right] = \pi R M_R$$

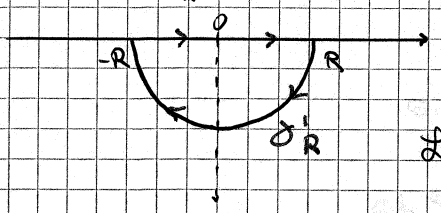
M_R va sempre a 0, ma $R \to \infty$. In questo caso,

la prescrizione è che $z f(z) \to 0$, più restrittiva.
Ovvero: $f(z) = o\left(\frac{1}{|z|}\right)$

Cosa succede per $\alpha < 0$?

$\beta \equiv -\alpha$

$$I'_R = \int_{\gamma'_R} e^{-i\beta z} f(z)\, dz$$



Il Lemma di Jordan vale sempre, ma la curva è ribaltata sul semipiano inferiore.

La prescrizione è: $\pi \leq \arg z \leq 2\pi$

ESERCIZIO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx \stackrel{?}{=} \frac{\pi}{e} \qquad x \to z$$

$$\cos = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

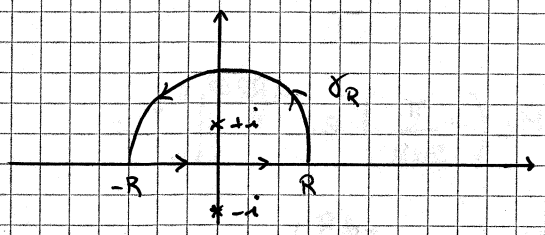
L'integrale diventa:

$$\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iz}}{z^2+1}\, dz\right]$$

Vediamo il primo integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz \equiv \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{iz} f(z)\, dz \qquad f(z) \equiv \frac{1}{z^2+1} \qquad \alpha = 1 > 0$$

$f(z)$ ha due poli semplici, in $+i$ e in $-i$.



$$f(z) \sim \frac{1}{z^2} = o\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

L'integrale deve essere, per il Lemma di Jordan:

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R \cup [-R,R]} e^{iz} f(z)\, dz$$

e sappiamo che il contributo di γ_R è nullo.
(Adesso il cammino è chiuso.)

Applichiamo il teor. dei residui:

$$= 2\pi i \sum_k \text{Res}_k = 2\pi i \,(\text{Res}(z=i)) = \frac{2\pi i}{2ie} = \frac{\pi}{e}$$

(Ricalcolare Res $(z=i)$)

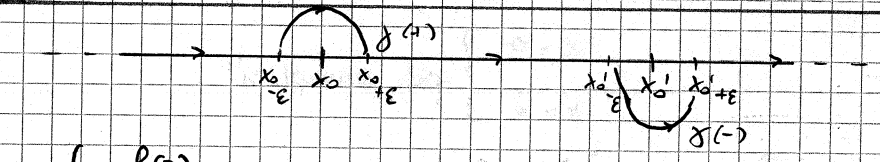
Il secondo integrale si calcola nello stesso modo, ma la curva la chiudiamo nel semipiano inferiore.
Vale anche questo π/e.
L'integrale di partenza vale $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{e}$, c.v.d.

Consideriamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0}\, dx$$

Cosa succede se la singolarità giace lungo il cammino d'integrazione?

> Si dice valore principale dell'integrale, e si indica con $V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\, dx$, il valore:
>
> $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon} \frac{f(x)}{x - x_0}\, dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0}\, dx \right]$$



$$I^{(+)} = \int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z - x_0}\, dz = I^+(x_0)$$

$$I^{(-)} = \int_{\gamma^-} \frac{f(z)}{z - x_0}\, dz = I^-(x_0)$$

$$I^+(x_0) = V.P. \int \dots + \int_{\gamma_{\varepsilon}^{(-)}} \frac{f(z)}{z - x_0}\, dz$$

$$I^-(x_0) = V.P. \int \dots + \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{f(z)}{z - x_0}\, dz$$

Vediamo questo integrale:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - x_0}\, dz \qquad z - x_0 = \varepsilon e^{i\theta} \qquad dz = \varepsilon i\, d\theta\, e^{i\theta} = (z - x_0)\, i\, d\theta$$

$$i \int_{\pi}^{0} f(x_0 + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} -i\pi f(x_0)$$

Quindi:

$$I^+(x_0) = \text{V.P.} \int \dots - i\pi f(x_0)$$

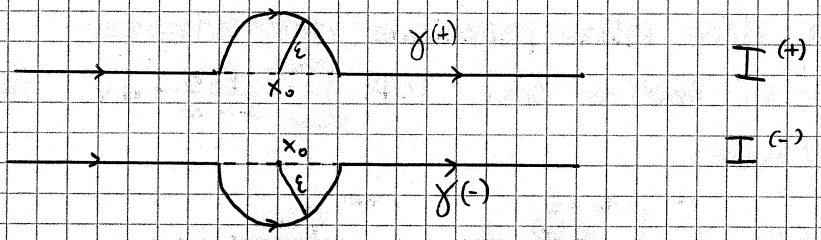
$$I^-(x_0) = \text{V.P.} \int \dots + i\pi f(x_0)$$

E quindi:

$$\text{V.P.} \int \dots = I^{\pm}(x_0) \pm i\pi f(x_0) = \frac{I^+ + I^-}{2}$$

21/05/2009

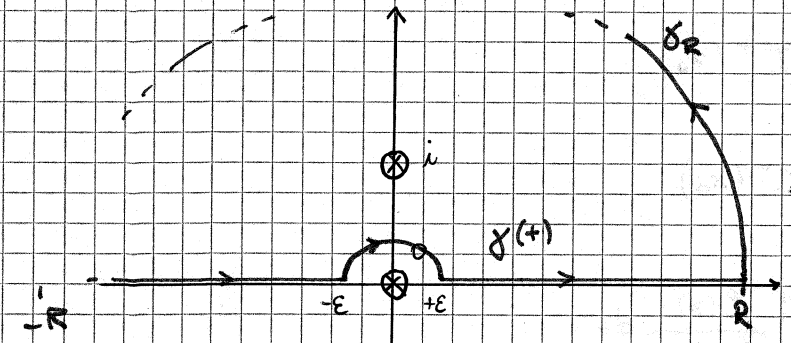
$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0}\, dx = I^{(\pm)}(x_0) \pm i\pi f(x_0)$$



ESEMPIO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-i)}$$

$x = 0$
$x = i$
} poli semplici



$x = i$ non è lungo il cammino d'integrazione: non dà problemi.

$$x_0 = 0 \qquad \frac{1}{x - x_0} = \frac{1}{x} \qquad f(x) = \frac{1}{x - i} \qquad f(x_0) = -\frac{1}{i} = i$$

Il Lemma di Jordan è applicabile. Valutiamo $I^{(+)}$.

$$I^{(+)}(x_0) = \int_{\gamma^{(+)}} \frac{dz}{z(z-i)}$$

Chiudo il circuito con un R sufficientemente grande:

$$I^{(+)}(x_0) = \oint_{[-R,-\varepsilon] \cup \gamma^{(+)} \cup [\varepsilon, R] \cup \gamma_R} \frac{dz}{z(z-i)} \qquad \left(\lim_{R \to \infty}\right)$$

156 Applico il teor. dei residui.

$$I^{(+)}(x_0) = \lim_{R\to+\infty} 2\pi i \, \mathrm{Res}(z=i)$$

$$\mathrm{Res}(z=i) = \lim_{z\to i} (z-i)\frac{1}{z(z-i)} = -i$$

$$I^{(+)}(x_0) = 2\pi i(-i) = 2\pi\frac{i}{i} = 2\pi$$

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x(x-i)} = 2\pi + i\pi i = 2\pi - \pi = \pi$$

* Vedi libro Rossetti *

ESEMPIO

$$T(k) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ikx}}{x}\,dx \qquad k\in\mathbb{R}$$

A volte occorre risolvere questo tipo di integrale per calcolare un'antitrasformata di Fourier.

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ipx} f(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{ipx}\hat{f}(p)$$

In questo integrale k gioca il ruolo di α, e la singolarità sta nell'origine. Posso solo calcolarne il V.P.

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ikx}}{x}\,dx = I^{+}(x_0=0) + i\pi f(x_0=0)$$

$$f(x) = e^{ikx} \qquad f(x_0) = f(0) = 1$$

$$I^{(+)}(0) = \int_{\gamma+}\frac{e^{ikx}}{x}\,dx$$ Uso il Lemma di Jordan.

Ci sono 2 casi.

1: $\underline{k>0}$ (chiudo da sopra)

Applico il teorema dei residui:

$$I^{(+)} = 0$$

2: $\underline{k<0}$

$$I^{(+)} = -2\pi i\,\mathrm{Res}(0)$$

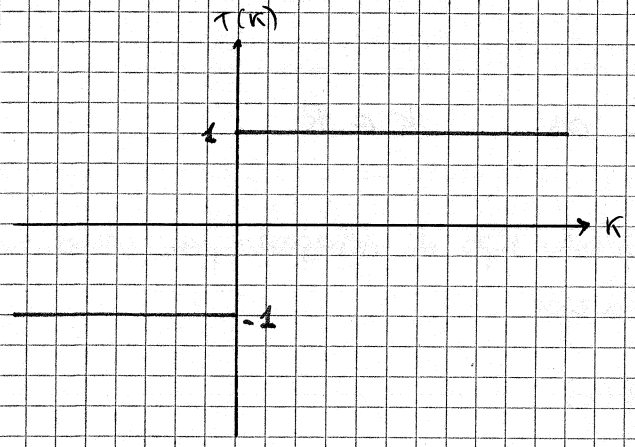
$$\mathrm{Res}(0) = \lim_{z\to 0} z\frac{e^{ikz}}{z} = 1$$

$$\underline{I^{(+)} = -2\pi i}$$

$$T(k) \equiv \text{v.p.}\ \frac{1}{\pi i}\left[I^{+}(0) + i\pi\right] =$$

$$= \begin{cases} 1 & k > 0 \\ -1 & k < 0 \end{cases}$$

$T(k)$ sarebbe l'antitrasformata di $\frac{1}{p}$.
E' dunque fatta così:



ESERCIZIO

Determinazione della funzione di Green per questo operatore:

$$L_x = \frac{d^2}{dx^2} + k^2$$

L'eq. associata è:

$$L_x\, g(x-y) = \delta(x-y)$$

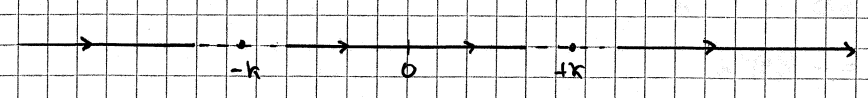
$$\hat{g}(p)\left(-p^2 + k^2\right) = 1$$

$$\hat{g}(p) = \frac{1}{-p^2 + k^2}$$

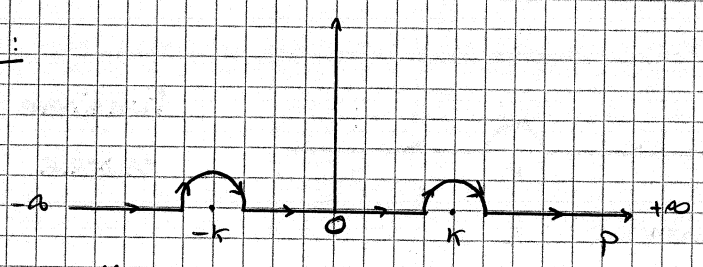
$$\xi = x - y$$

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi}\, e^{ip\xi}\, \hat{g}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi}\, \frac{e^{ip\xi}}{k^2 - p^2}$$

Questo integrale ha 2 singolarità durante il cammino di integrazione: $\pm k$.



Caso 1:



$$g(\xi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \frac{e^{ip\xi}}{(p-k)(p+k)} \qquad (V.P.)$$

ξ gioca il ruolo di α. A seconda di ξ si chiude da sopra o da sotto.

$$g_R(\xi) = \begin{cases} \xi > 0: & 0 \\ \xi < 0: & -\dfrac{\operatorname{sen}(k\xi)}{k} \end{cases}$$

Funzione di Green ritardata

$\xi < 0$: $\quad -2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(z_k) = -2\pi i \left[\operatorname{Res}(-k) + \operatorname{Res}(k)\right]$

$$\operatorname{Res}(-k) = \lim_{p\to -k} (p+k)\frac{e^{ip\xi}}{(p-k)(p+k)} = -\frac{e^{-ik\xi}}{2k}$$

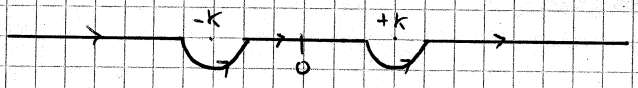
$$\operatorname{Res}(k) = \lim_{p\to k} (p-k)\frac{e^{ip\xi}}{(p-k)(p+k)} = \frac{e^{ik\xi}}{2k}$$

$$-2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_k = -2\pi i \left[\frac{e^{-ik\xi}}{2k\,2\pi} - \frac{e^{ik\xi}}{2k\,2\pi}\right] =$$

$$= -\frac{1}{k}\,\frac{e^{ik\xi} - e^{-ik\xi}}{2i} = -\frac{\operatorname{sen}(k\xi)}{k}$$

(Questo è solo l'$I^{(+)}$)

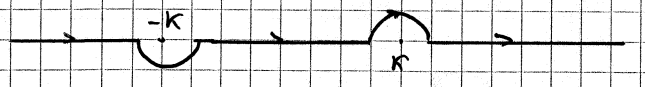
Caso 2:



$$g_A(\xi) = \begin{cases} \xi > 0: & \dfrac{\operatorname{sen}(k\xi)}{k} \\ \xi < 0: & 0 \end{cases}$$

Funzione di Green avanzata

Caso 3:

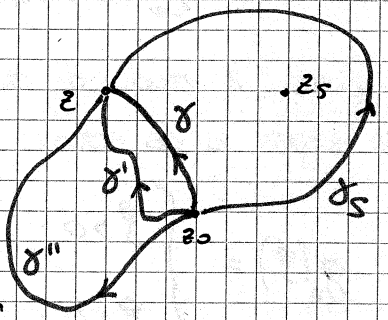


(o viceversa)

Funzione di Green causale

Supponiamo di voler calcolare:

$$\phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z')\,dz'$$



z_s punto di singolarità

$$\phi(z) = \int_{\gamma} = \int_{\gamma'} = \int_{\gamma''} \ldots \neq \int_{\gamma_s}$$

(Teorema di Cauchy)

Se definisco:

$$\Gamma = \gamma_s \cup \gamma_{(-)}$$

ed applico il teorema dei residui:

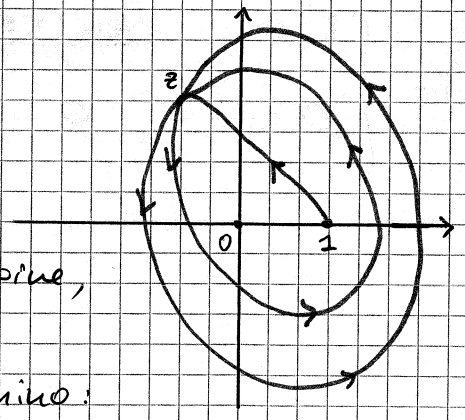
$$\oint_{\Gamma} f(z')\,dz' = \int_{\gamma_s} - \int_{\gamma} = 2\pi i\, \mathrm{Res}(z_s)$$

$$\int_{\gamma_s} = \int_{\gamma} + 2\pi i\, \mathrm{Res}(z_s)$$

Ogni volta che passo intorno a z_s ho un contributo pari a $2\pi i\, \mathrm{Res}(z_s)$.

Supponiamo che:

$$\phi(z) = \int_{1}^{z} \frac{dz'}{z'}$$

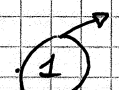


Quando il cammino tra 1 e z non avvolge l'origine, $\phi(z) = \ln z$.

Ma se seguo questo cammino:

La θ può assumere diversi valori, a seconda di quante volte passo attorno all'origine, che è la singolarità.

$$\log z \equiv \log \rho + i\theta$$
$$\log z \longrightarrow \log \rho + i\theta + 2\pi i \quad \theta \longrightarrow \theta + 2\pi$$
$$\log z \longrightarrow \log \rho + i\theta + 2\pi m i \quad \theta \longrightarrow \theta + 2\pi m$$



Il logaritmo è una funzione **polidroma**, e l'origine si dice punto di diramazione.
Anche la radice quadrata lo è.

$\log z$ è di ordine ∞
$\sqrt{z}$ è di ordine 2, perché dopo 2 giri torna al primo valore.

Come si calcolano quest. integrali?
Si taglia dal piano complesso uno dei semiassi delle x e si considerano solo cammini che non attraversano il taglio.
Oppure si immagina il piano complesso suddiviso in tanti fogli, i **piani di Riemann**, nei quali la funzione assume un solo valore.
Per $\log z$ la superficie è fatta da infiniti fogli, per la $\sqrt{z}$ da 2 fogli.

Università degli Studi di Siena - Facoltà di Scienze
CdL in Fisica e Tecnologie Avanzate - Prova Scritta di Metodi Matematici della Fisica
a.a. 2004/05 - 28 giugno 2005

Esercizio 1 - Usare le proprietà delle matrici di Pauli $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, in particolare quelle di anti-commutazione, per calcolare il seguente commutatore:

$$[\sigma_1, e^{(\sigma_1+\sigma_2)}]$$

Esercizio 2 - Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) \equiv \mid x \mid .$$

Utilizzare lo sviluppo precedente e l'identità di Parseval, per dimostrare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4$$

Esercizio 3 - L'operatore

$$T \equiv \frac{d^2}{dx^2}$$

è definito $\forall f \in L^2(0, 2\pi)$ soddisfacente le condizioni: $f'(0) = f'(2\pi) = 0$, essendo $f' = \frac{df}{dx}$.
1) Verificare se T è hermitiano.
2) Trovare le autofunzioni di T, e i corrispondenti autovalori, e dire se le autofunzioni trovate formano un set completo in H.

Esercizio 4 - Verificare i seguenti risultati (il secondo inteso come Valor Principale di Cauchy):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e} \qquad\qquad P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-3x+2)} = \frac{\pi}{10}$$

Esercizio 5 - Un circuito RL è descritto, in corrispondenza di una tensione di ingresso $V(t)$, dall'equazione differenziale per la corrente $I(t)$:

$$RI + L\frac{dI}{dt} = V(t).$$

1) Utilizzare il formalismo della trasformata di Fourier per trovare la funzione di Green di tale equazione.
2) In corrispondenza di una tensione di ingresso data da

$$V(t) = \begin{cases} V_0 & \mid t \mid < a \\ 0 & \mid t \mid > a \end{cases}$$

trovare la soluzione $I(t)$, sia attraverso il calcolo esplicito della sua trasformata di Fourier e l'applicazione del teorema di inversione, sia attraverso il teorema di convoluzione e la funzione di Green del circuito.

Università degli Studi di Siena - Facoltà di Scienze
CdL in Fisica e Tecnologie Avanzate - Prova Scritta di Metodi Matematici della Fisica
a.a. 2004/05 - 25 luglio 2005

Esercizio 1 - Dimostrare che ogni matrice 2×2 su $\mathbb{C}$ si puó sviluppare come combinazione lineare delle matrici di Pauli $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ e della matrice identità $\mathbb{1}$, attraverso l'espansione $A = \alpha_0 \mathbb{1} + \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3$ purché si abbia:

$$2\alpha_0 = Tr(A)\,, \qquad 2\alpha_i = Tr(A\sigma_i)\,, \quad i = 1, 2, 3$$

Trovare in particolare i coefficienti dello sviluppo della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}$ e spiegare il risultato in termini delle proprietà di hermiticità della matrice.

Esercizio 2 - Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) \equiv x^2\,.$$

Utilizzare lo sviluppo precedente per dimostrare che $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ e, usando anche l'identità di Parseval, che $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, avendo definito la funzione Zeta (di Riemann)

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Esercizio 3 - L'operatore $Q = x\frac{d}{dx}$ è definito $\forall f \in H = L^2(0, +\infty)$.

a) Trovare l'aggiunto di Q.
b) Definire l'operatore $Q_\alpha \equiv Q + \alpha\mathbb{1}$ e trovare le condizioni su $\alpha \in \mathbb{C}$ affinché l'operatore Q_α risulti antihermitiano.

Esercizio 4 - Verificare i seguenti risultati (il secondo inteso come Valor Principale di Cauchy):

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1}\, dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \qquad\qquad P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 - 1}\, dx = -\frac{\pi}{2}$$

Esercizio 5 - Trovare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) \equiv e^{-|x|}\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Usare la precedente trasformata e il teorema di convoluzione, per trovare la funzione $g(x)$ la cui trasformata di Fourier è

$$\hat{g}(p) = \frac{1}{(1 + p^2)^2}$$

Università degli Studi di Siena - Facoltà di Scienze

CdL in Fisica e Tecnologie Avanzate - Prova scritta di Metodi Matematici della Fisica I

a.a. 2005/06 - 24 luglio 2006

Esercizio n.1 - $\{L_1, L_2, L_3\}$ sono tre operatori hermitiani che verificano le seguenti regole di commutazione:

$$[L_1, L_2] = iL_3 \qquad [L_2, L_3] = iL_1 \qquad [L_3, L_1] = iL_2$$

Definiti gli operatori $L^2 \equiv L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$, $\quad L_+ \equiv L_1 + iL_2$, $\quad L_- \equiv L_1 - iL_2$, dimostrare che:

1) L^2 è hermitiano e commuta con ogni L_j , $\quad j = 1, 2, 3$

2) $(L_+)^\dagger = L_- \qquad (L_-)^\dagger = L_+$

3)$[L_+, L_-] = 2L_3$; $\qquad [L^2, L_\pm] = 0; \qquad [L_3, L_\pm] = \pm L_\pm$

4) $L^2 = L_3(L_3 + 1) + L_-L_+; \qquad L^2 = L_3(L_3 - 1) + L_+L_-$

Esercizio n.2 - Data la funzione $f(x) = 1$, $0 \le x \le \pi$, trovare il suo sviluppo in serie di Fourier rispetto alla base $\{\sin nx\}$. Integrare tale espressione per ottenere lo sviluppo in serie della funzione $g(x) = x$. Sostituire in quest'ultimo il valore $x = \pi$ per dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Ottenere lo stesso risultato usando l'identità di Parseval applicata a $f(x)$ e alla sua serie di Fourier.

Esercizio n.3 - Usare il calcolo della trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$ e l'identità di Parseval per dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dx = \pi$$

Esercizio n.4 - Usare la rappresentazione integrale di Cauchy per dimostrare che:

$$\oint_\Gamma \frac{z^2}{z-2} dz = 0 \quad , \quad \oint_\Gamma \frac{e^{iz}}{z^3} dz = -i\pi \quad , \quad \oint_\Gamma \frac{z^2}{2z-1} dz = i\frac{\pi}{4} \quad , \quad \oint_\Gamma \frac{(z-2)^{-1}}{(2z-1)^2} dz = -\frac{2}{9}\pi i$$

dove Γ è la circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine.

Verificare inoltre i seguenti risultati (il secondo inteso come Valor Principale di Cauchy):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 + x + 1}\, dx = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}} \sin 1 \qquad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - ix} = \pi$$

Esercizio n.5 - Utilizzare il formalismo della funzione di Green per risolvere l'equazione del calore unidimensionale corrispondente al seguente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < +\infty\,,\, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2} \end{cases}$$

N.B.: trasformata di Fourier di una gaussiana $\Rightarrow \mathcal{F}_p[e^{-x^2}] = \sqrt{\pi} e^{-p^2/4}$

Università degli Studi di Siena - Facoltà di Scienze

CdL in Fisica e Tecnologie Avanzate - Prova scritta di Metodi Matematici della Fisica I

a.a. 2005/06 - 26 settembre 2006

Esercizio n.1 - L'operatore $\mathbf{L} \equiv \{L_x, L_y, L_z\}$ ha tre componenti che verificano le seguenti regole di commutazione: $[L_x, L_y] = iL_z$ e permutazioni cicliche.
Dati gli operatori vettoriali $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ che commutano fra loro e con $\mathbf{L}$, cioè tali che $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \mathbf{L}] = [\mathbf{b}, \mathbf{L}] = \mathbf{0}$ dimostrare che:

$$[\mathbf{a} \cdot \mathbf{L}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{L}] = i(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{L}$$

Esercizio n.2 - Data la funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $[-1, 1]$ come

$$f(x) = \begin{cases} 4x(1+x) & -1 \le x \le 0 \\ 4x(1-x) & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

trovare il suo sviluppo in serie di Fourier rispetto alla base $\{\sin n\pi x\}$. Valutare gli errori che si compiono nel calcolo dell'integrale tra gli estremi 0 e 1 di $f(x)$ e del primo termine del precedente sviluppo di Fourier, quando paragonati con il calcolo esatto dell'integrale $\int_0^1 \sin \pi x dx$.

Esercizio n.3 - Usare il calcolo della trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2} & -2 \le x \le 2 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$ e l'identità di Parseval per dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4} dx = \frac{2\pi}{3}$$

Esercizio n.4 - Usare il teorema dei residui e la rappresentazione $z \equiv e^{i\theta}$ per calcolare il seguente integrale

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta} \quad , \qquad |a| < 1$$

riconducendolo ad un integrale in campo complesso esteso alla circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine. Verificare quindi il seguente risultato

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Esercizio n.5 - Verificare i seguenti risultati (il secondo inteso come Valor Principale di Cauchy):

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3} \quad , \quad a > 0 \qquad\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x-1)} dx = -\frac{\pi}{2}\left(e^{-1} + \sin 1\right)$$

Università degli Studi di Siena - Facoltà di Scienze

CdL in Fisica e Tecnologie Avanzate - Prova scritta di Metodi Matematici della Fisica I

a.a. 2005/06 - 20 febbraio 2007

Esercizio n.1 - Trovare, in campo complesso, tutte le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$z^4 + 1 = 0 \qquad\qquad (z-1)^3 = -1$$

Dimostrare che $(1+i)^{12}$ è reale. Calcolarne il valore.

Esercizio n. 2 - Data la funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ come

$$f(x) = \begin{cases} -x + \pi & x > 0 \\ \\ x + \pi & x < 0 \end{cases}$$

trovare il suo sviluppo in serie di Fourier. Utilizzare tale sviluppo in serie, unito all'identità di Parseval, per dimostrare che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Esercizio n.3 - Trovare, per calcolo esplicito, la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
Ritrovare lo stesso risultato sfruttando il calcolo della trasformata di Fourier della funzione e^{-x} , $x > 0$ e la proprietà delle trasformate di Fourier: $\mathcal{F}[f'(x)] = ip\mathcal{F}[f(x)]$.
Dimostrare inoltre che $xe^{-x} = g_1 * g_2$ essendo $g_1(x) = g_2(x) = e^{-x}$, $x > 0$ mentre $g_1(x) = g_2(x) = 0$, $x < 0$, e ritrovare il risultato precedente usando il teorema di convoluzione.

Esercizio n.4 - Usare il teorema dei residui per verificare i seguenti risultati:

$$\oint_{\Gamma} \frac{z\, e^{\pi z}}{z^4 - 16} dz = -\frac{\pi i}{4} \qquad\qquad \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{3 + \cos\theta}\, d\theta = \pi - \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$$

Γ essendo l'ellisse di equazione $9x^2 + y^2 = 9$, percorsa in senso antiorario.
Per il calcolo del secondo integrale utilizzare anche la rappresentazione $z \equiv e^{i\theta}$.

Esercizio n.5 - Verificare i seguenti risultati (il secondo inteso come Valor Principale di Cauchy):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{i\omega x}}{1+x^2}\, dx = i\pi e^{-|\omega|} sign(\omega) \qquad\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)}\, dx = \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

N.B. $= sign(\omega) = \begin{cases} +1 & \omega > 0 \\ \\ -1 & \omega < 0 \end{cases}$

Università degli Studi di Siena - Facoltà di Scienze

CdL in Fisica e Tecnologie Avanzate - Prova scritta di Metodi Matematici della Fisica I

a.a. 2005/06 - 13 aprile 2007

Esercizio n.1 - Calcolare l'integrale di linea della funzione $f(z) = e^{\bar{z}}$, essendo $\bar{z}$ il complesso coniugato di z, lungo i due cammini distinti γ_1 e γ_2 che collegano entrambi il punto $A \equiv (0,0)$ con il punto $B \equiv (1,1)$:

$$\gamma_1 = \{x + iy : y = 0, x \in [0,1]\} \bigcup \{x + iy : x = 1, y \in [0,1]\}$$

$$\gamma_2 = \{x + iy : x = 0, y \in [0,1]\} \bigcup \{x + iy : x \in [0,1], y = 1\}.$$

Spiegare il risultato in termini delle proprietà di analiticità di $f(z)$.

Esercizio n. 2 - Data la funzione $f(x) = e^{|x|}$ definita nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, trovare il suo sviluppo in serie (trigonometrica) di Fourier relativa a tale intervallo. Scrivere la corrispondente identità di Parseval relativa a tale sviluppo in serie.

Esercizio n.3 - Trovare, per calcolo esplicito, la trasformata di Fourier $\hat{f}(p)$ della funzione $f(x) = e^{-|x|/4}$, definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ e, attraverso l'uso del teorema di inversione, calcolare l'antitrasformata di $\hat{f}(p)$, dopo avere esteso l'integrale in campo complesso e avere utilizzato il lemma di Jordan e il teorema dei residui. Confrontare il risultato ottenuto con la funzione di partenza.

Esercizio n.4 - Usare il teorema dei residui per verificare i seguenti risultati:

$$\oint_\Gamma \frac{2\,z}{z^3+1} dz = \frac{4\pi}{3}\, i \qquad\qquad \int_0^{2\pi} 2\sin^2\theta \cos\theta \, d\theta = 0$$

Γ essendo la semicirconferenza di raggio 2, $\Gamma \equiv \{z : 2\,e^{i\theta}, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$, percorsa in senso antiorario.
Per il calcolo del secondo integrale utilizzare anche la rappresentazione $z \equiv e^{i\theta}$.

Esercizio n.5 - Data l'equazione differenziale: $\ddot{y} - 2\,y = x$
per la funzione incognita $y = y(x)$, se ne trovi una soluzione particolare, utilizzando il formalismo della trasformata di Fourier applicato alla ricerca della funzione di Green di tale equazione, ovvero la soluzione $y_1 = y_1(x)$ dell'equazione associata : $\ddot{y}_1 - 2\,y_1 = \delta(x)$. Usare tale funzione di Green per ottenere, attraverso il calcolo di una convoluzione, la soluzione cercata.

Università degli Studi di Siena - Facoltà di Scienze

CdL in Fisica e Tecnologie Avanzate - Prova scritta di Metodi Matematici della Fisica I

a.a. 2006/07 - 13 luglio 2007

Esercizio n.1 - Calcolare il seguente integrale di linea nel piano complesso

$$\int_A^B (x - y + iy^2)dz$$

lungo i due cammini distinti $\gamma_1\,, \gamma_2$ che collegano entrambi il punto $A \equiv (0,0)$ con il punto $B \equiv 1 + i$:

$$\gamma_1 = \{x + iy : y = x, x \in [0,1]\} \qquad \gamma_2 = \{x + iy : y = 0, x \in [0,1]\} \bigcup \{x + iy : x = 1, y \in [0,1]\}.$$

Spiegare il risultato in termini delle condizioni di Cauchy-Riemann.

Esercizio n. 2 -Data la funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ come

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) & 0 < x < \pi \\ \\ -\frac{1}{2}(\pi + x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

trovare il suo sviluppo in serie (trigonometrica) di Fourier relativa a tale intervallo. Scrivere la corrispondente identità di Parseval relativa a tale sviluppo in serie e dimostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Esercizio n.3 - Trovare, per calcolo esplicito, dopo avere esteso l'integrale relativo in campo complesso e avere usato il lemma di Jordan e il teorema dei residui, la trasformata di Fourier $\hat{f}(p)$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x - i)^2}\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dimostrare che $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, verificando che $\|f(x)\|^2 = \pi/2$. Utilizzare il teorema di inversione per calcolare l'antitrasformata di $\hat{f}(p)$ e confrontare il risultato ottenuto con la funzione di partenza. Utilizzare l'uguaglianza di Parseval per ritrovare il risultato relativo al calcolo della norma di $f(x)$ dopo avere calcolato $||\hat{f}(p)||^2$.

Esercizio n.4 - Usare il teorema dei residui per verificare i seguenti risultati:

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z(z-1)(z-3)^2} = \frac{5\pi i}{18} \qquad \int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + \sin^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Γ essendo il quadrato di lato 2, $\Gamma \equiv \{z = x + iy : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$, percorso in senso antiorario.
Per il calcolo del secondo integrale utilizzare anche la rappresentazione $z \equiv e^{i\theta}$.

Esercizio n.5 - Verificare il seguente risultato, intendendo l'integrale nel senso del valore principale di Cauchy:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{(x^2 + 1)(x - 2)} dx = -\frac{2}{5}\pi e^{-\pi}$$

Università degli Studi di Siena - Facoltà di Scienze

CdL in Fisica e Tecnologie Avanzate - Prova scritta di Metodi Matematici della Fisica I

a.a. 2006/07 - 11 settembre 2007

Esercizio n.1 - Calcolare l'integrale di linea: $I = \oint_\Gamma (\bar{z}+1)^2 dz$, essendo Γ il circuito chiuso, percorso in senso antiorario, costituito dal contorno del settore circolare relativo al primo quadrante e al cerchio unitario:

$$\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 = \{x+iy : x \in [0,1], y = 0\} \cup \{z = e^{i\theta} : \theta \in [0, \pi/2]\} \cup \{x+iy : x = 0, y \in [0,1]\}.$$

Spiegare perché l'integrale non è nullo, in termini delle proprietà di analiticità della funzione integranda, e dimostrare che il suo valore è $I = I_1 + I_2 + I_3$, essendo: $I_1 = \frac{7}{3}$, $I_2 = (2+\pi)i$, $I_3 = -1 - \frac{2}{3}i$.

Esercizio n.2 - Data la funzione

$$f(x) = e^{-|x|}$$

definita nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, trovare il suo sviluppo in serie (trigonometrica) di Fourier corrispondente a tale intervallo. Scrivere l'identità di Parseval relativa a tale sviluppo in serie.

Esercizio n.3 - Trovare la trasformata di Fourier $\hat{f}(p)$ della funzione: $f(x) = e^{-|x|} sign(x)$.
Dimostrare che $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Calcolarne la norma. Utilizzare inoltre l'uguaglianza di Parseval per dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^2}{(1+p^2)^2}\, dp = \frac{\pi}{2}$$

Esercizio n.4 - Usare il teorema dei residui e il lemma di Jordan per verificare i seguenti risultati (il secondo inteso come Valor Principale di Cauchy):

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2-1}\, dx = -\pi$$

Esercizio n.5 - Ad un circuito RL, descritto dall'equazione differenziale: $RI + L\frac{dI}{dt} = V(t)$, per la corrente incognita $I(t)$, viene applicata una tensione $V(t) = V_0 e^{-kt}\theta(t)$ con $k \neq \frac{R}{L}$ e $k > 0$.
1) Riscrivere l'equazione in termini delle trasformate di Fourier e risolverla per trovare la trasformata di Fourier della corrente $\hat{I}(\omega)$. Applicare quindi il teorema di inversione per il calcolo dell'antitrasformata ai fini di ottenere la funzione incognita $I(t)$.
2) Trovare la funzione di Green $G(\tau)$ relativa all'equazione del circuito e utilizzare il teorema di convoluzione per ritrovare la risposta del circuito alla tensione data $V(t)$.

Università degli Studi di Siena - Facoltà di Scienze

CdL in Fisica e Tecnologie Avanzate - Prova scritta di Metodi Matematici della Fisica I

a.a. 2006/07 - 18 dicembre 2007

Esercizio n.1 - Considerare $u(x,y) = xy$ come la parte reale di una funzione analitica $f(x,y) \equiv u + iv$. Determinare la sua parte immaginaria $v(x,y)$, assumendo $f(0) = 0$. Dimostrare che sia u che v sono funzioni armoniche e che si puó scrivere $f(x,y) = f(z) = -\frac{1}{2}iz^2$. Calcolare $\int_A^B f(z)\,dz$, lungo i due cammini distinti $\gamma_1\,, \gamma_2$ che collegano entrambi il punto $A \equiv (0,0)$ con il punto $B \equiv 1 + i$:

$$\gamma_1 = \{x + iy : y = 0, x \in [0,1]\} \bigcup \{x + iy : x = 1, y \in [0,1]\}.$$

$$\gamma_2 = \{x + iy : x = 0, y \in [0,1]\} \bigcup \{x + iy : y = 1, x \in [0,1]\}$$

Spiegare il risultato in termini delle proprietà di analiticità della funzione.

Esercizio n. 2 - Data la funzione

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \qquad\qquad x \in [-\pi, \pi]$$

trovare il suo sviluppo in serie (trigonometrica) di Fourier relativa all'intervallo $[-\pi, \pi]$. Scrivere la corrispondente identità di Parseval relativa a tale sviluppo in serie e dimostrare che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Esercizio n.3 - Trovare, per calcolo esplicito, la trasformata di Fourier $\hat{f}(p)$ della funzione

$$f(x) = \frac{x}{|x|} e^{-|x|}\,, \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dimostrare che $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, verificando che $\|f(x)\|^2 = 1$. Ottenere di nuovo $\hat{f}(p)$ utilizzando la formula per il calcolo della trasformata di Fourier della derivata di una funzione, dopo avere dimostrato che $f(x) = -\frac{d}{dx} e^{|x|}$ e avere calcolato la trasformata di Fourier della funzione $e^{-|x|}$.

Esercizio n.4 - Usare il teorema dei residui per verificare i seguenti risultati:

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2}\, dz = 2\pi i \qquad\qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + 4\cos\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{6}$$

Per il calcolo del secondo integrale utilizzare anche la rappresentazione $z \equiv e^{i\theta}$.

Esercizio n.5 - Verificare il seguente risultato, intendendo l'integrale nel senso del Valore Principale di Cauchy:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{8 - x^3} dx = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

Università degli Studi di Siena - Facoltà di Scienze

CdL in Fisica e Tecnologie Avanzate - Prova scritta di Metodi Matematici della Fisica I

a.a. 2006/07 - 19 febbraio 2008

Esercizio n.1 - Considerare $u(x,y) = x^2 - y^2$ come la parte reale di una funzione analitica $f(x,y) \equiv u + iv$. Determinare la sua parte immaginaria $v(x,y)$, assumendo $f(0,0) = 0$. Dimostrare che sia u che v sono funzioni armoniche e che si puó scrivere $f(x,y) = f(z) = z^2$.
Calcolare $\int_A^B f(z)\,dz$, lungo i cammini distinti γ_1 , γ_2 che collegano il punto $A \equiv (0,0)$ con il punto $B \equiv 1+i$:

$$\gamma_1 = \{x + iy : y = 0, x \in [0,1]\} \bigcup \{x + iy : x = 1, y \in [0,1]\}.$$

$$\gamma_2 = \{x + iy : x = 0, y \in [0,1]\} \bigcup \{x + iy : y = 1, x \in [0,1]\}$$

Spiegare il risultato in termini delle proprietà di analiticità della funzione.

Esercizio n.2 - Data la funzione $f(x) = \frac{x^2}{2}$ definita nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ trovare il suo sviluppo in serie (trigonometrica) di Fourier relativa all'intervallo $[-\pi, \pi]$. Dimostrare, valutando il precedente sviluppo nel punto $x = 0$, che

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + ... = \frac{\pi^2}{12}$$

Esercizio n.3 - Utilizzare il lemma di Jordan e il teorema dei residui per calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}(p)$ della funzione $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Usare l'identità di Parseval per dimostrare il seguente risultato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Usare il teorema di inversione per ottenere, a partire da $\hat{f}(p)$, la funzione di partenza $f(x)$.

Esercizio n.4 - Utilizzare il teorema dei residui e il lemma di Jordan per dimostrare:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3\cos\theta} = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx \;=\; \pi$$

Per il calcolo del primo integrale usare anche la rappresentazione $z \equiv e^{i\theta}$.

Esercizio n.5 - Verificare il seguente risultato, intendendo l'integrale nel senso del Valor Principale di Cauchy:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1-x)} dx = \sin 1$$

Università degli Studi di Siena - Facoltà di Scienze

CdL in Fisica e Tecnologie Avanzate - Prova scritta di Metodi Matematici della Fisica I

a.a. 2007/08 - 4 luglio 2008

Esercizio n.1 - Dimostrare che $v(x,y) = 2y(x-1)$ può essere considerata come la parte immaginaria di una funzione analitica $f(x,y) \equiv u + iv$. Determinare la sua parte reale $u(x,y)$, assumendo $f(0,0) = 0$. Dimostrare che si puó scrivere $f(x,y) \equiv F(z) = z^2 - 2z$. Calcolare $\int_A^B F(z)\,dz$, lungo un qualsiasi (perché?) cammino che collega il punto $A \equiv (0,0)$ con il punto $B \equiv 1+i$.

Esercizio n.2 - La funzione $f(x)$ assume il valore 1 nell'intervallo $[0,L]$ e 0 altrove.
1) Considerare il suo prolungamento dispari $\bar{f}(x)$ a tutto l'intervallo $[-L,L]$ e quindi ricavare il suo sviluppo di Fourier in termini della base $\{\sin \frac{n\pi}{L}x\}, n = 1,2,\ldots$.
2) Considerare $f(x)$ come dato iniziale per la soluzione dell'equazione di diffusione (in 1+1 dimensioni) lungo una sbarra finita di lunghezza L, ovvero del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Trovare la soluzione di questo problema, sfruttando i risultati del punto 1).

Esercizio n.3 - Determinare la trasformata di Fourier $\hat{f}(p)$ della funzione $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}\,, \forall x \in \mathbb{R}$ e a parametro reale positivo. Usare l'identità di Parseval per dimostrare il seguente risultato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a^2+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2a^3}$$

Usare il teorema di inversione per calcolare l'antitrasformata di $\hat{f}(p)$ e confrontare con la funzione di partenza.

Esercizio n.4 - Utilizzare il teorema di Cauchy e il teorema dei residui per dimostrare:

$$\oint_\Gamma \frac{e^{z^2}}{z^2(z-1-i)}\,dz = \pi e^{2i} \qquad \oint_{\Gamma_1} \frac{z+1}{2z^3 - z^4}\,dz = \frac{3}{4}\pi i \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1+\sin\theta}{3+\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

dove Γ è il bordo della corona circolare compresa tra la circonferenza $|z| = 1$ (percorsa in senso orario) e la circonferenza $|z| = 2$ (in senso antiorario), mentre Γ_1 è la circonferenza unitaria, tutte centrate nell'origine.

Esercizio n.5 - Calcolare, nel senso del Valor Principale di Cauchy, il seguente integrale, con $a \in \mathbb{R}^+$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-3x+2)(x^2+a^2)}$$

Dimostrare che il suo valore, per $a = 2$, risulta: $-\frac{\pi}{40}$.
Trovare infine per quale valore di a il valore principale dell'integrale precedente è nullo.

Università degli Studi di Siena - Facoltà di Scienze

CdL in Fisica e Tecnologie Avanzate - Prova scritta di Metodi Matematici della Fisica

a.a. 2007/08 - 16 settembre 2008

Esercizio n.1 - Dimostrare che $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ può essere considerata come la parte reale di una funzione analitica $f(x,y) \equiv u + iv$. Determinare la sua parte immaginaria $v(x,y)$, assumendo $f(0,0) = 0$. Dimostrare che si puó scrivere $f(x,y) \equiv F(z) = z^3$. Calcolare $\int_A^B F(z)\,dz$, lungo un qualsiasi (perché?) cammino che collega il punto $A \equiv (0,0)$ con il punto $B \equiv 1 + i$.

Esercizio n.2 - La funzione $f(x)$ è definita in $[-L, L] \equiv [-2, 2]$ come

$$f(x) = \begin{cases} -x & -2 < x < 0 \\ x & 0 < x < 2 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

1) Ricavare il suo sviluppo di Fourier in termini della base $\{\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{n\pi}{L}x, \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x\}, n = 1, 2, \ldots$.

2) Utilizzare tale sviluppo di Fourier per dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Esercizio n.3 - Determinare la trasformata di Fourier $\hat{f}(p)$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -a < x < 0 \\ 1 & 0 < x < a \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

con a parametro reale positivo.

Usare l'identità di Parseval per dimostrare il seguente risultato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos pa - 1)^2}{p^2} dp = \pi a$$

Usare il teorema di inversione per calcolare l'antitrasformata di $\hat{f}(p)$ e confrontare con la funzione di partenza.

Esercizio n.4 - Utilizzare il teorema di Cauchy e il teorema dei residui, con il lemma di Jordan, per dimostrare:

$$\oint_\Gamma \frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^2(z^2+4)}\,dz = 4\pi i \qquad \int_0^\pi \frac{\cos\theta}{17 - 8\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{60} \qquad V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix} = \pi/2$$

dove Γ è la circonferenza $|z - 2| = 4$, percorsa in senso antiorario, e l'ultimo integrale è da valutare nel senso del Valor Principale di Cauchy.

Università degli Studi di Siena - Facoltà di Scienze

CdL in Fisica e Tecnologie Avanzate - Prova scritta di Metodi Matematici della Fisica

a.a. 2007/08 - 18 dicembre 2008

Esercizio n.1 - Dimostrare che $u(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ può essere considerata come la parte reale di una funzione analitica $f(x,y) \equiv u + iv$. Determinare, a meno di una costante additiva, la sua parte immaginaria $v(x,y)$. Dimostrare che si puó scrivere $f(x,y) \equiv F(z) = \frac{A}{z^2}$, con A costante complessa. Determinare il valore di A.

Esercizio n.2 - La funzione $f(x)$ è definita in $[-L, L] \equiv [-\pi, \pi]$ come $f(x) = \pi - 2\,|\,x\,|$

1) Ricavare il suo sviluppo di Fourier in termini della base $\{\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{n\pi}{L}x, \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x\}, n = 1, 2, \ldots$.

2) Utilizzare tale sviluppo di Fourier per dimostrare le seguenti relazioni:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}\,, \qquad\qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\,,$$

la seconda ottenuta usando anche l'identità di Parseval.

Esercizio n.3 - Verificare il calcolo del seguente integrale, a e b essendo costanti reali positive,

$$f(y) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[x^2+a^2]}\;\frac{1}{[(x-y)^2+b^2]}\,dx = \frac{\pi(a+b)}{ab[(a+b)^2+y^2]}$$

usando il teorema di convoluzione per la trasformata di Fourier. Ovvero: leggere $f(y)$ come la convoluzione fra due funzioni, usare il teorema di convoluzione per calcolarne la trasformata di Fourier $\hat{f}(p)$, e infine usare il teorema di inversione per calcolare l'antitrasformata di $\hat{f}(p)$ e quindi il valore dell'integrale richiesto.

Esercizio n.4 - Utilizzare il teorema di Cauchy e il teorema dei residui, con il lemma di Jordan, per dimostrare:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} = 2\pi \qquad\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}/2}\cos\frac{1}{2}$$

Esercizio n.5 - Verificare il seguente risultato, intendendo l'integrale nel senso del Valore Principale di Cauchy:

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-4}\,dx = \pi\cos 2$$

Università degli Studi di Siena - Facoltà di Scienze

CdL in Fisica e Tecnologie Avanzate - Prova scritta di Metodi Matematici della Fisica

a.a. 2008/09 - 24 febbraio 2009

Esercizio n.1 - Dimostrare che $u(x,y) = x^2 - y^2 - y$ può essere considerata come la parte reale di una funzione analitica $f(x,y) \equiv u + iv$. Determinare la sua parte immaginaria $v(x,y)$, con la condizione $f(0,0) = 0$. Dimostrare che si puó scrivere $f(x,y) \equiv F(z) = z^2 + iz$. Calcolare $\int_A^B F(z)\,dz$, lungo un qualsiasi (perché?) cammino che collega il punto $A \equiv (0,0)$ con il punto $B \equiv 1 + i$.

Esercizio n.2 - La funzione $f(x)$ è definita in $[-\pi, \pi]$ come

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < -\pi/2 \\ 1 & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

Ricavare il suo sviluppo di Fourier in termini della base $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\}, n = 1, 2, \ldots$.

Utilizzare tale sviluppo di Fourier per dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{(2k+1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{\pi}{4}$$

Esercizio n.3 -Trovare la trasformata di Fourier $\hat{f}(p)$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Usare l'identità di Parseval per dimostrare il seguente risultato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{p^2 + 4} = \frac{\pi}{2}$$

Usare il teorema di inversione per calcolare l'antitrasformata di $\hat{f}(p)$ e confrontare con la funzione di partenza.

Esercizio n.4 - Utilizzare il teorema di Cauchy e il teorema dei residui, con il lemma di Jordan, per dimostrare:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2} + \sin\theta}{3 + \cos\theta} = \pi \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{3}$$

Esercizio n.5 - Verificare il seguente risultato, intendendo l'integrale nel senso del Valore Principale di Cauchy:

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4x-5)}\,dx = -\frac{3\pi}{26}$$

Università degli Studi di Siena - Facoltà di Scienze

CdL in Fisica e Tecnologie Avanzate - Prova scritta di Metodi Matematici della Fisica

a.a. 2008/09 - 7 aprile 2009

Esercizio n.1 - Dimostrare che

$$v(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$$

può essere considerata come la parte reale di una funzione analitica $f(x,y) \equiv u + iv$. Determinare, a meno di una costante additiva, la sua parte reale $u(x,y)$. Dimostrare che si puó scrivere $f(x,y) \equiv F(z) = -\frac{1}{2z^2}$.

Esercizio n.2 - La funzione $f(x)$ è definita in $[-\pi,\pi]$ come $f(x) = 2\pi - |\,x\,|$.

1) Ricavare il suo sviluppo di Fourier in termini della base $\{\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{n\pi}{L}x, \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x\}, n = 1, 2, \ldots$.

2) Utilizzare tale sviluppo di Fourier per dimostrare le seguenti relazioni:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}\,, \qquad\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\,,$$

la seconda ottenuta usando anche l'identità di Parseval.

Esercizio n.3 - Verificare il calcolo del seguente integrale,

$$f(y) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{[x^2+4]}\;\frac{1}{[(x-y)^2+4]}\,dx = \frac{\pi}{[16+y^2]}$$

usando il teorema di convoluzione per la trasformata di Fourier. Ovvero: leggere $f(y)$ come la convoluzione fra due funzioni, usare il teorema di convoluzione per calcolarne la trasformata di Fourier $\hat{f}(p)$, e infine usare il teorema di inversione per calcolare l'antitrasformata di $\hat{f}(p)$ e quindi il valore dell'integrale richiesto.

Esercizio n.4 - Utilizzare il teorema di Cauchy e il teorema dei residui, con il lemma di Jordan, per dimostrare:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\sin\theta} = 2\pi \qquad\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2-x+1}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}/2}\sin\frac{1}{2}$$

Esercizio n.5 - Verificare il seguente risultato, intendendo l'integrale nel senso del Valore Principale di Cauchy:

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\cos x}{9-x^2}\,dx = \pi\sin 3$$

es. 1 28/06/2005

$$[\sigma_1, e^{(\sigma_1+\sigma_2)}]$$

proprietà di commutazione

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\, e^{ijk}\, \sigma_k$$ e^{ijk} simbolo di Levi-Civita

proprietà di anticommutazione

$$[\sigma_i, \sigma_j]_+ = 2\delta_{ij}\, \mathbb{1}$$ δ delta di Kronecker

$$\Rightarrow \quad \sigma_i \sigma_j = i\, \varepsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} \cdot \mathbb{1}$$

---

es. 1 28/06/2005

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[\sigma_1, e^{(\sigma_1+\sigma_2)}]$$

$$\sigma_1 e^{(\sigma_1+\sigma_2)} - e^{(\sigma_1+\sigma_2)} \sigma_1$$

$$[\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = 2i\sigma_3$$

$$[\sigma_1, \sigma_2]_+ = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 = 0$$

$$[\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1$$

$$[\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2$$

se scambiate cambia segno -

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \mathbb{1}$$

vogliamo espandere l'esponenziale $\Rightarrow$ servono tutte le potenze di $(\sigma_1 + \sigma_2)$

$$2\,\mathbb{1} \overset{?}{=} (\sigma_1+\sigma_2)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 + \sigma_2^2 = \mathbb{1} + 0 + \mathbb{1} = 2\,\mathbb{1}$$

$$? = (\sigma_1+\sigma_2)^3 = (\sigma_1+\sigma_2)^2(\sigma_1+\sigma_2) = 2\,\mathbb{1}(\sigma_1+\sigma_2) = 2(\sigma_1+\sigma_2)$$

$$? = (\sigma_1+\sigma_2)^4 = (\sigma_1+\sigma_2)(\sigma_1+\sigma_2)^3 = 4\,\mathbb{1} = 2^2\,\mathbb{1}$$

$$(\sigma_1+\sigma_2)^{2k} = 2^k\,\mathbb{1} \qquad (\sigma_1+\sigma_2)^{2k+1} = 2^k(\sigma_1+\sigma_2)$$

$$\left[\sigma_1, e^{(\sigma_1+\sigma_2)}\right] = ?$$

$$e^{\sigma_1+\sigma_2} \simeq \mathbb{1} + 2^K \mathbb{1} + \cdots$$

$$\left[\sigma_1, \sum_n (\sigma_1+\sigma_2)^n \frac{1}{n!}\right]$$

$\sigma_1 \mathbb{1} - \mathbb{1}\sigma_1 = 0$ il primo termine e tutte le potenze pari sono nulli

$$\Rightarrow \left[\sigma_1, \Sigma \cdots\right] = \left[\sigma_1, \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_1+\sigma_2)^n \frac{1}{n!}\right] =$$

n dispari

$$= \left[\sigma_1, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sigma_1+\sigma_2)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] = \left[\sigma_1, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k(\sigma_1+\sigma_2)}{(2k+1)!}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!} [\sigma_1, \sigma_1+\sigma_2] = \Sigma \cdots \left[\cancel{[\sigma_1,\sigma_1]} + [\sigma_1,\sigma_2]\right] =$$

$[\sigma_1,\sigma_1] = 0$, $[\sigma_1,\sigma_2] = 2i\sigma_3$

$$= 2i\sigma_3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!} = \sqrt{2}\, i \sigma_3 \operatorname{senh}\sqrt{2}$$

---

es. 3 28/06/2005 $T = \frac{d^2}{dx^2}$ $f'(0) = f'(2\pi) = 0$ $f \in L^2(0,2\pi)$

$$(f, Tg) = \int_0^{2\pi} f^* \frac{d^2 g}{dx^2}\, dx = \cancel{f^* g'\Big|_0^{2\pi}} - \int_0^{2\pi} (f^*(x))' g'(x) = -\cancel{(f^*(x))' g(x)\Big|_0^{2\pi}} + \int_0^{2\pi} (f^*(x))'' g(x)\, dx =$$

$= (Tf, g)$ ⇐ T hermitiano

(Tf, g) Trovare autovalori e autofunzioni

$\exists \lambda \neq 0 : Tf = \lambda f$?

$$\begin{cases} \frac{d^2 f}{dx^2}(x) - \lambda f(x) = 0 \\ f'(0) = f'(2\pi) = 0 \end{cases}$$

caso $\lambda > 0$ soluzione eq. differenziale: $f(x) = a \cdot e^{\sqrt{\lambda}x} + b\, e^{-\sqrt{\lambda}x}$

$f'(x) = a\sqrt{\lambda}\, e^{\sqrt{\lambda}x} - b\sqrt{\lambda}\, e^{\sqrt{\lambda}x}$ $f'(0) = 0 \Rightarrow a\sqrt{\lambda} = b\sqrt{\lambda} \Rightarrow a = b \Rightarrow f = a(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{\sqrt{\lambda}x})$

$f'(2\pi) = 0 \Rightarrow a\sqrt{\lambda}\left(e^{\sqrt{\lambda}2\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}2\pi}\right) = 0$ $e^{\alpha} = e^{-\alpha} \Leftrightarrow \alpha = 0$

no autofunzioni per $\lambda > 0$. **caso $\lambda < 0$**

$-\lambda \equiv \omega^2$ $f'' + \omega^2 f = 0$ (oscillatore armonico) $\Rightarrow f(x) = c\cos(\omega x) + d \operatorname{sen}(\omega x)$

$f'(x) = -\omega c \operatorname{sen}(\omega x) + \omega d \cos(\omega x)$ $f'(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0$ $f'(2\pi) = 0 \Leftrightarrow -c\omega \operatorname{sen}(\omega 2\pi) = 0$

$\Rightarrow \omega 2\pi = M\pi \Rightarrow \omega = \frac{M}{2} \Rightarrow -\lambda = \frac{M^2}{4}$ $\lambda = -\frac{M^2}{4}$, M intero

Autofunzioni: $f(x) = c \cdot \cos\left(\frac{M}{2}x\right)$

es. 2 28/06/2005

$f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=|x|$ $\quad f$ è pari

$f(x)=a_0+\sum a_n\cos(nx)$

$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\pi^2=\frac{1}{2}\pi$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left[x\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}-\frac{1}{n}\int\operatorname{sen}(nx)\,dx\right]_0^{\pi}=$

$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi\operatorname{sen}(n\pi)}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\cos(nx)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n-1\right]$ fa 0 per tutti gli n pari

$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left((-1)^n-1\right)\cos(nx)$ $\quad n=2k+1$ (solo dispari)

$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left[(2k+1)x\right]$ $\quad n\neq 0$

$a_0=\sqrt{2\pi}\,a_0$ $\quad a_n=\sqrt{\pi}\,a_n$

$\|\,|x|\,\|^2=\left(\sqrt{\pi}\frac{\pi}{2}\right)^2+\sum_0^{\infty}\left|\frac{-4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(2k+1)^2}\right|^2=$

$2\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi\cdot\pi^2}{4}+\sum_0^{\infty}\frac{16}{\pi}\cdot\frac{1}{(2k+1)^4}$

$\frac{2}{3}\pi^3=\frac{2}{4}\pi^3+\frac{16}{\pi}\sum\frac{1}{(2k+1)^4}$

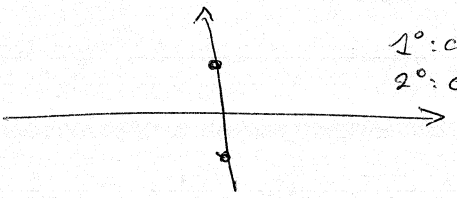
$\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right)\pi^3=\ldots=\frac{8-6}{12}\pi^3\cdot\frac{\pi}{16}=\sum\ldots$

$\frac{2}{12}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$

es. 4 28/06/2005 A

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx \stackrel{?}{=} \frac{\pi}{e}$ $\quad x^2+1=0 \Rightarrow x=\pm i$ $\quad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}\,dz}{2(z+i)(z-i)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iz}\,dz}{2(z+i)(z-i)} =$$



1°: chiudo sopra
2°: chiudo sotto

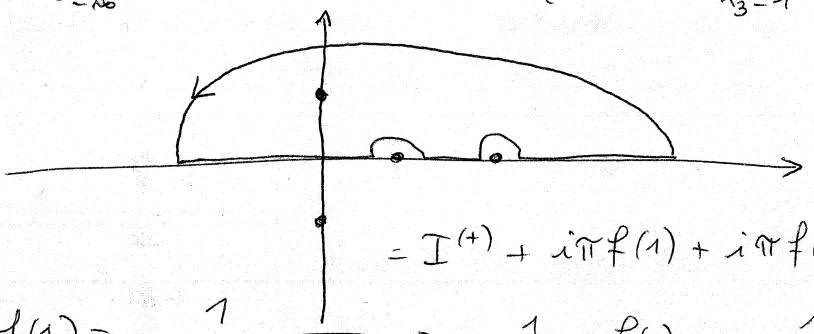
$= 2\pi i\, \mathrm{Res}_1(i)$ ~~$+$~~ $2\pi i\, \mathrm{Res}_2(-i)$ $\quad \mathrm{Res}_1(i) = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)e^{iz}}{2(z+i)(z-i)} = \frac{e^{-1}}{4i}$

$\mathrm{Res}_2(-i) = \lim_{z\to -i} \frac{(z+i)e^{-iz}}{2(z+i)(z-i)} = \frac{e^{-1}}{-4i}$

$\int = \frac{1}{2}\pi e^{-1} + \frac{1}{2}\pi e^{-1} = \pi e^{-1} = \frac{\pi}{e}$

- $P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-3x+2)} \stackrel{?}{=} \frac{\pi}{10}$ $\quad$ B

$x_1 = i$, $x_2 = -i$ $\quad x^2-3x+2=0 \Rightarrow x = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$ $\quad x_3=1$ $\quad x_4=2$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-i)(x+i)(x-1)(x-2)} =$$

$= I^{(+)} + i\pi f(1) + i\pi f(2) = 2\pi i\, \mathrm{Res}(i) + i\pi[f(1)+f(2)]$

$f(1) = \frac{1}{(1-i)(1+i)(-1)} = -\frac{1}{2}$ $\quad f(2) = \frac{1}{(2-i)(2+i)} = \frac{1}{5}$

$\mathrm{Res}(i) = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)}{(z-i)(z+i)(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2i(i-1)(i-2)} = \frac{-1}{2(1+i)(i-2)} =$

$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{i-1-2-2i} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{-i-3} = \frac{1}{2(i+3)} \cdot 2\pi i = \frac{\pi i}{i+3}$

$\int = \frac{\pi i}{i+3} + \left(-\frac{1}{2}i\pi + \frac{1}{5}\right)i\pi = \frac{10\pi i - 5(i+3)i\pi + 2(i+3)i\pi}{10(i+3)} =$

$= \frac{10\pi i - 5i^2\pi - 8i\pi + 2i^2\pi + 6i\pi}{10(i+3)} = \frac{8i\pi + 3\pi}{10(i+3)} = \frac{i\pi\left(\frac{1}{i+3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)}{}=$

$= i\pi\left(\frac{10-5(i+3)+2(i+3)}{10(i+3)}\right) = \frac{i\pi}{10(i+3)}\left[10-5i-15+2i+6\right] = \ldots = [1-3i]$

~~$i\pi\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{i+3}\right)$~~ $= \frac{\pi}{10(i+3)}$ ~~$(i+3)$~~

es. 5 28/06/2005

RL $V_{in} = V(t)$ $I(t)$

$RI + L\frac{dI}{dt} = V(t)$ impedenza $= z(\omega) = R + i\omega L$

$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{z(\omega)} = \frac{1}{R+i\omega L}$ $\hat{I}(\omega) = \hat{V}(\omega)\hat{y}(\omega)$

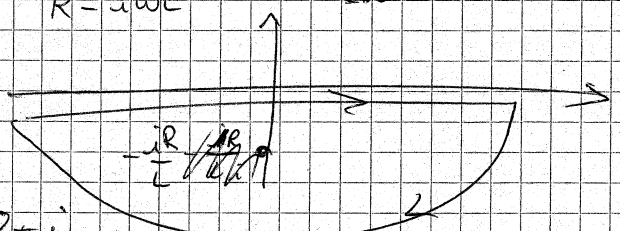
$G(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{y}(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}[\hat{y}(\omega)]^*\right)^*$

~~$\hat{y}(\omega)^* = \frac{1}{R - j\omega L}$~~ $\hat{y}(\omega) = \frac{1}{R+i\omega L}\cdot\frac{R-i\omega L}{R-i\omega L} = \frac{R-i\omega L}{R^2+\omega^2L^2}$

$\hat{y}(\omega)^* = \frac{R+i\omega L}{R^2+\omega^2L^2} = \frac{1}{R-i\omega L}$ OK

$\mathcal{F}[\hat{y}(\omega)^*] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\frac{1}{R-i\omega L}\,d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega t/iL}}{\omega - R/iL}\,d\omega =$

$= \frac{i}{L}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \frac{R}{iL}}\,d\omega$



$= \frac{i}{L}\left(-Res\left[z = -\frac{iR}{L}\right]\right)2\pi i$

$Res = \lim_{\omega \to -\frac{iR}{L}} \frac{\left(\omega + \frac{iR}{L}\right)e^{-i\omega t}}{\left(\omega + \frac{iR}{L}\right)} = e^{i^2\frac{R}{L}t} = e^{-\frac{R}{L}t} = e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\tau = \frac{L}{R}$

$\mathcal{F}[\hat{y}(\omega)^*] = \frac{2\pi}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$ $G(t) = \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$

Vedi cartella ~~doppia~~

Rivelatori di particelle

Camera a Treccia

La scelta di Hardware

Acquisizione Trigger

Memoria a pipeline

Memoria a sequenza

Memoria a doppia

Costruzione

Acquisizione

Analisi

Analisi grafica

Analisi numerica

Analisi fisica

es. 5 28/06/05 $RI + L\dot{I} = V(t)$ $I = I(t)$

operatore $\mathcal{O} = R + L\frac{d}{dt}$ $\mathcal{O}[I(t)] = V(t)$

funzione di Green associata ad $\mathcal{O}$ = $G(t-t_0)$

Risulta che: $\mathcal{O}[G(t-t_0)] = \delta(t-t_0)$; $G(t-t_0) = \mathcal{O}^{-1}[\delta(t-t_0)]$; $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t) G(t_0-t)dt$

$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega$

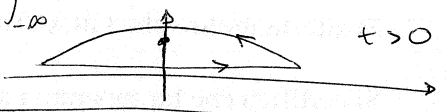
$R\,G(t) + L\frac{dG(t)}{dt} = \delta(t)$ $\quad G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ $\quad V(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{V}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

$\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t}\left[R\hat{G}(\omega) + Li\omega\hat{G}(\omega)\right] = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t}$

$\Rightarrow R\hat{G}(\omega) + L$ Leggo tutto in trasformate di Fourier:

$R\hat{G}(\omega) + i\omega L\hat{G}(\omega) = 1$ $\quad \hat{G}(\omega) = \frac{1}{R+i\omega L}$ $\quad G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\hat{G}(\omega)d\omega =$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{R+i\omega L} d\omega$ $\quad R + i\omega L = 0 \Rightarrow \omega = -\frac{R}{iL} = \frac{iR}{L}$



$G(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi i}{iL}\,\mathrm{Res}\left(\omega = \frac{iR}{L}\right) = \frac{1}{L}\lim_{\omega\to\frac{iR}{L}} e^{i\omega t} = \frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{L}$

$\frac{e^{i\omega t}}{iL\left(\frac{R}{iL}+\omega\right)} = \frac{e^{i\omega t}}{R+i\omega L}$

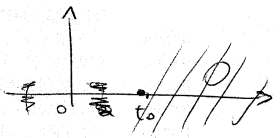
$t<0$ $\int = 0$ (no res)

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$V(t) = \begin{cases} V_0 & |t|<a \\ 0 & |t|>a \end{cases}$$

modo 2

$I(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t)\,G(t_0-t)dt$ $\quad G(t_0-t) = \begin{cases} \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}(t_0-t)} & t<t_0 \\ 0 & t>t_0 \end{cases}$



$I(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} V(t)\cdot\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}(t_0-t)}dt =$

1) $t_0 < -a$ $\quad V=0 \Rightarrow \int = 0 \Rightarrow I(t_0) = 0$

2) $-a < t_0 < a$ $\quad I = \int_{-a}^{t_0} = I(t_0)$

3) $t_0 > a$ unico contributo: $(-a, a) \Rightarrow I = \int_{-a}^{a} \dots$

2) $I(t_0) = \frac{V_0}{L}\int_{-a}^{t_0} e^{-\frac{R}{L}(t_0-t)}dt =$

$= \frac{V_0}{L}\int_{a}^{t_0} e^{\frac{R}{L}(t-t_0)}dt = \frac{V_0 e^{-\frac{R}{L}t_0}}{L}\int_{-a}^{t_0} e^{\frac{R}{L}t}dt =$

$= \dots\left[\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\right]_{-a}^{t_0} =$

$= \dots\left[\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t_0} - \frac{L}{R}e^{-\frac{R}{L}a}\right]$

3) $I = \frac{V_0}{L}\int_{-a}^{a} e^{\frac{R}{L}(t-t_0)}dt = \frac{V_0}{L}e^{-\frac{R}{L}t_0}\int_{-a}^{a} e^{\frac{R}{L}t}dt = \frac{V_0}{L}e^{-\frac{R}{L}t_0}\left[\right.$

es. 1 25/07/2005

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & +i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & +i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & +i\alpha_2 \\ -i\alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 \\ 0 & -\alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} \alpha_3 + \alpha_0 & \alpha_1 + i\alpha_2 \\ \alpha_1 - i\alpha_2 & \alpha_0 - \alpha_3 \end{pmatrix}}$$

$$Tr(A) = \alpha_3 + \alpha_0 + \alpha_0 - \alpha_3 = 2\alpha_0$$

~~$A\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 + i\alpha_2 \\ \alpha_1 - i\alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$ $Tr(A\sigma_1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$~~

$$A\sigma_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & \alpha_3 + \alpha_0 \\ \alpha_0 - \alpha_3 & \alpha_1 - i\alpha_2 \end{pmatrix} \quad Tr(A\sigma_1) = 2\alpha_1$$

$$A\sigma_2 = \begin{pmatrix} -i(\alpha_1 + i\alpha_2) & i(\alpha_3 + \alpha_0) \\ -i(\alpha_0 - \alpha_3) & i(\alpha_1 - i\alpha_2) \end{pmatrix} \quad Tr(A\sigma_2) = 2\alpha_2$$

$$A\sigma_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 + \alpha_0 & -(\alpha_1 + i\alpha_2) \\ \alpha_1 - i\alpha_2 & -(\alpha_0 - \alpha_3) \end{pmatrix} \quad Tr(A\sigma_3) = 2\alpha_3$$

NON È UNA

$I \Rightarrow T$ DIM.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad Tr(A) = A_{11} + A_{22} \equiv 2\alpha_0$$

$$A\sigma_1 = \begin{pmatrix} A_{12} & A_{11} \\ A_{22} & A_{21} \end{pmatrix} \qquad Tr(A\sigma_1) = A_{12} + A_{21} \equiv 2\alpha_1$$

$$A\sigma_2 = \begin{pmatrix} iA_{12} & -iA_{11} \\ iA_{22} & -iA_{21} \end{pmatrix} \qquad Tr(A\sigma_2) = iA_{12} - iA_{21} \equiv 2\alpha_2$$

$$A\sigma_3 = \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{12} \\ A_{21} & -A_{22} \end{pmatrix} \qquad Tr(A\sigma_3) = A_{11} - A_{22} \equiv 2\alpha_3$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_3 + \alpha_0 & \alpha_1 - i\alpha_2 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & \alpha_0 - \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11} - A_{22}}{2} + \frac{A_{11} + A_{22}}{2} & \frac{A_{12} + A_{21}}{2} - i\,\frac{(iA_{12} - iA_{21})}{2} \\ \frac{A_{12} + A_{21}}{2} + i\,\frac{(iA_{12} - iA_{21})}{2} & \frac{A_{11} + A_{22}}{2} - \frac{A_{11} - A_{22}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad A_{12} = A_{21}^{*} \qquad \text{OK}$$

es. 2 25/07/2005

$f: (-\pi, \pi) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$

$f(x) \equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k u_k(x)$

$u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{\frac{i\pi kx}{l}}$

$b_k = \int_{-l}^{l} u_k^*(x) f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2l}} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\omega_k x}\,dx \qquad \omega_k = \frac{k\pi}{l}$

$l = \pi \Rightarrow \omega_k = k$

$b_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k}^{k} f(x) e^{-ikx}\,dx$

$\int_{-k}^{k} x^2 e^{-ikx}\,dx =$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)$$

$f'(x) \equiv e^{-ikx}$

$f(x) \equiv -\frac{1}{ik} e^{-ikx}$

$g'(x) \equiv 2x$

$g(x) \equiv x^2$

$$\int_{-k}^{k} x^2 e^{-ikx}\,dx = -\frac{x^2}{ik} e^{-ikx} + \int \frac{1}{ik} e^{-ikx} 2x\,dx = -\frac{x^2}{ik} e^{-ikx} + \frac{2}{ik} \cdot$$

$\cdot \int x e^{-ikx}\,dx \qquad f'(x) \equiv e^{-ikx} \Rightarrow f(x) \equiv -\frac{1}{ik} e^{-ikx}$

$g'(x) \equiv 1 \Rightarrow g(x) \equiv x$

$$= -\frac{x^2}{ik} e^{-ikx} + \frac{2}{ik}\left[-\frac{x}{ik} e^{-ikx} - \frac{2}{(ik)^2}\int e^{-ikx}\right] =$$

$$= -\frac{x^2}{ik} e^{-ikx} + \frac{2}{ik}\left[-\frac{x}{ik} e^{-ikx} - \frac{2}{(ik)^2}\left(-\frac{1}{ik} e^{-ikx}\right)\right] =$$

$$= -\frac{x^2}{ik} e^{-ikx} + \frac{2}{ik}\left[-\frac{x}{ik} e^{-ikx} + \frac{2}{(ik)^3} e^{-ikx}\right] =$$

$$= \frac{i}{k} x^2 e^{-ikx} + \frac{2}{k^2} e^{-ikx} + \frac{4}{ik^4} e^{-ikx} \Bigg|_{-k}^{k} =$$

$$= \frac{i}{k} k^2 e^{-ik^2} + \frac{2}{k^2} e^{-ik^2} + \frac{4}{k^4} e^{-ik^2} -$$

$$- \left[\frac{i}{k} k^2 e^{ik^2} + \frac{2}{k^2} e^{ik^2} + \frac{4}{k^4} e^{ik^2} \right] =$$

$$= \left(ik + \frac{2}{k^2} + \frac{4}{k^4} \right) e^{-ik^2} - \left(ik + \frac{2}{k^2} + \frac{4}{k^4} \right) e^{ik^2} =$$

$$= \left(e^{-ik^2} - e^{ik^2} \right) \left(ik + \frac{2}{k^2} + \frac{4}{k^4} \right) =$$

$$= -2i \operatorname{sen}(k^2) \left(ik + \frac{2}{k^2} + \frac{4}{k^4} \right)$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \left[-2i \operatorname{sen}(k^2) \left(ik + \frac{2}{k^2} + \frac{4}{k^4} \right) \right]$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\pi}{ik} + \frac{2}{\pi k^2} + \frac{4}{\pi k^4} \right) \operatorname{sen}(k^2) \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\, ik} + \frac{\sqrt{2}}{k^2 \pi^{3/2}} + \frac{2\sqrt{2}}{k^4 \pi^{3/2}} \right) \operatorname{sen}(k^2) \right] e^{ikx}$$

• dim_che:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{(usare Parseval)}$$

es. 2 25/07/2005

$f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ $\quad f(t)=x^2$ $\quad f$ è pari

- sviluppare in serie di Fourier

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\operatorname{sen}(nx)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos(nx)dx\right)\cdot\cos(nx)\right]$$

$$\int_0^{\pi}x^2\cos(nx)dx=$$

$f'(x)=\cos(nx)$
$f(t)=\operatorname{sen}(nx)\cdot\frac{1}{n}$
$g(t)=x^2\ ;\ g'(t)=2x$

$$=\frac{x^2}{n}\operatorname{sen}(nx)-\frac{2}{n}\int x\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

$f'(t)=\operatorname{sen}(nx)$
$f(t)=-\frac{1}{n}\cos(nx)$
$g(t)=x\ ;\ g'(t)=1$

$$=\frac{x^2}{n}\operatorname{sen}(nx)-\frac{2}{n}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx)+\frac{1}{n}\int\cos(nx)\right]=$$

$$=\frac{x^2}{n}\operatorname{sen}(nx)+\frac{2x}{n^2}\cos(nx)-\frac{2}{n^3}\operatorname{sen}(nx)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{\pi^2}{n}\operatorname{sen}(n\pi)+\frac{2\pi}{n^2}\cos(n\pi)-\frac{2}{n^3}\operatorname{sen}(n\pi)-$$

$$-\left[0+0-\frac{2}{n^3}\operatorname{sen}(n\cdot 0)\right]=\frac{2\pi}{n^2}\cos(n\pi)$$

$$\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{3}\pi^3$$

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos^2(n\pi)\cos(nx)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

fz. Zeta di Riemann

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

- dim. che $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ e che $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$ (usando Parseval)

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \sum \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

fisso $x = 0$

$$-\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n\ pari}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n\ dispari}^{\infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 2\sum_{n\ pari}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 2\left[\sum_{n\ pari}^{\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right) + \sum_{n\ dispari}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right]$$

$\sum_{n\ dispari}^{\infty}\frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{8}$

$$\frac{\pi^2}{6} = 2\left[\sum_{n\ pari}^{\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\pi^2}{8}\right]$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 2\sum_{n\ pari}^{\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\pi^2}{4}$$

fisso $x = \pi$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \sum \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi) = \sum \frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2} = 1$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \sum \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{3\pi - \pi^2}{12}$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

$$x = \pi$$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

marti.depau@hotmail.it

$$\frac{2}{3}\pi^2 = 4\sum \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{2}{12}\pi^2 = \sum \frac{1}{n^2} \quad \text{(fissando } x = \pi\text{)}$$

id. di Parseval:

$$\|f\|^2 = \sum |\,|^2$$

~~$$\|\tfrac{1}{4}(x^2 - \tfrac{\pi^2}{3})\|^2 = \sum |$$~~

$$\|x^2\|^2 = \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + 4\sum \left|\frac{1}{n^2}\right|^2$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x^2|^2 dx = +\frac{1}{5}x^5\Big|_{-\pi}^{\pi} = +\frac{1}{5}\pi^5 + \frac{1}{5}(+\pi)^5 = +\frac{2}{5}\pi^5$$

$$+\frac{2}{5}\pi^5 = \frac{\pi^4}{9} + 4\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\frac{+\frac{2}{5}\pi^5 - \frac{\pi^4}{9}(\sqrt{2\pi})}{4} = \left(\sum \frac{1}{n^4} \cdot \sqrt{\pi}\right)$$

$$\frac{18\pi^5 - 5\pi^4}{45 \cdot 4} = \sum \frac{1}{n^4}$$

$$\frac{1}{10}\pi^5 - \frac{5}{180}\pi^4 = \sum \frac{1}{n^4}$$

$$\frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \sum \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

$$\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) = (e_i^*, x^2)\, e_i$$

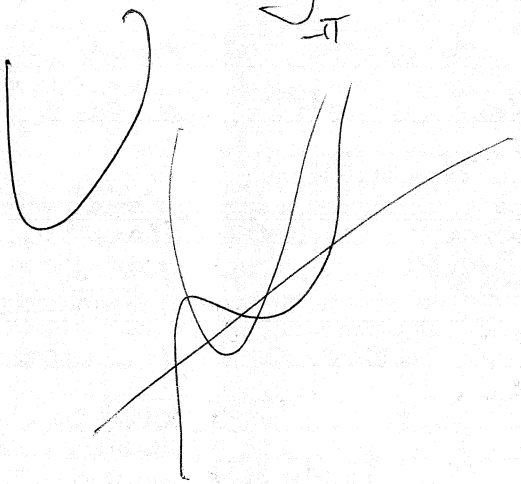
$$= \left(\frac{\pi^2}{3}\right)\sqrt{2\pi} + \left(\sum \dots(\dots)\right)\cdot\sqrt{\pi}$$

$$\{\varphi^n(x)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\frac{n\pi}{L}x, \cancel{\frac{1}{\sqrt{L}}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x}\right\}$$ dispari

$$\frac{\pi^2}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2L}}, x^2\right) = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^2\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{3}\pi^3$$

$$\frac{(-1)^n}{n^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{n\pi}{L}x, x^2\right) = \int_{-\pi}^{\pi}$$



$$\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{\pi^2}{3}\right)=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

$$f=\sum (e_i,f)\,e_i$$

$$\|\ \|^2=\sum\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\sqrt{\pi}\right|^2$$

$$(e_i,f)\neq\underbrace{(e_i,f)e_i}_{e_i}$$

$$\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left|x^2-\frac{\pi^2}{3}\right|^2=\sum\left|\frac{\pi}{n^2}\right|$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|x^2-\frac{\pi^2}{3}\right|^2=\sum\frac{1}{n^4}$$

oppure (?)

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\,dx=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{2}{5}\pi^5=\frac{2}{20}\pi^4=\frac{1}{10}\pi^4=\sum\frac{1}{n^4}$$

$$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{2}{5}\pi^5-\frac{\pi^4}{9}\right]=\frac{2}{10}\pi^4-\frac{1}{36}\pi^3$$

$$\|f\|^2=\left(\sqrt{2\pi}\,\frac{\pi^2}{3}\right)+4\sum\left|\frac{\sqrt{\pi}}{n^2}\right|^2$$

$$\|x^2\|^2=\frac{2\pi^5}{9}+\sum 16\frac{\pi}{n^4}$$

$$\|x^2\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}|x^2|^2\,dx=\frac{2}{5}\pi^5$$

$$\frac{2}{5}\pi^5-\frac{2}{9}\pi^5\quad 16\pi\sum\frac{1}{n^4}\qquad \frac{1}{16}\,\frac{18\pi^5-10\pi^5}{45\pi}=\sum\frac{1}{n^4}$$

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{8}{45}\pi^4=\sum\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

es. 3 28/06/2005

$T = \frac{d^2}{dx^2}$ $\quad \forall f \in L^2([0,2\pi]) : f'(0) = f'(2\pi) = 0 \quad f' = \frac{df}{dx}$

- $T = T^+ ?$ $\quad T^+ = (T^T)^*$

$(f, Tg) \overset{?}{=} (Tf, g) \qquad (f, \frac{d^2 g}{dx^2}) \overset{?}{=} (\frac{d^2 f}{dx^2}, g)$

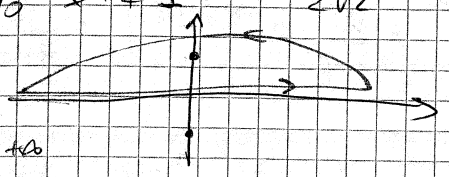
① $\int_0^{2\pi} f(x) \frac{d^2 g}{dx^2}(x) dx \overset{?}{=} \int_0^{2\pi} \frac{d^2 f}{dx^2}(x) g(x) dx$

① $f \frac{dg}{dx}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{df}{dx} \frac{dg}{dx}$ $\quad$ ② $g \frac{df}{dx}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{dg}{dx} \frac{df}{dx}$ $\quad \Longrightarrow \quad T = T^+$

- $Tf = \lambda f \qquad \lambda = ?$

es. 4. 25/07/2005 A

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx \overset{?}{=} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \qquad x^4 = -1 \quad x^2 = \pm i \quad x = \pm\sqrt{i}$$



f è pari $\int_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi i \,\mathrm{Res}(z=\sqrt{i}) \qquad \mathrm{Res}(z=\sqrt{i}) = \frac{d}{dz}\left(\frac{z-\sqrt{i}}{(z-\sqrt{i})^2(z+\sqrt{i})^2}\right)_{z=\sqrt{i}} =$$

$$= \frac{d}{dz}\frac{1}{(z-\sqrt{i})(z+\sqrt{i})^2} = \frac{d}{dz}\frac{1}{(z+\sqrt{i})(z^2+iz+2z\sqrt{i})} = \frac{d}{dz}\frac{1}{z^3+iz^2+2z^2\sqrt{i}-z\sqrt{i}-i\sqrt{i}-2iz} =$$

$$= \frac{d}{dz}\frac{1}{z^3-iz^2+2z^2\sqrt{i}-i\sqrt{i}} = \frac{d}{dz}\frac{1}{(1-2\sqrt{i})z^2-iz-i\sqrt{i}} = -\frac{2z(1-2\sqrt{i})-i}{[(1-2\sqrt{i})z^2-iz-i\sqrt{i}]^2}\Big|_{z=\sqrt{i}}$$

$$= -\frac{2\sqrt{i}(1-2\sqrt{i})-i}{[(1-2\sqrt{i})i-i\sqrt{i}-i\sqrt{i}]^2} = -\frac{2\sqrt{i}-4i-i}{[i-2i\sqrt{i}-2i\sqrt{i}]^2} = -\frac{2\sqrt{i}-5i}{(i-4i\sqrt{i})^2} =$$

$$= +\frac{\sqrt{i}(2-5\sqrt{i})}{(1-4\sqrt{i})^2} = \frac{\sqrt{i}(2-5\sqrt{i})}{1+16i-8\sqrt{i}} = \frac{(2-5\sqrt{i})}{\frac{1}{\sqrt{i}}+16\sqrt{i}-8}$$

$$\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{(z-\sqrt{i})^2(z+\sqrt{i})^2} = \frac{1}{(z^2+i-2\sqrt{i}z)^2(z^2+i+2\sqrt{i}z)}$$

$$= \frac{1}{z^8+iz^6+2\sqrt{i}z^7+iz^6-1+2i\sqrt{i}z-2\sqrt{i}z^3-2i\sqrt{i}z-4iz^2} =$$

$$= \frac{1}{z^8-1-2iz^2}$$

$$\frac{1}{(z+i\sqrt{i})(z-\sqrt{i})(z+\sqrt{i})(z-\sqrt{i})}$$

$$2\pi i\left[\mathrm{Res}(z=\sqrt{i}) + \mathrm{Res}(z=i\sqrt{i})\right]$$

$$\mathrm{Res}(z=\sqrt{i}) = \lim_{z\to\sqrt{i}} \frac{z-\sqrt{i}}{(z-\sqrt{i})(z+\sqrt{i})(z-i\sqrt{i})(z+i\sqrt{i})} = \frac{1}{2\sqrt{i}\,[\sqrt{i}(1-i)][\sqrt{i}(1+i)]} =$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{i}(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2i\sqrt{i}\cdot 2} = -\frac{i}{4\sqrt{i}} = -\frac{1}{4}\sqrt{i}$$

$$\mathrm{Res}(z=i\sqrt{i}) = \lim_{z\to i\sqrt{i}} \frac{(z-i\sqrt{i})}{(z-i\sqrt{i})(z+i\sqrt{i})(z-\sqrt{i})(z+\sqrt{i})} = \frac{1}{2i\sqrt{i}[\sqrt{i}(i-1)][\sqrt{i}(i+1)]} =$$

$$= \frac{1}{-2\sqrt{i}\cdot(-2)} = \frac{1}{4\sqrt{i}}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\left(\frac{1}{4\sqrt{i}} - \frac{1}{4}\sqrt{i}\right) = \pi i\left(\frac{1-i}{4\sqrt{i}}\right) = \frac{\pi}{4}\sqrt{i} + \frac{\pi}{4\sqrt{i}} = \frac{\pi-\pi}{4\sqrt{i}} = 0$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\left(\frac{1}{4\sqrt{i}} - \frac{1}{4}\sqrt{i}\right) = \frac{\pi}{4}\frac{i}{\sqrt{i}} - \frac{\pi}{4}i\sqrt{i} = \frac{\pi}{4}\sqrt{i} - \frac{\pi}{4}i\sqrt{i} = \frac{\pi}{4}\sqrt{i}(1-i)$$

$$(z-i\sqrt{i})(z+i\sqrt{i})(z-\sqrt{i})(z+\sqrt{i}) = (z^2-i^2i)(z^2-i) = (z^2+i)(z^2-i) = z^4+1$$

es. 5 25/07/2005

$f(x) = e^{-|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ f pari $\quad \hat{f}(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-i\rho x} dx =$

$= 2\int_0^{\infty} e^{-x-i\rho x} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x(1+i\rho)} dx = \frac{-2}{1+i\rho} e^{-x(1+i\rho)}\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{1+i\rho}$

$f \cdot e^{-i\rho x}$ integrando non è pari

$\int_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\rho)} dx + \int_0^{\infty} e^{-x(1+i\rho)} dx = \frac{1}{1-i\rho} e^{x(1-i\rho)}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{-1}{1+i\rho} e^{-x(1+i\rho)}\Big|_0^{\infty} =$

$= \frac{1}{1-i\rho} + \frac{1}{1+i\rho} = \frac{1+i\rho+1-i\rho}{1-(i\rho)^2} = \frac{1}{1+\rho^2} = \hat{f}(\rho)$

$\hat{g}(\rho) = \frac{1}{(1+\rho^2)^2}$

Teorema di convoluzione

$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \mathcal{F}[f_1]\,\mathcal{F}[f_2]$

$\mathcal{F}[f_1 f_2] = \mathcal{F}[f_1] * \mathcal{F}[f_2]$

$f*g = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y) g(x-y)$

$\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g} \qquad f*g = \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \hat{f}(q)\hat{g}(\rho-q) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{1}{1+q^2} \frac{1}{[1+(\rho-q)^2]^2} =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{1+q^2} \frac{1}{(1+\rho^2+q^2-2\rho q)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}$

$\widehat{gf} = \hat{g} * \hat{f} = \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \hat{g}(q)\hat{f}(\rho-q) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{1}{(1+q^2)^2} \frac{1}{1+(\rho-q)^2} =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{1}{(1+q^2)^2} \frac{1}{1+\rho^2+q^2-2\rho q} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{(1+2q^2+q^4)(1+\rho^2+q^2-2\rho q)} =$

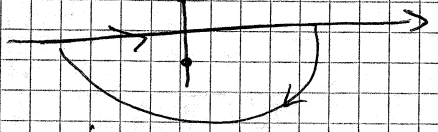
$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{1+\rho^2+q^2-2\rho q+2q^2+2\rho^2 q^2+2q^4-4\rho q^3+q^4+\rho^2 q^4+q^6-2\rho q^5} =$

ALTRO MODO

$\hat{g}\cdot\hat{f} = \frac{1}{(1+\rho^2)^2} \frac{1}{1+\rho^2} = \frac{1}{(1+\rho^2)^3} = h(\rho)$

Teor. inversione $\quad \mathcal{F}^{-1}[h] = \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}[h^*]\right)^*$

$h^* = h \qquad \hat{h} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\rho x} \frac{1}{(1+\rho^2)^3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\rho x}}{[(\rho+i)(\rho-i)]^3}$



$\int = -2\pi i \,\mathrm{Res}(\rho = -i)$

$\mathrm{Res}(\rho=-i) = \frac{1}{6}\frac{d^2}{d\rho^2}\left[\frac{(\rho+i)^3 e^{-i\rho x}}{(\rho+i)^3(\rho-i)^3}\right]_{\rho=-i} = \frac{1}{6}\frac{d^2}{d\rho^2}\left[\frac{e^{-i\rho x}}{(\rho-i)^3}\right]_{\rho=-i}$

$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{e^{-i\rho x}}{(\rho-i)^3}\right] = \frac{-ix e^{-i\rho x}(\rho-i)^3 - 3(\rho-i)^2 e^{-i\rho x}}{(\rho-i)^6} = \frac{-e^{-i\rho x}(ix(\rho-i)^3 + 3(\rho-i))}{(\rho-i)^6} =$

$= \left(\frac{-(\rho-i)e^{-i\rho x}(ix(\rho-i)^2+3)}{(\rho-i)^6}\right)\Big|_{\rho=-i} =$

$$= -\frac{(p-i)^6}{(p-i)^{12}}$$

$$(p-i)e^{-ip}(-ip(p-i)^2+3)$$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{4\pi}\left[\hat{f}(p) * \hat{f}(p)\right]} \qquad g(x) = e^{-|x|}(1+|x|)$$

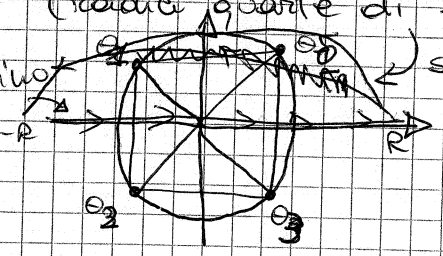
es 4 25/07/2005 A

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx \qquad x^4+1=0 \qquad x^4=-1$$

$\rho = 1$ $\qquad \theta_k = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}$ $\qquad k=0,1,2,3$

$\theta_0 = +\frac{\pi}{4}$ $\quad \theta_1 = +\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$ $\quad \theta_2 = \frac{\pi}{4}+\pi = \frac{5}{4}\pi$ $\quad \theta_3 = \frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\pi = \frac{7}{4}\pi$

(radici quarte di -1)



$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_1 = \cos\frac{3}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) = e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

$$z_2 = \cos\frac{5}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = e^{i\frac{5}{4}\pi}$$

$$z_3 = \cos\frac{7}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{7}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = e^{i\frac{7}{4}\pi}$$

4 poli semplici

$$\int = \int_0^{+\infty} \frac{dz}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

nessun polo sul cammino di integrazione

f è pari $\Rightarrow \int_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}$ usiamo Jordan e residui

$\alpha = 0$ $\quad f \approx \frac{1}{z^4}$ ok

chiudiamo da sopra

R deve essere > 1 . $R \to \infty$

$$\int = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left(\text{Res}(z_0) + \text{Res}(z_1)\right)$$

$$\text{Res}(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)}{(z-z_0)(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)} = \frac{1}{\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}\right)\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)}\right)\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(2+2i)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2i} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}(1+i)\cdot\sqrt{2}i} = \frac{1}{2\sqrt{2}i(1+i)}\cdot\frac{(1-i)}{(1-i)} =$$

$$= \frac{1-i}{4\sqrt{2}i}$$

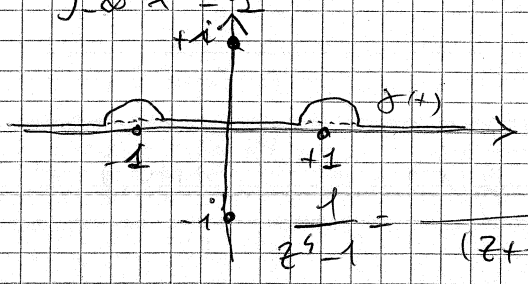
$$\text{Res}(z=z_1) = \frac{1}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)(z_1-z_3)} = \frac{1}{(-\sqrt{2})(\sqrt{2}i)\,(\sqrt{2})(i-1)} \cdot \frac{(1+i)}{(1-i)} =$$

$$= \frac{1+i}{+2\sqrt{2}i\cdot 2}$$

$$\int = \pi\,\frac{(1-i)}{4\sqrt{2}} - \frac{\pi(1+i)}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi 2}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

es. 4 25/07/05 B

$$P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4-1}\,dx \qquad z^4=1 \qquad z^2=\pm 1 \qquad z=\pm 1,\pm i$$



$$P\int = I^{(+)} + i\pi\left(f_1(-1)+f_2(1)\right)$$

$$\frac{1}{z^4-1} = \frac{1}{(z+1)(z-1)(z+i)(z-i)}$$

$$f_1(-1) = \frac{1}{(-1-1)(-1+i)(-1-i)} = \frac{1}{-2(2)} = -\frac{1}{4}$$

$$f_2(1) = \frac{1}{(1+1)(1+i)(1-i)} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Res}(z=i) = \lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z+1)(z-1)(z-i)(z+i)} = \frac{1}{(-1-1)(i+i)} = \frac{1}{-4i} = \frac{i}{4}$$

$$\int = 2\pi i\left(-\frac{1}{4}+\frac{i}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

es. 1 24/07/2006

$\{L_1, L_2, L_3\}$ $[L_1, L_2] = iL_3$ $[L_2, L_3] = iL_1$ $[L_3, L_1] = iL_2$

$L^2 \equiv L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ $L_+ \equiv L_1 + iL_2$ $L_- \equiv L_1 - iL_2$

• 1) dim. ch L^2 è hermitiano e commuta con ogni L_j, $j = 1, 2, 3$

$L^2 = (L^2)^+ \Rightarrow L^2$ hermitiano $(L^2)^+ = [(L^2)^T]^*$

Se L^2 è normale allora è hermitiana. Se commuta con $(L^2)^+$ allora è normale

$[L^2, (L^2)^+] \stackrel{?}{=} 0$ $[L^2, L^{2+}] = [L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2)^+] =$

$iL_3 = L_1L_2 - L_2L_1$ $L_3 = \frac{L_1L_2 - L_2L_1}{i}$

$iL_1 = L_2L_3 - L_3L_2$ $L_1 = \frac{L_2L_3 - L_3L_2}{i}$ $L_2 = \frac{L_3L_1 - L_1L_3}{i}$

$L_3^2 = \frac{L_1^2L_2^2 + L_2^2L_1^2 - 2L_1L_2L_2L_1}{i^2} = \frac{L_1^2L_2^2 + (L_1^2L_2^2)^* - 2L_1L_2(L_1L_2)^*}{i^2}$

$L_2^2 = \frac{L_3^2L_3^2 + (L_2^2L_3^2)^* - 2L_2L_3(L_2L_3)^*}{i^2}$ $L_1^2 = \frac{L_3^2L_1^2 + (L_3^2L_1^2)^* - 2L_3L_1(L_3L_1)^*}{i^2}$

$(A+B)^2 = A^2 + BA + AB + B^2$

$(AB)^T = B^TA^T$ $(AB)^* = B^*A^*$

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

$AB \neq BA$

$A(B+C) = AB + AC$

$(D+E)F = DF + EF$

$A(BC) = (AB)C$

$(A+B)^T = A^T + B^T$ $(A+B)^* = A^* + B^*$

$(A^T)^T = A$ $(A^*)^* = A$

es. 2 24/07/06

$f(x) = 1$ $0 \le x \le \pi$ $\{\varphi^{(n)}(x)\} = \{\text{sen}(nx)\}$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi^{(n)}, f)\,\varphi^{(n)}$

$(\varphi^{(n)}, f) = \int_0^{\pi} \text{sen}(nx)\,dx = -\frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{n}[(-1)^n - 1] = +\frac{2}{(2n+1)}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\text{sen}(nx)$ $g(x) = x^{2n+1}$

$\frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi} \text{sen}(nx)\,dx = \left(\frac{2}{2n+1}\right)\frac{1}{2n+1}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} = 2\left(\frac{1}{(2n+1)}\right)^2[-1 - 1] = -\frac{4}{(2n+1)^2}$

$g(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2}$ $\pi = 4\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$

$(\varphi^{(n)}, f) = \int_0^{\pi} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\,dx = -\frac{1}{2n}\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{2n}[(-1)^n - (-1)^n]$

es. 1 24/07/06

$\{L_1, L_2, L_3\}$ Hermitiani

$[L_1, L_2] = iL_3$

$[L_2, L_3] = iL_1$

$[L_3, L_1] = iL_2$

$L^2 \equiv L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$

$L_+ \equiv L_1 + iL_2$

$L_- \equiv L_1 - iL_2$

dim. che:

① L^2 è hermitiano

$L^2 \stackrel{?}{=} L^{2+}$

$(L_1 L_1)^+ = L_1 L_1$ (L_1 hermitiano)

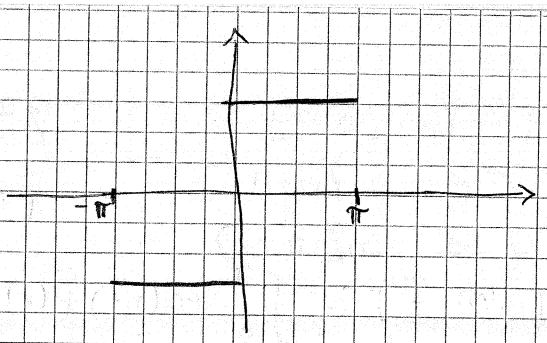
$\Rightarrow L_1^{2+} = L_1^2 \Rightarrow \sum L_i^2$ hermitiano

$\Rightarrow L^2$ hermitiano

② $[L^2, L_i]_{j=1,2,3} \stackrel{?}{=} 0$

es. 2 24/07/06

$f(x) = 1 \quad 0 \le x \le \pi$



prolungo in modo dispari

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \pi \\ -1 & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\beta}_n \operatorname{sen}(nx) \qquad \tilde{\beta}_n = 2\int_0^{\pi} 1 \cdot \operatorname{sen}(nx)\,dx =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{n}\right)\left[\cos(nx)\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{n}\left[(-1)^n - 1\right] = \frac{4}{(2n+1)}$$

base: $\{\operatorname{sen}(nx)\}$ $\quad \tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2n+1} \operatorname{sen}(nx)$

$$\int \tilde{f}(x)\,dx = g(x) = x = \int\left(\sum_0^{\infty} \frac{4\operatorname{sen}(nx)}{2n+1}\right)dx = \sum_0^{\infty} \int \frac{4\operatorname{sen}(nx)}{2n+1}\,dx$$

$$\int \frac{4}{2n+1} \operatorname{sen}(nx)\,dx = -\frac{4}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos(nx) = \cancel{-\frac{4}{2n+1} \cdot \frac{1}{n}\left[(-1)^n - 1\right] =}$$

$$\cancel{= +\frac{4 \cdot 2}{(2n+1)^2} \qquad g(x) = 8\sum \frac{1}{(2n+1)^2}}$$

$g(x) = x \qquad \sum (\varphi_n, g)\,\varphi_n = \int \sum (\varphi_n, f)\,\varphi_n$

$f(x) = x \quad [-\pi, \pi] \quad f$ dispari

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen}(nx)$$

$$\beta_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \operatorname{sen}(nx)}{\pi}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \overset{f}{x}\, \overset{g'}{\operatorname{sen}(nx)}\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n}\int \cos(nx)\,dx\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[-x\cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\Big|_0^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{2}{n\cancel{\pi}}\left[-\cancel{\pi}(-1)^n\right] = +\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(nx)$$

$f(x) = 1 \quad [0, \pi] \quad \to [-\pi, \pi] \quad \tilde{f}(x) = 0 \quad [-\pi, 0]$

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_1^{\infty} \alpha_n \cos(nx) + \sum_0^{\infty} \beta_n \operatorname{sen}(nx)$$

$$\alpha_0 = \int_0^{\pi} dx$$

NORMALIZZARE BASE

$f(x) = 1 \quad \text{in } [0, \pi]$ $\qquad \{\varphi^{(n)}\} = \{-\operatorname{sen}(nx)\}$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } [0, \pi] \\ -1 & \text{in } [-\pi, 0) \end{cases} \qquad \tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi^{(n)}$$

$$a_n = (\varphi^{(n)}, \tilde{f}) = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\, \tilde{f}(x) = \int_{-\pi}^{0} -\operatorname{sen}(nx) + \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) =$$

$$= \frac{1}{n} \cos(nx)\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n} \cos(nx)\Big|_{0}^{\pi} = \frac{1}{n}\left[1 - (-1)^n\right] - \frac{1}{n}\left[(-1)^n - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[1 - (-1)^n - (-1)^n + 1\right] = \frac{2}{n}\left[1 - (-1)^n\right]$$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\left[1 - (-1)^n\right] \operatorname{sen}(nx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{2k+1} \operatorname{sen}\left[(2k+1)x\right]$$

$$\int_{-y}^{y} \tilde{f}(x)\,dx = \boxed{y < \pi} \int_{-y}^{0} -dx + \int_{0}^{y} dx = -x\Big|_{-y}^{0} + x\Big|_{0}^{y} = 2y$$

$$g : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow g = \frac{1}{2}\int \tilde{f} = y = g(y)$$

$$\frac{1}{2}\int_{-y}^{y} \frac{4}{2k+1} \operatorname{sen}\left[(2k+1)x\right] dx = \int_{0}^{y} \frac{4}{2k+1} \operatorname{sen}\left[(2k+1)x\right] dx =$$

$$= \frac{4}{2k+1} \cdot \left(-\frac{1}{2k+1} \cos\left[(2k+1)x\right]\Big|_{0}^{y} \right) =$$

$$= \sum -\frac{4}{(2k+1)^2}\left[\cos\left[(2k+1)y\right] - 1\right] = y$$

$y \equiv \pi \qquad \pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{(2k+1)^2}\left[\cos\left[(2k+1)\pi\right] - 1\right] = 8 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

marca en π.

es. 4 29/07/2006

$\frac{d^N f(z)}{dz^N}$

$$\frac{d^{(N)} f(z)}{dz^N} = \frac{N!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z')}{(z'-z)^{N+1}} dz$$

z = centro di Γ

- $\oint_\Gamma \frac{z^2}{z-2} dz \overset{?}{=} 0$

Teor cauchy $\Rightarrow 0 \quad (z_1 = 2 \notin \Gamma)$

- $\oint \frac{e^{iz}}{z^3} dz \overset{?}{=} -i\pi \qquad z_1 = 0 \qquad \oint = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2}(e^{iz})\Big|_{z=0} = \pi i (-e^{iz})\Big|_{z=0} = -i\pi$

- $\oint \frac{z^2}{2z-1} dz \overset{?}{=} \frac{i\pi}{4} \qquad z_1 = \frac{1}{2} \qquad \oint = 2\pi i f(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi i}{4}$ $\boxed{f = \frac{z^2}{2}}$

- $\oint \frac{(z-2)^{-1}}{(2z-1)^2} dz \overset{?}{=} -\frac{2}{9}\pi i \qquad \oint = \oint \frac{1}{(z-2)(2z-1)^2} dz = \oint \frac{1/4\, dz}{(z-2)(z-\frac{1}{2})^2}$

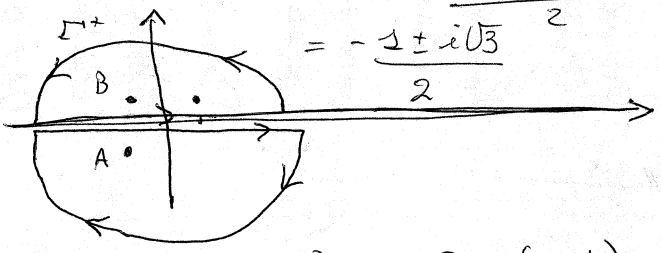
$f = \frac{1}{4(z-2)} \qquad z_1 = \frac{1}{2} \qquad \oint = 2\pi i \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{4(z-2)}\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = 2\pi i \frac{1}{4} \frac{4(-1)}{4(z-2)^2}\Big|_{z=\frac{1}{2}} =$

$= 2\pi i \cdot \frac{4}{9} = \frac{2\pi i}{4} \cdot \frac{4}{9} = -\frac{2}{9}\pi i$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^2+x+1} dx \overset{?}{=} -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}} \operatorname{sen} 1$

$x^2+x+1 = 0 \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$A = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \qquad B = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$



$\operatorname{sen}(2z) = \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i}$

$$\int_{\Gamma^+} \frac{e^{2iz}}{2i(z-A)(z-B)} dz + \int_{\Gamma^-} \frac{e^{-2iz}}{2i(z-A)(z+B)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_1(z=B) + 2\pi i \operatorname{Res}_2(z=A)$$

$B - A = i\sqrt{3}$

$A - B = -i\sqrt{3}$

$\operatorname{Res}_1(z=B) = \lim_{z\to B} \frac{(z-B)e^{2iz}}{2i(z-A)(z-B)} = \frac{e^{2iB}}{2i(B-A)}$

$\operatorname{Res}_2(z=A) = \lim_{z\to A} \frac{(z-A)e^{-2iz}}{2i(z-A)(z-B)} = \frac{e^{-2iA}}{2i(A-B)}$

$= \frac{\pi e^{-i-\sqrt{3}}}{z+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}} + \frac{\pi e^{i-\sqrt{3}}}{z+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}} \qquad \int = \frac{\pi e^{-i-\sqrt{3}}}{i\sqrt{3}} - \frac{\pi e^{i-\sqrt{3}}}{i\sqrt{3}} = \frac{\pi}{i\sqrt{3}}\left(e^{-i}e^{-\sqrt{3}} - e^{i}e^{-\sqrt{3}}\right)$

$= -\frac{\pi}{i\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}} (e^{i} - e^{-i}) = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} 1\, e^{-\sqrt{3}}$

Elena Graverini - ELENA GRAVERINI - graverini6@student.unisi.it
(studentessa F.T.A. - 2° anno)

Francesco Pacciani - FRANCESCO PACCIANI - pacciani5@student.unisi.it
(studente F.T.A. - 2° ANNO)

Lorenzo Gallorini - LORENZO GALLORINI - gallorini20@student.unisi.it
(STUDENTE F.T.A - 2° ANNO)

Daniele Minci - DANIELE MINCI - minci@student.unisi.it (STUDENTE FTA - 2° ANNO)

Elena Fabbiani - ELENA FABBIANI - fabbiani4@student.unisi.it
(studente FTA - 2° anno)

DAVIDE AGOSTINO - Agostino Davide - davide.agostino@email.it
(studente FTA - 2° anno)

LUCA VALORI (DOTTORANDO) Luca Valori
valoril@unisi.it
TIZIANO SQUARTINI (DOTTORANDO) Tiz Sqr
squartini2@unisi.it

SIMONE BONECHI (STUDENTE FS) SIMONEBONECHI@HOTMAIL.IT
CORELLI PEDRO FERNANDO (F.T.A. II α) SHADOWITA@HOTMAIL.IT

SALVATORE ZAZA - ZAZA2@STUDENT.UNISI.IT - (FTA 2° anno)

STEINN YMIR AGUSTSSON - STEINNY@GMAIL.COM - (FTA 2° Anno

Maria Maccari - MARIA MACCARI - maccari1@student.unisi.it
(studentessa F T A - 2° anno)

es. 5 24/07/2006

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < +\infty \quad t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2} & \text{coeff. di diffusione} = 1 \end{cases}$$

usare Green

Avevamo visto che $u(x,t)$ si poteva scrivere come la convoluzione con una Gaussiana.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(p,t)\, e^{-ipx}\, dp \quad , \; t \text{ parametro}$$

$$\frac{d\hat{u}}{dp}(p,t) = \dots \quad \begin{matrix} \text{f. di Green dell'eq.} \\ \text{del calore (è una} \\ \text{Gaussiana)} \end{matrix}$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y,0)\, \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, dy \quad \left[x \text{ e } t \text{ sono parametri} \right]$$

Risultato: $\boxed{\dfrac{e^{-\frac{x^2}{1+4t}}}{\sqrt{1+4t}}}$

Hermiticità $\iff A = A^\dagger \implies (u, Av) = (Au, v)$ $\quad A^\dagger = (A^T)^*$

- $u = v$: $(v, Av) = (v, Av)^* \implies (v, Av) \in \mathbb{R}$
- antihermiticità: $A = -A^\dagger$

Unitarietà $\iff U^\dagger U = \mathbb{1} \implies (Uu, Uv) = (U^\dagger U u, v) = (u, v)$

- $U^\dagger = U^{-1} \implies U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}$
- trasformazione di operatori: $T \xrightarrow{U} \tilde{T} = UTU^\dagger$
- la trasformazione unitaria preserva ortonormalità ed hermiticità.

Matrici di Pauli:

- $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
- $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Operazioni con matrici

- $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
- $\det(AB) = \det(BA)$
- $\det(A) = \det(UAU^\dagger)$
- $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(UAU^\dagger)$

Problema autovalori - autovettori

a autovalore, v autovettore $\quad Av = av$

gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa: $A(\alpha v) = \alpha Av = \alpha a v = a(\alpha v)$, $\alpha \in \mathbb{C}$

- Equazione secolare: $\det[A - a\mathbb{1}] = 0$
- Trasformazione unitaria:

$A \longrightarrow UAU^\dagger = \tilde{A} \quad Av = av \longrightarrow \tilde{A}v = av$

Se A è hermitiana, gli autovalori sono reali, e gli autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali.

Normalità $\iff N^\dagger N = NN^\dagger$

- Matrici hermitiane e matrici unitarie sono anche normali.

Commutatore di A con B: $[A, B] = AB - BA$

Anticommutatore di A con B: $[A, B]_+ = AB + BA$

A e B commutano $\iff [A, B] = 0$

N commuta con $N^\dagger$; A commuta con A^n $\forall n$.

- $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$; $[AB, C]_+ = A[B, C]_+ - [A, C]_+ B$

es 2 26/09/2006

$f:[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x)=\begin{cases} 4x(1+x) & -1\le x\le 0 \\ 4x(1-x) & 0\le x\le 1 \end{cases}$ $\quad \{\varphi^{(m)}\}=\{\operatorname{sen}(m\pi x)\}$

$$f(x)=\sum (\varphi^{(m)},f)\,\varphi^{(m)}$$

$$(\varphi^{(m)},f)=\int_{-1}^{1}\operatorname{sen}(m\pi x)\,4x(1\pm x)\,dx=\int_{-1}^{0}\operatorname{sen}(m\pi x)\,4x(1+x)\,dx+\int_{0}^{1}\operatorname{sen}(m\pi x)\,4x(1-x)\,dx=$$

$$=4\int_{-1}^{0}\operatorname{sen}(m\pi x)\,x\,dx+4\int_{-1}^{0}\operatorname{sen}(m\pi x)\,x^2\,dx+4\int_{0}^{1}\operatorname{sen}(m\pi x)\,x\,dx-4\int_{0}^{1}\operatorname{sen}(m\pi x)\,x^2\,dx=$$

- $\int \operatorname{sen}(m\pi x)\,x\,dx=-\frac{x\cos(m\pi x)}{m\pi}+\int\frac{\cos(m\pi x)}{m\pi}\,dx=\frac{1}{m^2\pi^2}\operatorname{sen}(m\pi x)-\frac{x\cos(m\pi x)}{m\pi}$

- $\int \operatorname{sen}(m\pi x)\,x^2\,dx=-\frac{x^2}{m\pi}\cos(m\pi x)-\frac{2}{m\pi}\int x\cos(m\pi x)\,dx=-\frac{x^2}{m\pi}\cos(m\pi x)-\frac{2}{m\pi}\left[\frac{1}{m\pi}x\operatorname{sen}(m\pi x)-\right.$

$$\left.-\frac{1}{m\pi}\int\operatorname{sen}(m\pi x)\,dx\right]=-\frac{x^2}{m\pi}\cos(m\pi x)+\frac{2x}{m^2\pi^2}\operatorname{sen}(m\pi x)+\frac{2}{m^3\pi^3}\cos(m\pi x)$$

$$=\frac{4}{m\pi}\cos(m\pi)+4\left[-\frac{2}{m^3\pi^3}-\left(-\frac{1}{m\pi}\cos(m\pi)-\frac{2}{m^3\pi^3}\cos(m\pi)\right)\right]+$$

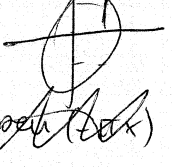
$$+4\left[-\frac{1}{m\pi}\cos(m\pi)\right]-4\left[-\frac{1}{m\pi}\cos(m\pi)-\frac{2}{(m\pi)^3}\cos(m\pi)-\left(-\frac{2}{m^3\pi^3}\right)\right]=$$

$$=\frac{(-1)^m\cdot 4}{m\pi}+\frac{8}{m^3\pi^3}+\frac{(-1)^m\cdot 4}{m\pi}+\frac{8}{m^3\pi^3}(-1)^m-\frac{(-1)^m\cdot 4}{m\pi}+\frac{(-1)^m\cdot 4}{m\pi}+\frac{8}{m^3\pi^3}(-1)^m+\frac{8}{m^3\pi^3}=$$

$$=+\frac{16}{m^3\pi^3}+\frac{16}{m^3\pi^3}(-1)^m+\cdots=-\frac{16}{m^3\pi^3}\left[(-1)^m-1\right]+\cdots$$

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\operatorname{sen}(m\pi x)\left[\frac{16}{m^3\pi^3}\left[(-1)^m+1\right]+\cdots\right]$$

- $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 4x\,dx-\int_0^1 4x^2\,dx=\left[2x^2-\frac{4}{3}x^3\right]_0^1=2-\frac{4}{3}=\frac{6}{3}-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}=0,666$



- $\boxed{m=1}$ $f(x)=\operatorname{sen}(\pi x)\left[\frac{16}{\pi^3}\cdot(+2)\right]+\cdots=\operatorname{sen}(\pi x)\left[-\frac{32}{\pi^3}\right]=\left(\frac{32}{\pi^3}+\frac{8}{\pi^3}\right)\operatorname{sen}(\pi x)$

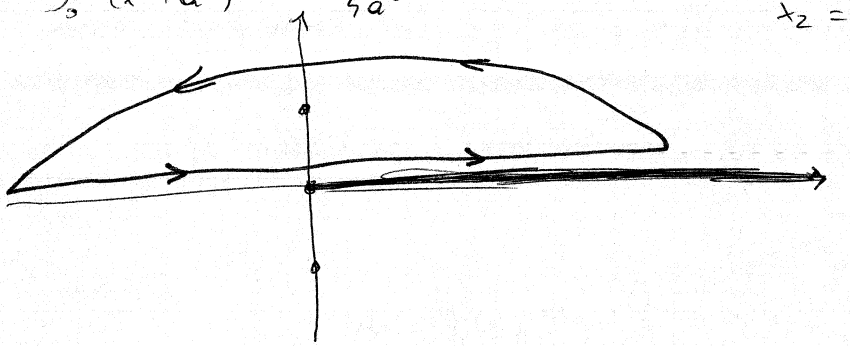
$$+\frac{32}{\pi^3}\int_0^1\operatorname{sen}(\pi x)\,dx=-\frac{32}{\pi^4}\cos(\pi x)\Big|_0^1=\frac{32}{\pi^4}\cdot(+2)=+0,657$$

- $\int_0^1\operatorname{sen}(\pi x)\,dx=-\frac{1}{\pi}\left[\cos(\pi x)\right]_0^1=+\frac{2}{\pi}=0,637$

es. 5 26/09/2006 A

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \stackrel{?}{=} \frac{\pi}{4a^3} \qquad a>0$$

$x_1 = -ia$, $x_2 = +ia$ } poli di 2° ordine



f è pari

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}$$

$f \sim \frac{1}{x^4}$ $\Rightarrow$ Lemma Jordan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi i \, \mathrm{Res}(z=ia) \qquad f = \frac{dx}{(x-ia)^2(x+ia)^2}$$

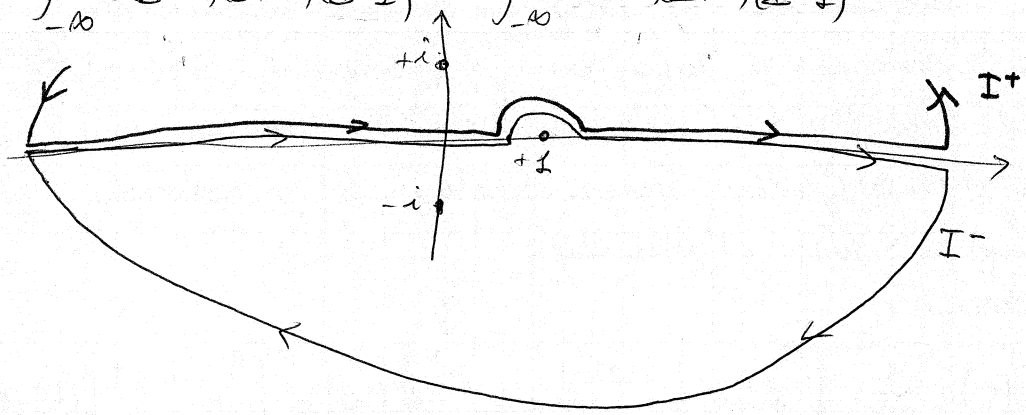
$$\mathrm{Res}(z=ia) = \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-ia)^2}{(z-ia)^2(z+ia)^2}\right]_{z=ia} = -\frac{2}{(z+ia)^3}\Big|_{z=ia} = -\frac{1}{4(ia)^3} = \frac{i}{4a^3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = -2\pi i \, \frac{i}{a^3} = \frac{2\pi}{4a^3} \qquad \int_0^{\infty} = \frac{\pi}{4a^3}$$

es. 5 26/09/2006 B

$$P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x-1)}\,dx \stackrel{?}{=} -\frac{\pi}{2}(e^{-1}+\operatorname{sen} 1) \qquad \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}\,dz}{2(z-i)(z+i)(z-1)} + P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iz}\,dz}{2(z-i)(z+i)(z-1)}$$



$$= I^{(+)}(x_0) + i\pi f_1(1) + I^{(+)}(x_0) + i\pi f_2(1)$$

$$= 2\pi i\, \mathrm{Res}_1(z=i) + i\pi f_1(1) + 2\pi i[\mathrm{Res}_2(z=1)+\mathrm{Res}_2(z=-i)] + i\pi f_2(1)$$

$$\mathrm{Res}_1(z=i) = \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}(z-1)}{2(z+i)(z-1)(z+1)} = \frac{e^{-1}}{2(2i)(i-1)} = \frac{e^{-1}}{-4+4i} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{-1}}{i+1}$$

$$f_1(1) = \frac{e^{i}}{2(1-i)(1+i)} = \frac{e^{i}}{2(1+1)} = \frac{e^{i}}{4}$$

$$\mathrm{Res}_2(z=1) = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)e^{-iz}}{(z-1)(z-i)2(z+i)} = \frac{e^{-i}}{2(1-i)(1+i)} = \frac{e^{-i}}{2(1+1)} = \frac{e^{-i}}{4}$$

$$\mathrm{Res}_2(z=-i) = \lim_{z\to -i} \frac{(z+i)e^{-iz}}{2(z+i)(z-i)(z-1)} = \frac{e^{-1}}{2(-2i)(-i-1)} = \frac{e^{-1}}{(+4i)(+i+1)} = \frac{e^{-1}}{-4+4i} =$$

$$f_2(1) = \frac{e^{-i}}{2(1-i)(1+i)} = \frac{e^{-i}}{2(2)} = \frac{e^{-i}}{4} \qquad -4i(-i-1) = -4+4i \qquad = +\frac{1}{4}\frac{e^{-1}}{i-1}$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{e^{-1}}{1+i} + i\pi\frac{e^{i}}{4} - 2\pi i\left[\frac{e^{-i}}{4} + \frac{1}{4}\frac{e^{-1}}{i-1}\right] - i\pi\frac{e^{-i}}{4} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} i \frac{e^{-1}}{(1+i)} + \frac{i\pi}{4}e^{i} - i\frac{\pi}{2}e^{-i} - \frac{\pi}{2} i\frac{e^{-1}}{(i-1)} + \frac{i\pi}{4}e^{-i} =$$

$$= -\frac{i\pi}{2}\left(\frac{e^{i}-e^{-i}}{i\,2}\right) + \frac{\pi i}{2}\left[\frac{e^{-1}}{(1+i)} - e^{-i} - \frac{e^{-1}}{(i-1)}\right] =$$

$$= \ldots + i\frac{\pi}{2}\left[\frac{(i-1)e^{-1} + 2e^{-i} - (i+1)e^{-1}}{(1+i)(-1+i) = -2}\right] = \ldots + \frac{i\pi}{4}\left(-e^{-1} - e^{-1} + 2e^{-i} - ie^{-1} + ie^{-1}\right)$$

$$= -\frac{i\pi}{2}\operatorname{sen} 1 - i\frac{\pi}{2}e^{-i} = -\frac{i\pi}{2}\left[\operatorname{sen} 1 - e^{-i}\right] \qquad -\frac{i\pi}{2}e^{-i} + \frac{i\pi}{4}e^{-1}$$

$$-\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} 1$$

$$-\frac{\pi}{2}\,i\,\frac{e^{-1}}{1+i} + i\frac{\pi}{4}e^{i} - i\frac{\pi}{2}e^{-i} - i\frac{\pi}{2}\frac{e^{-1}}{i-1} - i\frac{\pi}{4}e^{-i} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{-1}}{1+i} + \frac{1}{i}\frac{\pi}{4}e^{i} + \frac{1}{i}\frac{\pi}{2}e^{-i} + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{i}\frac{e^{-1}}{i-1} + \frac{1}{i}\frac{\pi}{4}e^{-i}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{i}}{2i} - \frac{e^{-i}}{2i}\right] + \dots =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left[\operatorname{sen} 1\right] + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{-1}}{1+i} + \frac{1}{i}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot e^{-i} + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{-1}}{i-1}$$

$$i\pi f_0(1) = \frac{\cos 1}{1} = \cos 1$$

$$2\pi i\,\mathrm{Res}_1(z=i) + i\pi f_0(1) - 2\pi i\left[\mathrm{Res}_2(z=1) + \mathrm{Res}_2(z=-i)\right] =$$

$$= i\pi\frac{e^{i}}{2} + i\pi\frac{e^{-i}}{2} - \frac{2\pi i}{4}\frac{e^{-1}}{i+1} - 2\pi i\left[\frac{e^{-i}}{4} + \frac{1}{4}\frac{e^{-1}}{i-1}\right] =$$

$$= \frac{i\pi}{2}e^{i} + \frac{i\pi}{2}e^{-i} - \frac{2\pi i}{4}\frac{e^{-1}}{i+1} - \frac{i\pi}{2}e^{-i} - \frac{i\pi}{2}\frac{e^{-1}}{i-1} =$$

$$= \frac{-4i\pi e^{i} - 2(i-1)\pi i e^{-1} - 2(i+1)\pi i e^{-1}}{\left[4(i+1)(i-1)\right] = -8} =$$

$$= \frac{-4i\pi e^{i} + 2\pi e^{-1} + 2\pi i e^{-1} + 2\pi e^{-1} - 2i\pi e^{-1}}{-8} =$$

$$= \frac{1}{2}i\pi e^{i} - \frac{1}{2}\pi e^{-1} = \frac{\pi}{2}\left(ie^{i} - \frac{1}{e}\right)$$

$$I_1^{(+)}(x_0) + i\pi f_1(x_0) - I_2^{(+)}(x_0) + i\pi f_2(x_0) = 2\pi i\,\mathrm{Res}_1(z=i) + i\pi f_1(x_0) - 2\pi i\left[\mathrm{Res}_2(z=1) + \mathrm{Res}_2(z=-i)\right] + i\pi f_2(1)$$

$$= -\frac{2\pi i}{4}\frac{e^{-1}}{i+1} + \frac{i\pi}{4}e^{i} - \frac{2\pi i}{4}e^{-i} - \frac{2\pi i}{4i}\frac{e^{-1}}{i-1} + \frac{i\pi}{4}e^{-i} =$$

$$= \frac{-2\pi i(i-1)e^{-1} - 2i\pi e^{i} + 4i\pi e^{-i} - 2\pi i(i+1)e^{-1} - 2i\pi e^{-i}}{4(i+1)(i-1)} =$$

$$= -\frac{1}{8}\left[2\pi e^{-1} + 2\pi i e^{-1} - 2\pi i e^{i} + 4\pi i e^{-i} + 2\pi e^{-1} - 2\pi i e^{-1} - 2\pi i e^{-i}\right] =$$

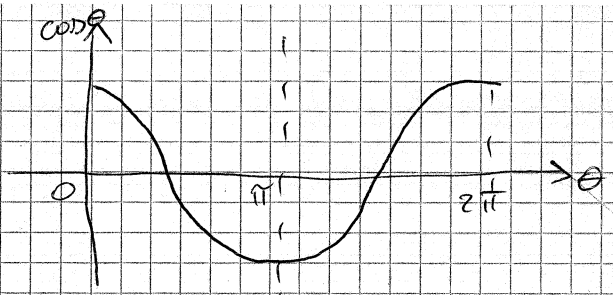
$$= -\frac{1}{8}\left[4\pi e^{-1} - 2\pi i e^{i} + 2i\pi e^{-i}\right] = -\frac{1}{8}\left[4\pi e^{-1} + \frac{2\pi}{i}\left(e^{i} - e^{-i}\right)\right] =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left[e^{-1} + \operatorname{sen} 1\right]$$

OK

es. 4 20/02/2007 (B)

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{3+\cos\theta}\,d\theta \stackrel{?}{=} \pi - \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$$



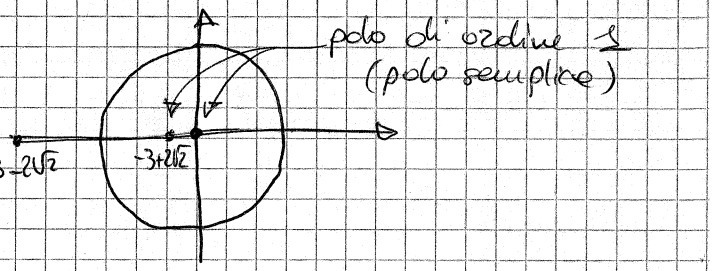
$\cos\theta$ è PARI rispetto a π!

$$\int_0^{\pi} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Rightarrow \text{posso usare } e^{i\theta}$$

$$\left[\theta \to \varphi = \pi - \theta\right]$$

$$\int_0^{\pi} \cdots = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma_1} \frac{z+\frac{1}{z}}{6+z+\frac{1}{z}}\,\frac{dz}{iz} =$$

$$\frac{1}{2i}\oint_{\Gamma_1} \frac{(z^2+1)}{z(6z+z^2+1)}\,dz \qquad z^2+6z+1=0 \Rightarrow z = -3\pm 2\sqrt{2}$$



$$= \frac{1}{2i}\oint_{\Gamma_1} \frac{(z^2+1)\,dz}{z(z+3-2\sqrt{2})(z+3+2\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2\pi i}{2i}\sum_{k=1}^{2} \text{Res}_k$$

$$\text{Res}(z=0) = \lim_{z\to 0} f(z) = \lim \frac{1}{(z+3-2\sqrt{2})(z+3+2\sqrt{2})} = \frac{1}{9-8} = 1$$

$$\text{Res}\left(z=-3+2\sqrt{2}\right) = \lim_{z\to -3+2\sqrt{2}} \frac{(z+3-2\sqrt{2})(z^2+1)}{z(z+3-2\sqrt{2})(z+3+2\sqrt{2})} = \frac{(-3+2\sqrt{2})^2+1}{(-3+2\sqrt{2})(4\sqrt{2})}$$

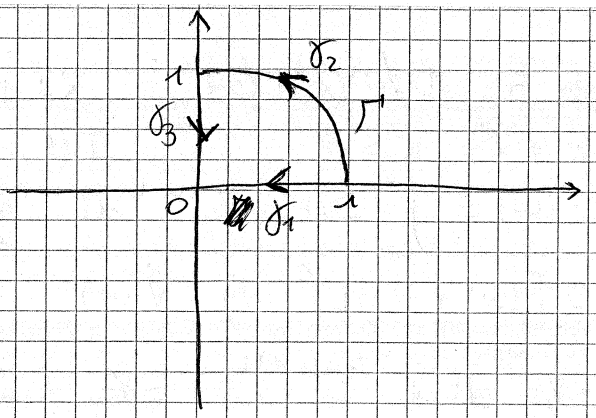
$$= \frac{9+8-12\sqrt{2}+1}{-12\sqrt{2}+16} = \frac{18-12\sqrt{2}}{16-12\sqrt{2}} = \frac{9-6\sqrt{2}}{8-6\sqrt{2}}\cdot\frac{8+6\sqrt{2}}{8+6\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{72+54\sqrt{2}-48\sqrt{2}-72}{64-72} = -\frac{6\sqrt{2}}{8} = -\frac{3}{4}\sqrt{2}$$

$$\int = \pi - \frac{3}{4}\sqrt{2}\,\pi \qquad \text{OK}$$

es. 1 11/09/07

$$I = \oint_\Gamma (\bar{z}+1)^2 dz$$



$$f(x,y) = (\bar{z}+1)^2 = (x - iy + 1)^2 =$$
$$= \underbrace{(x+1)^2 - y^2}_{u(x,y)} \underbrace{- 2iy(x+1)}_{v(x,y)}$$

provo Cauchy-Riemann $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2(x+1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2(x+1)$

$\Rightarrow$ non è analitica

- $\int_{\gamma_1} (u + iv)\,dz = \int_{\gamma_1} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{\gamma_1} (u\,dy + v\,dx) =$

$dy = 0$ su γ_1!

$$= \int_0^1 \underbrace{(u\,dx - v\,dy)}_{y=0} + i\int_0^1 \underbrace{(u\,dy + v\,dx)}_{y=0} = \int_0^1 (x+1)^2\,dx + i\cdot 0 =$$

$$= \int_0^1 x^2 + \int_0^1 2x + \int dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{2} 1 + 1 = \frac{7}{3}$$

- $\int_{\gamma_2} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{\gamma_2} (u\,dy + v\,dx) =$ $\qquad z = e^{i\theta} \quad \bar{z} = e^{-i\theta}$

$\int_0^{\pi/2} \quad dz = i\,d\theta\, e^{i\theta}$

$$= \int_{\gamma_2} f(x,y)\,dz = i\int_0^{\pi/2} (e^{-i\theta} + 1)^2\,d\theta\, e^{i\theta} =$$

$$= i\int_0^{\pi/2} (e^{-2i\theta} + 2e^{-i\theta} + 1)\,e^{i\theta}\,d\theta =$$

$$= i\int_0^{\pi/2} (e^{-i\theta} + e^{i\theta} + 2)\,d\theta = i\left[\frac{1}{-i} e^{-i\theta} - i e^{i\theta} + 2\theta\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= -e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{2}} + \pi i + 1 - 1 = 2i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \pi i =$$

$$= 2i + \pi i$$

- $\int_{\gamma_3} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{\gamma_3} (u\,dy + v\,dx) \qquad dx = 0 \qquad x = 0$

$$= -\int_{\gamma_3} v\,dy + i\int_{\gamma_3} u\,dy = +\int_1^0 2y\,dy + i\int_1^0 (1 - y^2)\,dy = y^2\Big|_1^0 + i\left(y - \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_1^0 =$$

$$= -1 + i\left(-1 + \frac{1}{3}\right) = -1 - \frac{2}{3}i$$

$z = x + iy \qquad dz = dx + i\,dy$

$\gamma_3 \Rightarrow dx = 0$

$\gamma_1 \Rightarrow dy = 0$

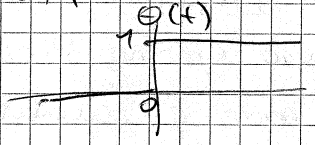
es 5 11/09/2007 $R\dot{I} + L\ddot{I} = V(t)$ $V(t) = V_0 e^{-kt}\Theta(t)$

$k \neq \frac{R}{L}$, $k > 0$ $\quad I(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{I}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

$\hat{I}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) e^{-i\omega t} dt$ moltiplico a dx e a sin. per $e^{-i\omega t}$ ed integro

$R\hat{I}(\omega) + i\omega L\hat{I}(\omega) = \hat{V}(\omega)$ $\quad \hat{V}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} dt\, V_0 e^{-kt}\Theta(t) =$

$= V_0 \int_0^{+\infty} dt\, e^{-(i\omega+k)t} = \frac{-V_0}{i\omega+k}\left[e^{-(i\omega+k)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{V_0}{i\omega+k} = \hat{V}(\omega)$

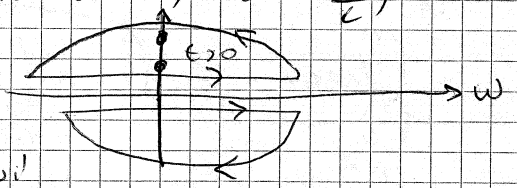


$\hat{I}(\omega) = \frac{\hat{V}(\omega)}{R + i\omega L} = \frac{V_0}{(R+i\omega L)(i\omega+k)}$

Applico il teor. di riversione -

$I(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V_0 e^{i\omega t} d\omega}{(R+i\omega L)(i\omega+k)} = \frac{V_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{i(\omega - ik)iL(\omega - \frac{iR}{L})} =$

$= -\frac{V_0}{2\pi L}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{(\omega - ik)(\omega - \frac{iR}{L})}$ applico Jordan



per $t<0$ chiudo da sotto $\Rightarrow I(t<0) = 0$

per $t>0$ chiudo da sopra $\Rightarrow$ 2 residui!

$I(t>0) = -\frac{V_0}{2\pi L} 2\pi i\left[\mathrm{Res}(\omega = ik) + \mathrm{Res}(\omega = \frac{iR}{L})\right]$

$\mathrm{Res}(\omega = \frac{iR}{L}) = \lim_{\omega \to \frac{iR}{L}} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - ik} = \frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{i(\frac{R}{L} - k)}$

$\mathrm{Res}(\omega = ik) = \lim_{\omega \to ik} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \frac{iR}{L}} = \frac{e^{-kt}}{i(k - \frac{R}{L})}$

$I(t>0) = -\frac{V_0}{L}\left[\frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{\frac{R}{L} - k} + \frac{e^{-kt}}{k - \frac{R}{L}}\right] = -\frac{V_0}{L}\left[\frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{\frac{R}{L} - k} - \frac{e^{-kt}}{\frac{R}{L} - k}\right] =$

$= -\frac{V_0}{L(\frac{R}{L} - k)}\left[e^{-\frac{R}{L}t} - e^{-kt}\right] = \frac{V_0}{kL - R}\left[e^{-\frac{R}{L}t} - e^{-kt}\right] = V_0\left(\frac{e^{-kt} - e^{-\frac{R}{L}t}}{R - kL}\right)$

$I(t) = \frac{V_0}{R - kL}\Theta(t)\left[e^{-kt} - e^{-\frac{R}{L}t}\right]$ $\quad R\hat{G} + Li\omega\hat{G} = 1$ $\quad \hat{G}(\omega) = \frac{1}{R + i\omega L}$

$G(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{R + i\omega L} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\tau} d\omega}{iL(\omega - \frac{iR}{L})}$ $\quad \tau < 0 \Rightarrow 0$ $\quad \tau > 0 \Rightarrow 1$ residuo $(\frac{iR}{L})$

$G(\tau) = \frac{\Theta(\tau)}{L}\mathrm{Res}(\omega = \frac{iR}{L}) = \frac{\Theta(\tau)}{L} e^{-\frac{R}{L}\tau}$ $\quad$ applico la convoluzione: $I(t) = V * G$

$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t') G(t - t') dt' = \frac{V_0}{L}\int_0^{+\infty} e^{-kt'}\Theta(t') e^{-\frac{R}{L}(t - t')}\Theta(t - t') dt' =$

$= \frac{V_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t}\int_0^{+\infty} e^{(\frac{R}{L} - k)t'}\Theta(t - t') dt'$ $\quad t - t' > 0$ $\quad t' < t \Rightarrow \int_0^t$

$I(t) = \frac{V_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t}\int_0^t e^{(\frac{R}{L} - k)t'} dt' = \frac{V_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \frac{1}{\frac{R}{L} - k}\left[e^{(\frac{R}{L} - k)t'}\right]_0^t =$

$= \frac{V_0 e^{-\frac{R}{L}t}}{R - kL}\left(e^{(\frac{R}{L} - k)t} - 1\right) = \frac{V_0}{R - kL}\left(e^{-kt} - e^{-\frac{R}{L}t}\right)\Theta(t)$

es. 1 18/12/2007

$u(x,y) = xy$ $\frac{\partial u}{\partial x} = y$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial u}{\partial y} = x$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $\Delta u = 0$

C.R.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

$v(y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int y\,dy = \frac{1}{2}y^2 + A(x)$

$A'(x) = -x$ $A(x) = -\frac{1}{2}x^2 + c$

$f(x,y) = xy + \frac{i}{2}\left(y^2 - x^2 + c\right)$

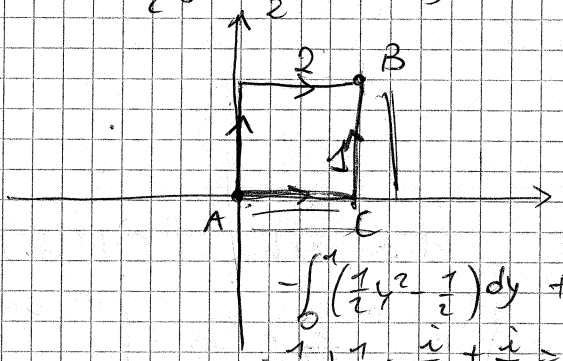
$f(0,0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$f(z) = -\frac{1}{2} i z^2$

$v = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2$ $\frac{\partial v}{\partial y} = y$ $\frac{\partial v}{\partial x} = -x$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = -1$ $\Delta v = 0$

$z = x + iy$ $iz^2 = ix^2 - y^2 + 2ixy$

$-\frac{1}{2} iz^2 = \frac{1}{2}iy^2 - \frac{1}{2}ix^2 + xy = xy + \frac{i}{2}(y^2 - x^2)$



$u = xy$

$v = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$

$-\int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}\right)dy + i\int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2\right)dx + i\int_0^1 y\,dy =$

$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{i}{6} + \frac{i}{2} = \frac{1}{3}i + \frac{1}{3}$

$\int_A^B f(z)\,dz = \int_A^B (u\,dx - v\,dy) + i\int_A^B (v\,dx + u\,dy) =$

① ~~$\int_0^1 dx$~~ $y=0$

$\int_A^C u\,dx - \int_A^C v\,dy + i\int_A^C v\,dx + i\int_A^C u\,dy +$

$+ \int_C^B u\,dx - \int_C^B v\,dy + i\int_C^B v\,dx + i\int_C^B u\,dy =$

$= i\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx - \int_0^1 \frac{1}{2}(y^2 - 1)dy + i\int_0^1 y\,dy =$

$= \frac{i}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = i\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{6}i - \frac{1}{6}$

② 2 integrali in x : $y = 1$ 2 in y : $x = 0$

$\int_0^1 x\,dx + i\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right)dx - \int_0^1 \frac{1}{2}y^2\,dy + i\int_0^1 0 = \frac{3i - i}{6} + \frac{1}{6}\left[3 - 1\right]$

$\frac{1}{2} + \frac{i}{2} - \frac{i}{6} - \frac{1}{6} = \frac{6 + 6i - 2i - 2}{12} = \frac{1}{2}(i+1) - \frac{1}{6}(i+1) = \frac{1}{3}i + \frac{1}{3}$

$(i+1)\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{6}i + \frac{3}{6}$

es. 2 18/12/07

$f(x) = \frac{x}{|x|}$ $x \in [-\pi, \pi]$ è dispari

$a_0 = 0$

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{x}\sin(nx)\,dx = -\frac{2}{\pi n}\cos n\pi + \frac{2}{\pi n} = \frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$

$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1}$

$\|f\|^2 = \sum |a_n|^2$ dispari

$a_n = \sqrt{\pi}\,\beta_k = \frac{4}{\sqrt{\pi}(2k+1)}$

$\|f\|^2 = 2\int_0^{\pi}\frac{x^2}{|x|^2}\,dx = 2\pi$ $\qquad |a_n|^2 = \frac{16}{\pi(2k+1)^2}$

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

es. 3 18/12/07

$f(x) = \frac{x}{|x|}e^{-|x|}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ dim. che $f \in L^2(\mathbb{R})$

$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}\frac{x}{|x|}e^{-|x|}\,dx = -\int_{-\infty}^{0} e^{-ipx}e^{x}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-ipx}e^{-x}\,dx =$

$= -\int_{-\infty}^{0} e^{x(1-ip)}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-x(1+ip)}\,dx = -\frac{1}{1-ip}e^{x(1-ip)}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1+ip}e^{-x(1+ip)}\Big|_0^{\infty} =$

$= -\frac{1}{1-ip} + \frac{1}{1+ip} = \frac{1}{1+p^2}\left[(1+ip)+(1-ip)\right] = \frac{2ip}{1+p^2}$

$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx =$

$= \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$

$-\frac{d}{dx}e^{-|x|}$? $\qquad |x| = \begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$

$-\frac{d}{dx}e^{-|x|} = \begin{cases} x>0 & -e^{-x} \\ x<0 & e^{x} \end{cases} = \frac{x}{|x|}e^{-|x|}$ $\qquad \mathcal{F}\left[e^{-|x|}\right]$

$\mathcal{F}\left[\frac{x}{|x|}e^{-|x|}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-ip)}\,dx + \int_0^{\infty} e^{-x(1+ip)}\,dx =$

$= \frac{1}{1-ip} + \frac{1}{1+ip} = \frac{2}{1+p^2}$ $\cdot\, ip = \mathcal{F}[f']$

es. 1 19/02/2008

$u(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad f(0,0) = 0$ $\quad \cdot\ v(x,y) = ?$ $\quad f = u + iv$

$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$

$\Delta u = 0$ (Laplaciano)

$\Rightarrow u$ è armonica e può essere la parte reale di una f. analitica.

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\quad v(x,y) = \int 2x\,dy = 2xy + A(x)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$ $\quad 2y = 2y + A'(x) \Rightarrow A'(x) = 0$

$A(x)$ costante:

$f(x,y) = x^2 - y^2 + i(2xy + c)$

$f(0,0) = 0 \Rightarrow c = 0$

- dimostro che v è armonica:

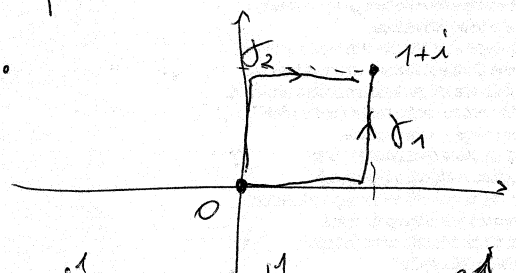
$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} = 0$ $\quad$ c.v.d.

- dim. che: $z = x + iy$

$f(x,y) = f(z) = z^2$.

$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\quad$ c.v.d.

ci aspettiamo che $\int f$ non dipenda dal cammino poiché è analitico.



$\int_A^B f(z)\,dz = \int_A^B (u\,dx - v\,dy) + i\int_A^B (u\,dy + v\,dx) =$

γ_1 $\quad \gamma_2$ $\quad$ (γ_1)

$\int_{\gamma_1, y=0}^{0} u\,dx + i\int_{\gamma_1, y=0}^{0} v\,dx + \int_{\gamma_1, x=1}^{1} (-v)\,dy + i\int_{\gamma_1, x=1}^{1} u\,dy$

$u = x^2 - y^2$

$u|_{y=0} = x^2$

$v = 2xy$

$= \frac{1}{3} - 1 + i\int_0^1 (1 - y^2)\,dy = \frac{1}{3} - 1 + i - \frac{1}{3}i = -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3} = \frac{2}{3}(i-1)$

fare integrale su γ_2

γ_2 $\quad x=0,\ 0\le y\le 1 \quad \cup \quad y=1,\ 0\le x\le 1$

$u = x^2 - y^2 \qquad v = 2xy$

$$\int_{\gamma_2^{AB}} f(z)dz = \int_{A\gamma_2}^{B}(u\,dx - v\,dy) + i\int_{A\gamma_2}^{B}(u\,dy + v\,dx) =$$

$$= \int_{\gamma_2} u\,dx - \int_{\gamma_2} v\,dy + i\int_{\gamma_2} u\,dy + i\int_{\gamma_2} v\,dx =$$

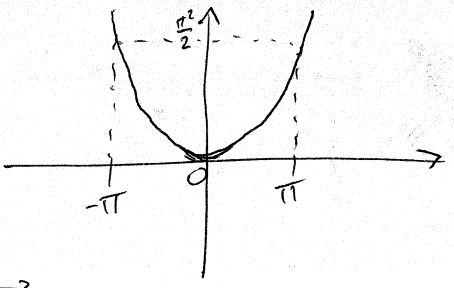
$$= \int_0^1 (-1+x^2)\,dx + i\int_0^1 (-y^2)\,dy + \int_0^1 2x\,dx + i\int_0^1 (x^2-1)\,dy + i\int_0^1 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 - x\Big|_0^1 - i\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_0^1 + iy\Big|_0^1 + ix^2\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - 1 - \frac{i}{3} + i = -\frac{2}{3} + \frac{2i}{3} = \frac{2}{3}(i-1)$$

es. 2 19/02/2008

$f:[-\pi,\pi] \to \mathbb{R} \quad f(x)=\frac{x^2}{2}$



- sviluppo in serie trig. di Fourier
- dim. che $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}$

f è pari. base: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen}(nx)\right\}=\{\varphi^{(n)}(x)\}$

i termini in seno spariranno (f pari)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi^{(n)}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) = a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi^{(0)}(x) + \sum_{1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)$$

$$a_n = \left(\varphi^{(n)}(x), f(x)\right)$$

$$a_0 = \left(\varphi^{(0)}(x), f(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \left(\varphi^{(n)}(x), f(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x)\,dx$$

$a_0 = \sqrt{2\pi}\, a_0$

$a_k = \sqrt{\pi}\, a_k$

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}x^3\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{6}(\pi^3+\pi^3) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\pi^3$$

$$a_0 = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{6\pi}\pi^3 = \frac{\pi^2}{6}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(nx)}_{g'}\,\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{x^2}{2}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} - \int_{-\pi}^{\pi} x\,\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}dx\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi\cos(n\pi)}{n^2\sqrt{\pi}}$$

$= 2\int_0^{\pi}$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n \Rightarrow a_n = (-1)^n \cdot \frac{2\pi}{n^2\sqrt{\pi}} = \frac{(-1)^n \cdot 2\sqrt{\pi}}{n^2}$$

quindi:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{2}$$

per $x=0$: $\quad 0 = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + 2\left[-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}-\ldots\right]$

quindi:

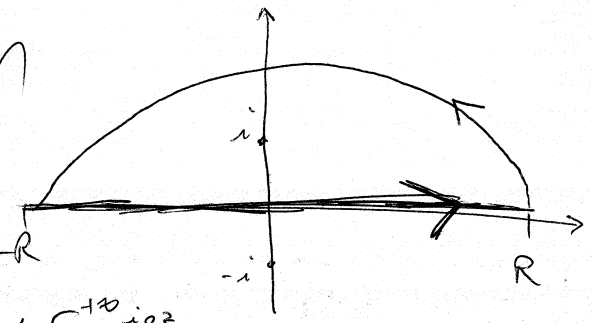
$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots = \frac{\pi^2}{2\cdot 6} = \frac{\pi^2}{12}$$

es. 3 19/02/2008

dim. che $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

$f(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}$

$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}\,e^{-ipx}\,dx$



$z^2 + 1 = 0 \qquad z = \pm i$

applico Jordan $(p \lessgtr 0)$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ipz}}{(z+i)(z-i)}\,dz$

$\hat{f}(p) = \frac{1}{\pi}\,2\pi i\, Res_1(z=i) = e^{-p} \quad (p>0)$

$Res_1(z=i) = \lim_{z\to i} (z-i)\frac{e^{-ipz}}{(z+i)(z-i)} = \frac{e^{-p}}{2i}$

$p \gtrless 0$ chiudo da sotto — Rifare

$\hat{f}(p) = -\frac{2\pi i}{\pi} Res_2(z=-i) = e^{p} \quad (p<0)$

$Res_2(z=-i) = \lim_{z\to -i} (z+i)\frac{e^{-ipz}}{(z+i)(z-i)} = \frac{e^{p}}{-2i}$

$\Rightarrow \hat{f}(p) = e^{-|p|}$

Uso Parseval: $\|\hat{f}(p)\|^2 = 2\pi \|f(t)\|^2$ @mio:

$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \|\hat{f}(p)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-|p|}|^2\,dp = \int_{-\infty}^{0} e^{2p}\,dp + \int_{0}^{+\infty} e^{-2p}\,dp =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot 1$ CVD

- usare teor. inversione per ritrovare $f(t)$.

$\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(p)\right] = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{+ipx} e^{-|p|} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dp}{2\pi} e^{(ix+1)p} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{(ix-1)p} =$

$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{ix+1} e^{(ix+1)p}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{ix-1} e^{(ix-1)p}\Big|_{0}^{+\infty}\right] =$

$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{ix+1} - \frac{1}{ix-1}\right] = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{ix-1-ix-1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}$

DATA,ORA
FAX N./NOME
DURATA
PAGINE
RISULT
MODO

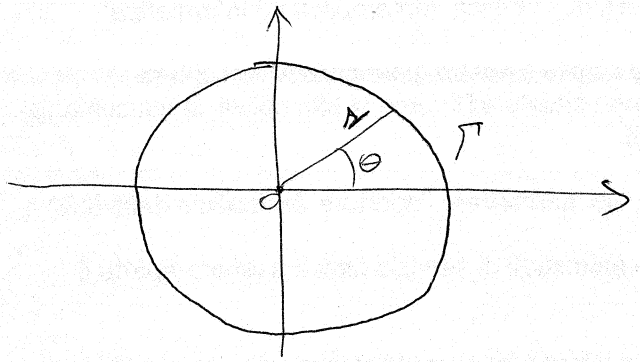
19/01 18:56
8033981187
00:01:08
02
OK
STANDARD
ECM

RAPPORTO VERIFICA TRASMISSIONE

ORA : 19/01/2007 18:57
NOME : 2001 IDEE CARTOLERIA
FAX : 0575372562
TEL : 0575356142
SER.# : 000J6J629981

es 4 19/02/2008 A

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\cos\theta} = \frac{\pi}{2}$$ dimostrare. (usare residui + Jordan)



$z = e^{i\theta}$ $\quad dz = e^{i\theta} i\,d\theta$

$d\theta = \frac{dz}{z} \cdot \frac{1}{i}$

$\ln z = i\theta \qquad \theta = \frac{\ln z}{i}$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z} \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{5+3\cos\left(\frac{\ln z}{i}\right)}$$ l'unica singolarità è $z=0$

$$f(z) = \frac{1}{iz} \cdot \frac{1}{5+3\cos\left(\frac{\ln z}{i}\right)}$$

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z} \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{5+\frac{3}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} =$$

$$\mathrm{Res}(z=0) = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{1}{iz} \cdot \frac{1}{5+3\cos\left(\frac{\ln z}{i}\right)} =$$

$$= \int_\Gamma \frac{dz}{z} \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{\frac{10z+3z^2+3}{2z}} = \frac{2}{i} \int_\Gamma \frac{1}{3z^2+10z+3}$$

$3z^2+10z+3=0 \qquad z = \frac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = -\frac{10\pm 8}{6}$ $\quad -\frac{1}{3}$, -3

$$f(z) = \frac{2}{i} \frac{1}{3\left(z+\frac{1}{3}\right)(z+3)}$$

$$\mathrm{Res}\left(z=-\tfrac{1}{3}\right) = \lim_{z\to -1/3} \left(z+\tfrac{1}{3}\right) \frac{2}{i} \frac{1}{3\left(z+\frac{1}{3}\right)(z+3)} = \frac{2}{i} \cdot \frac{1}{8/3} =$$

$$= \frac{6}{8i} = \frac{3}{4i}$$

$$\oint = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

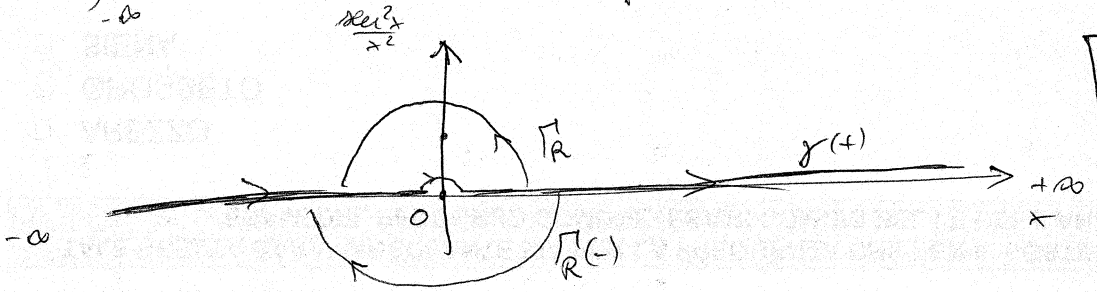
es. 4 19/02/2008 B

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \pi \quad \text{(dimostrare)}$$

($x=0$ singolarità apparente -)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

x polo del 2° ordine



questo integrale è finito, senza usare il V.P.

$$= \int_{\gamma(+)} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz = \int_{\gamma(+)} \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2iz}\right)^2 dz =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\int_{\gamma(+)} \frac{e^{2iz}}{z^2}\,dz + \int_{\gamma(+)} \frac{e^{-2iz}}{z^2}\,dz - \int_{\gamma(+)} \frac{2}{z^2}\,dz\right]$$

usiamo il t. dei residui e il lemma di Jordan per calcolarli -

(1) si chiude da sopra (Jordan)

$$\int_{\gamma(+)} \frac{e^{2iz}}{z^2}\,dz = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz}}{z^2}\,dz = 0 \text{ per il teor. dei residui}$$

(2) si chiude da sotto

$$\int_{\gamma(+)} \frac{e^{-2iz}}{z^2}\,dz = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R(-)} \frac{e^{-2iz}}{z^2}\,dz = \underset{\text{verso percorrenza}}{-} 2\pi i \operatorname{Res}(z=0)$$

$$\operatorname{Res}(z=0) = \frac{d}{dz}\left(z^2 \cdot \frac{e^{-2iz}}{z^2}\right) = -2ie^{-2iz}\Big|_{z=0} = -2i$$

$$\int \ldots = -4\pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{4}\cdot 4\pi \cdot (-1) = \pi$$

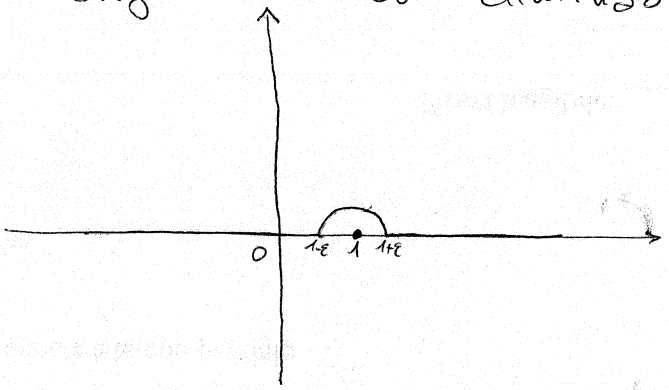
CVD.

(3) possiamo chiudere sia da sopra che da sotto ($f \sim \frac{1}{z^2} = o\left(\frac{1}{z}\right)$)
chiudo da sopra. Teor. residui: $\int = 0$ (nessun polo dentro)

es. 5 19/02/2008

verificare che: $V.P. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1-x)(x-1)} dx = \operatorname{sen} 1$

$x=1$ singolarità non eliminabile



$x_0 = 1$

$f(t) = \cos x \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right)$

$f(1) = \cos 1 \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right)$

$P. \frac{1}{\pi} \int \ldots = I^{\rightarrow}(x_0) + i\pi f(x_0) = I^{+}(x_0) - i\cos 1$

$I^{(+)}(x_0) = \int_{\gamma+} -\frac{e^{it} + e^{-it}}{2(t-1)\pi} dt = -\frac{1}{\pi} \int_{\gamma+} \frac{e^{iz}}{2(z-1)} dz - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma+} \frac{e^{-iz}}{2(z-1)} dz =$ (chiudo da sopra e fa 0)

$= -\frac{1}{\pi} \int_{\gamma+} \frac{e^{-iz}}{2(z-1)} dz = +2i \operatorname{Res}(z=1)$

$\operatorname{Res}(z=1) = \lim_{t \to 1} (z-1) \frac{e^{-iz}}{z-1} = e^{-i}$

$P \frac{1}{\pi} \int \ldots = ie^{-i} - i\cos 1 = i(\cos 1 - i \operatorname{sen} 1) - i\cos 1 =$

$= -i \operatorname{sen} 1 \cdot i = \operatorname{sen} 1$

es. 1 04/07/2008

$\boxed{v(x,y) = 2y(x-1)}$

$\Delta v = 0$? $\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2(x-1) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

$\Rightarrow \Delta v = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2(x-1) = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad u(x,y) = x^2 - 2x + A(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = A'(y) = -2y \Rightarrow A(y) = -y^2 + c$$

$\boxed{u(x,y) = x^2 - 2x - y^2 + c}$

$f(x,y) = x^2 - 2x - y^2 + c + 2iy(x-1)$

$f(0,0) = 0 \Rightarrow 0 - 0 - 0 + c + 0 = 0 \Rightarrow c = 0$

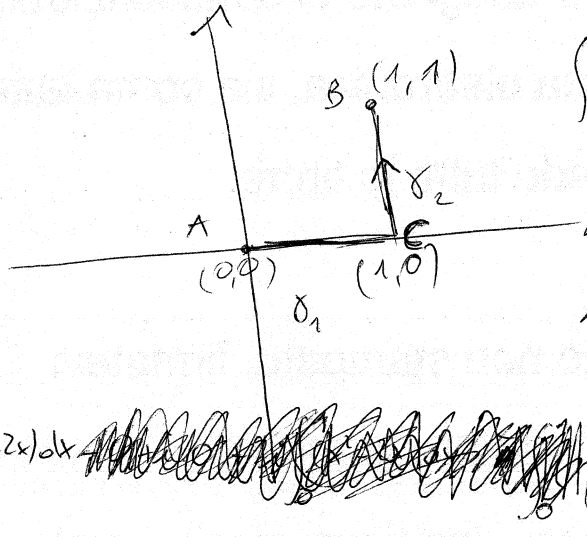
$f(x,y) = x^2 - 2x - y^2 + 2iy(x-1)$

$z \equiv x + iy \qquad z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$2z = 2x + 2iy$

$z^2 - 2z = x^2 - y^2 + 2ixy - 2x - 2iy =$

$= x^2 - 2x - y^2 + 2iy(x-1)$ ok $\qquad f(x,y) = f(z) = z^2 - 2z$



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (v\,dx + u\,dy) =$$

$$= \int_A^C u\,dx - \int_A^C v\,dy + i\int_A^C v\,dx + i\int_A^C u\,dy +$$

$$+ \int_C^B u\,dx - \int_C^B v\,dy + i\int_C^B v\,dx + i\int_C^B u\,dy =$$

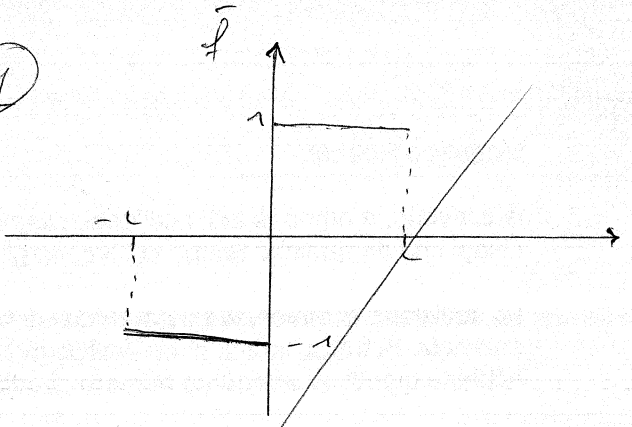
$$= \int_0^1 (x^2 - 2x)\,dx + \int_0^1 (-1 - y^2)\,dy + i\int_0^1 (-1 - y^2)\,dy = \frac{1}{3} - 1 - i - \frac{i}{3} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}i$$

f analitica $\Rightarrow \int f(z)\,dz$ non dipende dal cammino percorso (se interno al dom. di analiticità)

es. 2 04/07/2008

①

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, L] \\ 0 & x \notin [0, L] \end{cases}$$



$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < L \\ -1 & -L < x < 0 \end{cases}$$

$$\{\varphi^{(n)}\} = \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right\} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi^{(n)} \qquad a_n = (\varphi^{(n)}, f) = \int_{-L}^{L} \varphi^{(n)} f = \int_{-L}^{0} -\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx + \int_{0}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx =$$

$$= \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\Big|_{-L}^{0} - \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\Big|_{0}^{L} = \frac{L}{n\pi} - \frac{L}{n\pi} \cos(-n\pi) -$$

$$- \frac{L}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{L}{n\pi} = -\frac{2L}{n\pi} \cos(n\pi) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2L}{n\pi}$$

$$\bar{f}(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) =$$

$$= \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

②

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

soluzione generale:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sin}(k_n x) \exp\left[-\frac{c^2 \pi^2 n^2}{L^2} t\right] \qquad k_n = \frac{n\pi}{L}$$

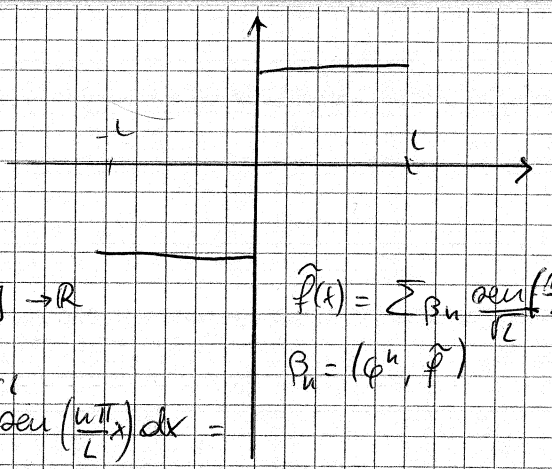
$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sin}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \varphi(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L\,(-1)^{n+1}}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\frac{c^2 \pi^2 n^2}{L^2} t}$$

es. 2 04/07/2008

$$f(x) = \begin{cases} 1 & [0, L] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & [0, L] \\ -1 & [-L, 0) \end{cases} \qquad \tilde{f} : [-L, L] \to \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}(x) = \sum \beta_n \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\sqrt{L}}$$

$$\beta_n = (\phi^n, \tilde{f})$$

$$\beta_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{\sqrt{L}} \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{L}} \cdot \frac{L}{n\pi} \cdot \left[-\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]_0^L = \frac{2\sqrt{L}}{n\pi} \left[-\cos(n\pi) + 1 \right] =$$

$$= \frac{2\sqrt{L}}{n\pi} \left(1 - (-1)^n\right) \Rightarrow \beta_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{4\sqrt{L}}{n\pi} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\sqrt{L}}{(2k+1)\pi\sqrt{L}} \operatorname{sen}\left[\frac{(2k+1)\pi}{L}x\right] = f(x) \text{ in } (0, L]$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

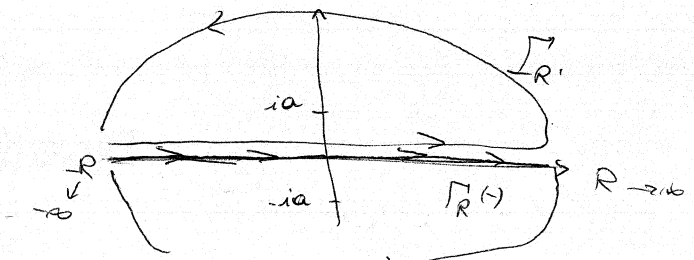
eq. del calore

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(k_n x) \exp\left[-c^2 \frac{\pi^2 n^2}{L^2} t\right]$$

$$u(x,0) = \sum a_n \operatorname{sen}(k_n x) = f(x) = \sum \frac{4}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen}\left[\frac{(2k+1)\pi}{L}x\right]$$

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen}\left[\frac{(2k+1)\pi}{L}x\right] \exp\left[-\frac{c^2\pi(2k+1)^2}{L^2}t\right]$$

es. 3 04/07/2008



$$f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \cdot \frac{1}{a^2+x^2}\, dx \qquad x^2+a^2=0 \Rightarrow x = \pm ia$$

$$\sim \frac{1}{x^2}$$

$\boxed{p>0}$

chiudo sotto (lemma Jordan)

$$\hat{f}(p) = \oint_{\Gamma_R(-)} \frac{e^{-ipz}}{a^2+z^2}\, dz = -2\pi i \operatorname{Res}(z=-ia) =$$

$$= -2\pi i \lim_{z\to -ia} \left[\frac{\cancel{(z+ia)}\, e^{-ipz}}{\cancel{(z+ia)}(z-ia)}\right] = \cancel{-2\pi i} \left(\frac{e^{-pa}}{\cancel{-2ia}}\right) = \frac{\pi}{a} e^{-pa}$$

$\boxed{p<0}$ chiudo sopra

$$\hat{f}(p) = \oint_{\Gamma_{R'}} \frac{e^{-ipz}}{(z+ia)(z-ia)}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(z=ia) = 2\pi i \lim_{z\to ia}\left[\frac{\cancel{(z-ia)}\, e^{-ipz}}{\cancel{(z-ia)}(z+ia)}\right] =$$

$$= \frac{2\pi i}{2ia} e^{pa} = \frac{\pi}{a} e^{pa}$$

$$\boxed{\hat{f}(p) = \frac{\pi}{a} e^{-|p|a}}$$

id. di Parseval $\quad \|\hat{f}(p)\|^2 = 2\pi \|f(x)\|^2$

$$\frac{\pi^2}{a^2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{2pa}\, dp + \int_0^{+\infty} e^{-2pa}\, dp\right] = \frac{\pi^2}{a^2}\left[\frac{1}{2a}\left(e^{2pa}\right)_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2a}\underbrace{\left(e^{-2pa}\right)_0^{+\infty}}_{=\frac{1}{e^{2pa}}}\right] =$$

$$= \frac{\pi^2}{a^2}\left[\frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}\right] = \frac{\pi^2}{a^3} = \|\hat{f}(p)\|^2 =$$

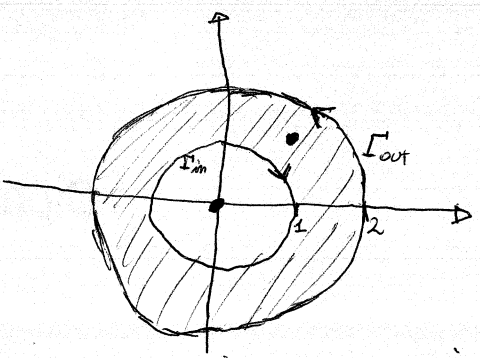
$$= 2\pi \|f(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \frac{1}{(a^2+x^2)^2}\, dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a^2+x^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2a^3} \quad \text{c.v.d.}$$

Teor. di Inversione

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(p)] = \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}[\hat{f}^*(p)]\right)^* = \frac{1}{2\cancel{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{ipx} \frac{\cancel{\pi}}{a} e^{-|p|a} = \frac{1}{2a}\left[\int_{-\infty}^{0} dp\, e^{(ix+a)p} + \int_0^{+\infty} dp\, e^{(ix-a)p}\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{xi+a}\left[e^{(ix+a)p}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{xi-a}\left[e^{(ix-a)p}\right]_0^{+\infty}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{ix+a} + \frac{1}{a-ix}\right] = \frac{1}{2a}\frac{a-ix+ix+a}{(a+ix)(a-ix)} = \frac{1}{a^2+x^2} \quad \text{ok}$$

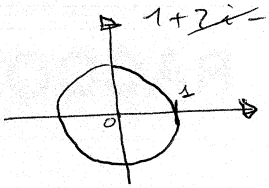
es. 4 04/07/2008



- $\oint_{\Gamma} \frac{e^{z^2}}{z^2(z-1-i)}\,dz \overset{?}{=} \pi e^{2i}$

$= 2\pi i \operatorname{Res}(z=1+i) =$

$= 2\pi i \lim_{z\to 1+i} \frac{(z-1-i)\,e^{z^2}}{z^2(z-1-i)} = 2\pi i \lim_{z\to 1+i} \frac{e^{z^2}}{z^2} = \frac{2\pi i\, e^{1+2i-1}}{1+2i-1} = \pi e^{2i}$



- $\oint_{\Gamma_1} \frac{z+1}{2z^3-z^4} \overset{?}{=} \frac{3}{4}\pi i$

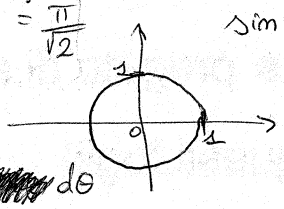
$2z^3 - z^4 = 0$

$z^3(2-z) = 0 \quad \begin{cases} z=0 \\ z=2 \to \text{fuori da } \Gamma_1 \end{cases}$

$= 2\pi i \operatorname{Res}(z=0) = 2\pi i \frac{d^2}{dz^2}\left[z^3 \cdot \frac{z+1}{z^3(2-z)}\right]_{z=0} =$

$= 2\pi i \left[\frac{d}{dz}\left[\frac{2-z+z+1}{4-2z+z^2}\right]\right]_{z=0} = 3\cdot 2\pi i \left[\frac{2z-2}{(4-2z+z^2)^2}\right]_{z=0} = 3\cdot 2\pi i \left(-\frac{2}{16}\right) = \frac{3}{4}\pi i$

- $\int_0^{2\pi} \frac{1+0\sin\theta}{3+\cos\theta}\,d\theta \overset{?}{=} \frac{\pi}{\sqrt{2}}$



$z = e^{i\theta}$

$dz = ie^{i\theta}\,d\theta$

$d\theta = \frac{dz}{iz}$

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

$\oint_{\Gamma_1} \frac{1+\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}{3+\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} = \oint_{\Gamma_1} \frac{1+\frac{z-(z^{-1})}{2i}}{3+\frac{z+z^{-1}}{2}}$

$\oint_{\Gamma_1} \frac{(2i+z-1/z)}{iz(6+z+1/z)}\,dz = -\oint_{\Gamma_1} \frac{2\,dz}{iz}\cdot\frac{1}{(2iz+z^2-1)}\cdot\frac{z}{6z+z^2+1} =$

$= -\oint \frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}\,dz \qquad z^2+6z+1=0 \Rightarrow z = \frac{-6\pm\sqrt{36-4}}{2} = \frac{-6\pm\sqrt{2^2\cdot 2^2\cdot 2}}{2} =$

$= -6\pm 4\sqrt{2}/2 = -3\pm 2\sqrt{2}$ solo $-3+2\sqrt{2}$ è interno a Γ_1

$z(z+3-2\sqrt{2})(z+3+2\sqrt{2})$

$= -2\pi i \left[\operatorname{Res}(z=0) + \operatorname{Res}(z=2\sqrt{2}-3)\right]$

$\operatorname{Res}(z=0) = \lim_{z\to 0} \frac{z(z^2+2iz-1)}{z(z^2+6z+1)} = -1$

$\operatorname{Res}(z=2\sqrt{2}-3) = \lim_{z\to 2\sqrt{2}-3} \frac{(z+3-2\sqrt{2})(z^2+2iz-1)}{(z+3-2\sqrt{2})(z+3+2\sqrt{2})} = \frac{8+9-12\sqrt{2}+2i(2\sqrt{2}-3)-1}{4\sqrt{2}} =$

$= \frac{16-12\sqrt{2}+4i\sqrt{2}-6i}{4\sqrt{2}} = \frac{8-6\sqrt{2}+2i\sqrt{2}-3i}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}(2\sqrt{2}-3)+i(2\sqrt{2}-3)}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+i)}{2\sqrt{2}}$

$= -\frac{2\pi i(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+i)+2\pi i}{2\sqrt{2}} = -\frac{\pi i(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+i)+\pi i}{\sqrt{2}} =$

$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} i\left[1-(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+i)\right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[1-(8-6\sqrt{2}+2i\sqrt{2}-3i)\right]i = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(i-8i+6\sqrt{2}i+2\sqrt{2}-3) = \frac{-7i\pi}{\sqrt{2}}+6\pi i+2\pi-\frac{3\pi}{\sqrt{2}} =$

$= \left(-7i\pi+6\sqrt{2}i\pi+2\sqrt{2}\pi-3\pi\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(-7i\sqrt{2}\pi+12i\pi+2\pi-3\sqrt{2}\pi\right)$

es. 5 04/07/2008

$$P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx = I^{(\pm)}(x_0) \pm i\pi f(x_0)$$

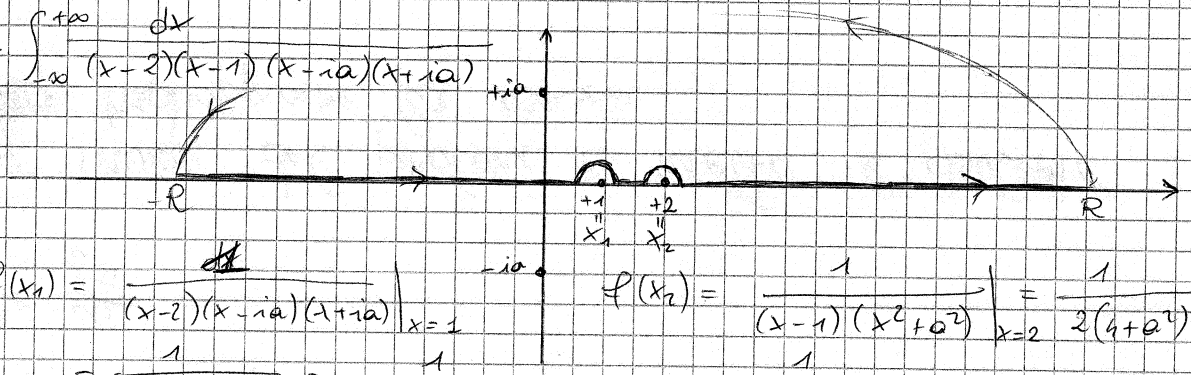
$$P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-3x+2)(x^2+a^2)} \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

$x^2 = -a^2 \Rightarrow x = \pm ia$

$$P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)(x-1)(x^2+a^2)}$$

$$P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)(x-1)(x+ia)(x+ia)}$$



$$f(x_1) = \frac{dx}{(x-2)(x-ia)(x+ia)}\Big|_{x=1} = \frac{1}{-1(1+a^2)} = -\frac{1}{1+a^2}$$

$$f(x_2) = \frac{1}{(x-1)(x^2+a^2)}\Big|_{x=2} = \frac{1}{2(4+a^2)} = \frac{1}{8+2a^2}$$

$$I^{(+)} = 2\pi i\, Res(z=ia)$$

$$Res(z=ia) = \lim_{z\to ia} \frac{(z-ia)}{(z-2)(z-1)(z-ia)(z+ia)} = \frac{1}{2ia(ia-2)(ia-1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{ia(-a^2-3ia+2)}$$

$$I^{(+)} = \frac{\pi}{a}\cdot\left(-\frac{1}{a^2+3ia-2}\right)$$

$$P.\int \ldots = I^{(+)} + i\pi\left(f(x_1)+f(x_2)\right) = \frac{\pi}{a}\left(-\frac{1}{a^2+3ia-2}\right) + i\pi\left(\frac{1}{8+2a^2} - \frac{1}{1+a^2}\right)$$

$$= \pi\left[-\frac{1}{a^3+3ia^2-2a} + \frac{i}{8+2a^2} - \frac{i}{1+a^2}\right]$$

$\boxed{a=2} \Rightarrow P.\int \ldots = \pi\left[-\frac{1}{8+12i-4} + \frac{i}{8+8} - \frac{i}{1+4}\right] = \pi\left[-\frac{1}{4+12i} + \frac{1}{16} - \frac{i}{5}\right] =$

$$= \frac{\pi}{4}\left(-\frac{1}{1+3i} + \frac{1}{4} - \frac{4i}{5}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{-20+(i-3)\cdot 5 - (4i+12)\cdot 4}{20(1+3i)}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\,\frac{-20+5i-15-16i+48}{20(1+3i)} = \frac{\pi}{4}\,\frac{13-11i}{20(1+3i)}\cdot\frac{13+11i}{13+11i} =$$

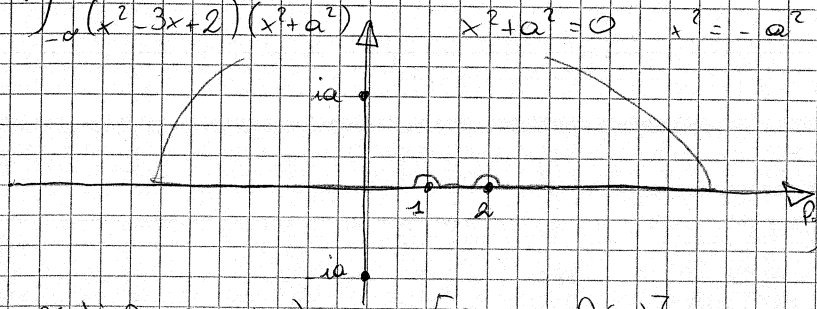
$$= \frac{\pi}{4}\,\frac{169+121}{260+220i+780i+660i} = \frac{\pi}{4}\,\frac{290}{260+1660i}$$

es. 5 04/07/2008

$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-3x+2)(x^2+a^2)} \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

$x^2-3x+2=0 \quad x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \begin{matrix}1\\2\end{matrix}$

$x^2+a^2=0 \quad x^2=-a^2 \quad x=\pm ia$



$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x+ia)(x-ia)}$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}(z=ia) + i\pi\left[f(1)+f(2)\right]$$

$$\operatorname{Res}(z=ia) = \lim_{z\to ia} \frac{(z-ia)}{(z-1)(z-2)(z-ia)(z+ia)} = \frac{1}{2ia(ia-1)(ia-2)} =$$

$$= \frac{1}{(2i^2a^2-2ia)(ia-2)} = \frac{1}{2i^3a^3-2i^2a^2-4ia^2+4ia} =$$

$$= \frac{1}{-2ia^3+2a^2+4a^2+4ia} = \frac{1}{-a^3-ia^2-2ia^2+2a} = \frac{1}{-a^3-3ia^2+2a}$$

$$f(1) = \frac{1}{(1-2)(1+ia)(1-ia)} = -\frac{1}{1+a^2} \qquad \frac{\pi i}{-a^3i+3a^2+2ai}$$

$$f(2) = \frac{1}{(2-1)(2+ia)(2-ia)} = \frac{1}{4+a^2}$$

$$f(1)+f(2) = \frac{-(4+a^2)+1+a^2}{(a^2+1)(a^2+4)} = -\frac{3}{(a^2+1)(a^2+4)}$$

$$\text{p.v.}\int = \frac{\pi}{-a^3-3ia^2+2a} - \frac{3\pi i}{(a^2+1)(a^2+4)} = -\frac{\pi(a^2+1)(a^2+4)-3\pi i a^3+9\pi a^2+6\pi ia}{(a^3+3ia^2-2a)(a^2+1)(a^2+4)}$$

$a=2$

$$\text{p.v.}\int = -\frac{5\pi\cdot 8-24\pi i+36\pi+12\pi i}{(8+12i-4)\cdot 5\cdot 8} = -\frac{76\pi-12\pi i}{160+480i}$$

$$\frac{\pi}{-a^3-3ia^2+2a}\cdot\frac{-a^3+3ia^2+2a}{-a^3+3ia^2+2a} = \frac{-\pi(a^3-3ia^2-2a)}{a^6-3ia^5-2a^4+3ia^5+9a^4-6ia^3-2a^4+6ia^3+4a^2}$$

$$= \frac{-\pi(a^3-3ia^2-2a)}{a^6+5a^4+4a^2}$$

$a=2$

$$-\frac{\pi(8-12i-4)}{64+80+16=160} - \frac{3\pi i}{40} = \frac{8\pi+12i\pi+4\pi-12i\pi}{160}$$

$$= -\frac{5}{160}\pi = -\frac{\pi}{40}$$

es. 1 16/09/2008

$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ $\quad f = u + iv$ $\quad f(0,0) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$

$6x - 6x = 0 \Rightarrow$ è armonica

C.R.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$v(x_0, y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int (3x^2 - 3y^2) dy =$

$= 3x^2 y - y^3 + A(x)$

$\frac{\partial v}{\partial x} = +6xy - A'(x)$

$A(x) = \int 6xy \, dx = 3x^2 y + c$

$v(x,y) = 3x^2 y - y^3 + c$

$f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3ix^2 y - iy^3 + c$

$f(0,0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$z \equiv x + iy \qquad z^3 = x^3 + 3ix^2 y + 3x(iy)^2 + i^3 y^3 =$

$= x^3 + 3ix^2 y - 3xy^2 - iy^3$

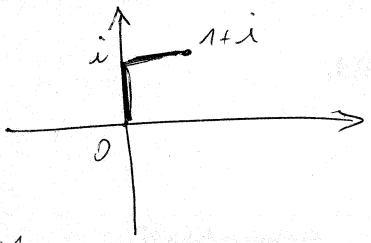
1
1 2 1
1 3 3 1

Ok $f = z^3$

$\int \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int 6xy \, dx = 3x^2 y + A(y)$

$A'(y) + 3x^2 = 3x^2 - 3y^2 \qquad A'(y) = -3y^2$

f analitica $\Rightarrow \sim \equiv \int$ $\qquad A(y) = -y^3 + c$



1: $x = 0 \quad 0 \le y \le 1$

2: $y = 1 \quad 0 \le x \le 1$

$\int_A^B f(z)dz = \int_A^B (u\,dx - v\,dy) + i \int_A^B (v\,dx + u\,dy)$

$u = x^3 - 3xy^2 \qquad v = 3x^2 y - y^3$

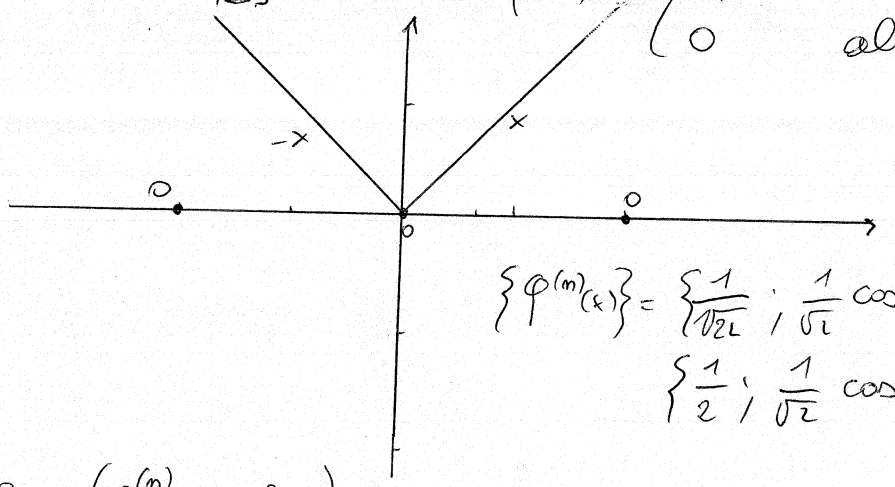
$\int_0^1 (x^3 - 3x)\,dx + \int_0^1 y^3 dy + i \int_0^1 (3x^2 - 1)\,dx =$

$= \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 - \frac{3}{2} x^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{4} y^4 \Big|_0^1 + i \left(x^3 \Big|_0^1 - x \Big|_0^1 \right) =$

$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{6}{4} = -1$

es. 2 16/09/2008

$f(x): [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x & -2 < x < 0 \\ x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$



$\{\varphi^{(m)}(x)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{1}}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right); \frac{1}{\sqrt{l}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right\}$

$\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right); \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\right\}$

$a_m = \left(\varphi^{(m)}(x), f(x)\right)$

$$a_0 = \int_{-2}^{2} \frac{1}{2} f(x) = \int_{-2}^{0} -\frac{1}{2}x\,dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{2}x\,dx = -\frac{1}{4}x^2\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{4}x^2\Big|_{0}^{2} = -1 + 1 = 0$$

$$a_n = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) f(x)\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-2}^{0} \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) x\,dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)x - \frac{2}{n\pi}\int \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx\right]_{-2}^{0} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)x - \frac{2}{n\pi}\int \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx\right]_{0}^{2}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}(-n\pi)(-2) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_{-2}^{0}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{n\pi}\cdot 2\operatorname{sen}(n\pi) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_{0}^{2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left[1 - \cos(-n\pi)\right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left[\cos(n\pi) - 1\right] =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left(1 - (-1)^n\right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cdot 2 \cdot \left[(-1)^n - 1\right] =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n}\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n}\right]\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n}\right]\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

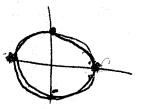
$\boxed{x=0}$ $\quad 0 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ NON POSSIBILE

$\boxed{x=1}$

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum\left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n}\right]\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

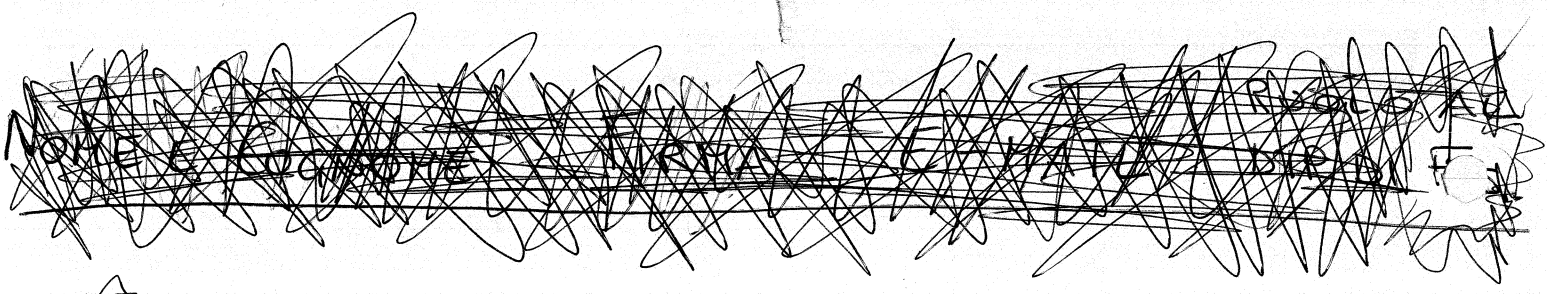
$$\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ (-1)^{\frac{2n-1}{n}} & n \text{ pari} \end{cases}$$

$n \to 2k$



$(-1)^{2k}$

$\sum_{k=}$



~~NOME E COGNOME FIRMA E MATR DIP DI F~~

$$\sum_{1}^{\infty} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \ldots$$

$n=1$	0
2	-1
3	0
4	1
5	0
6	-1
7	0
8	1
9	0
10	-1

4

$(-1)^{\ldots}$

$n = 2n+1 \to 0$

$n = 2n \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$

$2n+4$

$4n+2 \begin{cases} 2 \\ 6 \end{cases}$

14

$4(n+$

$n = 1 \longrightarrow 0$

$$\sum \left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n}\right] \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \sum \left(\frac{(-1)^n}{n} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\cos(n\pi/2)}{n}\right) =$$

$$= \sum \quad '' \quad - \sum \left(- \quad '' \quad\right)$$

div.

$n=1 \longrightarrow 0$
$n=2 \longrightarrow -1$
$3 \longrightarrow 0$
$4 \longrightarrow 1$
$5 \longrightarrow 0$
$6 \longrightarrow -1$
$7 \longrightarrow 0$
$8 \longrightarrow 1$
$9 \longrightarrow 0$
$10 \longrightarrow -1$

$$f(n) = \begin{cases} -1 & n = 2+4k \\ 0 & n \text{ dispari } (n=2k+1) \\ 1 & \text{altrimenti } (n=4k) \end{cases}$$

$(k \in \mathbb{N})$

$(ak+b)$ $a=4$ $b=0$ 1 $b=2$ -1 $a=2$ 0 (b disp.) $b=1$

$Mv = \lambda v$

$Mv - \lambda v = 0$

$(M-\lambda)v = 0$

$(-1)^n$

$f(4k) = 1$

$f(4k+2) = -1$

$k + \frac{1}{2}$

$(-1)^x$

x disp. se $n = 4k+2$ $(n \setminus 4)$

x pari se $n = 4k$ $(n \setminus 4)$

n dispari $\to 0$

$n \setminus 4 \Rightarrow$ nullate

$n \setminus 4 \Rightarrow$ agg. 1

$\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right) + 1$

$\frac{n}{4}$

$v \quad \exists \lambda : f(v) = \lambda v$

$x =$

$$\boxed{2\left(\frac{n}{4} + \frac{n}{2}\right)}$$

$M \cdot v = \lambda \cdot v$

$\frac{d}{2}$

$2\left(\frac{d}{2} + \frac{2a}{2}\right)$

$2 + \frac{1}{2}$

$\frac{5}{2}$

$\frac{n}{4}$ int / raz

v

$Mv - \lambda v = 0$

$(M-\lambda)v = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n} \right] \cdot \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left| \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) \right|$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\chi(n)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n} \right] (-1)^{\chi(n)}$$

$$\cos\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \frac{sen\,\alpha}{tg\,\alpha} \qquad (-1)^{\frac{3}{2}n}$$

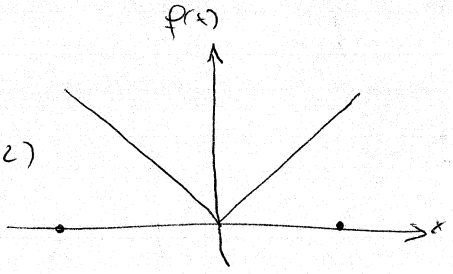
$$= \sqrt{1 - sen^2\alpha}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[- - \right] \sqrt{1 - sen^2\alpha}$$

(n par)

$$\sum \left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n} \right] (-1)^{2\left(\frac{n}{4}+\frac{n}{2}\right)} = \frac{1}{n}$$

es. 2 16/09/2008



$f:[-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} |x| & \text{in } (-2,0) \text{ e in } (0,2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right); \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}x\right)\right\}$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$ $\qquad a_0 = 0$

$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f \cdot g' \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \left[\frac{2}{n\pi} x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx\right] =$

$= 0 + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}\cos(n\pi) - \frac{4}{n^2\pi^2} =$

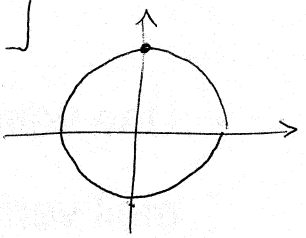
$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] \Rightarrow$ per gli n pari questo fa 0

$f = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}\cdot(-2)\cdot\cos\ldots \qquad n = 2k+1$

$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum \frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$

$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{2}x\right]$

$x = \pm 2$



$f(2) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cdot 1$

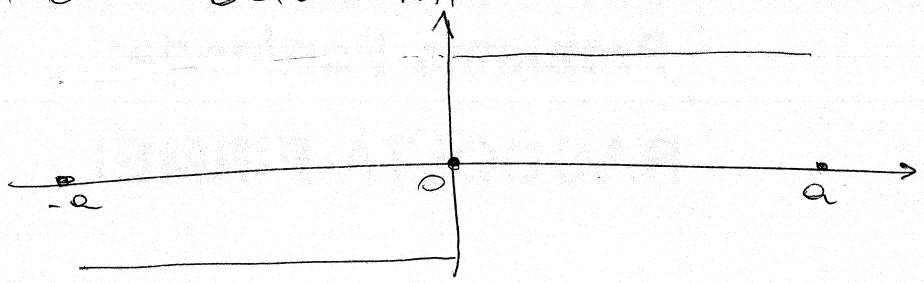
$a_0 = 1$

$-1 = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$

$\sum \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

es. 3 16/09/2008

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -a < t < 0 \\ 1 & 0 < t < a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}^+$$



$$\hat{f}(p) = \int_{+\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(t)\,dx = -\int_{-a}^{0} e^{-ipx}\,dx + \int_{0}^{a} e^{-ipx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{ip} e^{-ipx}\Big|_{-a}^{0} - \frac{1}{ip} e^{-ipx}\Big|_{0}^{a} = \frac{1}{ip} - \frac{1}{ip} e^{ipa} - \frac{1}{ip} e^{-ipa} + \frac{1}{ip} =$$

$$= \frac{2}{ip} - \frac{1}{ip}\left(e^{ipa} + e^{-ipa}\right) = \frac{2}{ip} - \frac{2}{ip}\cos(pa) = \frac{2}{ip}\left(1 - \cos(pa)\right)$$

$$\|\hat{f}(p)\|^2 = 2\pi \|f(t)\|^2$$

~~$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+\cos(pa))^2}{p^2}\,dp = \int_{-\infty}^{+a} \frac{1+2\cos(pa)+\cos^2(pa)}{p^2}\,dp$~~

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{2}{ip}\left(1-\cos(pa)\right)\right|^2 dp = 4\int_{0}^{+\infty} \frac{(1-\cos(pa))^2}{p^2}\,dp = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\cos(pa)-1]^2}{p^2}\,dp$$

$$\int_{-a}^{0} |-1|^2\,dx = a + a = 2a$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}[\hat{f}^*]\right)^*$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \frac{2}{ip}\left[\cos(pa) - 1\right] dp =$$

$$4 \cdot \int \ldots = 4\pi a \qquad \int = \pi a$$

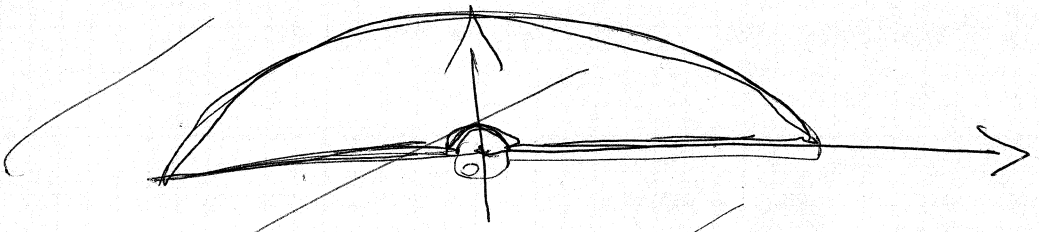
es 3 16/09/2008

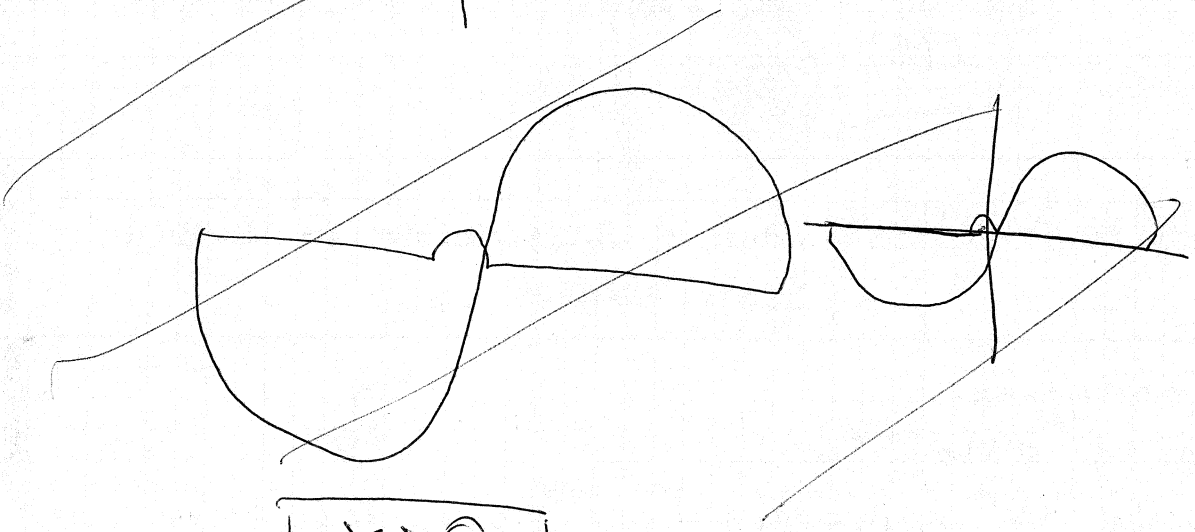
Teor. inversione

$$\hat{f}(p) = \frac{2}{ip}\left(1 - \cos(pa)\right)$$

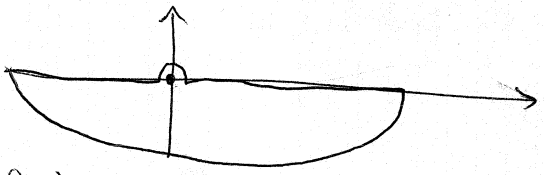
$$\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(p)\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\mathcal{F}\left[\hat{f}^*(p)\right]\right]^* \qquad \hat{f}^*(p) = -\hat{f}(p) \qquad -\hat{f}(p) = \frac{2}{ip}\left(\cos(pa) - 1\right)$$

$$\mathcal{F}\left[-\hat{f}(p)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \frac{2}{ip}\left[\cos(pa) - 1\right] dp$$





$x > 0$



$I^+ + i\pi f(0)$ $\qquad I^+ = 2\pi i \, \mathrm{Res}(p=0)$

Res $\mathrm{Res}(p=0) = \lim_{p\to 0} p\, e^{-ipx} \frac{2}{ip}\left[\cos(pa) - 1\right] dp$ $\qquad$ [illegible] $= 0$

$I^+ = 4\pi(\cos pa - 1) = 0$ $\qquad p = 0$

$i\pi f(0) = i\pi e^{-ip0} \frac{2}{i}\left[\cos(pa) - 1\right] = 0$

es. 3 16/09/2008 ①

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \cdot \frac{2}{ip}\left[\cos(pa)-1\right]dp = \int_{-\infty}^{0} e^{-ipx}\cdot\frac{2}{ip}\left[\cos(pa)-1\right]dp + \int_{0}^{+\infty} e^{-ipx}\cdot\frac{2}{ip}\left[\cos(pa)-1\right]dp$$ ②

① $$\frac{2}{i}\left[\int_{\infty}^{0} \frac{e^{-ipx}}{p}\cos(pa)\,dp - \int_{-\infty}^{0}\frac{e^{-ipx}}{p}dp\right]$$

$$\hat{f}(p) = \frac{2i}{p}\left(\cos(pa)-1\right) \qquad a>0$$

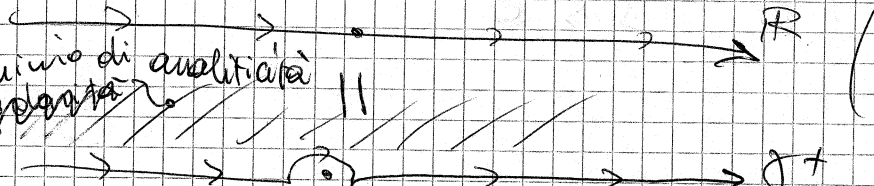
Teor. inversione — il teor. permette di usare questa formula

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2i}{p}\left(\cos(pa)-1\right)e^{ipx}$$

$p=0$ è una singolarità apparente!

$$\lim_{p\to 0}\frac{\cos(pa)-1}{p} = 0$$

$\Rightarrow$ singolarità eliminabile (come $\frac{\sin x}{x}$)

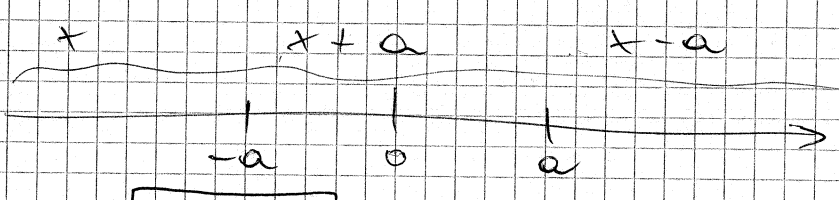


(Teor. Cauchy)

$$= \frac{i}{\pi}\int_{\gamma+}\frac{\cos(pa)-1}{p}e^{ipt}dp = \frac{i}{\pi}\int_{\gamma+}\left(\frac{e^{ipa}+e^{-ipa}-2}{2p}e^{ipx}dp\right) =$$

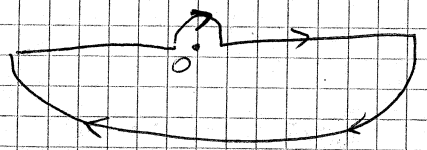
$$= \frac{i}{2\pi}\left[\int_{\gamma+}\frac{e^{i(a+x)p}+e^{i(x-a)p}-2e^{ipx}}{p}dp\right]$$

ORA c'è singolarità in $p=0$ (perché c'è l'esponenziale)



$x<-a$

3 espon. negativi. Jordan $\Rightarrow$ chiudo da sotto



$$= -2\pi i\,\mathrm{Res}(0) = \frac{2\pi i}{2\pi}\cdot i\cdot\lim_{p\to 0} p\left(\frac{e^{i(a+x)p}+e^{i(x-a)p}-2e^{ipx}}{p}\right) = 0$$

$\boxed{-a < x < 0}$

1: chiudo da sopra $\Rightarrow$ $= 0$

2: sotto $\longrightarrow$ Res $= -1 \rightarrow$ $\int = \boxed{-1}$

3: sopra $\Rightarrow$ $= 0$

$\boxed{0 < x < a}$

1: sopra $\Rightarrow = 0$

3: sopra $\Rightarrow = 0$

2: $\longrightarrow$ $\int = \boxed{+1}$

$\boxed{x > a}$

tutti e 3 positivi $\Rightarrow$ $\int = 0$

$$\Longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ -1 & -a < x < 0 \\ 1 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

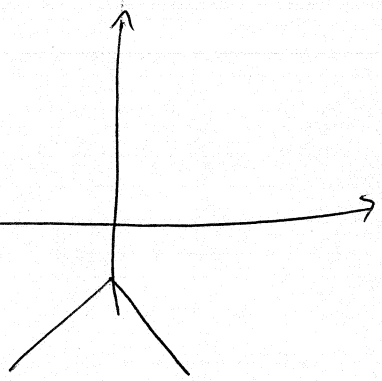
es. 1 18/12/2008

$$u(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y - 2(x^2+y^2)2x\cdot y}{(x^2+y^2)^4} = \frac{y - 4x^4 - 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-16x^3 - 8y^2x - (y - 4x - 4x^2y^2)\,8(x^2+y^2)^7 2x}{(x^2+y^2)^8}$$

es. 2 18/12/2008

$f(x) : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \pi - 2|x|$



$f(x) \overset{?}{=} f(-x) \qquad f(x) = \pi - 2|x|$

$f(-x) = \pi - 2|-x| = f(x) \Rightarrow f$ è pari

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\pi\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx =$$

$$= \pi - \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} = \pi - \pi = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi\cos(nx)\,dx - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)\,dx =$$

$$= \frac{2}{n}\operatorname{sen}(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\,x - \int\frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{n}\operatorname{sen}(\pi n) - \frac{2}{n}\operatorname{sen}0 - \frac{4}{n\pi}\operatorname{sen}(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{4}{\pi n^2}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] \to \frac{8}{\pi(2k+1)^2}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos(nx)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{+8\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2\pi}$$

$|x \equiv 0| \qquad \pi = \sum\frac{1}{(2k+1)^2}\left[+\frac{8}{\pi}\right] \Rightarrow \sum\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

• dim. che $\sum\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} = 2\int_0^{\pi}(\pi - 2x)^2\,dx = 2\int_0^{\pi}(\pi^2 + 4x^2 - 4\pi x)\,dx = 2\pi^3 + \frac{8}{3}\pi^3 - 4\pi^3 = \frac{6\pi^3 + 8\pi^3 - 12\pi^3}{3} = \frac{2}{3}\pi^3$$

$$|a_k|^2 = \left(\frac{8}{\pi(2k+1)^2}\right)^2 = \frac{8^2}{\pi^2(2k+1)^4} \qquad \sum\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{8^2}\cdot\frac{2}{3}\pi^3$$

$$a_k = \frac{\sqrt{\pi}\,8}{\pi(2k+1)^2} = \frac{8}{\sqrt{\pi}(2k+1)^2} \qquad |a_k|^2 = \frac{8^2}{\pi(2k+1)^4}$$

$$\sum\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi}{8^2}\cdot\frac{2}{3}\pi^3 = \frac{\pi^4}{96}$$

es. 1 24/02/2009

$u(x,y) = x^2 - y^2 - y \qquad f = u + iv$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 1 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \qquad \Delta u = 0$ ok

C.R.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$v(x_0, y) = \int 2x\,dy = 2xy + A(x)$

$2y + A'(x) = \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + 1 \qquad A'(x) = 1 \Rightarrow A(x) = x + c$

$v(x,y) = 2xy + x + c$

$f(x,y) = x^2 - y^2 - y + i(2xy + x + c)$

$f(0,0) = 0 - 0 - 0 + i(0 + 0 + c) = 0 \Rightarrow c = 0$

$f(x,y) = x^2 - y^2 - y + 2ixy + ix$

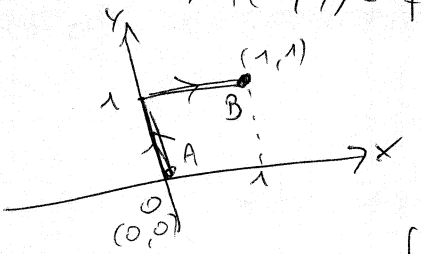
$z = x + iy \qquad z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$iz = ix - y$

$u = x^2 - y^2 - y$

$v = 2xy + x$

$\Rightarrow f(x,y) = f(z) = z^2 + iz$



$$\int_A^B f(z)\,dz = \int_A^B (u\,dx - v\,dy) + i\int_A^B (v\,dx + u\,dy) =$$

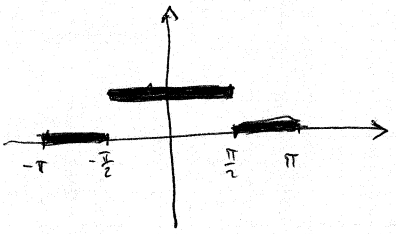
$$= \int_0^1 (x^2 - 2)\,dx + i\int_0^1 3x\,dx + i\int_0^1 (-y^2 - y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{3} - 2 + \frac{3}{2}i - \frac{1}{3}i - \frac{1}{2}i = -\frac{5}{3} + i\,\frac{9 - 2 - 3}{6} = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}i = \frac{1}{3}(2i - 5)$$

---

es. 2 24/02/2009

$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < -\pi/2 \\ 1 & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$



$\{\varphi^{(m)}\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}};\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mx);\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen}(mx)\right\} \quad m = 1, 2, \ldots$

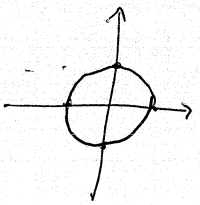
$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen}(nx)$ (f pari)

$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi n}\left[\operatorname{sen}(nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \ldots$



restam so os n dispari

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(nx)$$

$n = 2k+1$

$2kx + x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k}{2k+1}\pi$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)} (-1)^k \cos[(2k+1)x] =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2k+1} \cos\left[(2k+1)x\right]$$

~~$x = \pi \quad \cos[(2k+1)\pi] = \cos(2k\pi + \pi$~~

$x = 0$

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum \frac{\cos(n\pi)}{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Università degli Studi di Siena - Facoltà di Scienze

CdL in Fisica e Tecnologie Avanzate - Prova scritta di Metodi Matematici della Fisica

a.a. 2008/09 - 11 giugno 2009

Esercizio n.1 - Dall'espansione di $(x+iy)^3$, e utilizzando la formula di Eulero per la potenza n-ima di un numero complesso, dimostrare che, identificando $x \equiv \cos\theta\,, y \equiv \sin\theta$, si ha:

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta \qquad \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

Dimostrare che $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ può essere considerata come la parte reale di una funzione analitica $f(x,y) \equiv u + iv$. Determinare la sua parte immaginaria $v(x,y)$, con la condizione $f(0,0) = 0$. Dimostrare che si puó scrivere $f(x,y) \equiv f(z) = iz^n$. Trovare n. Calcolare $\int_A^B f(z)\,dz$, lungo un qualsiasi (perché?) cammino che collega il punto $A \equiv (0,0)$ con il punto $B \equiv 1+i$.

Esercizio n.2 - La funzione $f(x)$ è definita in $[0,\pi]$ come $f(x) \equiv x(\pi - x)$.

Considerare il suo prolungamento dispari $f_d(x)$ a tutto l'intervallo $[-\pi,\pi]$ e quindi ricavarne lo sviluppo di Fourier in termini delle funzioni $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\}$, $n = 1,2,\ldots$. Utilizzare tale sviluppo per dimostrare che:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots = \frac{\pi^3}{32}$$

Considerare il prolungamento pari $f_p(x)$, della stessa funzione $f(x)$, a tutto l'intervallo $[-\pi,\pi]$ e quindi ricavarne lo sviluppo di Fourier in termini delle funzioni $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\}$, $n = 1,2,\ldots$. Utilizzare tale sviluppo per dimostrare che:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Esercizio n.3 -Trovare la trasformata di Fourier $\hat{f}(p)$ della funzione $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$, utilizzando il teorema dei residui e il lemma di Jordan.

Usare l'identità di Parseval per dimostrare il seguente risultato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^4} = \frac{5}{16}\pi$$

Usare il teorema di inversione per calcolare l'antitrasformata di $\hat{f}(p)$ e confrontare con la funzione di partenza.

Esercizio n.4 - Utilizzare il teorema dei residui e il lemma di Jordan, per dimostrare:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta}{2+\sin\theta}d\theta = 2(2-\sqrt{3})\pi \qquad \oint_\Gamma \frac{e^z}{z^2(z-1)} = 2\pi i(e-2) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx = \frac{3}{4}\pi$$

essendo Γ la circonferenza definita da $\Gamma \equiv \{z : |z-1| = 2\}$, percorsa in senso antiorario.

Esercizio n.5 - Verificare il seguente risultato, intendendo l'integrale nel senso del Valore Principale di Cauchy:

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1-x^2)(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{10}$$

INTEGRALI PER PARTI SVOLTI

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx)\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{n} & n \text{ dispari} \\ -\frac{\pi}{n} & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(nx)\,dx = \begin{cases} \frac{\pi^2}{n} - \frac{4}{n^2} & n \text{ dispari} \\ -\frac{\pi^2}{n} & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} x \cos(nx)\,dx = \begin{cases} -\frac{2}{n^2} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx = \begin{cases} -\frac{2\pi}{n^2} & n \text{ dispari} \\ \frac{2\pi}{n^2} & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-2p} p\,dp = \frac{1}{4} \qquad p^2 = \frac{1}{p^2} \qquad p = \frac{1}{q}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-2p} p^2\,dp = \frac{1}{4}$$

1) $(x+iy)^3 \qquad x=\cos\theta \quad y=\sin\theta$

$(\cos\theta+i\sin\theta)^3 \overset{\text{de Moivre}}{=} \cos(3\theta)+i\sin(3\theta) = e^{i3\theta}$

$\sin(3\theta) = \dfrac{e^{3i\theta}-\cos(3\theta)}{i}$

$(\cos\theta+i\sin\theta)^3$ binomio di Newton

$\cos^3\theta + \binom{3}{1}\cos^2\theta\, i\sin\theta + \binom{3}{2}\cos\theta(-\sin^2\theta) - i\sin^3\theta = \cos(3\theta)+i\sin(3\theta)$

uguaglio Re con Re e Im con Im

$\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

$$\int \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = \int -6xy\,dy = -6x\int y\,dy = -3xy^2 + A(x)$$

$$-3y^2 + A'(x) = \frac{\partial v}{\partial x} = -3y^2 + 3x^2 \Rightarrow A'(x) = 3x^2 \quad A(x) = x^3 + c$$

$v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + c$

$f(x,y) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2) + c$

$f(0,0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$f(x,y) = y^3 - 3x^2y + ix^3 - 3ixy^2 = (ix+y)^3$

$i(x+iy) = ix - y \qquad (ix-y)^3 = -ix^3 + 3x^2y + 3ixy^2 - y^3$

$ix+y \cdot \dfrac{ix+y}{ix+y} = \dfrac{-x^2-y^2}{ix+y}$

$(x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 \;\Big]\cdot i = ix^3 - 3x^2y - 3ixy^2 + y^3$

2 int. in $x: y=0$ + 2 int. in $y: x=1$

$$\int_0 + i\int_0^1 x^3\,dx - \int_0^1 (1-3y^2)\,dy + i\int_0^1 (y^3-3y)\,dy = \frac{i}{4} - 1 + 1 + \frac{i}{3} - \frac{3}{2}i =$$

$$\frac{3i+4i-6i}{12} = \frac{i}{12}$$

(2) $f(x) = \pi x - x^2$ $\quad -f(-x) = -(-\pi x - x^2) = x^2 + \pi x$

$\pi x + x^2 \quad x<0$

$x(\pi - x) \qquad -[-x(\pi + x)] = x(\pi + x)$

$$x(\pi - |x|) = \begin{cases} x(\pi - x) & x>0 \\ x(\pi + x) & x<0 \end{cases}$$

$$-f(-x) = -[-x(\pi - |-x|)] = x(\pi - |x|)$$

$$f_d(x) = \alpha_0 + \cancel{\sum \alpha_n \cos nx} + \sum \beta_n \operatorname{sen}(nx)$$

$$\beta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_d(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - |x|)\operatorname{sen}(nx)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \pi x \operatorname{sen}(nx)\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \operatorname{sen}(nx)\,dx = \begin{cases} \frac{2\pi}{n} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{n} - \frac{4}{n^2}\right) & n \text{ disp.} \\ \cancel{-\frac{2\pi}{n} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{n}\right)} & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\beta_n = \frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{n} + \frac{8}{\pi n^2} \qquad \text{solo } n \text{ dispari}$$

$$f_d(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^2\pi} \operatorname{sen}[(2k+1)x]$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \qquad f_d(x) = -\frac{\pi}{2}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{2}\pi = -\frac{3\pi^2}{4} =$$

$$= \frac{8}{\pi}\sum \frac{-(-1)^k}{(2k+1)^2} \qquad -\frac{3\pi^3}{32} = \sum \frac{-(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

$$\operatorname{sen}\left[-(2k+1)\frac{\pi}{2}\right] = \begin{matrix} k=0 & -1 \\ k=1 & 1 \\ k=2 & -1 \end{matrix} = -(-1)^k$$

$$x = \frac{\pi}{2} \qquad f_d = \frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \qquad \sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^3}{32}$$

$$x(\pi - x) \qquad f(x) \overset{?}{=} f(-x) = -x(\pi + x) = \ldots \qquad |x|(\pi - |x|) = \begin{cases} x(\pi - x) & x>0 \\ -x(\pi + x) & x<0 \end{cases}$$

$$f(x) = f(-x) = x(\pi - x) = x(\pi - x) \qquad f_p(x) = |x|(\pi - |x|)$$

$$f_p(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) \qquad \alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\,dx = \frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{3}\pi^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \pi x \cos(nx)\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx =$$

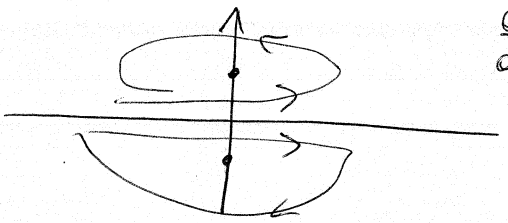
$$= \begin{cases} n \text{ dispari}: & -\frac{4}{n^2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi}{n^2}\right) = 0 \\ n \text{ pari}: & 0 - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{n^2} = -\frac{4}{n^2} \end{cases} \qquad f_p(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k)^2}\cos(nx) \to x = 0$$

$$-\frac{\pi^2}{6} = -\sum \frac{1}{k^2}$$

(3) $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ $\quad \hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x)\,dx$

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ipx}\,dx}{(1+x^2)(1+x^2)} \qquad x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ipx}\,dx}{(x+i)^2(x-i)^2}$$



$\frac{d}{dz}(z-i)^{-2} = -2(z-i)^{-3}$

$p>0$ chiudo da sotto

$$\int = -2\pi i \, \mathrm{Res}(z=-i) = -2\pi i \, \frac{d}{dz}\left[\frac{e^{-ipz}}{(z-i)^2}\right]_{z=-i} =$$

$$= -2\pi i \left[-\frac{1}{ip}\frac{e^{-ipz}}{(z-i)^2} - \frac{2e^{-ipz}}{(z-i)^3}\right]_{z=-i} = +2\pi i\left[+\frac{1}{ip}\frac{e^{-p}}{(-2i)^2} + \frac{2e^{-p}}{(-2i)^3}\right] =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{e^{-p}}{ip\cdot(-4)} + \frac{2e^{-p}}{+8i}\right) = \frac{\pi e^{-p}}{2p} + \frac{2\pi e^{-p}}{4} = \frac{2\pi e^{-p} + 2p\pi e^{-p}}{2\cdot 2p} =$$

$$= \frac{1}{2p}\pi e^{-p}(1+p)$$

$p<0$ chiudo da sopra

$$\int = 2\pi i \, \frac{d}{dz}\left[\frac{e^{-ipz}}{(z+i)^2}\right]_{z=i} = 2\pi i\left[-\frac{1}{ip}\frac{e^{-ipz}}{(z+i)^2} - \frac{2e^{-ipz}}{(z+i)^3}\right]_{z=i} =$$

$$= 2\pi i\left[+\frac{1}{ip}\frac{e^{p}}{(+4)} + \frac{2e^{p}}{+8i}\right] = \frac{\pi e^{p}}{2p} + \frac{2\pi e^{p}}{4} = \frac{2\pi e^{p} + 2\pi p e^{p}}{2\cdot 2p} = \frac{1}{2p}\pi e^{p}(1+p)$$

$$\hat{f}(p) = \frac{\pi}{2p} e^{-|p|}(1+p)$$

CdL in Fisica e Tecnologie Avanzate - Prova scritta di Metodi Matematici della Fisica
a.a. 2008/09 - 11 giugno 2009 - SOL

Esercizio n.1 - Essendo $(x+iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ e $(\cos\theta + i\,\sin\theta)^3 = e^{i3\theta} \equiv \cos 3\theta + i \sin 3\theta$, si ottengono, per $x \equiv \cos\theta\,, y \equiv \sin\theta$, le relazioni: $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta\,, \quad \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$
Essendo $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$, u risulta una funzione armonica e quindi può essere proposta come parte reale di una funzione analitica. Integrando la condizione di Cauchy-Riemann $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ si ottiene

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -6xy \Longrightarrow v(x,y) = -3xy^2 + g(x)\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \iff \quad g'(x) = 3x^2 \implies g(x) = x^3 + cost$$

quindi, con la richiesta $f(0,0) = 0 \Longrightarrow v(x,y) = -3xy^2 + x^3 \Longrightarrow f(x,y) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2) \equiv iz^3$
L'integrale richiesto, valutato lungo la bisettrice del primo quadrante, fornisce:

$$\int_A^B f(z)\,dz = \int_\gamma [u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy] + i\int_\gamma [u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx] = i\frac{(1+i)^4}{4} = -i$$

Esercizio n.2 - La funzione $f_d(x)$ è dispari e coincide con $f(x)$ per $0 \le x \le \pi$, per cui il suo sviluppo di Fourier contiene solo termini in $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Quindi, restringendo tale funzione a $[0,\pi]$, si ha $f(x) = f_d(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\,, \quad 0 \le x \le \pi$, con i coefficienti dello sviluppo:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f_d(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx\,dx = \begin{cases} \frac{8}{n^3\sqrt{\pi}} & n\,dispari \\ 0 & n\,pari \end{cases}$$

da cui, per $0 \le x \le \pi$:

$$f(x) = x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3} \quad \Longrightarrow x = \pi/2 \Longrightarrow \frac{\pi^3}{32} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi/2}{(2k+1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots$$

La funzione $f_p(x)$ è pari e coincide con $f(x)$ per $0 \le x \le \pi$, per cui il suo sviluppo di Fourier contiene solo termini in $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Quindi, restringendo tale funzione a $[0,\pi]$, si ha $f(x) = f_p(x) = a_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\,, \quad 0 \le x \le \pi$, con i coefficienti dello sviluppo:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f_p(x)dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi} x(\pi - x)dx = \frac{\pi^3}{3\sqrt{2\pi}}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f_p(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\cos nx\,dx = \begin{cases} 0 & n\,dispari \\ -\frac{4\pi}{n^2\sqrt{\pi}} & n\,pari \end{cases}$$

da cui, per $0 \le x \le \pi$:

$$f(x) = x(\pi - x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_n a_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} = \frac{\pi^2}{6} - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k)x}{(2k)^2} \quad \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k)^2}$$

Esercizio n.3 - La trasformata di Fourier della funzione $f(x)$ si ottiene calcolando l'integrale:

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ipx}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ipx}}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ipz}}{(z+1)^2(z-i)^2}\,dx = \begin{cases} -2\pi i Res(-i) & p > 0 \\ 2\pi i Res(+i) & p < 0 \end{cases}$$

avendo la funzione integranda due poli di ordine due in $z_{\mp} = \mp i$, cui corrispondono i residui

$$Res(\mp i) = \frac{d}{dz}\left[\frac{e^{-ipz}}{(z \mp i)^2}\right]_{z=\mp i} = \frac{1}{4}e^{\mp p}(p \pm 1)i \quad \Longrightarrow \quad \hat{f}(p) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}e^{-p}(p+1) & p > 0 \\ -\frac{\pi}{2}e^{p}(p-1) & p < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{2}e^{-|p|}(1+|p|)$$

avendo utilizzato il lemma di Jordan, dopo avere chiuso il cammino di integrazione "da sotto" per $p > 0$ e "da sopra" per $p < 0$, e avere preso in considerazione i residui relativi alle corrispondenti singolarità interne. Dall'uguaglianza di Parseval $\|\hat{f}\|^2 = 2\pi\|f\|^2$ si ottiene:

$$\|\hat{f}\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(p)|^2\, dp = \frac{\pi^2}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2p}(1+p^2+2p)\, dp = \frac{\pi^2}{2}\left[\frac{5}{4}\right] \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^4}\, dx = \frac{5}{16}\pi$$

Per riottenere la funzione di partenza, basta calcolare l'antitrasformata di $\hat{f}(p)$:

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(p)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi}\, \hat{f}(p)\, e^{ipx} = \frac{1}{4}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{p(1+ix)}(1-p)\, dp + \int_0^{+\infty} e^{p(ix-1)}(1+p)\, dp\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1+ix} - \frac{1}{ix-1} + \frac{1}{(ix+1)^2} + \frac{1}{(ix-1)^2}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{4}{(x^2+1)^2}\right] \equiv f(x)$$

Esercizio n.4 - Con la posizione $z = e^{i\theta}$, $\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$ e $\sin\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i}$, il primo integrale diventa:

$$\int_0^{2\pi} \frac{cos^2\theta}{2+\sin\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\oint_{C_1} \frac{z^4+1+2z^2}{z^2(z^2+4iz-1)}\, dz = \pi i\left[Res(0) + Res(z_1)\right] = \pi i\left[-4i + 2i\sqrt{3}\right] = 2(2-\sqrt{3})\pi\,,$$

dove $z_{1,2} = (-2 \pm \sqrt{3})i$, soluzioni dell'equazione $z^2+4iz-1=0$, sono le singolarità della funzione integranda, diverse dall'origine, di cui solo la prima all'interno del cerchio unitario C_1.

La funzione integranda del secondo integrale ha un polo doppio in $z = 0$ e un polo semplice in $z = 1$, entrambi all'interno della circonferenza Γ centrata in $z = 1$ e di raggio 2. Calcolandone i residui, si ottiene:

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2(z-1)}\, dz = 2\pi i[Res(0) + Res(1)] = 2\pi i\left[\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{(z-1)}\right]_{z=0} + \left[\frac{e^z}{z^2}\right]_{z=1}\right] = 2\pi i(e-2)$$

Per il terzo integrale, $z = 0$ è una singolarità apparente che si può "aggirare" (per esempio da sopra) deformando il cammino di integrazione all'interno del dominio di analiticità della funzione integranda. Quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\, dx = \int_{\gamma(+)} \left[\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2iz}\right]^3 dz = \int_{\gamma(+)} \frac{e^{-3iz} - 3e^{-iz}}{8iz^3}\, dz = -\frac{\pi}{4}\left[Res_1(0) - 3Res_2(0)\right] = \frac{3}{4}\pi$$

gli unici contributi non nulli derivando dall'uso del lemma di Jordan, con chiusura "da sotto", con residui (polo interno di ordine 3 in $z = 0$): $Res_1(0) = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[e^{-3iz}\right]_{z=0} = -\frac{9}{2}$, $Res_2(0) = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[e^{-iz}\right]_{z=0} = -\frac{1}{2}$.

Esercizio n.5 - La funzione integranda ha due poli semplici in $x_{1,2} = \mp 1$, lungo il cammino d'integrazione, oltre ad altri due poli semplici in $z = \mp 2i$. Valutando l'integrale nel senso del valore principale di Cauchy, avendo deformato il cammino di integrazione nel cammino γ_+, che aggira "da sopra" le singolarità, si ha:

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1-x^2)(x^2+4)} = I^+ + i\pi f_1(x_1) + i\pi f_2(x_2) = \int_{\gamma_+} \frac{dz}{(1-z^2)(z^2+4)} + i\pi\left[\frac{(-1)}{(-10)} + \frac{(-1)}{10}\right] =$$

$$= \int_{\gamma_+} \frac{(-1)}{(z^2-1)(z^2+4)}\, dz = -2\pi i Res(+2i) = -2\pi i\left[\frac{1}{(z+2i)(z^2-1)}\right]_{z=2i} = \frac{\pi}{10}$$

avendo definito $f_1(x_1) = \left[\frac{(-1)}{(z-1)(z^2+4)}\right]_{z=-1}$ e $f_2(x_2) = \left[\frac{(-1)}{(z+1)(z^2+4)}\right]_{z=1}$ e usato il lemma di Jordan, con chiusura "da sopra" del cammino di integrazione, con un unico contributo derivante dal polo in $z = 2i$.