

06/10/2008

## MECCANICA ANALITICA

Studio dei sistemi dinamici  
formulazione Lagrangiana  
formulazione Hamiltoniana

+

Analisi complessa

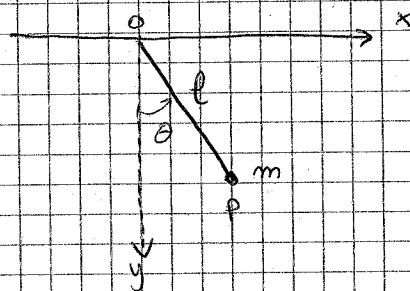
||

Basi per la meccanica quantistica

$$m\ddot{q} = \underline{F}$$

- PUNTO MATERIALE modello principale (Newton)
- DUE PUNTI MATERIALI problema dei due corpi
- problema dei tre corpi (sole terra luna) non ha soluzione analitica (non è integrabile)
- $n$  PUNTI MATERIALI ci sono stratagemmi a ricordo di come è fatto il sistema di punti.
- CORPO RIGIDO → due equazioni cardinali (eq. di Eulero)

- trascorriamo le reazioni vincolari → EQUAZIONI DI LAGRANGE descrivono la dinamica dei corpi rigidi in modo più semplice (oppure solo le coordinate che descrivono gli effettivi gradi di libertà del sistema)



$m$  si muove lungo una circonferenza di raggio  $l$ . Istante per istante la sua posizione è descritta da due coordinate.

(SISTEMA VINCOLATO)

Sistema vincolato  $\rightarrow$  non ha veramente due gradi di libert  indipendenti  $\{x(t), y(t)\}$ ,  
perch :  $x^2(t) + y^2(t) = l^2$ .

La coordinata  $\rightarrow q$  pi  comoda   l'angolo in questa situazione (e basta quello)

$$q = \theta(t)$$

Equazione del moto per  $\theta$  = equazione di Lagrange

la "giusta coordinata" lagrangiana

Non compaiono le equazioni del vincolo perch  sono intrinseche nella coordinata scelta.

S: tratto di scegliere le coordinate pi  opportune per ogni sistema di  $N$  punti materiali

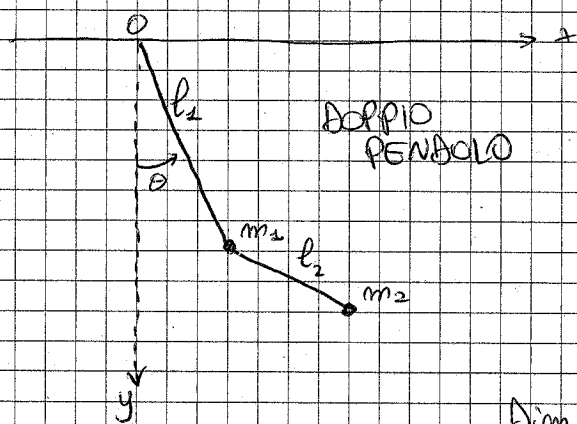
$N$  numero dei punti materiali

$\pi$  numero delle condizioni di vincolo

$l$  numero dei gradi di libert 

$$3N - \pi = l$$

$l$  = numero di coordinate lagrangiane (e di equazioni di Lagrange) per uno specifico sist. di punti materiali.



$$x_1(t), y_1(t), \\ x_2(t), y_2(t)$$

$$\begin{array}{l} z=0 \\ \downarrow \\ (3-1)N - \pi = l \\ \uparrow \\ 2 \text{ (} m_1 \text{ e } m_2 \text{)} \end{array}$$

Dimensione dello spazio

$x_1$  e  $y_1$  non indipendenti.

Fissata  $m_1$ ,  $x_2$  e  $y_2$  non indipendenti.  $\pi = 2$

$$(x_2(t) - x_1(t))^2 + (y_2(t) - y_1(t))^2 = l_2^2$$

$$l = 4 - 2 = 2$$

⇒ le equazioni di Lagrange sono 2, non lineari, accoppiate

Risolubile in questo caso con la tecnica delle piccole oscillazioni (modi normali)

Questa tecnica porta ad equazioni lineari e non accoppiate.

Formulazione Hamiltoniana: eq. di Lagrange poste in modo diverso, pronte per la meccanica quantistica (per risolvere l'equazione di Schrödinger ad esempio).

Funzione Hamiltoniana = energia del sistema

~~equazioni~~ 2 equazioni di Lagrange (2° ordine)

↓  
2 equazioni di Hamilton (1° ordine)

Parenthesi di Poisson → commutatori

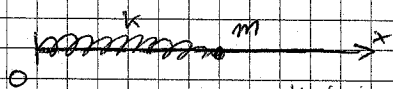
$$[A, B] \equiv AB - BA \leftarrow \{A, B\}$$

(le variabili dinamiche diventano operatori)

→ P. di Poisson commutano questi operatori)

Mappe logistiche → comportamento caotico

Meccanica moderna studia come le equazioni lineari provocano caos nei sistemi dinamici.



SISTEMA UNIDIMENSIONALE

oscillatore armonico

mo abito

$$x = x(t)$$

REGIME LINEARE

$$ma = \underline{F}$$

$$a \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$$

derivato seconda di  $x$  risp. a  $t$

$$\Rightarrow m \ddot{x} = -Kx$$

forza di richiamo

proporzionale all'allungamento

$$\left. \begin{array}{l} ma = F \\ \text{regime lineare} \\ \text{armonicit\`a} \end{array} \right\} \Rightarrow m \ddot{x} = -Kx$$

Equazione differenziale al 2° ordine

$$m \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} = \underline{F} \quad \underline{x} = \underline{x}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \underline{p} = \underline{F} \quad \underline{p} = m \underline{v}$$

$$\frac{d}{dt} (m \underline{v}) = \underline{F} \quad m = \text{costante}$$

$$m \frac{d \underline{v}}{dt} = \underline{F}$$

$x$  = scalare

$\underline{x}$  = vettore

$\underline{x}$  raggio vettore (incognita nell'eq. di Newton)

$\underline{F}$  è il termine noto ... ma in questo caso dipende da  $\underline{x}$  e da  $\dot{\underline{x}}$ .

$$m \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} = \underline{F}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t), t) \quad (\text{CASO GENERALE})$$

Fintantoché i sistemi sono Newtoniani,  $\underline{F}$  non dipende dall'accelerazione.

$$m \ddot{x} = -Kx \quad (\text{CASO PARTICOLARE})$$

- scalare anziché vettoriale (una dimensione)

-  $\underline{F}$  dipende solo da  $\underline{x}$



"Fissando  $x$ ,  $F$  è nota" significa "è nota la dipendenza di  $F$  da  $x$  e da  $\dot{x}$ "

Servono 2 condizioni iniziali per risolvere l'eq. differenziale di 2° grado.

↓  
Soluzione unica

↓  
Riesco a predire il comportamento futuro del sistema a partire dalle condizioni iniziali.

$$\begin{cases} m \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} = \underline{F}(x(t), \dot{x}(t), t) \\ \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \\ \dot{\underline{x}}(0) = \underline{v}_0 \end{cases}$$

← Il problema è ben posto

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -kx \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

definizione  
↓  
 $\omega^2 \equiv \frac{k}{m} = \text{pulsazione}$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \quad x(t) = ?$$

posto  $\omega^2 = 1$ :  $\ddot{x} = -x$

$$\sin(t) = x_1(t)$$

$$\cos(t) = x_2(t)$$

$$\omega^2 \neq 1: \quad x_1(t) = \sin(\omega t)$$

$$x_2(t) = \cos(\omega t)$$

Soluzioni particolari

Soluzione generale: combinazione lineare di seni e coseni

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

Le due sol. sono linearmente indipendenti <sup>\*</sup>  $\Rightarrow$  costituiscono una base per l'insieme delle soluzioni

$$* \quad c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = 0 \Rightarrow \forall t, c_1 = c_2 = 0$$

$$\begin{cases} C_1 \dot{x}_1(t) + C_2 x_2(t) = 0 \\ C_2 \dot{x}_1(t) + C_2 \dot{x}_2(t) = 0 \end{cases} \quad \text{Vediamolo come un sistema in } C_1 \text{ e } C_2$$

Voglio come unica soluzione lo 0  $\Rightarrow$  il determinante deve essere  $\neq 0$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$$

$$w(t) = \det X \neq 0 \quad (\text{condizione})$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) & -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\det X = -\omega \sin^2(\omega t) - \omega \cos^2(\omega t) = -\omega \neq 0 \quad \forall t$$

$\Rightarrow$  le soluzioni che avevamo trovato sono linearmente indipendenti  $\Rightarrow$  costituiscono una base per lo spazio vettoriale che contiene tutte le soluzioni dell'eq. differenziale data.

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

Posso determinare A e B usando le condizioni iniziali.

$$\dot{x}(t) = \omega A \cos(\omega t) - B \omega \sin(\omega t)$$

$$x(0) = B = x_0$$

$$\dot{x}(0) = A \omega = v_0$$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t)$$

Data una generica equazione differenziale, chi ci assicura che  $\exists!$  soluzione?

#### TEOREMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \underline{\Phi}(x, t) \\ x(0) = \underline{x}_0 \end{cases}$$

$$\underline{x} \in \mathbb{R}^d \quad \underline{x} = \underline{x}(t) = ?$$

CONDIZIONI DI LIPSCHITZ:

$$\| \underline{\Phi}(y, t) - \underline{\Phi}(x, t) \| \leq L \| y - x \|$$

(il campo è limitato dalla distanza moltiplicata per una costante)

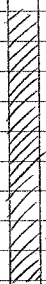
$\Rightarrow \exists$  soluzione in  $T$ :  $\exists!$  soluzione in  $[0, T]$   
↑  
finita

ESEMPIO

$$\dot{x} = x^{1/2}$$

$$d=1$$

non vale Lipschitz  $\rightarrow$  sol. non unica



$$\begin{cases} \dot{x} = x^\alpha \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

•  $\alpha < 1$

più soluzioni

•  $\alpha > 1$

soluzione non finita per alcuni  $T$

•  $\alpha = 1$

$\exists!$  soluzione finita  $\forall T$

Per riportarmi a questo caso:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t)$$

$$\begin{cases} \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) \\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \\ \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t) \end{cases}$$

due equazioni diff. del 1° ordine + due condizioni

$$\underline{x}(t) = (\vec{r}(t), \vec{v}(t)) \Rightarrow d=6$$

$$\underline{\Phi}(t) = (\vec{v}(t), \frac{\vec{F}}{m}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)) \Rightarrow d=6$$

$\Rightarrow$  Il Teorema di Cauchy assicura l'esistenza e l'unicità delle soluzioni in un intervallo di tempo finito.

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{la soluzione è unica} \\ \text{e periodica} \end{array}$$

$$\text{periodo} = T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t)$$

$$x(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ampiezza}}}{C} \sin(\omega t + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fase}}}{\varphi})$$

$$x(t) = C \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x(0) = C \sin \varphi = x_0$$

$$\dot{x}(t) = \omega C \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(0) = \omega C \cos \varphi = v_0 \quad \frac{v_0}{\omega} = C \cos \varphi$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{x_0 \omega}{v_0} \Rightarrow \varphi = \text{arc tg} \left( \frac{x_0 \omega}{v_0} \right)$$

$$\begin{cases} x_0^2 = C^2 \sin^2 \varphi \\ \frac{v_0^2}{\omega^2} = C^2 \cos^2 \varphi \end{cases} \Rightarrow C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

Il sistema è conservativo, unidimensionale  
la forza è posizionale

Un sistema unidimensionale dove la forza è posizionale è sempre conservativo.

$$\exists U = U(x) \text{ t.c. } F = - \frac{dU}{dx} = -kx$$

↑  
en. potenziale

$$U(x) - U(x_0) = - \int_{x_0}^x F(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{Nel nostro caso: } U(x) &= U(x_0) + \int_{x_0}^x kx dx = \\ &= U(x_0) + \left[ \frac{1}{2} kx^2 \right]_{x_0}^x \end{aligned}$$

A meno di costanti,  $U(x) = \frac{1}{2} kx^2$

molla ideale  $\Rightarrow$  forza lineare  $\Rightarrow$  en. potenziale quadratico

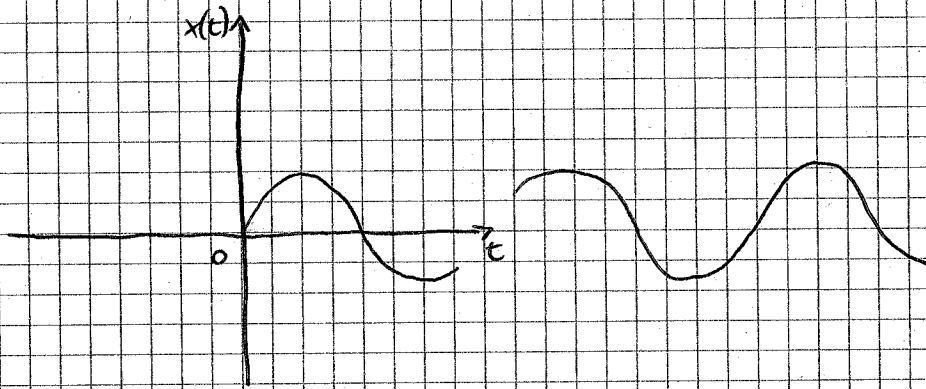
Sistema conservativo  $\Rightarrow$  si conserva l'energia totale

$$E = T + U \leftarrow \begin{array}{l} \text{en. potenziale} \\ \uparrow \\ \text{en. cinetico} \end{array}$$

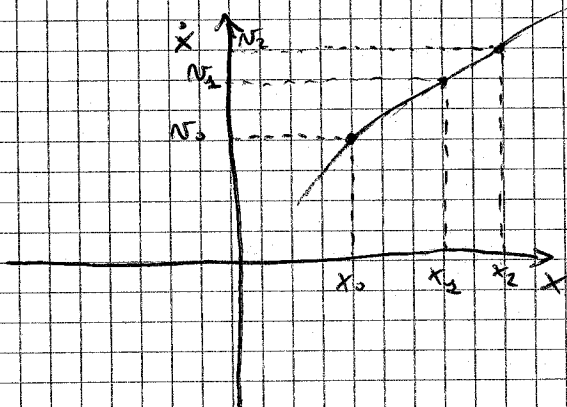
$$E = T + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \boxed{\frac{1}{2} (m \dot{x}^2 + k x^2)}$$

$$\frac{dE}{dt} = m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} =$$

$$= \dot{x} (m \ddot{x} + k x) = 0 \Rightarrow E \text{ costante } \forall t \\ \Rightarrow \text{il sist. \u00e9 conservativo}$$



$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t) \\ x_0 \equiv 0 \end{cases}$$



$\leftarrow$  so costruire quest'orbita se conosco le sol. del mio sistema

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

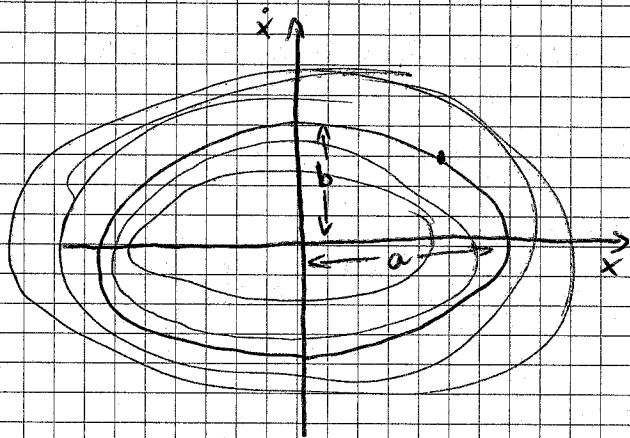
$$1 = \frac{1}{\frac{2E}{m}} \dot{x}^2 + \frac{1}{\frac{2E}{k}} x^2$$

$$a^2 = \frac{2E}{k} \quad b^2 = \frac{2E}{m\omega^2}$$



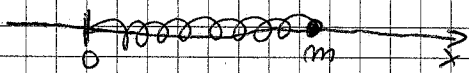
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\dot{x}^2}{b^2} = 1 \quad a \text{ e } b \text{ sono noti}$$

$\Rightarrow$  l'orbita è un'ellisse



più aumenta  $E$ ,  
più si ingrandisce  
l'ellisse

08/10/2008



$d=1$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad F = -kx$$

lunghezza della molla a riposo nulla  
molla ideale  $\rightarrow$  forza ideale

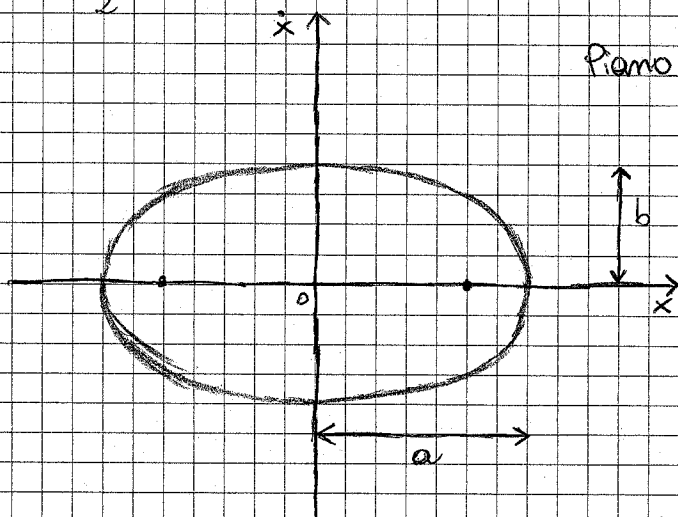
$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

$$\bar{E} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) \quad U(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \text{costante} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$$

Fissati i dati iniziali:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k x_0^2$$



Piano delle fasi

$$a^2 = \frac{2\bar{E}}{k}$$

$$b^2 = \frac{2\bar{E}}{m}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$x(t) = C \sin(\omega t + \varphi) = [L]$$

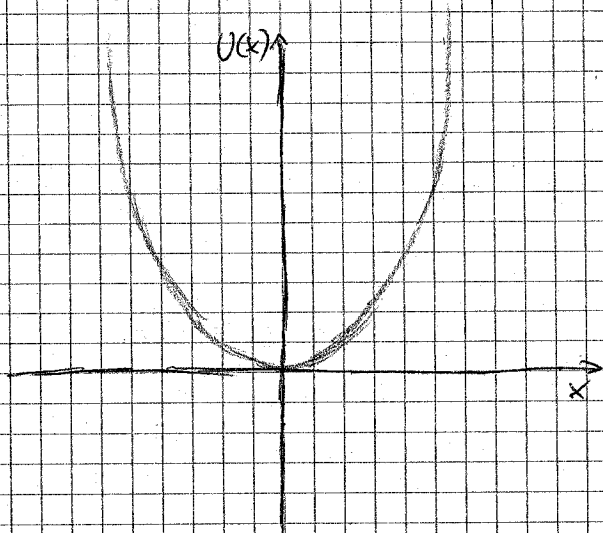
$$\dot{x}(t) = \omega C \cos(\omega t + \varphi) = [L/T] = [m/s]$$

$$\omega = [rad/s]$$

$T$  è periodo sia di  $x$  che di  $\dot{x}$

Indipendentemente da dove partiamo sull'ellisse, fissata  $E$ , dopo un tempo  $T$  il punto torna nella stessa posizione, non uscendo mai dalla curva.

Ogni posizione è una diversa condizione cinematica



$$E - U(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

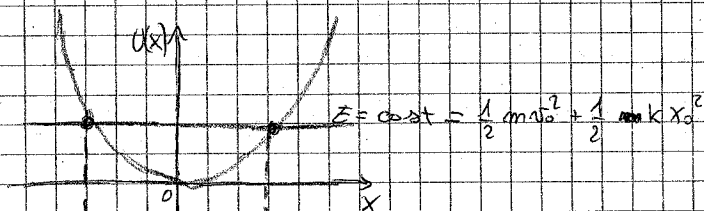
$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m} (E - U(x))$$

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)}$$

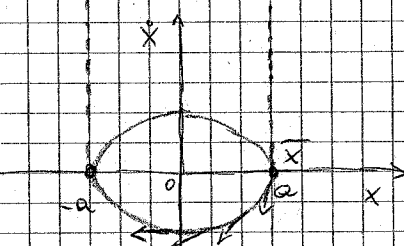
infatti l'ellisse è simmetrica rispetto all'asse  $x$

$$\text{Fisso } E = U(x) \Rightarrow \dot{x} = 0$$

→ I punti in cui  $E = U(x)$  sono i punti d'arresto del sistema  $(a, 0)$  e  $(-a, 0)$



$$[K] = \frac{[F]}{[L]} = \frac{[m]}{[T^2]}$$



$$v_{\vec{r}} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{d\dot{x}}{dt} \right) = (\dot{x} \hat{i} + \ddot{x} \hat{j})$$

Le due componenti del piano delle fasi sono  $x$  e  $\dot{x} \Rightarrow$   
 Le tangenti istantanee all'orbita hanno componenti  $\dot{x}$  e  $\ddot{x}$  e si chiamano velocità di fase.  
 $\dot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow (\dot{x}, \ddot{x}) = (0, -\dot{x}\omega^2) \Rightarrow$  il punto si muove in senso orario.

## METODO DI INTEGRAZIONE PER QUADRATURE

Si basa sulla conservazione dell'energia.

Si fa una sola integrazione anziché due per risolvere un'eq. diff. del 2° ordine.

$$\ddot{x} = \frac{\sqrt{2}}{m} \sqrt{E - U(x)} \quad \leftarrow \text{siamo passati da un'eq. con } \ddot{x} \text{ ad un'eq. con } \dot{x}.$$

fare la quadratura = integrazione.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{m} \sqrt{E - U(x)}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \frac{\sqrt{2}}{m} dt, \quad \dot{x} \neq 0 \quad (E \neq U(x))$$

Passo da condizioni iniziali a condizioni generali:

$$0 \rightarrow t$$

$$x_0 \rightarrow x(t)$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \frac{\sqrt{2}}{m} \int_0^t dt = \frac{\sqrt{2}}{m} t$$

Espressione utile anche per determinare il periodo ponendo  $t = T$

$$2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \frac{\sqrt{2}}{m} T(E)$$

Ogni volta che c'è un moto periodico si può determinare  $T$  per quadratura e risulta dipendente da  $E$ .

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2} k x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{m} t$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{k}{2E} x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{m} t$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E} x^2}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} t \quad z = \sqrt{\frac{k}{2E}} x$$

$$dz = \sqrt{\frac{k}{2E}} dx \quad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} t = \omega t$$

$$x_0 = 0 \quad z_0 = 0 \quad \Rightarrow \arcsen z = \omega t \quad \Rightarrow z = \sen(\omega t)$$

$$\sqrt{\frac{k}{2E}} x = \sen(\omega t)$$

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sen(\omega t)$$

Abbiamo utilizzato solo la condizione di vincolo cinematico che è la conservazione dell'energia.

Integrando una sola volta abbiamo saltato l'eq. diff.

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k x_0^2 \quad x_0 = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Nell'altro modo avevamo trovato:

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ \frac{v_0}{\omega} & & x_0 \end{array}$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m}} \sqrt{\frac{m}{k}} \sin(\omega t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega t) \quad \text{ok.}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Il periodo NON dipende dall'ampiezza dell'oscillazione

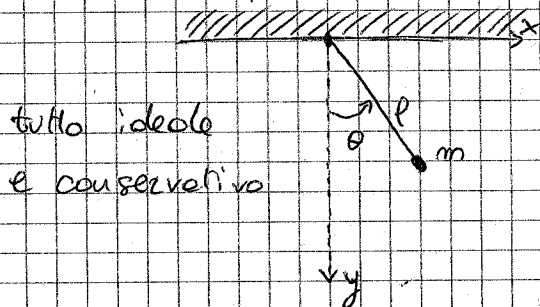
$\Rightarrow$  ISOCRONISMO

Le oscillazioni armoniche sono ISOCROME.

(lo studiava Galileo)

Le oscillazioni sono sempre isocrone? NO.

Esempio: pendolo semplice



1 grado di libertà

$\Rightarrow$  1 eq. Lagrangiana  
(in  $\theta$ )

$$E = T + U(\theta)$$

Non c'è dissipazione  $\rightarrow$  la forza è potenziale

$$E = T + U(\theta) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + U(\theta)$$

solo  $\dot{\theta}$  non avrebbe avuto le dimensioni di una velocità

$mg$  è concorde con l'asse y

$$U(\theta) = -mg l \cos \theta$$

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mg l \cos \theta$$

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = m l^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mg l \dot{\theta} \sin \theta = 0$$

$$m l^2 \dot{\theta} \left[ \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta \right] = 0, \quad \dot{\theta} \neq 0$$

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$  eq. del 2° ordine a differenza

di  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ , questa non è lineare (compare  $f(\theta) = \sin \theta$  anziché  $\theta$ ).

Per piccole oscillazioni,  $\sin \theta \approx \theta$ , e l'equazione diventa lineare:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Le piccole oscillazioni del pendolo sono ISOCROME.  
(Galileo)

$$e: T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (\text{periodo})$$

13/10/2008

$$\{f_m\}_{m=0}^{\infty} \quad \forall m \quad f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_m(x) = \frac{2}{\pi} \arctg(mx)$$

$$\lim_m \frac{2}{\pi} \arctg(mx) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad A = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Convergenza su  $\mathbb{R}$  = non uniforme  
perché  $f(x)$  non è continua.

14/10/2008

{ Oscillatore armonico forzato }  
{ Oscillatore armonico smorzato }

•  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  (O.D.E.) (ordinary differential equation)  
(II ordine)  $d=1$   
(lineare)

•  $E = T + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$  (legge di conservazione)

$\frac{dE}{dt} = 0$  (sistema conservativo)

• PIANO DELLE FASI

• METODI GRAZIOSI PER QUADRATURE

• ISOCRONISMO  $T = \frac{2\pi}{\omega}$   $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

• PENDOLO SEMPLICE (piccole oscillazioni)



Suppongo che  $\exists$  forza esterna:

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \leftarrow F \text{ esterna}$$

$F(t)$  si chiama forzante.

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t)$$

sol. dell'eq.  
omogenea

una soluzione  
particolare

Suppongo  $F(t)$  oscillante  $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$

ampiezza

$\neq \omega$

$\omega$  si chiama frequenza  
naturale oppure pulsazione.

"pulsazione  
del termine  
forzante"

$\omega \approx \Omega \Rightarrow$  RISONANZA

$$x_p(t) = C \sin(\Omega t) \quad (\text{proviamo})$$

$$x_0(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

$$\begin{cases} x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + C \sin(\Omega t) \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$x(0) = B = 0$$

$$\dot{x}(t) = \omega A \cos(\omega t) + C \Omega \cos(\Omega t)$$

$$\dot{x}(0) = 0 = \omega A + C \Omega \Rightarrow A = -C \Omega / \omega$$

$$\Rightarrow x(t) = C \left[ \sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega} \sin(\omega t) \right]$$

Come determino  $C$ ? Impongo  $x(t)$  soluzione  
dell'eq. differenziale.

$$mC \left[ -\Omega^2 \sin(\Omega t) + \frac{\Omega \omega}{\omega} \sin(\omega t) \right] + kC \left[ \sin(\Omega t) + \frac{\Omega}{\omega} \sin(\omega t) \right] = F_0 \sin(\Omega t)$$

$$k = m\omega^2$$

$$C \left[ -\Omega^2 m + m\omega^2 \right] \sin(\Omega t) = F_0 \sin(\Omega t) \quad \forall t$$

$$\Rightarrow mC(\omega^2 - \Omega^2) = F_0 \Rightarrow C = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2}$$

Quindi LA soluzione  $x(t)$  è:

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \Omega^2} \left[ \sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega} \sin(\omega t) \right]$$

che è soluzione del problema.

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(\Omega t) \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{OSCILLATORE FORZATO})$$

$F_0 \sin(\Omega t)$  = prototipo di termine oscillante con pulsazione diversa da  $\omega$ . Per il Teorema di Fourier con una c. lineare di questo tipo occorrono tutte le possibili oscillazioni del termine.

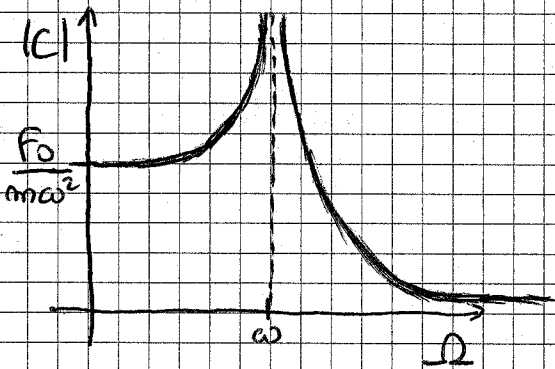
Cosa succede quando  $\Omega \rightarrow \omega$ ?

$$x(t) \rightarrow \frac{F_0}{m} \frac{0}{0} \quad \text{forma indeterminata}$$

$$C = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \Omega^2}$$

$$|C| \rightarrow \infty$$

FENOMENO DI  
RISONANZA



↑  
ha fatto cedere  
~~due ponti~~!  
due i  
 $N \rightarrow \infty$

Studiamo che succede nell'intorno della risonanza:

$$\Omega \approx \omega \quad \Omega = \omega + \epsilon \quad (\text{Taylor})$$

$$\omega^2 - \Omega^2 = \omega^2 - (\omega + \epsilon)^2 = \omega^2 - \omega^2 - 2\omega\epsilon - \epsilon^2 =$$

$$= -\cancel{\omega^2} - 2\omega\epsilon \quad \epsilon \text{ piccolo} \Rightarrow \epsilon^2 \ll \epsilon$$

$$\sin(\Omega t) = \sin[(\omega + \epsilon)t] \approx \sin(\omega t) + t \cos[(\omega + \epsilon)t] \Big|_{\epsilon=0} \cdot \epsilon$$

(sviluppo di Taylor in potenze di  $\epsilon$ )

$$\sin(\Omega t) - \frac{\omega + \epsilon}{\omega} \sin(\omega t) \approx$$

$$\cancel{\sin(\omega t)} + \epsilon t \cos(\omega t) - \cancel{\sin(\omega t)} - \frac{\epsilon}{\omega} \sin(\omega t)$$

Quindi, per  $\Omega \approx \omega$ :

$$x(t) \approx \frac{F_0/m}{-2\omega} \left[ t \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right]$$

$$x(t) \approx \frac{F_0/m}{2\omega^2} \left[ \sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t) \right] \quad \text{nella vicinanza della risonanza}$$

↑  
\*

È sparito  $\epsilon$ . Comparare solo la frequenza naturale.

\* questo termine rende il sistema difficilmente controllabile (più tempo passa, più aumenta l'ampiezza, e il nostro modello non funziona più perché vale solo per piccole oscillazioni).

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + C \sin(\Omega t)$$

$e^{i\theta}$

Formula di Eulero per l'esponenziale complesso:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

### PARENTESI MATEMATICHE

Sviluppo con Taylor per  $\theta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 + \underbrace{(-\sin \theta)}_{\theta=0} \theta + \frac{1}{2} \underbrace{(-\cos \theta)}_{\theta=0} \theta^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \underbrace{(\sin \theta)}_{\theta=0} \theta^3 + \frac{1}{4!} \underbrace{(\cos \theta)}_{\theta=0} \theta^4 - \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{1}{4!} \theta^4 - \frac{1}{6!} \theta^6 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= 0 + \underbrace{(\cos \theta)}_{\theta=0} \theta + \frac{1}{2!} \underbrace{(-\sin \theta)}_{\theta=0} \theta^2 + \frac{1}{3!} \underbrace{(-\cos \theta)}_{\theta=0} \theta^3 \\ &+ \frac{1}{4!} \underbrace{(\sin \theta)}_{\theta=0} \theta^4 + \frac{1}{5!} \underbrace{(\cos \theta)}_{\theta=0} \theta^5 - \\ &= \theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 + \dots \end{aligned}$$

$$i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1 \quad \dots$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \underbrace{(ie^{i\theta})}_{\theta=0} \theta + \frac{1}{2!} \underbrace{(-e^{i\theta})}_{\theta=0} \theta^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \underbrace{(-ie^{i\theta})}_{\theta=0} \theta^3 + \frac{1}{4!} \underbrace{(e^{i\theta})}_{\theta=0} \theta^4 = \\ &= 1 + i\theta - \frac{1}{2!} \theta^2 - i \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{4!} \theta^4 + \dots \end{aligned}$$

Metto in evidenza  $i$ :

$$e^{i\theta} = \left[ 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \pm \dots \right] + i \left[ \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \pm \dots \right]$$

$\parallel$   $\cos \theta$                        $\parallel$   $\sin \theta$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

per  $\theta \rightarrow 0$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta & (\theta \text{ è diventato } -\theta) \\ e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos \theta$$

Rappresentazione in termini di esponenziali complessi di seno e coseno

$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin \theta$$

Nel nostro caso,  $\theta = \omega t$

$$x(t) = a e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t}$$

$\uparrow$  racchiude A e B                       $\nwarrow$  deriva da C

passando dai reali ai complessi.

Se  $\Omega = \omega + \varepsilon$ :

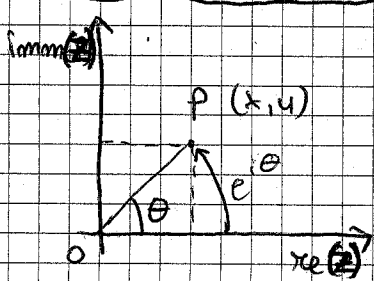
$$x(t) = a e^{i\omega t} + b e^{i\omega t} e^{i\varepsilon t} = (a + b e^{i\varepsilon t}) e^{i\omega t}$$

→ FENOMENO DEI BATTIMENTI

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} \text{ periodo che "domina"}$$

$$T_\varepsilon = \frac{2\pi}{\varepsilon} \gggg \gg T_\omega$$

fattore oscillante con frequenza  $\omega$   
 fattori oscillanti più piccoli  
 pulsazione =  $\varepsilon$



P complesso (z)

$$|OP| = 1$$

$$z = x + iy = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

$e^{i\theta}$  operazione di rotazione in senso antiorario di un angolo  $\theta$  sul cerchio unitario.

15/10/2008

Aggiungo un termine di dissipazione al pendolo semplice. E' una forza che dipende dalla velocità:

$$m\ddot{x} + kx = -\mu\dot{x} \quad \text{OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\mu}{m} = 2\frac{h}{\uparrow} \quad \ddot{x} + 2hx + \omega^2 x = 0$$

coefficiente di smorzamento (si suppone positivo)

$$E = T + U = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$\frac{dE}{dt} \neq 0 \quad \frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x}$$

smorzamento

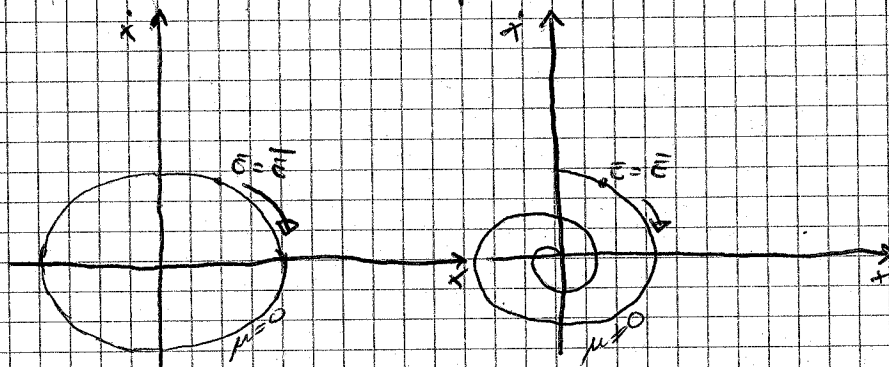
dall'eq. dell'oscillatore smorzato

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}(\ddot{x} + \omega^2 x) = m\dot{x}(-2h\dot{x}) = -\mu\dot{x}^2 \leftarrow \text{sempre negativo}$$

Definisco una funzione di dissipazione:

$$J = \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2$$

$\frac{dE}{dt} = -2J$  misura il rate di diminuzione dell'energia del sistema.



$$E = E(t)$$

$$[\mu] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{[M][L][T^{-2}]}{[L][T^{-1}]} = \frac{[M]}{[T]}$$

$$x(t) = ?$$

$$x(t) = e^{\lambda t} ?$$

ANSATZ

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} + 2h\lambda e^{\lambda t} = 0 \quad \forall t?$$



posso sempre dividere per  $e^{2t}$  (non si annulla mai)

$$\lambda^2 + \omega^2 + 2h\lambda = 0$$

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega^2 = 0$$

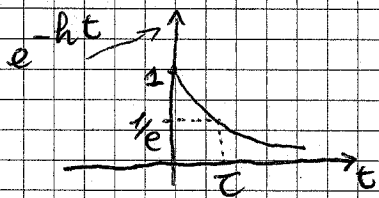
Abbiamo ridotto un'eq. differenziale del 2° ordine ad un'eq. algebrica di 2° grado.

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2}$$

Mi aspetto che lo spazio vettoriale generato da un'eq. diff. del secondo ordine sia di dimensione 2.

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{Soluzione generale.}$$

<u>Caso 1</u>	$h < \omega$	Caso SOTTOSMORZATO
<u>Caso 2</u>	$h > \omega$	Caso SOPRASMORZATO
<u>Caso 3</u>	$h = \omega$	Caso CRITICAMENTE SMORZATO



più  $\tau$  è grande, più la funzione decade lentamente

$$\tau : e^{-h\tau} = \frac{1}{e} \Rightarrow \tau = \frac{1}{h}$$

$\frac{1}{e}$  volte il  
valore iniziale

tempo caratteristico  
dell'esponenziale

$$x(t) = e^{-ht} [\dots] \quad \text{a seconda del caso}$$

$$1) h < \omega, \quad \lambda_{1,2} = -h \pm i\omega' \quad \omega' \equiv \sqrt{\omega^2 - h^2} > 0$$

↑ parte -1 fuori dalla radice

Soluzioni complesse coniugate ( $a + ib$ )

$$x(t) = e^{-ht} \left[ a_1 e^{-i\omega' t} + a_2 e^{i\omega' t} \right]$$

$\downarrow$   $\cos(\omega' t) - \text{sen}(\omega' t)$        $\downarrow$   $\cos(\omega' t) + \text{sen}(\omega' t)$

$a_1, a_2$  complessi

Come soluzione prendo solo la parte reale di  $x(t)$ :

$$x(t) = \text{Re} \left\{ e^{-ht} \left[ a_1 e^{-i\omega' t} + a_2 e^{i\omega' t} \right] \right\} =$$

$$= A e^{-ht} \cos(\omega' t + \alpha)$$

↑ termine oscillante, va bene anche  $\text{sen}$ .

A ampiezza  $\alpha$  fase  $\omega' \in \mathbb{R}$  pulsazione  
 $\omega' < \omega$  sempre

$$\begin{aligned} h < \omega & \text{ CASO SOTTO SMORZATO} \\ \omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2} & , \omega' < \omega, \\ x(t) = A e^{-ht} \cos(\omega' t + \alpha) \end{aligned}$$

2)  $h > \omega$   $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$   $\lambda_{1,2}$  negative

$$x(t) = e^{-ht} [C_1 e^{-\omega'' t} + C_2 e^{\omega'' t}]$$

$$\omega'' = \sqrt{h^2 - \omega^2} \in \mathbb{R} > 0 \text{ sempre}$$

nessun termine oscillante  $\Rightarrow$  smorzamento aperiodico

$$\begin{aligned} h > \omega & \text{ CASO SOPRASMOZZATO} \\ \omega'' = \sqrt{h^2 - \omega^2} & \omega'' < h \\ x(t) = e^{-ht} [C_1 e^{-\omega'' t} + C_2 e^{\omega'' t}] \end{aligned}$$

3)  $h = \omega$   $\lambda_{1,2}$  coincidenti  $\lambda_{1,2} = -h$

$$x(t) = C_1 e^{-ht} \quad \text{NON BASTA l'eq. del 2° ordine}$$

ha bisogno di due sol. lin. indipendenti.

L'ANSATZ non va bene in questo caso.

• Supponiamo:

$$x(t) = A(t) e^{-ht} \quad (\text{"ampliamento" dell'ANSATZ})$$

$$\dot{x} = \dot{A} e^{-ht} - h A e^{-ht}$$

$$\ddot{x} = \ddot{A} e^{-ht} - 2h \dot{A} e^{-ht} - h^2 A e^{-ht} + h^2 A e^{-ht}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x + 2h \dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\omega^2 = h^2)$$

$$\ddot{A} - 2h \dot{A} + h^2 A + h^2 A + 2h \dot{A} - 2h^2 A = 0$$

(ho diviso per l'esponenziale)

$$\ddot{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{A} = C_1 (\text{cost.}) \quad \Rightarrow \quad A(t) = C_1 t + C_2$$

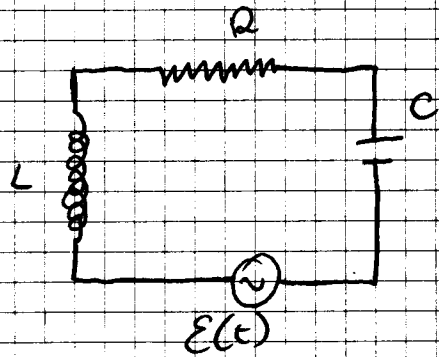
$$\Rightarrow x(t) = (C_1 t + C_2) e^{-ht} \quad \text{anche qua non c'è nulla di periodico}$$

$$\begin{aligned} h = \omega & \text{ CASO CRITICAMENTE SMORZATO} \\ x(t) = C_1 t e^{-ht} + C_2 e^{-ht} \end{aligned}$$

Le soluzioni devono essere linearmente indipendenti, quindi

$$\det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow -\cancel{h}t e^{-2ht} - e^{-2ht} + \cancel{h}t e^{-2ht} = -e^{-2ht} \neq 0 \forall t \Rightarrow \text{OK}$$



Circuito RLC

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dE(t)}{dt}$$

corrente alternata

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \frac{1}{L} \frac{dE}{dt}$$

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \dot{I} + \frac{1}{LC} I = F(t)$$

$\downarrow$   $\omega$   $\downarrow$   $\omega$   
 $\sim 2h$   $\sim \omega^2$  (R (resistenza) fa da) smorzatore

$$L \leftrightarrow m \quad R \leftrightarrow \mu \quad \frac{1}{C} \leftrightarrow K$$

# OSCILLATORE ARMONICO FORZATO E SMORZATO

$$\ddot{x} + \omega^2 x + 2h\dot{x} = F(t)$$

Consideriamo il caso  $h < \omega$

$$F(t) = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

$$F(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x + 2h\dot{x} = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t)$$

Suppongo:  $x_p(t) = B e^{i\Omega t} \Rightarrow$

$$(i\Omega)^2 B e^{i\Omega t} + \omega^2 B e^{i\Omega t} + 2h(i\Omega) B e^{i\Omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

Divido tutto per  $e^{i\Omega t}$ :

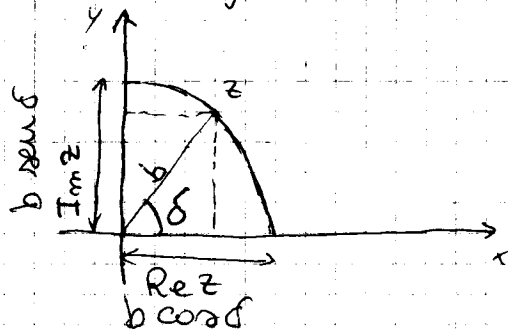
$$-\Omega^2 B + \omega^2 B + 2hi\Omega B = F_0/m \Rightarrow$$

$$B = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \Omega^2 + 2i h \Omega} \quad (\text{num. complesso})$$

$$B = (\text{Re } B) + i(\text{Im } B) = b e^{i\delta}$$

Parentesi matematica

$$z = x + iy = \text{Re } z + i \text{Im } z = b e^{i\delta} = b (\cos\delta + i \sin\delta)$$



$$b = \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2}$$

$$\text{tg } \delta = \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z}$$

$\delta = \text{fase}$

La  $i$  sta al denominatore. Razionalizziamo:

$$B = \frac{F_0/m [\omega^2 - \Omega^2 - 2i h \Omega]}{[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2]} =$$

$$= \frac{F_0}{m} \left[ \frac{\omega^2 - \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2} + i \frac{(-2h \Omega)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2} \right]$$

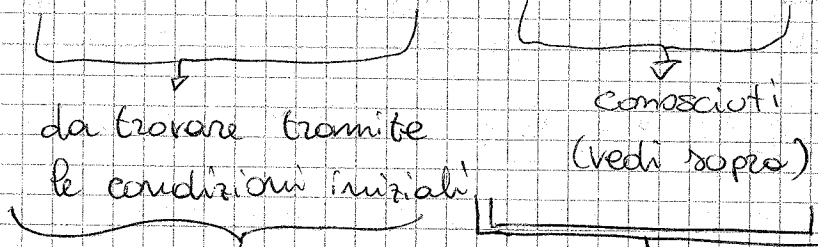
Re B Im B

$$\text{tg } \delta = -\frac{2h\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$$

$$b = \frac{F_0}{m} \frac{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2\Omega^2}}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2\Omega^2} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2\Omega^2}}$$

$$B = be^{i\delta} \quad x_p(t) = be^{i\delta} e^{i\Omega t}$$

$$\Rightarrow x(t) = a e^{-ht} \cos(\omega' t + \alpha) + b \cos(\Omega t + \delta)$$



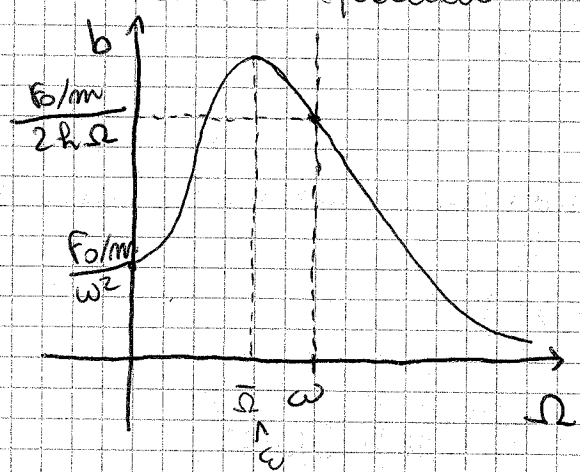
termine oscillante  
in  $[b, b]$   
(parte STAZIONARIA)

↳ termine oscillante dominato da  $e^{-ht}$   $\Rightarrow$  dopo un po' di tempo diventa irrilevante (parte TRANSIENTE)

La dissipazione consuma energia che però viene continuamente fornita dal termine forzante.

$$\forall t \gg \gg \frac{1}{h} \quad x(t) \rightarrow x_{st}(t) = b \cos(\Omega t + \delta)$$

Cosa succede quando  $\Omega \approx \omega$ ?

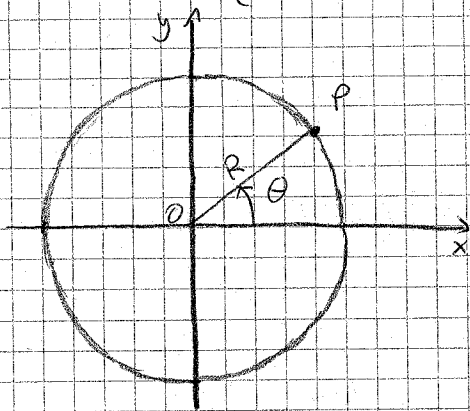


Non c'è risonanza.



# FIGURE DI LISSAJOUS

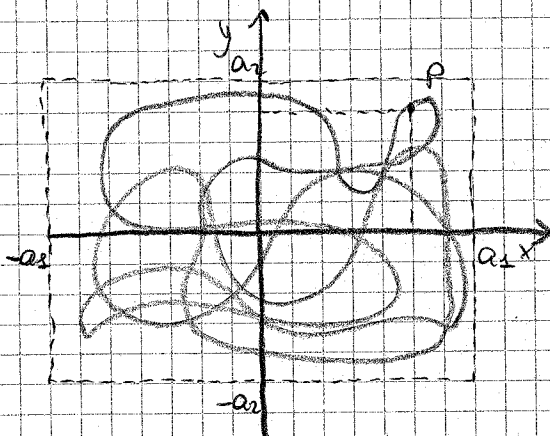
(Composizione dei moti armonici)



Se  $P$  si muove di moto circolare uniforme, le sue coordinate sono descritte da due equazioni di moto armonico con stessa ampiezza e stessa pulsazione, ma sfasati di  $\pi/2$ :

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t) \\ y(t) = R \sin(\omega t) = R \cos(\omega t - \pi/2) \end{cases}$$

E se il moto non è circolare uniforme?



$$\begin{cases} x(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y(t) = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$|\varphi_1 - \varphi_2| = \frac{\pi}{2}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$$

$$\forall t, \quad -a_1 \leq x(t) \leq a_1$$

$$-a_2 \leq y(t) \leq a_2$$

LA TRAIETTORIA DI  $P$  È CHIUSA? QUASI MAI!

È chiusa se  $\exists$   $m_1, m_2$  <sup>interi</sup> :  $m_1 T_1 = m_2 T_2 = T$  <sup>periodo dell'orbita</sup>

$$m_1 \frac{2\pi}{\omega_1} = m_2 \frac{2\pi}{\omega_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Quando il rapporto tra le frequenze è un rapporto tra numeri interi, la traiettoria si ripete  $\Rightarrow$  l'orbita è chiusa.

$\frac{m_1}{m_2} = 1 \Rightarrow$  moto circolare uniforme

20/10/2008

EQUAZIONE NON LINEARE

$$F(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \varepsilon) = 0$$

$$y = y(t)$$

$$\varepsilon \ll 1$$

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \varepsilon^3 y_3(t) + \dots$$

$y_0(t)$  SOLUZIONE per  $\varepsilon = 0$   
IMPERTURBATA

Dato che  $\varepsilon$  è molto piccolo basta prendere i primi termini per avere una soluzione realistica (metodo perturbativo)

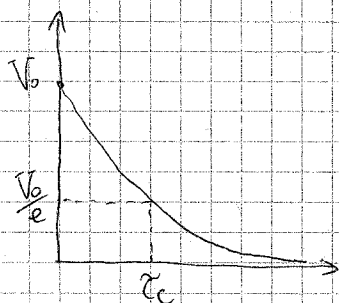
Moto in un mezzo resistente non lineare

$$\begin{cases} m \frac{dv}{d\tau} = -a v + b v^2 \\ v(0) = V_0 \end{cases}$$

$b=0$  l'eq. diventa lineare:  $m \frac{dv}{d\tau} = -a v$

$$\frac{dv}{d\tau} = -\frac{a}{m} v \quad \int_{V_0}^{v(\tau)} \frac{dv}{v} = -\int_0^{\tau} \frac{a}{m} d\tau \Rightarrow$$

$$\ln \frac{v(\tau)}{V_0} = -\frac{a}{m} \tau \Rightarrow v(\tau) = V_0 e^{-\frac{a}{m} \tau}$$



tempo caratteristico

$$= \tau_c = m/a$$

$$[\tau_c] = \frac{[m]}{[a]} = [\tau] \text{ (tempo)}$$

$$\frac{[m]}{[a]}$$

Definiamo le variabili adimensionali:

$$y = \frac{v}{V_0} \quad t = \frac{\tau}{\tau_c} = a \frac{\tau}{m}$$

$$\frac{dv}{d\tau} = V_0 \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\tau} = V_0 y \frac{a}{m}$$

$$m V_0 y \frac{a}{m} = -a V_0 y + b V_0^2 y^2$$

$$\begin{cases} \dot{y} = -y + \frac{b V_0}{a} y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{stessa eq. di prima ma scritta in modo adimensionale}$$

$$\varepsilon = \frac{b \cdot V_0}{a}$$

$b \cdot V_0$  ha le stesse dim. di  $a$   
 $\Rightarrow \varepsilon$  adimensionale

$$\begin{cases} \dot{y} = -y + \varepsilon y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{Eq. di BERNOULLI}$$

Il termine quadratico può essere considerato come una piccola perturbazione alla parte lineare

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots$$

$$\dot{y}_0 + \varepsilon \dot{y}_1 + \varepsilon^2 \dot{y}_2 = - (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2) + \varepsilon (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2)^2$$

$\varepsilon$  è come una gerarchia di equazioni, si eguagliamo i coefficienti livello per livello [ad ogni ordine]

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = -y_0 & y_0(0) = 1 \\ \dot{y}_1 = -y_1 + y_0^2 & y_1(0) = 0 \\ \dot{y}_2 = -y_2 + 2y_0 y_1 & \dots \end{cases}$$

altrimenti dipenderebbe da  $\varepsilon$

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) + \dots$$

Ogni equazione dipende dalla precedente

$$y_0(t) = e^{-t}$$

$$\dot{y}_1 = -y_1 + e^{-2t}$$

$$y_1(t) = e^{-t} + A e^{\alpha t} \quad (\text{proviamo})$$

$$y_1(0) = 0$$

$$1 + A = 0$$

$$A = -1$$

$$y_1(t) = e^{-t} - A e^{-2t}$$

$$\dot{y}_2 = -y_2 + 2e^{-t} e^{-2t}$$

$$-e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-t} - e^{-2t} = e^{-2t} \quad \text{OK}$$

$$\dot{y}_2 = -y_2 + 2y_0 y_1 = -y_2 + 2e^{-t} (e^{-t} - e^{-2t}) \quad y_2(0) = 0$$

$$y_2(t) = e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t} \quad (\text{ANSATZ}) \quad (\text{OK})$$

...

$$y(t) = e^{-t} + \varepsilon [e^{-t} - e^{-2t}] + \varepsilon^2 [e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t}] + \dots$$

(metodo perturbativo)

Soluzione approssimata al 2° ordine di una equazione non lineare.

In realtà posso risolvere anche per via analitica.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + y = \varepsilon y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\int_1^y \frac{dy}{\varepsilon y^2 - y} = \int_0^t dt$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon y^2 - y} &= \frac{1}{y(\varepsilon y - 1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{\varepsilon y - 1} = \\ &= \frac{A\varepsilon y - A}{y(\varepsilon y - 1)} + \frac{By}{y(\varepsilon y - 1)} \quad \begin{aligned} A &= -1 \\ -\varepsilon + B &= 0 \\ B &= \varepsilon \end{aligned} \end{aligned}$$

$$-\int_1^y \frac{1}{y} dy + \varepsilon \int_1^y \frac{dy}{\varepsilon y - 1} = t$$

$$-\log y + \log \left| \frac{\varepsilon y - 1}{\varepsilon - 1} \right| = t$$

$$\ln \left| \frac{y(\varepsilon - 1)}{y\varepsilon - 1} \right| = -t \quad \leftarrow \text{Sono 2 soluzioni}$$

$$\frac{y(\varepsilon - 1)}{y\varepsilon - 1} = e^{-t}$$

verificare che l'altra sol. non verifica le condizioni iniziali

$$(\varepsilon - 1)y = \varepsilon y e^{-t} - e^{-t}$$

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{1 - \varepsilon(1 - e^{-t})}$$

per  $\varepsilon \rightarrow 0$   $y(t) \rightarrow e^{-t}$  (sol. imperturbata)

per  $t \rightarrow 0$   $y(t) \rightarrow 1$  (cond. iniziale)

Soluzione analitica di una equazione non lineare.

La soluzione perturbativa è l'espansione di Taylor al 2° ordine di questa soluzione.

Un'altra tipica situazione non lineare è il pendolo semplice.

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta \quad (\text{costante})$$

procedura per quadrature

$$\frac{2E}{ml^2} + \frac{2mgl}{ml^2} \cos \theta = \dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2}{ml^2} (E + mgl \cos \theta)}$$

↳ coordinata lagrangiana

per alcuni valori di  $E$  la radice può diventare negativa  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$

$E < mgl \implies$  radice negativa

$\implies$  non tutti i  $\theta$  vanno bene.

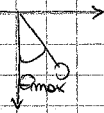
L'esistenza di una soluzione reale dipende dal valore dell'energia.

①  $E < mgl \quad |\theta| < \theta_{\max}$

$$\cos(\theta_{\max}) = -E/mgl \iff$$

$$\cos \theta \geq -E/mgl$$

moto di LIBRAZIONE



②  $E > mgl$  no restrizioni su  $\theta$

Il pendolo ruota (non cambia mai direzione) MOTO DI ROTAZIONE

③  $E = mgl$  passaggio da orbite chiuse a orbite aperte sul piano delle fasi.

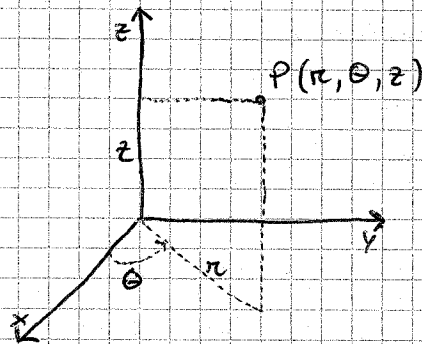


# COORDINATE

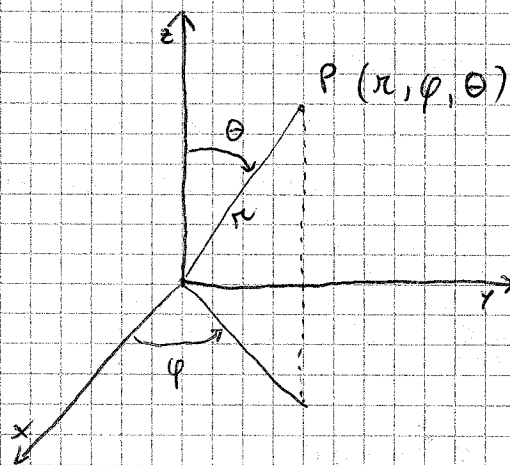
24/10/2008

- POLARI
- SFERICHE
- CILINDRICHE

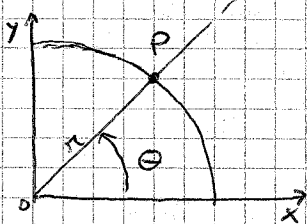
CILINDRICHE



SFERICHE



Passiamo a  $z=0$  in coordinate cilindriche:



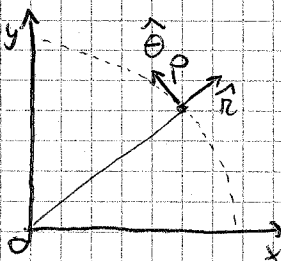
$$\{x, y\} \rightarrow \{r, \theta\}$$

Da due rette coordinate si passa a due linee coordinate: quella che contiene il raggio vettore  $r$ , e la circonferenza di centro  $O$  e raggio  $r$ .

Istante per istante queste linee sono ortogonali.

Sono coordinate locali.

Possiamo introdurre due vettori dipendenti dal tempo:



$$\begin{aligned} \underline{r} &= \overline{OP} = r \hat{r} \\ &= x \hat{i} + y \hat{j} \end{aligned}$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{OP}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

Possiamo notare che  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ , ruotati, danno  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$ .  
 $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$  sono il risultato di una matrice di rotazione applicata a  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ .

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

Quindi, derivando, ciò che dipende dal tempo è  $\theta$ :

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\sin\theta\dot{\theta}\hat{i} + \cos\theta\dot{\theta}\hat{j} = \dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \underline{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

Siamo in coordinate polari.

$\dot{r}\hat{r}$  velocità radiale

$r\dot{\theta}\hat{\theta}$  velocità trasversa

E se voglio scrivere l'energia cinetica?

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \underline{v} \cdot \underline{v} = \frac{1}{2} m (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})^2 \quad (\text{prodotto scalare di } \underline{v} \text{ per } \underline{v}) \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2\hat{r} \cdot \hat{r} + r^2\dot{\theta}^2\hat{\theta} \cdot \hat{\theta}) \quad \left[ \begin{array}{l} \hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0 \\ \hat{r} \cdot \hat{r} = 1 \quad \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} = 1 \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad \text{EN. CINETICA IN COORDINATE POLARI} \end{aligned}$$

Possiamo all'accelerazione.

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} \quad \hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0 \quad (\text{condizione di ortogonalità})$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\hat{\theta} \quad \frac{d\hat{r}}{dt} \cdot \hat{\theta} + \hat{r} \cdot \frac{d\hat{\theta}}{dt} = 0$$

$$\hat{r} \cdot \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\hat{\theta} \cdot \hat{\theta} = -\dot{\theta}$$

La derivata di un versore è sempre ortogonale a quel versore.

$$\underline{a} \cdot \underline{a} = 1 \quad \text{derivo:}$$

$$\underline{a} \cdot \frac{d\underline{a}}{dt} + \frac{d\underline{a}}{dt} \cdot \underline{a} = 0$$

Il prodotto scalare è commutativo:

$$2\underline{a} \cdot \frac{d\underline{a}}{dt} = 0$$

$$\hat{r} \cdot \frac{d\hat{\theta}}{dt} = 2 \hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0 = -\dot{\theta} \quad *$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\underline{r} \hat{r} + \underline{v} \hat{\theta}) =$$

$$= \dot{r} \hat{r} + r \dot{\hat{r}} + \dot{v} \hat{\theta} + v \dot{\hat{\theta}} + (-r \dot{\theta}^2 \hat{r})$$

Accelerazione di un punto che si muove in un piano scritta in coordinate polari:

$$\underline{a} = (r\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} \cdot \hat{\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\hat{\theta}}{dt} \perp \hat{\theta} \Leftrightarrow \frac{d\hat{\theta}}{dt} \parallel \hat{r}$$

$$* \Leftrightarrow \frac{d\hat{\theta}}{dt} = \dot{\theta} \hat{r}$$

Definisco il vettore VELOCITÀ AREOLARE:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \overline{OP} \wedge \underline{v}$$

↳ prodotto vettoriale

$$= \frac{1}{2} (r \hat{r}) \wedge (r \dot{\hat{r}} + v \hat{\theta})$$

Il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è 0

$$= \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \hat{r} \wedge \hat{\theta}$$

$\hat{r} \wedge \hat{\theta}$  produce un vettore  $\hat{k}$  uscente dal piano.

$$= \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} \hat{k}$$

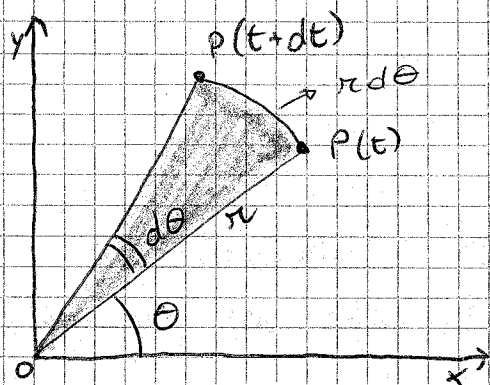
(REGOLA MANO DESTRA)

(uscite dal piano che istante per istante contiene sia  $\overline{OP}$  sia  $\underline{v}$ )

Il vettore vel. areolare è il vettore istante per istante ortogonale al

piano del moto, e di modulo  $r^2 \dot{\theta} / 2$ .

$$\hat{k} = \hat{k}(t)$$



Qual è l'area "spazzata" da  $r$  in un tempo  $dt$ ?

Se considero la forma come un triangolo (approssimo l'arco con una corda):

$$\text{Area} = \text{base} \cdot \text{altezza} / 2$$

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

per unità di tempo.

Per questo si chiama velocità **AREOLARE**.

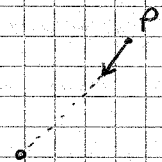
### MOTO CENTRALE

Il moto si chiama **CENTRALE** (di centro  $O$ ) se la retta che contiene il vettore  $\underline{a}$  passa, istante per istante, per  $O$ .

La retta d'azione dell'accelerazione punta sempre verso  $O$ .

$\exists O$  (centro del moto)

$\underline{a} \parallel \underline{OP}$



Il moto dei pianeti è governato dalle leggi del moto centrale.

Nel moto centrale la velocità areolare è **COSTANTE**

$$\frac{d}{dt} (OP \wedge \underline{v}) = \underline{v} \wedge \underline{v} + OP \wedge \underline{a} = 0 \quad \text{se } OP \parallel \underline{a}$$

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{dA}{dt} \text{ è costante.}$$

Significa dire che i moti centrali sono moti **PIANI**.

Tutti i moti dei pianeti attorno al sole sono moti piani. L'orbita dei loro moti è ellittica: un'ellisse di cui il Sole occupa uno dei fuochi.

$$\underline{F} = m \underline{a} = - \frac{G m M}{r^2} \hat{r}$$

Legge di gravitazione universale

Indice:

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$$

Moto centrale  $\Leftrightarrow a_\theta = 0$  Infatti:

$$a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \quad (\text{modulo della vel. areolare})$$

Formula di BINET:

$$\boxed{r^2 \dot{\theta} = c} \quad (\text{costante delle aree})$$

$c$  va determinato con i dati iniziali.

$\dot{\theta} = \frac{c}{r^2}$  Posso riscrivere la parte radiale dell'accelerazione.

$$\ddot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{c}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

Ho trasformato la derivata temporale di  $r$  nella derivata di  $r$  rispetto a  $\theta$ .

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{c}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) \dot{\theta} = \frac{c}{r^2} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{c}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) \right] = \\ &= \frac{c^2}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left[ -\frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \right] = -\frac{c^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

$$a_r = -\frac{c^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{c^2}{r^4}$$

$$\boxed{a_r = -\frac{c^2}{r^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]} \quad \begin{array}{l} \text{FORMULA} \\ \text{DI} \\ \text{BINET} \end{array}$$

Con questa possiamo ottenere le orbite di un punto che si muove di moto centrale

$$\boxed{r = r(\theta)}$$

Inseriamo il fatto che l'accelerazione è dovuta alla forza gravitazionale (PROBLEMA DI KEPLERO)

$$a_r = -\frac{k}{r^2} \quad k = GM$$

$$\underline{a} = a_r \hat{r} = -\frac{k}{r^2} \hat{r}$$



$$\frac{k}{r^2} = \frac{c^2}{r^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$$

È un'equazione differenziale ( $r = r(\theta)$ ) che sappiamo risolvere.

$$\frac{k}{c^2} = \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r}$$

È un oscillatore armonico in  $1/r$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F_0$$

$$\frac{1}{r} \sim x \quad \omega \sim 1$$

$$\frac{1}{r} = \left( \frac{1}{r} \right)_o + \left( \frac{1}{r} \right)_p$$

$$\left( \frac{1}{r} \right)_p = \frac{k}{c^2}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

$\frac{1}{r}(\theta)$   $r(\theta)$  è l'eq. dell'orbita

In questo modo indichiamo tutti i tipi di orbite: chiuse (pianeti), aperte (comete) ...

Sono tutte coniche: ellissi, parabole, iperboli.

22/10/2008

$(r, \theta)$   $c = r^2 \dot{\theta} =$  costante proporzionale al modulo della velocità angolare.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} OP \wedge \underline{v}$$

$OP \wedge m \underline{v} =$  momento angolare

Moto centrale  $\Leftrightarrow$  si conserva momento della quantità di moto.

$$\underline{a} = a_r \hat{r} \quad a_\theta = 0$$

$$a_r = -\frac{c^2}{r^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \quad \text{formula di Binet}$$

$$r = r(\theta) \quad a_r = -\frac{k}{r^2} \quad \frac{k}{r^2} = \frac{c^2}{r^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$$

$$k = M$$

$M$  è la massa del corpo che esercita l'attrazione gravitazionale e può essere immaginata concentrata in  $O$  (origine del sist. di riferimento).

Se  $M \gg m$  posso considerare il centro di gravità fermo.

$\frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$  soluzione dell'eq. diff. di un oscillatore armonico in  $\frac{1}{r}$  con pulsazione 1 e non omogeneo.

Restano da determinare  $c$  e  $\Theta_0$ .

Definisco  $r(\Theta_0) \equiv r_0$



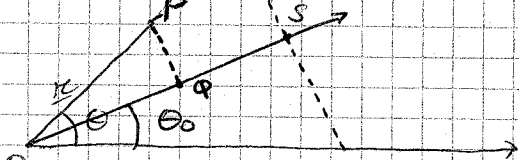
$\Theta_x$  asse polare

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

Impongo  $\theta = \theta_0$ :

$$\frac{1}{r_0} = \frac{k}{c^2} + A \cos(0) = \frac{k}{c^2} + A$$

$$A = \frac{1}{r_0} - \frac{k}{c^2} \rightarrow R$$



Q proiezione di P su OS

$$\overline{OQ} = r \cos(\theta - \theta_0)$$

$$\overline{OS} = \frac{1}{A} \text{ (impongo)}$$

$$\overline{PR} = \overline{QS} = \frac{1}{A} - r \cos(\theta - \theta_0) \quad \frac{1}{A} = \frac{k r}{c^2 A} + r \cos(\theta - \theta_0)$$

$\frac{\overline{OP}}{\overline{PR}}$  è il rapporto tra la distanza del punto P da un punto fisso e la distanza del punto P da una retta (istante per istante)

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{PR}} = \frac{r}{\frac{1}{A} - \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{r}{\frac{k r}{c^2 A} - \cos(\theta - \theta_0)}$$

$$= \frac{A c^2}{k} = \text{COSTANTE}$$

$\Rightarrow$  l'orbita del punto P è una sezione conica.

Con la formula di Binet ci siamo "liberati" del parametro temporale, perché ci interessa solo saper descrivere l'orbita.

La soluzione del problema di Keplero assicura che queste orbite sono tutte coniche.

1<sup>a</sup> legge di Keplero: le orbite dei pianeti sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei fuochi.

$$\frac{1}{r} = \frac{k + Ac^2 \cos(\theta - \theta_0)}{c^2}$$

$$r = r(\theta) = \frac{c^2}{k + Ac^2 \cos(\theta - \theta_0)} =$$
$$= \frac{c^2/k}{1 - \frac{Ac^2}{k} \cos(\theta - \theta_0)}$$

Impongo come condizione iniziale  $\theta_0 = 0$

$$r(\theta) = \frac{c^2/k}{1 - \frac{Ac^2}{k} \cos \theta}$$

Definisco due parametri costanti:

$$p = \frac{c^2}{k} \quad (\text{parametro})$$

$$E = \frac{Ac^2}{k} \quad (\text{eccentricità})$$

$r(\theta) = \frac{p}{1 + E \cos \theta}$	Equazione in forma polare di una sezione conica.
---	---

Apriamo un cambiamento di variabile

$$r > 0 \quad (\text{è una dist. dall'origine})$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + E} \quad \text{PERIELIO nell'ellissi}$$

$$r_{\max} = \frac{p}{1 - E} \quad \text{AFELIO nell'ellissi}$$

Cio' non ha senso per  $E \geq 1$

Per  $E = 0$  la traiettoria è una circonferenza  
(per un'ellisse l'eccentricità è il rapporto tra  
i semiassi).

$$E \geq 0 \Leftrightarrow A > 0 \quad \text{sempre}$$

Valori di  $E \geq 1$  corrispondono ad orbite  
coniche aperte (iperbole, parabola). Infatti  
queste prevedono solo un  $r_{\min}$ .

Facciamo dunque il cambiamento di variabili  
considerando  $\theta_0 = 0$

$$r = p - E r \cos \theta$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = p^2 + \epsilon^2 x^2 - 2\epsilon p x$$

$$(1 - \epsilon^2) x^2 + y^2 + 2\epsilon p x - p^2 = 0$$

$a_{11}$  = coeff. di  $x^2$

$a_{22}$  = coeff. di  $y^2$

$a_{12}$  = coeff. di  $xy$

Nel nostro caso:  $-a_{11} = \epsilon^2 - 1$

$$a_{22} = 1$$

$$a_{12} = 0$$

Caso 1  $\epsilon = 0$

$x^2 + y^2 = p^2$  circonferenza di raggio  $p$ .

Caso 2  $0 < \epsilon < 1$  ellisse

Caso 4  $\epsilon > 1$  iperbole

Caso 3  $\epsilon = 1$

$y^2 + 2px - p^2 = 0$  parabola

Esaminiamo il caso 1.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  eq. "normale" di una ellisse

o, meglio:  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

$$(1 - \epsilon^2) \left[ x^2 + \frac{2\epsilon p x}{1 - \epsilon^2} \right] + y^2 - p^2 = 0$$

$$(1 - \epsilon^2) \left( x + \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon^2} \right) - (1 - \epsilon^2) \frac{\epsilon^2 p^2}{(1 - \epsilon^2)^2} + y^2 - p^2 = 0$$

$1 - \epsilon^2 > 0$  [ $0 < \epsilon < 1$ ]  $\Rightarrow$  divido per  $\epsilon^2$ :

$$\left( x + \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon^2} \right)^2 - \frac{\epsilon^2 p^2}{(1 - \epsilon^2)^2} + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} - \frac{p^2}{1 - \epsilon^2} = 0$$

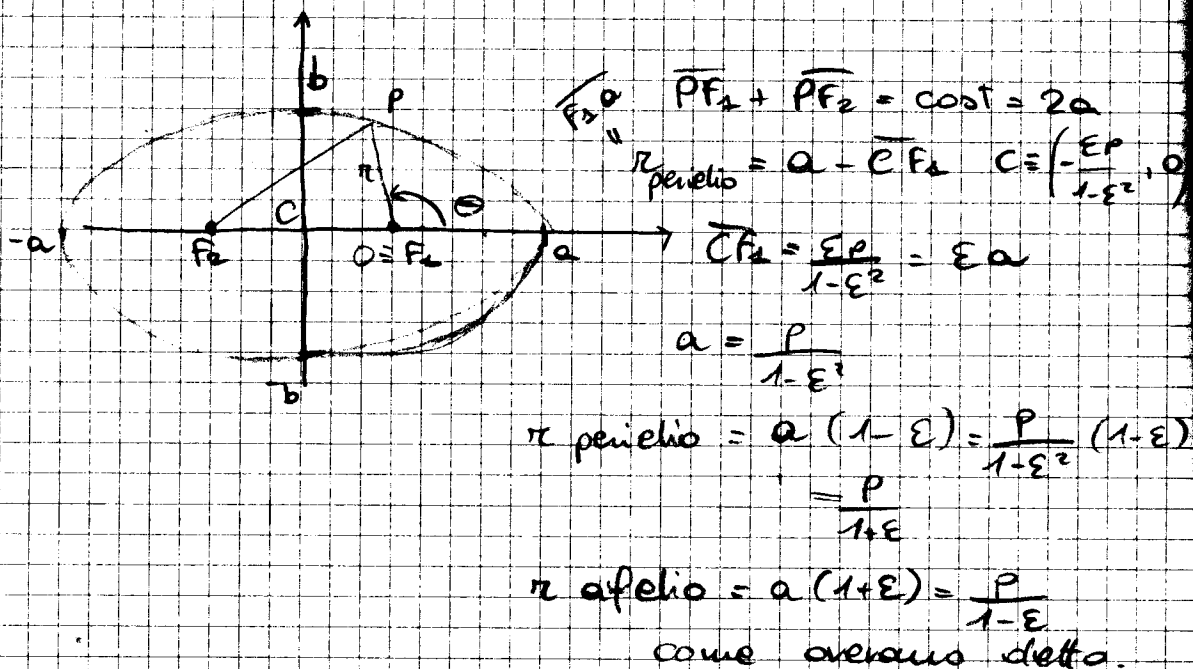
$$\left( \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon^2} + x \right)^2 - \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} = \frac{p^2}{(1 - \epsilon^2)^2}$$

$$\frac{\left(\frac{x + \frac{ep}{1 - \epsilon^2}}{p}\right)^2}{(1 - \epsilon^2)^2} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{(1 - \epsilon^2)}} = 1$$

$$C \equiv \left(-\frac{ep}{1 - \epsilon^2}, 0\right) \equiv (x_0, y_0)$$

$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{eq. forma canonica ellissi.}$$



2° legge Keplero: il raggio che compie il Sole al pianeta spazza aree uguali in tempi uguali

3° legge il rapporto tra il quadrato del periodo e il cubo del semiasse maggiore è costante

RISOLVERE \* PROSSIMA VOLTA:

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{a + bz - z^2}}$$



Area dell'ellissi:  $\pi ab$

L'area totale è "spazzata" in un periodo  $T$

$$\pi ab = \frac{c}{2} T \quad c = r^2 \dot{\theta} \quad (\text{vel. areolare})$$

Questa è la seconda legge di Keplero esplicitata per l'area totale.

$$4\pi^2 a^2 b^2 = c^2 T^2$$

$$b^2 = \frac{p^2}{1-e^2} = p a \quad (\text{Il "parametro" è il rapporto tra } b^2 \text{ e } a)$$

$$4\pi^2 p a^3 = c^2 T^2$$

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 p}{c^2} = \frac{4\pi^2}{K} \quad (\text{costante})}$$

### 3<sup>a</sup> legge di Keplero

Il rapporto tra il quadrato del periodo e il cubo del semiasse maggiore, una volta fissato il centro di gravità, è una costante che non dipende dalla massa del pianeta.

$$K = G \cdot M \Rightarrow \text{non dipende da } m.$$

La velocità orbitale del pianeta è semplicemente  $2\pi r/T$ , dove  $T$  è il suo periodo; l'espressione precedente diventa

$$\frac{GM_s}{r^2} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r}$$

Terza legge di Keplero

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM_s} \right) r^3 = K_s r^3 \quad (14.6)$$

dove  $K_s$  è una costante data da

$$K_s = \frac{4\pi^2}{GM_s} = 2.97 \times 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$$

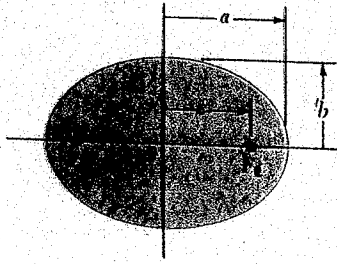


Fig. 14.6 Disegno di un'ellisse. Il semiasse maggiore è lungo  $a$  ed il semiasse minore è lungo  $b$ . I fuochi si trovano ad una distanza  $c$  dal centro e l'eccentricità è definita da  $e = c/a$ .

L'Equazione 14.6 fornisce la terza legge di Keplero. La legge è valida anche per orbite ellittiche, se sostituiamo ad  $r$  la lunghezza del semiasse maggiore,  $a$  (Fig. 14.6). Notiamo che la costante di proporzionalità  $K_s$  è indipendente dalla massa del pianeta. Perciò l'Equazione 14.6 è valida per tutti i pianeti. Se avessimo dovuto considerare l'orbita di un satellite attorno alla terra, come la luna, allora la costante avrebbe avuto un valore diverso, con la massa della terra al posto della massa del sole. In questo caso la costante di proporzionalità è eguale a  $4\pi^2/GM_T$ .

Una lista di dati utili sui pianeti è riportata in Tabella 14.2. L'ultima colonna di questa tabella conferma che  $T^2/r^3$  è una costante il cui valore è dato da  $K_s = 4\pi^2/GM_s = 2.97 \times 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$ .

TABELLA 14.2 Dati planetari utili

Corpo	Massa (kg)	Raggio (m)	Periodo (s)	Distanza dal Sole (m)	$\frac{T^2}{r^3} \left[ 10^{-19} \left( \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3} \right) \right]$
Mercurio	$3.18 \times 10^{23}$	$2.43 \times 10^6$	$7.60 \times 10^6$	$5.79 \times 10^{10}$	2.97
Venere	$4.88 \times 10^{24}$	$6.06 \times 10^6$	$1.94 \times 10^7$	$1.08 \times 10^{11}$	2.99
Terra	$5.98 \times 10^{24}$	$6.37 \times 10^6$	$3.156 \times 10^7$	$1.496 \times 10^{11}$	2.97
Marte	$6.42 \times 10^{23}$	$3.37 \times 10^6$	$5.94 \times 10^7$	$2.28 \times 10^{11}$	2.98
Giove	$1.90 \times 10^{27}$	$6.99 \times 10^7$	$3.74 \times 10^8$	$7.78 \times 10^{11}$	2.97
Saturno	$5.68 \times 10^{26}$	$5.85 \times 10^7$	$9.35 \times 10^8$	$1.43 \times 10^{12}$	2.99
Urano	$8.68 \times 10^{25}$	$2.33 \times 10^7$	$2.64 \times 10^9$	$2.87 \times 10^{12}$	2.95
Nettuno	$1.03 \times 10^{26}$	$2.21 \times 10^7$	$5.22 \times 10^9$	$4.50 \times 10^{12}$	2.99
Plutone	$\approx 1 \times 10^{23}$	$\approx 3 \times 10^6$	$7.82 \times 10^9$	$5.91 \times 10^{12}$	2.96
Luna	$7.36 \times 10^{22}$	$1.74 \times 10^6$	—	—	—
Sole	$1.991 \times 10^{30}$	$6.96 \times 10^8$	—	—	—

Per una raccolta di dati più completa, vedi, ad esempio, *Handbook of Chemistry and Physics*, Boca Raton, Florida, The Chemical Rubber Publishing Co.



27/10/2008

$$\rho = \frac{c^2}{k} \quad E = \frac{Ac^2}{k} \quad c = r^2 \dot{\theta}$$

$$A = \frac{1}{r_0} - \frac{k}{c^2} \quad r = r_0 \quad \theta = \theta_0$$

$$r = r(\theta) = \frac{p}{1 + E \cos(\theta - \theta_0)}$$

### INTEGRAZIONE PER QUADRATURE

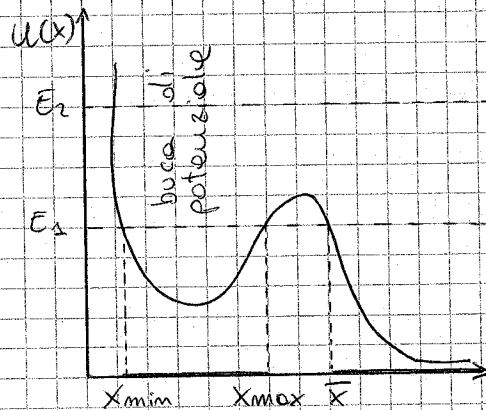
$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x)$$

$$\frac{2}{m} [E - U(x)] = \dot{x}^2$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))} \quad (E \geq U(x))$$

$\bar{E} = U(x) = 0$  PUNTI DI ARRESTO



Per il valore dell'energia  $\bar{E}_1$  abbiamo 2 tipi di moto: quello con  $x$  compreso tra  $x_{\min}$  e  $x_{\max}$ , e quello con  $x \geq \bar{x}$ . Quest'ultimo non è un moto finito.

Si come la somma è costante, quando  $U(x)$  aumenta  $\dot{x}$  diminuisce.

Separo le variabili:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}} = t$$

Con le condizioni iniziali determino gli estremi d'integrazione ed  $E$ .

$F(x)$  forza posizionale

Un sistema soggetto solo a forze posizionale (sist. unidimensionale) è conservativo

$$\Leftrightarrow \underline{F} = -\nabla U$$

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^x F(x') dx'$$

Se determino  $U(x_0)$  so scrivere  $U(x) \forall x$ .

- una sola coordinata lagrangiana
- $F(x)$  posizionale

⇒ l'integrale esiste sempre.

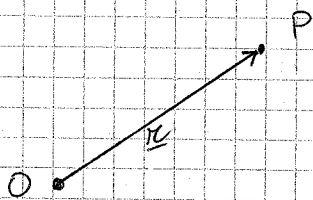
Vediamo come estendere questi concetti al caso di un sistema bidimensionale.

Un campo centrale è sempre conservativo?

Considero  $O$  centro della forza,  $P$  punto qualsiasi,

$$\hat{r} = \frac{\vec{OP}}{|\vec{OP}|} \text{ (versore di } \vec{OP}\text{)}$$

$\underline{F} = f(r) \hat{r}$  La forza è sempre in direzione di  $\hat{r}$  (def. di "campo centrale")



La forza può essere attrattiva (verso  $O$ ) o repulsiva (verso  $P$ )

$$f(r) = \frac{c}{r^n} \cdot r \text{ (ad esempio)}$$

$$\text{oppure: } f(r) = r^n$$

Ma in  $f(r) = r^n$  la dipendenza da  $r$  si ha solo attraverso il modulo.

Se  $f$  dipende da  $\underline{r}$  e non solo dal modulo di  $\underline{r}$ , allora non è detto che il sistema (il campo) sia conservativo.



$$-\nabla U = \underline{F} = f(r) \hat{r}$$

$$U(\underline{x}) - U(\underline{x}_0) = \int_{\underline{x}_0}^{\underline{x}} \underline{F} \cdot d\underline{\ell}$$

ha senso solo se posso definire una funzione di stato. Invece, in generale quell'integrale dipende dal cammino percorso.

Esempio di campo centrale conservativo...

$$\underline{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \hat{r}$$

Supponiamo di voler calcolare:

$$U(P) - U(P_0) = - \int_{P_0}^P \underline{F} \cdot d\underline{\ell}$$

Assumo  $P_0 = +\infty$  e  $U(P_0) = 0$ .

$$U(r) = - \int_{+\infty}^r \left( -\frac{\alpha}{r^2} \hat{r} \right) \cdot d\underline{\ell} \quad r = \text{distanza di } P \text{ da } O$$

$$= \int_r^{+\infty} \left( -\frac{\alpha}{r^2} \hat{r} \right) \cdot d\underline{\ell} = \int_r^{+\infty} \left( -\frac{\alpha}{r^2} \right) \hat{r} \cdot \underline{dr} \quad \text{considerando } d\underline{\ell} \text{ in direzione radiale}$$

$$= \int_r^{+\infty} \left( -\frac{\alpha}{r^2} \right) dr = \frac{\alpha}{r} \Big|_r^{+\infty} = -\frac{\alpha}{r}$$

Il campo è conservativo e la sua energia potenziale  $U(r)$  è uguale a  $-\frac{\alpha}{r}$ .

Un campo centrale NON è sempre conservativo, a meno che la sua associata energia potenziale non dipenda solo dal modulo del vettore  $\underline{x}$ .

In generale, se il sistema è conservativo esiste una legge di conservazione di

$$\underline{E} = T + U$$

Mettiamoci in un campo centrale piano con

$$\underline{F} = f(r) \hat{r} \quad \text{e} \quad U = U(r)$$

Si conserva il momento angolare.

$$\underline{l} = \underline{r} \wedge m \underline{v} \quad |\underline{l}| = m r^2 |\dot{\theta}| = m c$$

$$\underline{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\bar{E} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r)$$

$r = r(t)$   $\theta = \theta(t)$  (due coord. Lagrangiane)

$\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  direzione, verso, modulo

$3 + 3 = 6$  parametri da fissare

- punto materiale di massa  $m$
- si muove in un campo centrale di centro  $O$

Vincolo: l'accelerazione è sempre rivolta verso  $O$ . ①

- Il campo è conservativo

Vincolo: si conserva il momento angolare  $\underline{l}$  come direzione, come verso e come modulo.

il moto si svolge su un solo piano ②

$$m r^2 \dot{\theta} = m c \quad ④$$

Il verso di percorrenza non varia ③

⇒ Ho introdotto 4 vincoli ⇒ i parametri da fissare diventano  $6 - 4 = 2$ .

Ora basta fissare  $r_0$  e  $\theta_0$

⇒ DOPLIA QUADRATURA.

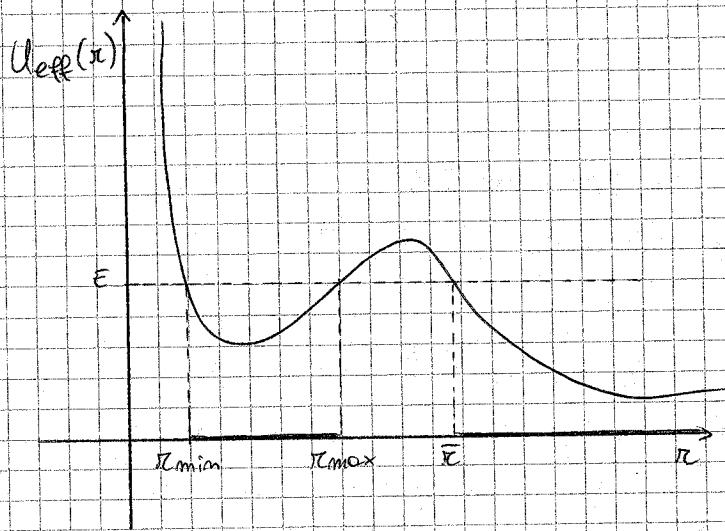
$$\bar{E} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \frac{c^2}{m^2 r^4} + U(r) \quad \text{ho usato } l = m r^2 \dot{\theta}$$

$\bar{E}$  "sparito"  $\theta$ . Ho ricondotto il problema ad una sola dimensione.

$$\bar{E} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{c^2}{2m r^2} + U(r)$$

$$= U_{\text{eff.}}(r)$$

$\frac{c^2}{2m r^2}$  si dice potenziale centrifugo



$E - U_{\text{eff}}(r) \geq 0$  (eu. cinetica positiva ammette moto)  
 $r_{\text{min}} \leq r \leq r_{\text{max}}$        $r \geq \bar{r}$

$r_{\text{min}}$  e  $r_{\text{max}}$  NON sono punti d'arresto.

Sono le soluzioni di  $E - U_{\text{eff}}(r) = 0$

$$\underline{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$$

In  $r_{\text{min}}$  e  $r_{\text{max}}$ ,  $\dot{r} \hat{r}$  si annulla, ma  $r \dot{\theta} \hat{\theta}$  no.

$r_{\text{min}}$  corrisponde al valore più alto di  $\dot{\theta}$

$$\begin{array}{l} \text{/// } r_{\text{min}} \text{ --- perielio} \\ \text{/// } r_{\text{max}} \text{ --- afelio} \end{array} \quad \left( \dot{\theta} = \frac{l}{m r^2} \right)$$

$\dot{\theta}$  non cambia mai segno: è funzione del quadrato di  $r$ , che è sempre positivo.

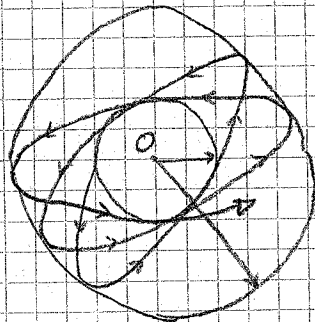
$\Rightarrow$  il moto non cambia mai verso quando il momento angolare si conserva.

$r_{\text{min}}$  e  $r_{\text{max}}$  si dicono punti di svolta.

In  $r \geq \bar{r}$  il moto è, nuovamente, infinito.

$$r_{\text{min}} \leq r \leq r_{\text{max}}$$

Il moto si svolge nella corona circolare di raggi  $r_{\text{min}}$  e  $r_{\text{max}}$ , e si dice "moto a rosetta"



Il moto a rosetta è chiuso? In generale NO, e si dimostra che la traiettoria riempie densamente la corona circolare senza chiudersi.

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{e^2}{m \pi^2} d\pi$$

Se  $\exists m, n \in \mathbb{N} : n \Delta\theta = m 2\pi$   
 $\Rightarrow$  la traiettoria è chiusa.

Considerando un campo centrale dove vale

$$U(r) \propto r^n$$

A quali condizioni la traiettoria è chiusa?

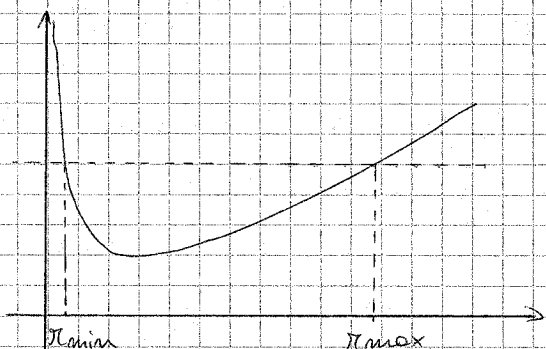
### Teorema di Bertrand

La traiettoria di un corpo che si muove in un campo centrale è sempre chiusa solo nei casi:

- $n = 2$
- $n = -1, \alpha < 0$

Naturalmente si parla di moti finiti.

$$U(r) = \alpha r^2 \quad U_{\text{eff}}(r) = \alpha r^2 + \frac{e^2}{2m\pi^2} \quad \alpha > 0$$



$$e \neq 0$$

$$\exists r_{\min}, r_{\max} \forall E$$

$$\underline{F} = -\nabla U = -\alpha \nabla r^2 = -2\alpha r \nabla r$$

$$\nabla r = \left( \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2r} \cdot 2x = \frac{x}{r}$$

$$\nabla r = \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \left( \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right)$$

$$\nabla r = \hat{r}$$

$$\underline{F} = -2\alpha r \hat{r}$$

campo centrale di tipo attrattivo con intensità  $2\alpha r$

$$\underline{F} = m \ddot{\underline{r}} = -2\alpha \underline{r}$$

$$m \ddot{\underline{r}} + 2\alpha \underline{r} = 0$$

$$\ddot{\underline{r}} + \frac{2\alpha}{m} \underline{r} = 0$$

OSCILLATORE ARMONICO NELLO SPAZIO

È come avere uno spazio di Lissajous nello spazio, la cui forma più generale è un'ellissi

$\Rightarrow$  traiettorie chiuse.

28/10/2008

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \rightarrow U(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)$$

$$\dot{\theta} = l / m r^2 \quad U_{\text{eff}}(r) = U(r) + e^2 / 2 m r^2$$

moti a rosetta  $r_{\text{min}} \leq r \leq r_{\text{max}}$

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad \alpha > 0 \quad \text{Campo centrale attrattivo}$$

$$\underline{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \hat{r}$$

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{e^2}{2 m r^2}$$

Cosa diventa l'integrazione per quadrature?

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)$$

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 = E - U_{\text{eff}}(r)$$

$$m \dot{r}^2 = 2 (E - U_{\text{eff}}(r))$$

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{m}} dt$$

"Il problema di Keplero si risolve in toto"

$$= \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

Espressione del tipo  $f(r) = t$ . Se  $f$  è invertibile,  $r = r(t) = f^{-1}(t)$  e ho risolto.

Trovando  $r(t)$  posso trovare  $\theta$  usando l'espressione di  $\dot{\theta}$ .

$$d\theta = \frac{l}{m r^2(t)} dt$$

Si tratta di

fare solo due

integrazioni,

una in  $r$  e una in  $\theta$ .

$$\theta - \theta_0 = \int_0^t \frac{l}{m r^2(t)} dt$$

Questo è un metodo che sfrutta il più possibile le leggi di conservazione.

Le leggi di conservazione si dicono INTEGRALI PRIMI.

Tutto sommato, a noi non interessano le due singole eq. in  $r$  del tempo  $r = r(t)$  e  $\theta = \theta(t)$ , quanto, piuttosto,  $r = r(\theta)$ , per trovare la forma dell'orbita.



Potremmo ricavare  $dt$  dall'espressione di  $\pi(t)$  e sostituirlo in  $\Theta = \Theta(t)$ .

$$\Theta - \Theta_0 = \int_0^t \frac{\ell dt}{m r^2} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{\ell dr}{m r^2 \sqrt{E - \frac{\alpha}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2}}} = G(\pi)$$

$$\pi = \pi(\Theta) = G^{-1}(\Theta - \Theta_0)$$

$$\Theta - \Theta_0 = \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{E + \frac{\alpha}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2}}} \quad z = \frac{1}{r}$$

$$dz = -\frac{1}{r^2} dr$$

$$\Theta - \Theta_0 = \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \left[ - \int_{z_0}^z \frac{dz \cdot z^2}{\sqrt{E + \alpha z - \frac{\ell^2}{2m} z^2}} \right] =$$

$$= - \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{\frac{2m}{\ell^2} E + \frac{2m\alpha}{\ell^2} z - z^2}}$$

(parentesi matematica)

$$\frac{2m\alpha}{\ell^2} = a \quad \frac{2m\alpha}{\ell^2} = b$$

$$\alpha = m\kappa = GmM$$

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{a + bz - z^2}}$$

con un opportuno cambiamento di variabile diventa:

$$\int_{w_0}^w \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}$$

$$w = \frac{2z - b}{\sqrt{4a + b^2}}$$

$$\sqrt{1-w^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2z-b}{\sqrt{4a+b^2}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4z^2 + b^2 - 4zb}{4a+b^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4a+b^2 - 4z^2 - b^2 + 4zb}{4a+b^2}}$$

$$\frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{2dz}{\sqrt{4a+b^2}} \cdot \frac{\sqrt{4a+b^2}}{2\sqrt{a-z^2+bz}} \quad (c.v.d.)$$

$$4a + b^2 = \frac{8m\alpha}{\ell^2} + \frac{4m^2\alpha^2}{\ell^4} = \frac{4m^2\alpha^2}{\ell^4} \left(1 + \frac{2\alpha}{m\alpha}\right)$$

$$\int_{w_0}^w \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} = \arcsin w - \arcsin w_0$$

$$\Theta - \Theta_0 = -\arcsin \left( \frac{2z - 2/p}{2E/p} \right) + C_1$$

( $C_1 = \arcsin w_0$ )

$$\text{Definisco: } p = \frac{\ell^2}{m\alpha}$$

$$E = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2m\bar{E}}{e^2}, \quad b = \frac{2m\bar{d}}{e^2} = \frac{2}{p}, \quad \sqrt{4a^2 + b^2} = \frac{2E}{p}$$

$p$  PARAMETRO  
 $E$  ECCENTRICITÀ

$$\frac{E - 1/p}{E/p} = \sin [C_1 - (\theta - \theta_0)]$$

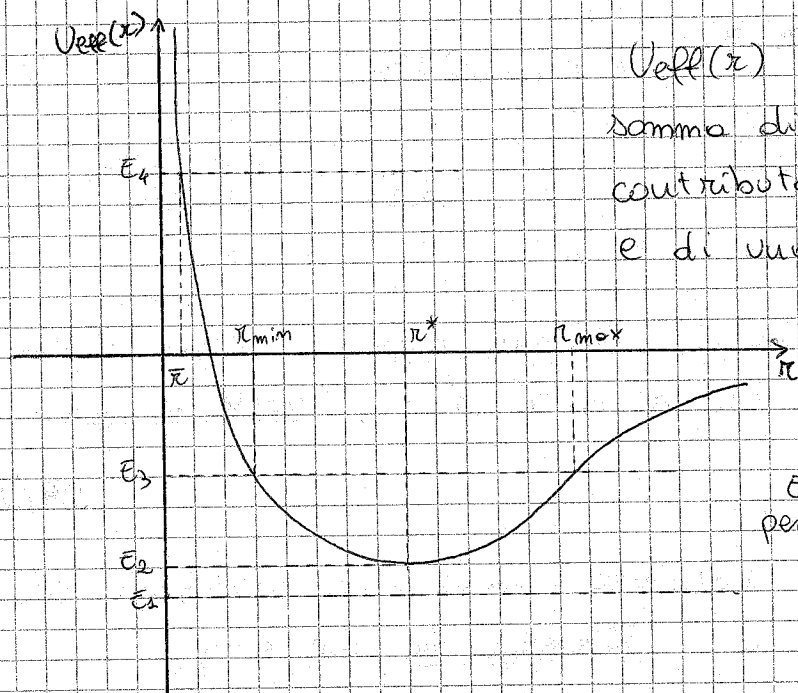
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{E}{p} \sin [C_1 - (\theta - \theta_0)] \quad \text{ha l'equazione dell'orbita in forma polare.}$$

$$r = r(\theta) = \frac{p}{1 + E \sin [C_1 - (\theta - \theta_0)]}$$

$\theta_0$  è il valore di  $\theta$  che corrisponde a  $r_0$

Quest'ultimo determina  $C_1$ :

$$C_1 = \arcsin w_0 = \arcsin \left[ \frac{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{p}}{\frac{E}{p}} \right]$$



$U_{eff}(r)$  è la somma di un contributo positivo e di uno negativo.

$E - U_{eff} \geq 0$   
per avere moto

$$r^* = \frac{e^2}{md} \quad U_{eff}(r^*) = E_2 = -\frac{md^2}{2e^2}$$

per  $E < E_2$  non c'è moto.

per  $E = E_2$ ,  $\dot{r} = 0 \Rightarrow$  il moto è su una circonferenza.

Il moto a rosetta "shriuka" da una corona circolare ad una circonferenza, perché  $r$  è fissato.

$$r = r^* \quad \bar{E} = \bar{E}_2 \quad \dot{r} = 0$$

$$\dot{\theta}(r^*) = \frac{h}{m r^{*2}} = \frac{m v^2}{h^3}$$

In  $r = r^*$  il punto materiale si muove su una circonferenza con velocità  $\frac{m v^2}{h^3}$ .  
L'eccentricità è 0.

•  $\bar{E} = \bar{E}_2 \quad \underline{E = 0} \quad \underline{\text{CIRCONFERENZA}}$

•  $\bar{E}_2 < \bar{E} < 0 \quad \underline{0 < E < 1} \quad \underline{\text{ELLISSI}}$

moti finiti, a rosetta tra  $r_{\min}$  e  $r_{\max}$

$$z = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4 a^2}}{2} = \frac{1 \pm E}{p} = \frac{1}{r}$$

$$r = \frac{p}{1 \pm E} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{\min} = \frac{p}{1+E} \quad \text{perielio} \\ r_{\max} = \frac{p}{1-E} \quad \text{afelio} \end{array} \right.$$

Supponiamo  $r_0 = r_{\min} = \frac{p}{1+E}$

$$C_1 = \arccos \left[ \frac{E}{p} \frac{p}{E} \right] = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow r(\theta) = \frac{p}{1 + E \cos(\theta - \theta_0)}$$

•  $\bar{E} \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} E = 0 \quad E = 1 \quad \text{parabola} \\ E > 0 \quad E > 1 \quad \text{iperbola} \end{array} \right.$

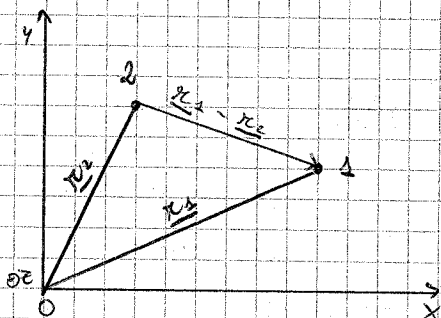
$\exists$  solo  $r_{\min}$ . ( $r_{\max} = +\infty$ )

Ricordiamoci che abbiamo supposto fisso il centro del moto e trascurabile  $m$ . (Problema ad un solo corpo)

29/10/2008

$N = 1$  punto materiale  $\rightarrow N$  punti materiali (c.a. cardinali)

$N = 2$  Problema dei due corpi



Portiamo  $r = r_1 - r_2$

$\underline{f}_{12}$  forza che agisce su 1 per la presenza di 2.

$$\hat{r} = \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|}$$

$\underline{f}_{12} = f(r_{12}, \underline{r}_2) \hat{r}$  Mi aspetto che il sistema sia globalmente invariante sotto traslazioni e rotazioni



$$\underline{f}_{12} = f(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \hat{r} = f(r) \hat{r}$$

Il principio di azione-reazione mi dice anche che:  $\underline{f}_{21} = -\underline{f}_{12}$

Sto supponendo anche che la forza sia posizionale e che non ci sia dissipazione.

Considero le masse  $m_1$  ed  $m_2$ .

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{f}_{12} \\ m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \underline{f}_{21} = -\underline{f}_{12} \end{cases}$$

Se la forza è posizionale  $\Rightarrow \exists U: -\nabla_1 U = \underline{f}_{12} = f(r) \hat{r}$   
 $U = U(r) \quad -\nabla_2 U = -\underline{f}_{12} = -f(r) \hat{r}$

$$\nabla_1 U = \frac{dU}{dr} \nabla_1 r \quad (\text{derivate risp. a } x_1, y_1, \dots)$$

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$\Rightarrow \nabla_1 U = \frac{dU}{dr} \cdot \hat{r} \quad f(r) \hat{r} \equiv -\frac{dU}{dr} \hat{r} \quad \nabla_2 U = -\frac{dU}{dr} \hat{r}$$

$$U(r) = -\int f(r) dr \quad \text{Questo è SEMPRE vero.}$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{f}_{12} = -\nabla_1 U \quad \text{sole} \\ m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \underline{f}_{21} = -\underline{f}_{12} = -\nabla_2 U \quad \text{pianeta} \end{cases}$$

Poniamo  $m_1 = M$  (massa Sole),  $m_2 = m$  (massa pianeta).

$$f(r) = -\frac{\alpha}{r^2} = -\frac{G m M}{r^2}$$

Stiamo considerando il moto di un oggetto gravitante

attorno ad un corpo in movimento. Sia  $\underline{r}_1$  che  $\underline{r}_2$  sono funzioni del tempo.

$$\underline{r}_G = \frac{M \underline{r}_1 + m \underline{r}_2}{m + M} \quad (\text{BARICENTRO})$$

$(m + M) \ddot{\underline{r}}_G = 0 \Leftrightarrow \ddot{\underline{r}}_G = 0$  Il baricentro si muove a velocità costante, il sist. è inerziale.

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{M} f(r) \hat{r} + \frac{1}{m} f(r) \hat{r}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) f(r) \hat{r} = \frac{m+M}{mM} f(r) \hat{r}$$

Definisco una nuova massa  $\mu$ :

$$\mu = \frac{mM}{m+M} \quad \text{MASSA RIDOTTA}$$

$$\mu \ddot{\vec{r}} = f(r) \hat{r}$$

è l'eq. di un punto materiale di massa  $\mu$  (m. ridotta) in

un campo centrale identico a quello di partenza.

Studio del problema dei due corpi ricondotto allo studio di un problema a un corpo.

Rivediamo la legge di Keplero:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 p}{c^2} \quad p = \frac{e^2}{ma} \quad mc = e$$

$$\frac{p}{c^2} = \frac{m}{\alpha} \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{\alpha}$$

Nel problema a due corpi, devo sostituire  $m$  con  $\mu$ .

II LEGGE DI KEPLERO

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \mu}{\alpha} = \frac{4\pi^2 mM}{(m+M)GmM} = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{1}{m+M}$$

La massa  $m$  non "sparisce" più. Metto in evidenza  $M$ :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} \quad \text{con } M \gg m, \frac{m}{M} \rightarrow 0, \text{ e torniamo al caso precedente.}$$

Pongo  $\epsilon = m/M$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot \frac{1}{1+\epsilon} \approx \frac{4\pi^2}{GM} (1-\epsilon) \quad (\text{Sviluppo al prim'ordine})$$

$$\begin{aligned} (1+\epsilon)^\alpha &= 1 + \alpha (1+\epsilon)^{\alpha-1} \epsilon + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} (1+\epsilon)^{\alpha-2} \epsilon^2 + \dots \\ &\approx 1 + \alpha \epsilon + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \epsilon^2 + \dots \quad \text{in questo caso, } \alpha = -1 \end{aligned}$$

Se prendo  $m_J = 1$ ,  $M_S = 330.000$ ,  $m_G = 320$ ,  $m_E = \frac{1}{81}$

Considero Giove e il Sole:

$$\epsilon = \frac{m_G}{M_S} \approx 10^{-3} \quad \text{è solo una perturbazione al}$$

prim'ordine del problema a un corpo.

Mettiamo il sistema di riferimento centrato nel baricentro.



Il sistema di riferimento centrato nel baricentro è inerziale, e vale  $\underline{r}_G = 0$

$$\underline{r}_1 = -\frac{m}{M} \underline{r}_2, \quad \underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$$

$$\Rightarrow \underline{r}_2 = \underline{r}_1 - \underline{r} = -\frac{m}{M} \underline{r}_2 - \underline{r} = \frac{-M}{m+M} \underline{r}$$

$$\underline{r}_1 = \frac{m}{M} \cdot \frac{M}{m+M} \underline{r} = \frac{m}{m+M} \underline{r}$$

Abbiamo espresso  $\underline{r}_1$  ed  $\underline{r}_2$  in termini di  $\underline{r}$ , per il quale dobbiamo risolvere il problema

$$\underline{r}_1 = \frac{m/M}{1+m/M} \underline{r} = \boxed{\frac{\epsilon}{1+\epsilon} \underline{r}}$$

$$\underline{r}_2 = \boxed{-\frac{1}{1+\epsilon} \underline{r}}$$

I due corpi hanno dinamiche molto diverse.

L'orbita di 2 si discosta poco da quella del baricentro, mentre quella di 1 è, in generale, molto più piccola ( $\epsilon \ll 1$ ) di quella di 2.

Questo  $\epsilon$  NON è l'eccentricità.

Consideriamo un sistema di  $N$  corpi.

$N > 2$   $\{P_j\}_{j=1 \dots N}$  punti del sistema

Mi aspetto di poter scrivere  $N$  equazioni differenziali

$$\left\{ \begin{array}{l} m_j \ddot{r}_j = f_j(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N; \underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N; t) \\ \text{(sistema Newtoniano)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{r}_j(0) = \underline{a}_j \\ \dot{\underline{r}}_j(0) = \underline{b}_j \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Queste equazioni sono} \\ \text{sicuramente coniugate.} \end{array}$$

Ma se sono solo due punti  $P_i$  e  $P_j$ .

$$\underline{f}_{ij} = -\underline{f}_{ji}$$

La soluzione del sistema di equazioni sarebbe del tipo:

$$\mathbb{R}^{3N} \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} \underline{r}_1(t) \\ \underline{r}_2(t) \\ \vdots \\ \underline{r}_N(t) \end{pmatrix}$$

Non è mai stato risolto. Ma si può cercare di ricavare equazioni globali (CARDINALI) con  $i$

dati che conosciamo, sfruttando tutti i vincoli (ad esempio il principio di azione - reazione).

$$\underline{f}_j = \underline{f}_j^{(int)} + \underline{f}_j^{(est)}$$

$$\underline{f}_j^{(int)} = \sum_{k \neq j} \underline{f}_{jk} \quad \text{forze esercitate su } P_j \text{ da tutti gli altri punti.}$$

Considero i vettori risultanti:

$$\underline{R}^{(est)} = \sum_{j=1}^N \underline{f}_j^{(est)}$$

$$\underline{R}^{(int)} = \sum_{j=1}^N \underline{f}_j^{(int)} = \underline{0} \quad \text{per il terzo principio.}$$

$$\sum_{j=1}^N m_j \ddot{\underline{x}}_j = \underline{R}^{(est)} \quad \text{PRIMA EQ. CARDINALE}$$

Definisco la massa totale  $M = \sum_{j=1}^N m_j$

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}}_G = \underline{R}^{(est)}$$

Possiamo esprimere questa eq. anche con la quantità di moto.

$$\underline{Q} = \sum_{j=1}^N m_j \underline{v}_j = M \underline{v}_G, \quad \dot{\underline{Q}} = \underline{R}^{(est)}$$

Per ottenere la 2<sup>o</sup> equazione cardinale si parla di momenti rispetto ad un polo A.

$$\underline{M}_A^{(est)} = \sum_{j=1}^N A P_j \wedge \underline{f}_j^{(est)}$$



(Momento risultante delle forze esterne).

Il momento delle forze interne è la somma di momenti di coppie di punti a braccio nullo ed è quindi nullo.

$$m_j \ddot{\underline{r}}_j = \underline{f}_j^{(est)} + \underline{f}_j^{(int)}$$

Moltiplico vettorialmente a sinistra per  $A P_j$  e sommo:

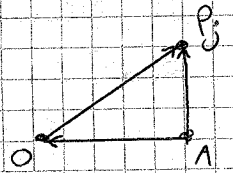
$$\sum_{j=1}^N A P_j \wedge m_j \ddot{\underline{r}}_j = \underline{M}_A^{(est)}$$

$$\underline{L}_A = \sum_{j=1}^N A P_j \wedge m_j \underline{v}_j \quad \text{Derivo il momento angolare:}$$

$$\dot{\underline{L}}_A = \sum_{j=1}^N A P_j \wedge m_j \ddot{\underline{r}}_j + \sum_{j=1}^N \frac{d(AP_j)}{dt} \wedge m_j \underline{v}_j =$$

$$= \sum_{j=1}^N A P_j \wedge m_j \ddot{\underline{r}}_j + \sum_{j=1}^N \frac{d}{dt} (AO + OP_j) \wedge \dots$$

$\parallel$   
 $\underline{v}_j - \underline{v}_A$



$$\underline{v}_j \wedge \underline{v}_j = 0$$

$$\dot{\underline{L}}_A = \sum_{j=1}^N A P_j \wedge m_j \ddot{\underline{r}}_j - \underline{v}_A \wedge M \underline{v}_G$$

$$\dot{\underline{L}}_A = \underline{M}_A^{(ext)} - \underline{v}_A \wedge \underline{Q}$$

SECONDA EQUAZIONE  
CARDINALE

$\underline{v}_A$  velocità del polo

Se scelgo come polo il baricentro, oppure scelgo

A fisso,  $\underline{v}_A \wedge \underline{Q}$  è annulla.

03/11/2008

### EQ. CARDINALI

$$\begin{cases} M \underline{Q}_G = \underline{R}^{(e)} \\ \dot{\underline{L}}_A = \underline{M}_A^{(e)} - \underline{v}_A \wedge M \underline{v}_G \end{cases} \quad \forall A$$

$$M \underline{r}_G = \sum_{i=1}^N m_i OP_i \quad \{P_i\}_{i=1 \dots N}$$

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

$$\underline{R}^{(e)} = \underline{R}^{(e)}(\underline{r}_G, \underline{r}_G, t) \quad \underline{r}_G = \underline{r}_G(t)$$

$$A = O \text{ oppure } A = G \Rightarrow \underline{v}_A \wedge M \underline{v}_G = 0$$

fisso

$$\underline{L}_A = \sum_{i=1}^N A P_i \wedge m_i \underline{v}_i$$

/\* Comincia lo studio della

### GEOMETRIA DELLE MASSE /\*

Sistema di punti materiali sottoposto a vincoli  
sotto forma di forze reattive:

$$\underline{R}^{(e)} = \underline{R}^{(e,a)} + \underline{R}^{(e,r)} \quad \underline{R}^{(e,r)} = \underline{\Phi}$$

forze esterne attive      Reazioni vincolari

Le forze attive sono forze note.

Le reazioni vincolari sono suddivise in statiche e dinamiche.

$$\begin{cases} M_A = \underline{R}^{(e,a)} + \underline{\Phi} \\ \forall A \left\{ \underline{L}_A = \underline{M}_A^{(e,a)} + \underline{M}_A^{(e,r)} \right. \end{cases}$$

Uno dei vincoli da considerare è il vincolo di RIGIDITA': cos'è un CORPO RIGIDO?

$N$  punti  $\{P_i\}_{i=1 \dots N}$

$N$  vettori  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N$  (posizioni)

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_1(t) \\ \underline{x}_2(t) \\ \dots \\ \underline{x}_N(t) \end{pmatrix}$$

Per fare un esempio di vincolo:

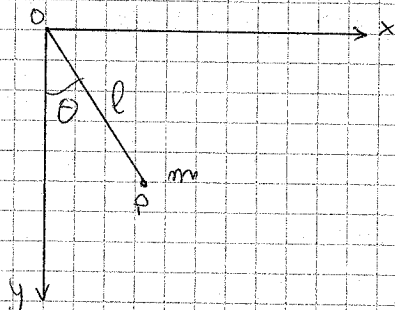
$$f(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_N, t) = 0$$

VINCOLO  $\nearrow$  OLONOMO  $\nwarrow$  DIPENDENTE DAL TEMPO

Sono coinvolti solo  
"zappi vettori" (e non  
le velocità)

$\nwarrow$  BILATERALE  
 $\nearrow$  Rappresentato da  
un'equazione

ESEMPIO:



$$x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

$$N = 1$$

### Generalizziamo:

$N$  punti nello spazio (dim. 3)

$r$  equazioni di vincolo

$\Rightarrow$  mi muovo in una sotto-varietà dello spazio a  $(3N - r)$  dimensioni

$$3N - r = l \quad \text{gradi di libertà}$$

Vincolo unilaterale: è espresso da una disequazione del tipo

$$f(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_N, t) \geq 0$$

(OLONOMO UNILATERALE)

Vincolo anolonomo (non integrabile)

$$F(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, \dot{\underline{r}}_1, \dots, \dot{\underline{r}}_N, t) = 0$$

(VINCOLO DI MOBILITÀ)

$\leftarrow$   
integrabile dal punto di vista matematico.

Noi studieremo vincoli di tipo B. O. L.

(Bilaterali, Olonomi, Lisci - senza attrito)

Indipendenti dal tempo.

Supponiamo di avere un punto materiale:

$$N = 1 \quad f(x, y, z) = 0$$

vincolo di tipo geometrico (P si muove su una superficie). Vedremo che con vincoli geometrici posso sempre ottenere vincoli sulle velocità. Derivo rispetto al tempo:

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\nabla f) \cdot \underline{v} = 0 \quad (\text{prodotto scalare})$$

Ecco il vincolo. La velocità deve essere, istante per istante, ortogonale al  $\nabla f$ .



$\nabla f$  è un vettore sempre ortogonale al piano tangente

$\implies \underline{N}$  giace localmente sul piano tangente. È banale ma è sempre un vincolo.

Torniamo al caso generale.

$N$  punti materiali che si muovono nello spazio

$\implies 3N$  coordinate

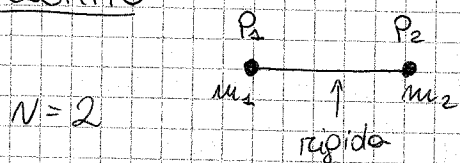
$r$  equazioni di vincolo indipendenti tra loro

Un sistema ha  $\ell$  gradi di libertà se occorrono e bastano  $\ell$  parametri indipendenti  $q_1 \dots q_\ell$  per individuare in maniera univoca le posizioni di tutti i punti del sistema.

$q_1 \dots q_\ell$  si chiamano  
COORDINATE LAGRANGIANE.

$$3N - r = \ell$$

ESEMPIO



Due punti collegati da un'asticella che si muovono nello spazio:

$$3 \cdot 2 - 1 = 5 = \ell$$

$r=1$ : distanza tra  $P_1$  e  $P_2$  fissa.

Supponiamo di avere  $\ell$  gradi di libertà...

Vogliamo studiare il vettore

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \dots \\ q_\ell(t) \end{pmatrix}$$

Mi basta conoscere quel vettore, dal momento che la definizione delle coordinate lagrangiane "include" l'apporto dei vincoli sul sistema. Questa è una semplificazione enorme che ci permette di non preoccuparci delle reazioni vincolari.

$$O P_i = O P_i (q_1, q_2, \dots, q_e, t) \quad \forall i = 1 \dots N$$

$$l \leq 3N$$

Il vincolo di rigidità è eterno, bilaterale e indipendente dal tempo.

$$\forall P_i, P_j, \| \underline{P}_i - \underline{P}_j \| = \text{cost.}$$

$$\overline{P_i P_j} = d_{ij}$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - d_{ij}^2 = 0$$

In un sistema di  $N$  punti, quante sono le eq. di questo tipo?

In quanti modi posso, dati  $N$  oggetti, accoppiarli a due a due?

$$\binom{N}{2} = \frac{N!}{2!(N-2)!} = \frac{N(N-1)}{2} \stackrel{?}{=} \pi$$

Es. se  $N=10$ :

$$\pi \stackrel{?}{=} 10 \cdot 9 / 2 \stackrel{?}{=} 45$$

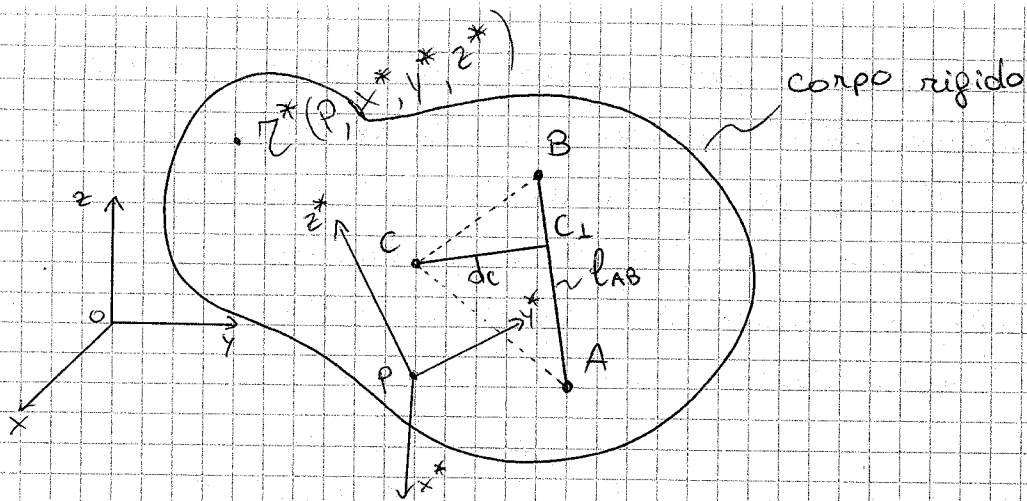
No perché  $3N=30$  e  $l$  sarebbe negativo

Abbiamo detto che le eq. devono essere indipendenti, mentre, se comincio a contare coppie, ogni punto appare in  $N-1$  situazioni.

In un corpo rigido

$$l = 6$$

sempre.



assegnamo le coordinate del punto  $A$

$$x_A(t), y_A(t), z_A(t)$$

(prime tre coordinate Lagrangiane)

"inchiodato"  $A$ ,  $B$  può muoversi su una sfera di raggio  $l_{AB}$

Chiamo  $\Theta_B$  e  $\varphi_B$  gli angoli che determinano la posizione di  $B$  sulla sup. sferica centrata in  $A$  e di raggio  $l_{AB}$ .

Fissati  $A$  e  $B$ , il corpo può ancora ruotare. Considero  $C$ :  $\overline{CC_\perp} = d_C = \text{cost.}$

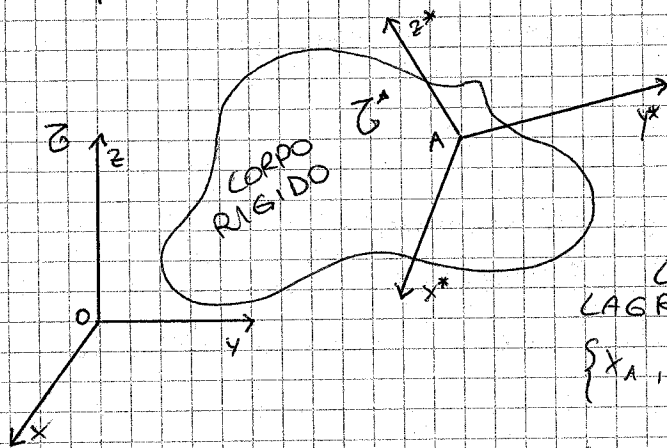
$\varphi_C$  rappresenta la posizione di  $C$  sulla circonferenza di raggio  $d_C$  centrata in  $C_\perp$ .

tutto si "riduce" ad accoppiare un sistema di riferimento solidale al corpo con il sist. di riferimento cartesiano.

09/11/2008

Si può considerare un punto A interno al corpo rigido e porre una terna di vettori di riferimento centrata in esso (terna mobile solidale).

Gli angoli di Eulero servono ad identificare la posizione di una terna in movimento rispetto ad una terna fissa.



$$G(0; x; y; z)$$

$$G^*(A; x^*; y^*; z^*)$$

LE COORDINATE LAGRANGIANE SONO:

$$\{x_A, y_A, z_A\} \text{ posizione di A}$$

+

$$\{\varphi, \psi, \theta\} \text{ angoli di Eulero}$$

Definizione di moto rigido:  $\overline{P_i P_j} - d_{ij} = 0$

Posso elevare al quadrato:

$$P_i P_j \cdot P_i P_j = d_{ij}^2 \quad \text{derivo rispetto al tempo:}$$

$$2 P_i P_j \cdot \frac{d P_i P_j}{dt} = 0 \quad \text{simplifico il coeff. 2}$$

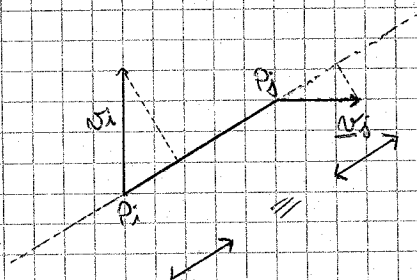
$$P_i P_j = P_i O + O P_j = O P_j - O P_i$$

$$\Rightarrow \frac{d P_i P_j}{dt} = \underline{v}_j - \underline{v}_i$$

$$(\underline{v}_j - \underline{v}_i) \cdot \frac{P_i P_j}{|P_i P_j|} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\underline{v}_j - \underline{v}_i) \cdot \widehat{P_i P_j} = 0$$

Questo vuol dire che le proiezioni lungo  $\widehat{P_i P_j}$  di  $\underline{v}_j$  e  $\underline{v}_i$  devono essere UGUALI.



Se integriamo questo vincolo ritroviamo la condizione di rigidità  $\overline{P_i P_j} - d_{ij} = 0$



Supponiamo di avere, ad un certo istante  $t$ , un punto  $P_i$  con  $\underline{v}_i = 0$ .

Cosa succede agli altri punti?

Hanno tutti velocità tali che la componente lungo  $\overline{P_i P_j}$  sia nulla. Le velocità dei punti sono tutte ortogonali alla congiungente  $\Rightarrow$  moto di rotazione.

Si chiama atto di moto l'insieme delle velocità dei punti del sistema ad un dato istante.

Un altro vincolo molto importante è il vincolo di PURO ROTOLAMENTO.

Supponiamo di avere due corpi rigidi  $S_1, S_2$ :

$S_1 \quad \sigma_1$

$S_2 \quad \sigma_2$

$\sigma_1, \sigma_2$  superfici solidali a  $S_1$  e  $S_2$  rispettivamente.

Scegliamo queste superfici di modo che, istante per istante durante il moto, esse abbiano alcuni punti di contatto tra di loro.

Chiamo  $A$  uno dei punti di contatto all'istante  $t$ .

I punti di contatto cambiano al variare del tempo.

Si chiama velocità di strisciamento relativa all'istante  $t$  la velocità di quel punto solidale a  $\sigma_1$  che all'istante  $t$  si sovrappone ad  $A$ .

$A$  non è un punto fisico contatto, è la definizione dipendente dal tempo del concetto di punto di contatto.



Se ad ogni istante e per ogni punto di contatto la velocità di strisciamento è nulla, il vincolo si dice di  puro rotolamento, ovvero si dice che la superficie  $\sigma_1$  rotola senza strisciare su  $\sigma_2$ .

Questo vincolo è particolare: è ottenuto grazie all'attrito, ma poiché le vel. di strisciamento sono sempre nulle, dal punto di vista energetico è equivalente ai vincoli privi di attrito.

L'unico attrito che genera dissipazione in questi casi è l'attrito volvente, dovuto al fatto che nelle situazioni quotidiane i punti di contatto ad ogni  $t$  sono molti e nelle zone di contatto si generano dei momenti.

### Teorema di composizione delle velocità

$\vec{O}$  terra fissa  
 $\vec{O}'$  terra mobile

$$OP = OO' - O'P =$$

$$= OO' + x' \hat{i}' + y' \hat{j}' + z' \hat{k}'$$

$$\underline{V}_P = \frac{dOO'}{dt} + \frac{dx'}{dt} \hat{i}' + x' \frac{d\hat{i}'}{dt} + \dots$$

$$= \underline{V}_{O'} + \underline{V}_P^{(r)} + x' \frac{d\hat{i}'}{dt} + y' \frac{d\hat{j}'}{dt} + z' \frac{d\hat{k}'}{dt}$$

↑  
vel. di P rispetto a  $\vec{O}'$ .

$$\underline{V}_P = \underline{V}_P^{(r)} + \underline{V}_P^{(t)}$$

$\underline{V}_P^{(t)}$  si dice velocità di TRASCINAMENTO

$$\underline{V}_P^{(t)} = \underline{V}_{O'} + x' \frac{d\hat{i}'}{dt} + y' \frac{d\hat{j}'}{dt} + z' \frac{d\hat{k}'}{dt}$$

Rappresenta il moto del punto P qualora esso fosse "inchiodato" sulla terra  $\vec{O}'$  e fosse quindi trascinato da  $\vec{O}'$ .

Nel puro rotolamento, la velocità di strisciamento gioca il ruolo delle velocità di trascinamento.

La velocità di strisciamento sarebbe proprio la differenza tra la velocità relativa e quella assoluta, qualora fosse 0,  $\underline{v}_p$  e  $\underline{v}_p^{(r)}$  coincidono.

Derivo ancora:

$$\underline{a}_p = \underline{a}_o + \left( \frac{d^2 x'}{dt^2} \hat{i}' + \dots \right) + 2 \left( \frac{dx'}{dt} \frac{d\hat{i}'}{dt} + \dots \right) + \left( x' \frac{d^2 \hat{i}'}{dt^2} + \dots \right)$$

$$\underline{a}_p = \underline{a}_o + \underline{a}_p^{(x)} + \dots$$

$$\underline{a}_p = \underline{a}_p^{(x)} + \underline{a}_p^{(\epsilon)} + \underline{a}_p^{(c)}$$

$$\underline{a}_p^{(c)} = \underline{a}_o + \left( x' \frac{d^2 \hat{i}'}{dt^2} + \dots \right)$$

$\underline{a}_p^{(c)}$  = accelerazione di CORIOLIS

Supponiamo che  $\hat{O}'$  si muova senza ruotare:

...  $\Rightarrow$  MOTO RELATIVO A UN PUNTO

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \frac{d\hat{j}'}{dt} = \frac{d\hat{k}'}{dt} = 0$$

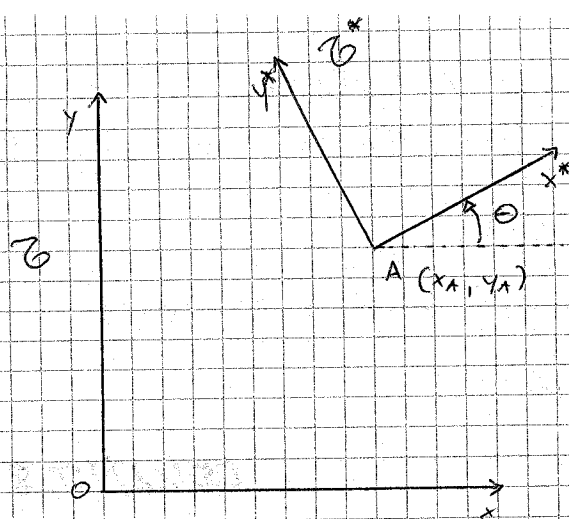
$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{v}_p^{(t)} = \underline{v}_o \\ \underline{a}_p^{(c)} = 0 \\ \underline{a}_p^{(\epsilon)} = \underline{a}_o \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underline{v}_p &= \underline{v}_p^{(x)} + \underline{v}_o \\ \underline{a}_p &= \underline{a}_p^{(x)} + \underline{a}_o \end{aligned}$$

## CINEMATICA RIGIDA PIANA

Moti paralleli ad una giacitura (piano) di riferimento fissa.

Posso immaginare di tagliare il corpo rigido in tante fettine parallele in cui le condizioni di moto sono identiche: mi basta studiare il moto di un piano mobile rispetto ad un piano fisso  $\Rightarrow$  solo 3 gradi di libertà.



"sezione" del sistema

Coordinate Lagrangiane:

$$\{x_A, y_A, \theta\}$$

A = pdo

$\dot{\theta}$  = velocità angolare scalare

$\ddot{\theta}$  = accelerazione angolare scalare

$\hat{k} // \hat{k}^*$

$$\underline{\omega} = \dot{\theta} \hat{k}$$

Nell'ambito dei moti rigidi di piano ci sono i moti rotatori, caratterizzati dalla presenza di un asse di rotazione.

$\hat{u}$  vettore dell'asse di rotazione

Tutti i punti dell'asse sono istante per istante fermi.

moto rotatorio  $\implies$  1 grado di libertà

Pongo  $\hat{k} \equiv \hat{u}$

Mi serve solo un angolo

$$\underline{\omega} = \dot{\theta} \hat{u}$$

(Rotazione di un piano solidale nel tempo: il piano contiene l'asse di rotazione)

$$\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge \overline{QP}$$

$$r = \overline{QP}$$

Considero una sezione ed introduco le coordinate polari  $(r, \theta)$

$$\underline{v}_P = \cancel{r \dot{\theta} \hat{\theta}} + r \dot{\theta} \hat{\theta} \leftarrow \text{atto di moto}$$

(r fisso)

$$\underline{\omega} \wedge \overline{QP} = \dot{\theta} \hat{u} \wedge r \hat{r} = r \dot{\theta} \hat{u} \wedge \hat{r} = r \dot{\theta} \hat{\theta} \quad \text{c.v.d.}$$

Se prendo un punto fisso A sull'asse:

$$\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge AP \quad (AP = AQ + QP, \text{ ma } AQ \parallel \hat{u})$$

Ci siamo liberati di Q(P).

Atto di moto per un corpo rigido in moto rotatorio:

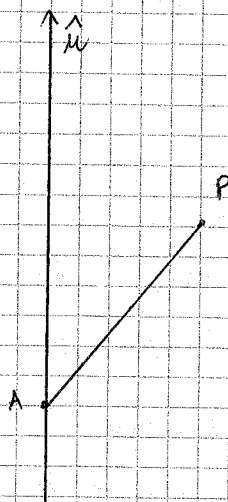
$$\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge AP$$

05/11/2008

Moti rigidi piani  $\Rightarrow l = 3$

Moti rotatori  $\Rightarrow l = 1$   $q_1 = \theta$  asse rotazione  
(tutti i punti solidali fermi)

$$\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge AP \quad \underline{\omega} = \dot{\theta} \hat{u}$$

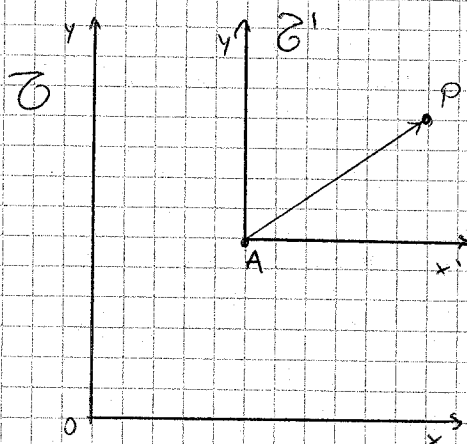


Perché il moto è rigido, P descrive una circonferenza di raggio fisso centrata in un punto dell'asse.

LEGGE ORARIA  $\equiv$  ATTO DI MOTO in questo caso.

$$\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge AP$$

In generale, com'è fatto l'atto di moto nei corpi rigidi?



Gli assi di  $\hat{e}'$  si mantengono costantemente paralleli a se stessi.

Per il teor. di composizione delle velocità,  $\underline{v}_P = \underline{v}_P^{(x)} + \underline{v}_A$

$$\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge AP + \underline{v}_A$$

Atto di moto nel caso più generale della cinematica rigida piana:

$$\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge AP + \underline{v}_A$$

$$q_1 = x_A \quad q_2 = y_A \quad q_3 = \theta$$



L'atto di moto ha solo due vettori caratteristici,  $\omega$  e  $\underline{v}_A$ , che coinvolgono direttamente le derivate delle coord. lagrangiane  $q_i$ .

Consideriamo un istante  $t$ :  $\dot{\theta} \neq 0 \Rightarrow$

$\exists!$  il centro delle velocità  $C_v$  e  $C_v$  ha velocità nulla.

Dimostrazione

$$\underline{\omega} \wedge AC + \underline{v}_A = 0$$

$$\underline{\omega} \wedge AC = -\underline{v}_A$$

$$AC \wedge \underline{\omega} = \underline{v}_A$$

fissati  $\omega$  e  $\underline{v}_A$ , la posizione di  $C_v$  è univocamente determinata dalla regola della mano destra.

$$|AC_v| |\dot{\theta}| = |\underline{v}_A|$$

$$|AC_v| = \frac{|\underline{v}_A|}{|\dot{\theta}|}$$

Poiché  $C_v$  varia in funzione del tempo, possiamo definire il centro istantaneo di rotazione che, istante per istante, coincide con  $C_v$ . ( $C(t)$ )

$$\underline{\omega} \wedge AC + \underline{v}_A = 0$$

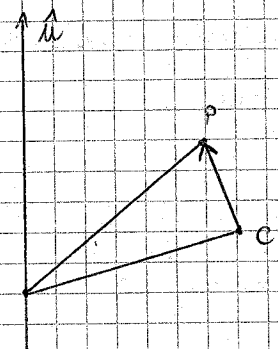
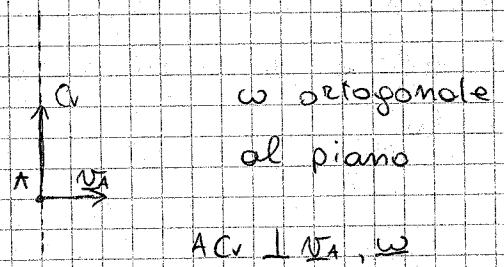
$$\underline{v}_A = AC \wedge \underline{\omega}$$

L'atto di moto diventa:

$$\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge AP + AC \wedge \underline{\omega}$$

$$\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge (AP - AC)$$

$$\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge CP$$



Che ha la stessa forma dell'atto di moto rotatorio.

L'unica cosa che resta costante nel tempo è la direzione (non il verso) dell'asse di rotazione.

L'atto di moto è una successione di moti rotatori.

La base  $C(t)$  dell'asse di rotazione si muove sia rispetto al piano mobile che rispetto al piano fisso. Le due traiettorie hanno in comune la tangente.

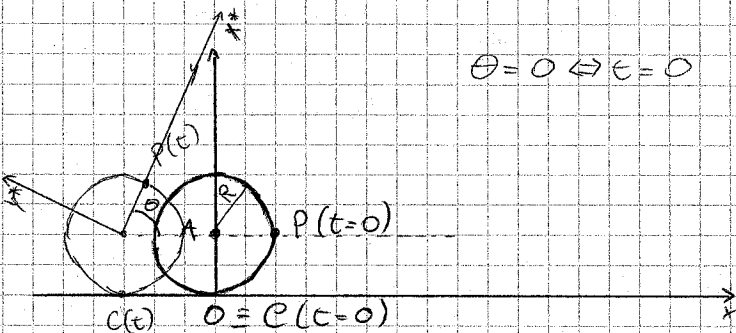


$G(c(t))$  in  $\bar{\sigma}'$  si dice ruletta

$G(c(t))$  in  $\bar{\sigma}$  si chiama base

Si dimostra che la ruletta rotola senza strisciare sulla base.

Studiamo il moto di un disco soggetto al vincolo di puro rotolamento su una retta.



$$\theta = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

Il punto di contatto tra il bordo del disco ( $\sigma_1$ ) e la retta ( $\sigma_2$ ) è uno.

$c(t)$   $O \equiv C(t=0)$

A centro del disco

P punto della circonfer. di coord. al tempo 0  $(R, R)$

Lo spostamento di A deve coincidere con lo spostamento angolare di P.

$$y_A = R \quad x_A = -R\theta$$

$$\boxed{x_A + R\theta = 0} \quad \text{vincolo di puro rotolamento}$$

vincolo olonomo bilaterale

$$\dot{x}_A + R\dot{\theta} = 0 \quad \underline{\omega} = \dot{\theta} \hat{k} \leftarrow \hat{k} \text{ vettore uscente dal piano}$$

Una rotazione in senso antiorario implica una

$\omega$  concorde con  $\hat{k}$

$$\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}$$

$$\underline{v}_A = (\dot{x}_A, \dot{y}_A) = (\dot{x}_A, 0)$$

$$\boxed{\dot{x}_A = -R\dot{\theta}} \quad \text{vincolo di puro rotolamento}$$

Integrabile anche se è un vincolo sulla velo a'el.

$$AP \equiv (R \cos \theta, R \sin \theta)$$

$$\underline{\omega} \wedge AP = \dot{\theta} \hat{k} \wedge (R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j}) = \dot{\theta} R \cos \theta \hat{j} - R \dot{\theta} \sin \theta \hat{i}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_p = -R \dot{\theta} \sin \theta - R \dot{\theta} \\ \dot{y}_p = \dot{\theta} R \cos \theta \end{cases}$$

Voglio trovare la traiettoria di un punto che si trova sul bordo di un disco che rotola senza strisciare su una retta

Integriamo:

$$\begin{cases} x_p(t) - x_p(0) = R \cos \Theta - R - R \Theta \\ y_p(t) - y_p(0) = R \operatorname{sen} \Theta \end{cases}$$

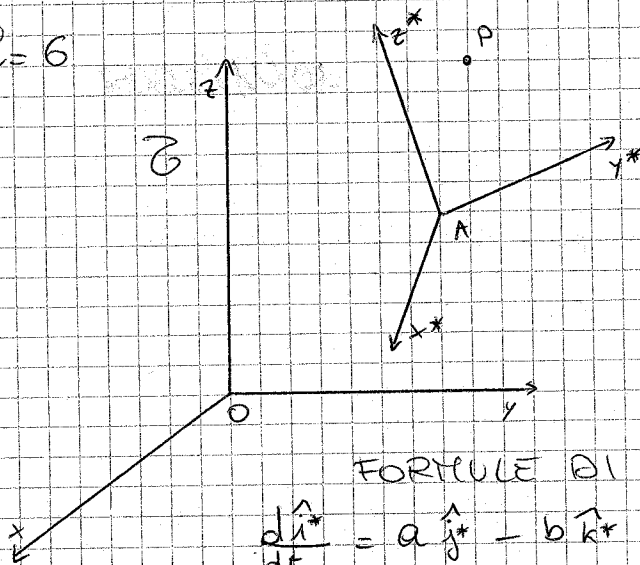
$$(x_p(0), y_p(0)) = (R, R)$$

$$\begin{aligned} x(\Theta) &= R(\cos \Theta - \Theta) & \text{Equazioni parametriche} \\ y(\Theta) &= R(1 + \operatorname{sen} \Theta) & \text{di una CICLOIDE} \end{aligned}$$

L'equazione vincolare  $x_A + R\Theta = 0$  collega tra loro il grado di libertà di traslazione con il grado di libertà di rotazione.

### MOTI RIGIDI NELLO SPAZIO

$$l = 6$$



$$l = 6 = 3 + 3$$

$$\{x_A, y_A, z_A\}$$

+ angoli che determinano la posizione di  $\hat{\alpha}^*$  rispetto a  $\hat{\alpha}$

### FORMULE DI POISSON

$$\frac{d\hat{i}^*}{dt} = a\hat{j}^* - b\hat{k}^*$$

$$\frac{d\hat{j}^*}{dt} = c\hat{k}^* - d\hat{i}^*$$

$$\frac{d\hat{k}^*}{dt} = e\hat{i}^* - f\hat{j}^*$$

tra i 6 coefficienti

$$a, b, c, d, e, f$$

Solo 3 sono

indipendenti

$$\hat{i}^* \cdot \hat{j}^* = 0$$

$$\hat{j}^* \cdot \hat{k}^* = 0$$

$$\hat{i}^* \cdot \hat{k}^* = 0$$

$$\frac{d\hat{i}^*}{dt} \cdot \hat{j}^* + \hat{i}^* \cdot \frac{d\hat{j}^*}{dt} = 0$$

$$\parallel \quad \parallel \quad = 0$$

$$a = d$$

$$c = f$$

$$e = b$$

Definisco:

$$\underline{\omega} \equiv c \hat{i}^* + b \hat{j}^* + a \hat{k}^*$$

$a, b, c$  funzioni note.

$$\frac{d\hat{i}^*}{dt} = \underline{\omega} \wedge \hat{i}^* = (b \hat{j}^* + a \hat{k}^*) \wedge \hat{i}^* = -b \hat{k}^* + a \hat{j}^*$$

$$\frac{d\hat{j}^*}{dt} = \underline{\omega} \wedge \hat{j}^*$$

$$\frac{d\hat{k}^*}{dt} = \underline{\omega} \wedge \hat{k}^*$$

FORMULE DI POISSON

$$AP = x^* \hat{i}^* + y^* \hat{j}^* + z^* \hat{k}^*$$

Derivo:

$$\underline{v}_p - \underline{v}_A = x^* \underline{\omega} \wedge \hat{i}^* + y^* \underline{\omega} \wedge \hat{j}^* + z^* \underline{\omega} \wedge \hat{k}^*$$

$$\underline{v}_p = \underline{v}_A + \underline{\omega} \wedge AP \quad (\text{solito atto di moto})$$

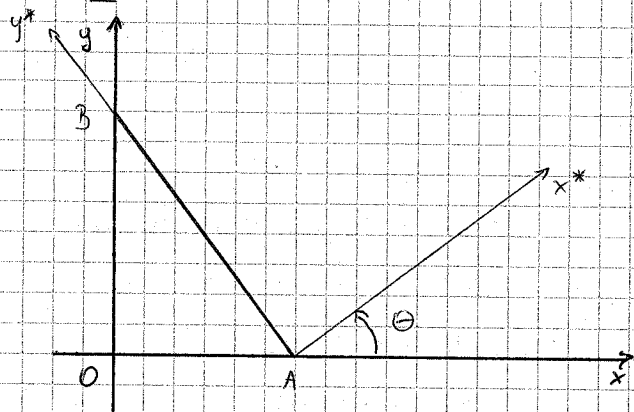
10/11/2008

$C(t)$

$\underline{v}_A$

$$\underline{v}_p = \underline{v}_A + \underline{\omega} \wedge AP \quad (\text{più generale atto di moto})$$

$$\underline{v}_A + \underline{\omega} \wedge AC = 0$$



$$\overline{AB} = l$$

Quali sono le coppie di assi relative al piano fisso e al piano mobile?

Il piano fisso è descritto da  $(x, y, 0)$

Il piano mobile ha come sistema di riferimento solidale  $(x^*, y^*, A)$ .

L'unica coordinata lagrangiana è  $\Theta$ :

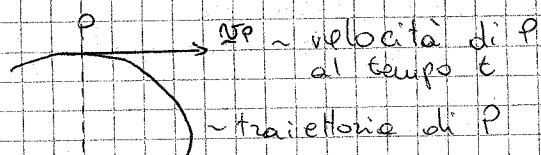
$$\begin{cases} x_A = l \sin \Theta \\ y_A = 0 \end{cases}$$

$$\{x_A, y_A, \Theta\}$$

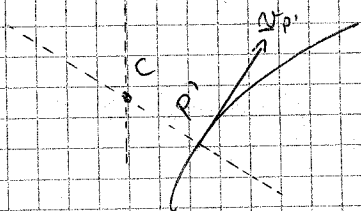
Ci sono due vincoli che mi consentono di esprimere  $x_A$  e  $y_A$  come funzioni di  $\Theta$ .

# Teorema di Chasles

$$\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge \underline{CP}$$

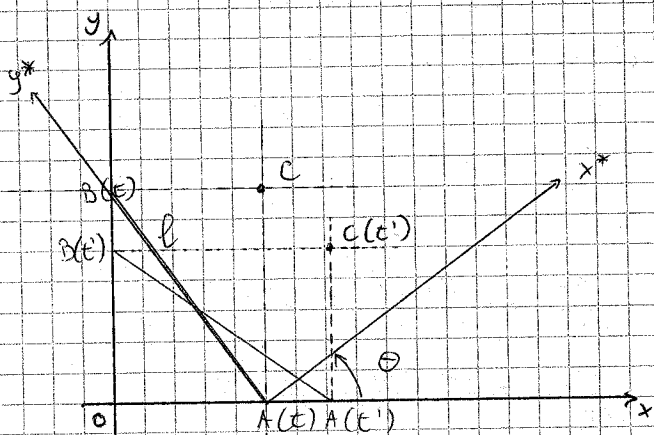


Qualsiasi posizione di  $C$  sull'asse perpendicolare a  $\underline{v}_P$  va bene.



Basta prendere un altro punto  $P$  del corpo, e considerare la sua velocità al tempo  $t$ .

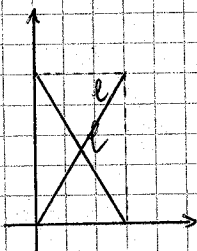
Mettendo a sistema troviamo  $C$ .



Mettiamoci nel sistema di riferimento fisso. Qual è la traiettoria descritta da  $C(t)$ ?

$C$  resta sempre equidistante ( $d=l$ ) da  $O$

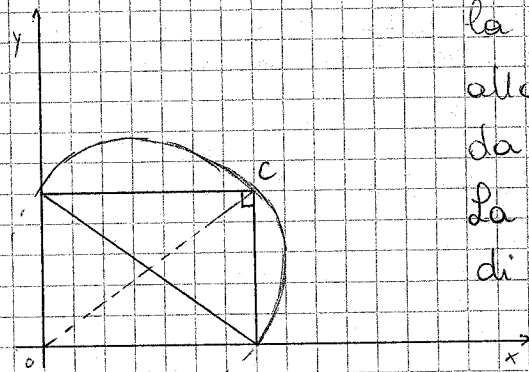
$\Rightarrow$  La traiettoria di  $C$  è una circonferenza di raggio  $l$  centrata nell'origine  $O$ .



(Diagonale di un rettangolo)

$$x_c^2 + y_c^2 = l^2 \quad (\text{base})$$

Consideriamo un osservatore solidale al piano mobile. Questo vede la sbarra sempre sotto un angolo retto.



La sbarra  $AB$  fa da diametro alla circonferenza descritta da  $C$ .

La retta è una circonferenza di raggio  $l/2$  centrata nel centro dell'asta.

$$x_c^2 + \left(y_c - \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{4}$$

La ruotella rotola senza strisciare sulla base.

↳ Questo è un modo per analizzare TUTTA la cinematica piana.

Torniamo nello spazio.

$$\underline{\omega} = c \hat{i}^* + b \hat{j}^* + a \hat{k}^*$$

$$a = \frac{d \hat{i}^*}{dt} \cdot \hat{j}^*$$

$$b = \frac{d \hat{k}^*}{dt} \cdot \hat{i}^*$$

$$c = \frac{d \hat{j}^*}{dt} \cdot \hat{k}^*$$

valgono le formule di Poisson

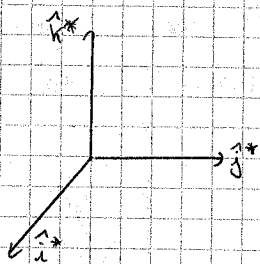
$\underline{\omega}$  è qualsiasi, non è  $\parallel \hat{k}$  come sul piano.

Il più generale atto di moto è:

$$\underline{v}_P = \underline{v}_A + \underline{\omega} \wedge \underline{AP}$$

CASO PIANO

$$\underline{\omega} = \dot{\theta} \hat{k}^* = \dot{\theta} \hat{k}^*$$



$$\frac{d \hat{i}^*}{dt} = \dot{\theta} \hat{k}^* \wedge \hat{i}^* = \dot{\theta} \hat{j}^*$$

$$\frac{d \hat{j}^*}{dt} = \dot{\theta} \hat{k}^* \wedge \hat{j}^* = -\dot{\theta} \hat{i}^*$$

$$\frac{d \hat{k}^*}{dt} = \dot{\theta} \hat{k}^* \wedge \hat{k}^* = 0$$

$$\Rightarrow b = c = 0$$

$$\underline{\omega} = a \hat{k}^* = \dot{\theta} \hat{k}^*$$

Il caso piano è un "sottosistema" del caso spazio.

$\underline{\omega} = \underline{\omega}(t)$   $\omega$  può dipendere dalla scelta del polo o della terna?

$\omega'' \nwarrow$  Supponiamo che una terna diversa presenti un altro  $\underline{\omega}$ .

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}'?$$

$$\underline{v}_P = \underline{v}_A + \underline{\omega}' \wedge \underline{AP}$$

facciamo la diff. termine a termine con l'atto di moto:

$$(\underline{\omega}' - \underline{\omega}) \wedge \underline{AP} = 0 \quad \forall P$$

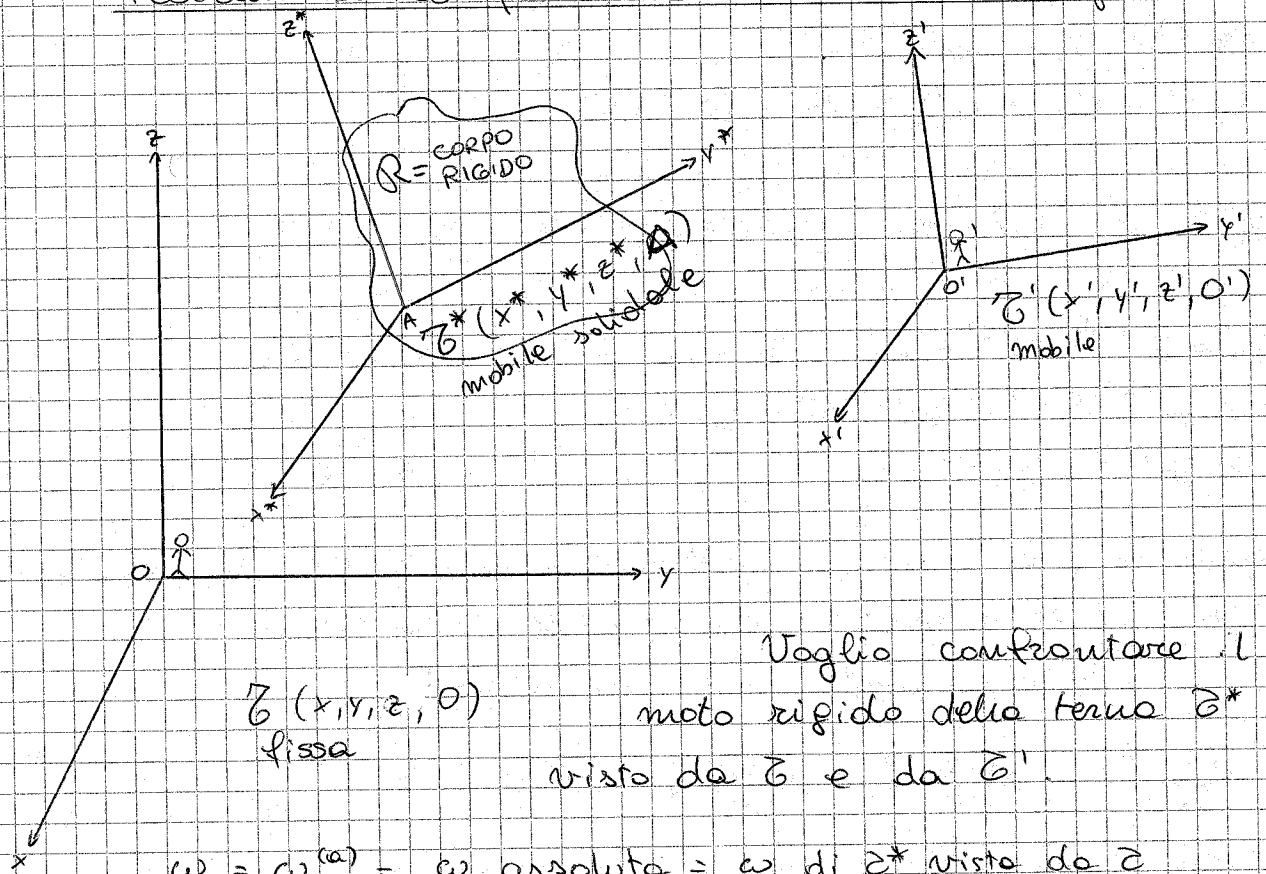
$$\Rightarrow \underline{\omega}' - \underline{\omega} = 0 \Rightarrow \underline{\omega} = \underline{\omega}' \quad \forall \vec{O}$$

↳ il vettore ortogonale a tutti gli altri è il vettore nullo.



Se ho un moto rigido, come si compongono i moti? Ho la terra assoluta, la terra mobile e la terra solidale.

Teorema di composizione delle velocità angolari



$\underline{\omega} = \underline{\omega}^{(a)} = \underline{\omega}$  assoluta =  $\underline{\omega}$  di  $S^*$  visto da  $S$

$\underline{\omega}^{(r)} = \underline{\omega}$  relativa =  $\underline{\omega}$  di  $S^*$  visto da  $S'$

$\underline{\omega}^{(c)} = \underline{\omega}$  di trascinamento =  $\underline{\omega}$  di  $S'$  visto da  $S$ .

Come sono collegate tra loro  $\underline{\omega}$ ,  $\underline{\omega}^{(r)}$  e  $\underline{\omega}^{(c)}$ ?

Istante per istante, vale:

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}^{(r)} + \underline{\omega}^{(c)}$$

Dimostrazione

Prendiamo un punto  $P \in R$  qualsiasi:

$\underline{v}_P = \underline{v}_P^{(r)} + \underline{v}_P^{(c)}$  (teor. compos. velocità)

$\underline{v}_P = \underline{v}_A + \underline{\omega} \wedge \underline{AP}$  (vincolo del moto rigido)  
 $\uparrow$   
 $\underline{\omega}$  assoluta

$\Rightarrow \underline{v}_P^{(r)} + \underline{v}_P^{(c)} = \underline{v}_A + \underline{\omega} \wedge \underline{AP}$

Mettiamo ci in  $S'$ :

$\underline{v}_P^{(r)} = \underline{v}_A^{(r)} + \underline{\omega}^{(r)} \wedge \underline{AP}$

$\underline{v}_P^{(c)} = \underline{v}_{O'} + \left( x' \frac{\partial \hat{i}}{\partial t} + \dots \right)$  Applico le formule di Poisson

$$\frac{d\hat{i}^1}{dt} = \underline{\omega}^{(c)} \wedge \hat{i}^1, \dots$$

$$\Rightarrow \underline{v}_P^{(c)} = \underline{v}_{O'} + x^1 \underline{\omega}^{(c)} \wedge \hat{i}^1 = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega}^{(c)} \wedge (x^1 \hat{i}^1 + y^1 \hat{j}^1 + z^1 \hat{k}^1)$$

reggio vettore che identifica la posizione di P rispetto ad O'

$$\underline{v}_P^{(c)} = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega}^{(c)} \wedge O'P \quad O'P = O'A + AP$$

$$\underline{v}_P^{(c)} = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega}^{(c)} \wedge O'A + \underline{\omega}^{(c)} \wedge AP$$

Sostituisco nella prima uguaglianza trovata:

$$\underline{v}_A^{(c)} + \underline{\omega}^{(c)} \wedge AP + \underline{v}_{O'} + \underline{\omega}^{(c)} \wedge O'A + \underline{\omega}^{(c)} \wedge AP = \underline{v}_A^{(c)} + \underline{\omega} \wedge AP$$

Applico al polo A il teor. di comp. delle vel.:

$$\underline{v}_A = \underline{v}_A^{(c)} + \underline{v}_{O'} = \underline{v}_A^{(c)} + \underline{v}_{O'} + \underline{\omega}^{(c)} \wedge O'A \quad \text{Semplifico:}$$

$$\Rightarrow \underline{\omega}^{(c)} \wedge AP + \underline{\omega}^{(c)} \wedge AP = \underline{\omega} \wedge AP$$

$$\Rightarrow \underline{\omega}^{(c)} + \underline{\omega}^{(c)} = \underline{\omega} \quad \text{c.v.d.} \quad (\forall P \in \mathbb{R})$$

Supponiamo di avere un qualsiasi vettore  $\underline{W}(t) = (W_x, W_y, W_z)$

Vettore = ente geometrico che presiede dalla terna di riferimento (ente intrinseco)

$$\frac{d\underline{W}(t)}{dt} = \frac{dW_x}{dt} \hat{i} + \frac{dW_y}{dt} \hat{j} + \frac{dW_z}{dt} \hat{k} \quad \left( \begin{array}{l} \text{il vettore } \hat{\text{è}} \text{ proiettato} \\ \text{su una terna fissa} \end{array} \right)$$

Stessa cosa può scrivere un osservatore che si trova su una terna mobile (ad esempio quella solidale).

$$(W_x^*, W_y^*, W_z^*) = \underline{W}$$

$$\frac{d_{rel} \underline{W}}{dt} = \frac{dW_x^*}{dt} \hat{i}^* + \frac{dW_y^*}{dt} \hat{j}^* + \frac{dW_z^*}{dt} \hat{k}^*$$

Qual è la parentela tra queste due derivate?

derivata relativa di  $\underline{W}$

$$\underline{W} = W_x^* \hat{i}^* + W_y^* \hat{j}^* + W_z^* \hat{k}^* \quad \text{derivato:}$$

$$\frac{d\underline{W}}{dt} = \frac{d_{rel} \underline{W}}{dt} + \left( W_x^* \frac{d\hat{i}^*}{dt} + \dots \right) \rightarrow \text{formule di Poisson}$$

$$\underline{W}_x^* \underline{\omega} \wedge \hat{i}^*$$

$$\boxed{\frac{d\underline{W}}{dt} = \frac{d_{rel} \underline{W}}{dt} + \underline{\omega} \wedge \underline{W}}$$

In generale, dato un vettore non solidale (quello è un caso particolare), questa

è la relazione tra la derivata assoluta e quella relativa. Se considero un vettore solidale

$$\Rightarrow \frac{d_{rel} \underline{W}}{dt} = 0 \quad \text{e si trovano, con } \underline{W} = (\hat{i}^*, \hat{j}^*, \hat{k}^*), \text{ le formule di Poisson.}$$

Derivate assolute e relative sono uguali quando:

- la terna solidale non ruota
- il vettore considerato è una velocità angolare.

11/11/2008

$$\underline{v}_P = \underline{v}_A + \underline{\omega} \wedge \underline{AP} \quad \forall P \in R \quad (\text{atto di moto})$$

$\underline{v}_A, \underline{\omega}$

In generale i gradi di libertà sono 6:

$\begin{cases} 3 \text{ rotazionali} \\ 3 \text{ traslazionali} \end{cases}$

$l = 6$

$$q_1 = x_A$$

$$q_2 = y_A$$

$$q_3 = z_A$$

$$\{q_4, q_5, q_6\} = ?$$

Dobbiamo, ad ogni istante, identificare la posizione di una terna rotante rispetto ad una terna fissa.

$\underline{v}_P - \underline{v}_A = \underline{\omega} \wedge \underline{AP}$  moltiplichiamo scalarmente per i rispettivi vettori:

$$\underline{(v}_P - \underline{v}_A) \cdot \underline{AP} = 0$$

Condizione necessaria e sufficiente che caratterizza il moto rigido.

MOTI SFERICI (sottoinsieme dei moti rigidi)

I moti sferici sono caratterizzati da UN punto fisso.

$O \equiv$  punto fisso

faccio coincidere l'origine (il polo) con il punto solidale  $O$ .

$$A \equiv O \Rightarrow \underline{v}_A = 0 \Rightarrow \underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge \underline{AP}$$

L'atto di moto è puramente rotatorio; l'unico vettore caratteristico è la velocità angolare  $\underline{\omega}$ .

$O$  è fisso, ma  $\underline{\omega} = \underline{\omega}(t)$

Il moto non è rotatorio, l'atto di moto è rotatorio.

Il moto è, nel tempo, una successione di moti rotatori attorno alla direzione istantanea del vettore  $\underline{\omega}$ , che cambia nel tempo.

Se ci riduciamo al caso piano,  $\underline{\omega}$  incide sul piano nel punto dove si trova il centro di rotazione.

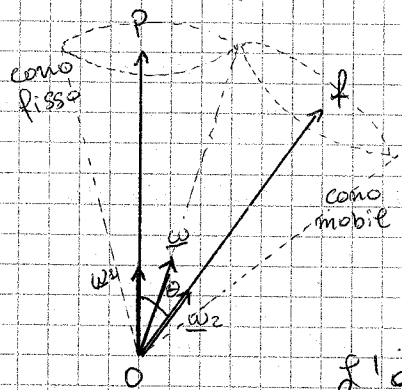
Dal punto di vista geometrico, l'asse istantaneo di rotazione descrive un cono visto dal sistema di riferimento fisso ed un altro cono visto dallo stesso mobile (coni di Poinsot).

Il cono mobile rotola senza strisciare sul cono fisso.

Un esempio ne sono le **PRECESSIONI REGOLARI**:

l'asse terrestre non è perfettamente ortogonale all'eclittica: se lo fosse, non avremmo le stagioni.

La terra ruota attorno al proprio asse, e l'asse precessa (ruota) attorno alla velocità angolare (l'eclittica).



OP asse di precessione  
OF asse di figura

Se OF è l'asse di figura, c'è una  $\omega_2$  parallela ad esso. (ROTAZIONE UNIFORME)

$\omega_2 = \text{costante}$ .

L'asse di figura ruota a sua volta attorno all'asse di precessione

con velocità angolare  $\omega_1$

O = polo della precessione.

$\omega_1 \sim \omega$  di trascinamento

$\omega_2 \sim \omega$  relativa

asse di figura  $\sim$  asse terrestre

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

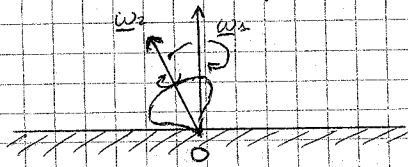
Il cono mobile di Poinsot in questo caso rotola senza strisciare sulla superficie del cono fisso.

In caso di precessione regolare, l'"ampiezza" dei coni rimane costante, come  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .

I due coni hanno in comune  $\omega$ , così come la bare e la ruletta avevano in comune C.



Un altro esempio di moto sferico è la trottola:

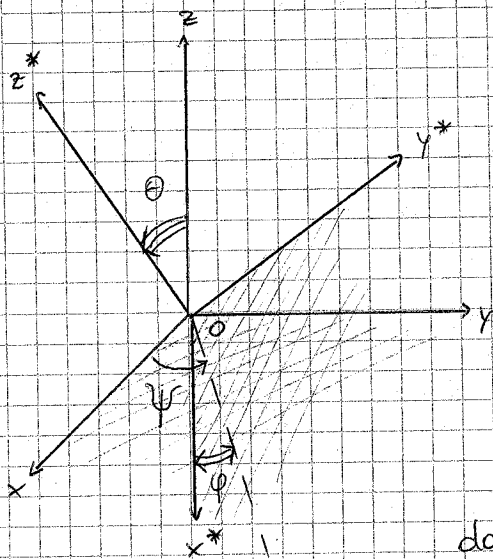


(O punto fisso)

[ Moto rototraslatorio:  $\underline{v}_G \parallel \underline{\omega}$  ]

Mel caso fenestree,  $\theta$  resta costante (angolo tra due assi), e  $\frac{|\underline{\omega}_1|}{|\underline{\omega}_2|} \sim 10^{-7}$

Ora vogliamo individuare con precisione  $q_4, q_5$  e  $q_6$ .



Troscuriamo i gradi di libertà di traslazione e applichiamo terna fissa e terna mobile allo stesso origine.

$\mathcal{R}_6(O, x, y, z)$

$\mathcal{R}_6^*(O, x^*, y^*, z^*)$

Consideriamo la direzione individuata dall'intersezione dei piani  $(O, x, y)$  e

$(O, x^*, y^*)$ . Chiamo  $ON$  questa retta.

$\hat{N} \perp \hat{k}, \hat{N} \perp \hat{k}^*$  Scelgo il verso positivo di  $\hat{N}$  uguale al verso positivo di  $(\hat{k} \wedge \hat{k}^*)$ .

$ON \equiv$  linea dei nodi

$0 \leq \psi \leq 2\pi$   $\psi$  angolo tra  $Ox$  e  $ON$

$\psi =$  ANGOLO DI PRECESSIONE

Dato che il sistema solidale si muove, anche la linea dei nodi varia nel tempo, e gli angoli che stiamo definendo sono funzioni del tempo.

$\psi = \psi(t)$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$   $\varphi$  angolo fra  $Ox^*$  e  $ON$

$\varphi =$  ANGOLO DI ROTAZIONE PROPRIA  $\varphi = \varphi(t)$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$   $\theta$  angolo tra  $\hat{k}$  e  $\hat{k}^*$

$\theta =$  ANGOLO DI NUTAZIONE  $\theta = \theta(t)$

$\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}$



Posso, con tre passi successivi, passare dalla posizione all'istante  $t$  di  $\mathcal{B}$  alla posizione all'istante  $t$  di  $\mathcal{B}^*$ ? Sì.

- Ruoto attorno all'asse  $z$  di un angolo  $\Psi$

Contributo a  $\underline{\omega}$ :  $\dot{\Psi} \hat{k}$        $O_x \longrightarrow O_{x'} = O_N$

- Tegno fermo  $O_N$  e ruoto nel piano ortogonale a  $O_N$  di un angolo  $\Theta$

Contributo a  $\underline{\omega}$ :  $\dot{\Theta} \hat{N}$        $O_z \longrightarrow O_{z''} = O_{z^*}$

- Ruoto attorno a  $O_{z^*}$  di un angolo  $\varphi$  di modo che  $O_N$  diventi il nuovo asse  $x$ ,  $O_{x^*}$ .

Contributo a  $\underline{\omega}$ :  $\dot{\varphi} \hat{k}^*$        $O_N \longrightarrow O_{x'''} \longrightarrow O_{x^*}$

Con tre rotazioni indipendenti siamo passati da una terna fisso ad una terna mobile.

$$\{q_4, q_5, q_6\} \equiv \{\Psi, \Theta, \varphi\}$$

$$\hat{k} \wedge \hat{k}^*$$

$$\hat{N} = \frac{\hat{k} \wedge \hat{k}^*}{\text{sen } \Theta}$$

definizione del versore della linea dei nodi

Applico il teorema di composizione delle velocità angolari.

$$\underline{\omega} = \dot{\Psi} \hat{k} + \dot{\Theta} \hat{N} + \dot{\varphi} \hat{k}^*$$

$OP_i = OP_i(q_1, \dots, q_6, t)$   $\Psi, \Theta, \varphi$  sono angoli di EULERO.

Determiniamo le componenti di  $\underline{\omega}$  sulla terna solidale e sulla terna fissa.

Sulla terna mobile:

$$\underline{\omega} \cdot \hat{i}^* = p = \dot{\Psi} \hat{k} \cdot \hat{i}^* + \dot{\Theta} \cos \varphi + 0$$

$$\underline{\omega} \cdot \hat{j}^* = q = \dot{\Psi} \hat{k} \cdot \hat{j}^* + \dot{\Theta} [(\cos \varphi + \pi/2) = -\text{sen } \varphi] + 0$$

$$\underline{\omega} \cdot \hat{k}^* = r = \dot{\Psi} \cos \Theta + 0 + \dot{\varphi}$$

per definizione

$$(\hat{k} \wedge \hat{k}^*) \cdot \hat{j}^* = \hat{j}^* \cdot (\hat{k} \wedge \hat{k}^*) = \hat{k} \cdot (\hat{k}^* \wedge \hat{j}^*) = -\hat{k} \cdot \hat{i}^*$$

$$\text{sen } \Theta \hat{N} \cdot \hat{j}^*$$

$$\text{sen } \Theta (-\text{sen } \varphi)$$

il prodotto misto si può ruotare ciclicamente

$$\Rightarrow \hat{k} \cdot \hat{i}^* = \sin \Theta \sin \varphi$$

$$(\hat{k} / \hat{k}^*) \cdot \hat{i}^* = \hat{k} \cdot (\hat{k}^* / \hat{i}^*) = \hat{k} \cdot \hat{j}^*$$

$$\sin \Theta \cos \varphi$$

$$\sin \Theta \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \hat{k} \cdot \hat{j}^* = \sin \Theta \cos \varphi$$

$$p = \hat{\psi} \sin \Theta \sin \varphi + \hat{\theta} \cos \varphi$$

$$q = \hat{\psi} \sin \Theta \cos \varphi - \hat{\theta} \sin \varphi$$

$$r = \hat{\psi} \cos \Theta + \hat{\varphi}$$

In termini di matrici di rotazione  $R$ ,  
si ha:

$$R = R_3 R_2 R_1$$

$\downarrow$       $\downarrow$       $\downarrow$   
 $\varphi$     $\theta$     $\psi$

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det R_1 = 1$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- fare il prodotto righe per colonne, nell'ordine:

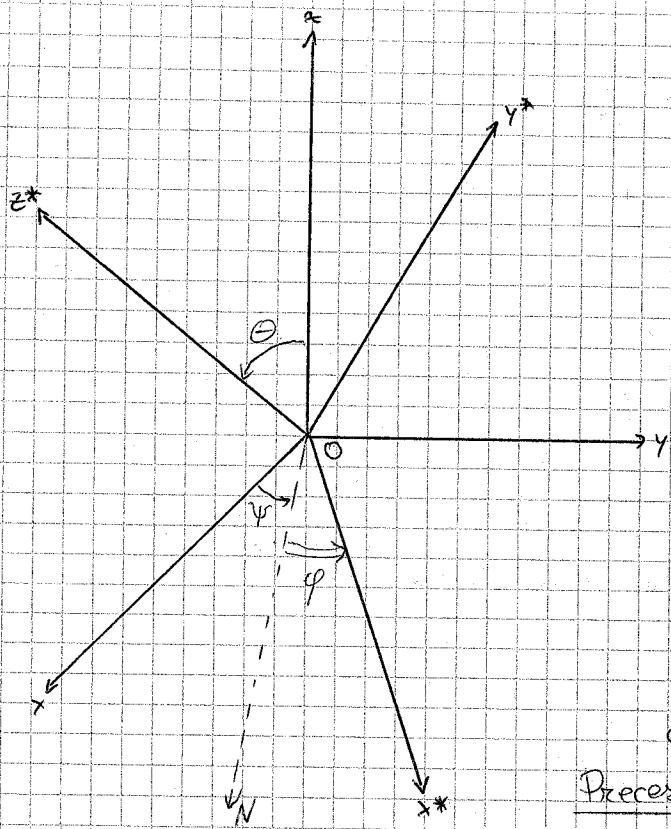
$$R \underline{w} = \underline{w}' \quad (\underline{w} \text{ rispetto ad un'altra } \mathcal{B})$$

$$R \equiv R_3 R_2 R_1$$

$$\mathcal{B}' = R \mathcal{B}$$

- applicare  $R$  a  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$
- determinare le componenti di  $\underline{a}$  sulla base fisso.

12/11/2009



$$\{\psi, \theta, \varphi\}$$

$$\theta = \text{costante} \Rightarrow \dot{\theta} = 0$$

$$\underline{\omega} = \dot{\psi} \hat{k} + \dot{\theta} \hat{N} + \dot{\varphi} \hat{k}^* \Rightarrow \underline{\omega} = \frac{\dot{\psi}}{\omega_1} \hat{k} + \frac{\dot{\varphi}}{\omega_2} \hat{k}^*$$

$$\omega_z = \rho$$

$$\omega_{z^*} = \rho$$

$$\theta = \theta_0$$

$$\dot{\psi} = \text{cost.} = \lambda \Rightarrow \psi(t) = \psi_0 + \lambda t$$

$$\dot{\varphi} = \text{cost.} = \mu \Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 + \mu t$$

La dipendenza dal tempo è nota

Conosco le coordinate rotazionali ad ogni istante.

### Precessione degli equinozi

$(x^*, y^*)$  è il piano equatoriale

$Oz$  individua il momento angolare

$Oz$  asse di rotazione

$(x, y)$  è il piano dove giace l'eclittica.

C'è un certo angolo tra i piani  $x^*, y^*$  e  $x, y$ .  $\theta$

Sole attraversa la linea dei nodi (linea degli equinozi), che è l'intersezione tra il piano equatoriale e il piano dell'eclittica, due volte all'anno (equinozi).

L'asse terrestre precessa attorno all'asse ortogonale all'eclittica, e questo comporta una rotazione anche da parte della linea degli equinozi. È uno dei motivi per cui, per un osservatore terrestre, lo volto celeste cambia lentamente aspetto.

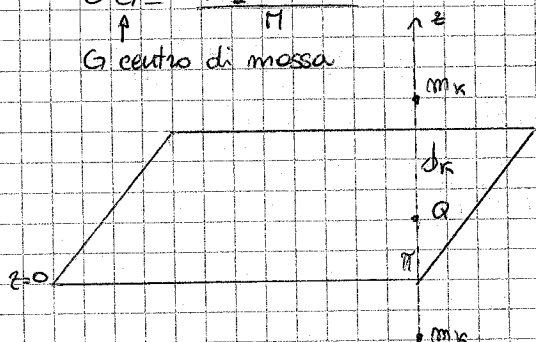
# GOMETRIA DELLE MASSE

$N$  punti materiali

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

$$OG \equiv \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot OP_i}{M}$$

$G$  centro di massa

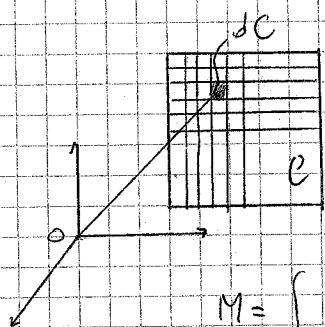


$\pi$  piano di simmetria per un sistema di punti

$\Rightarrow \forall m_k$  esiste un  $m_k$  equidistante da  $\pi$

Ponendo  $\pi = (z=0)$ , questi contributi si elidono a due a due, e dunque

$G$  si trova sul piano di simmetria.



lamina rigida con profondità trascurabile

Immagino di dividere il corpo in tanti elementi superficiali e considero un singolo elemento.

$$M = \int_C \rho \cdot dC$$

$\rho$  = densità di massa

$dC \rightarrow$  elemento di lunghezza / superficie / volume

In caso di distribuzione uniforme,  $\rho =$  costante

$$\Rightarrow M = \rho \int_C dC \Rightarrow \rho = \frac{M}{V} \text{ (o } S \cdot L)$$

Se  $\rho$  dipende dal punto considerato,  $\rho = \rho(P) = \lim_{dC \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta C}$

La densità di massa si indica generalmente con questi simboli:

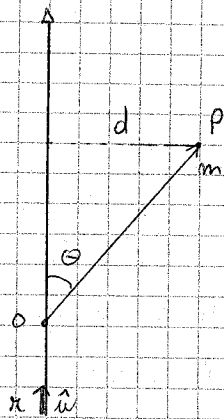
$\lambda$  (caso unidimensionale)

$\sigma$  (caso bidimensionale)

$\rho$  (caso tridimensionale)

$$OG = \frac{1}{M} \int_C OP \cdot \rho(P) \cdot dC$$

Supponiamo di avere un solo punto ed una retta



Si definisce momento d'inerzia del punto P rispetto alla retta r

$$I_r = md^2$$

Se consideriamo un sistema di punti discreti, I del sistema è:

$$I_r = \sum_{i=1}^N m_i d_i^2$$

Indichiamo con  $\hat{u}$  il vettore di r

O = punto qualsiasi su r

$d_i = |\hat{u} \wedge OP_i|$  (produce un vettore ortogonale ad  $\hat{u}$ , ortogonale a  $OP_i$ , e di modulo  $OP_i \sin \theta$ )

$$d_i^2 = |\hat{u} \wedge OP_i|^2$$

$$I_r = \sum_{i=1}^N m_i (\hat{u} \wedge OP_i)^2$$

Cosa succede se come asse scelgo uno degli assi coordinati del sistema cartesiano?

$$\hat{u} = \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$$

$$\hat{i}) \quad \hat{u} \wedge OP_i = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = (0, -z_i, y_i)$$

$$I_x = \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) \equiv A$$

$$\hat{j}) \quad I_y = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) \equiv B$$

$$\hat{k}) \quad I_z = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \equiv C$$

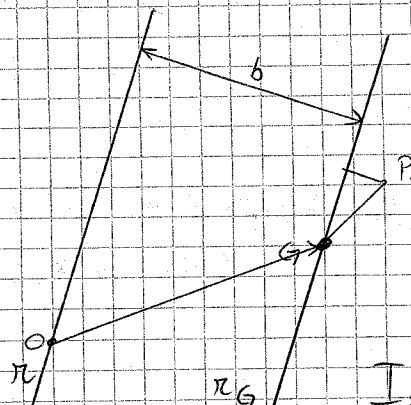
A, B, C sono i momenti d'inerzia di una generica distribuzione di massa discreta rispetto agli assi x, y, z.

Come cambia il momento d'inerzia spostando ci da un asse ad un asse parallelo?  $\rightarrow$  teor. di Huygens

Come cambia I al variare della direzione dell'asse?



# Teorema di Huyghens



$$I_\pi = I_{\pi_0} + Mb^2$$

( $\pi_0$  è la parallela ad  $\pi$  passante per il centro di massa G)

Dimostrazione

$$I_\pi = \sum_{i=1}^N m_i (\hat{u} \wedge OP_i) \cdot (\hat{u} \wedge OP_i)$$

(O è sempre un punto qualsiasi su  $\pi$ )

$$OP_i = OG + GP_i \Rightarrow$$

$$I_\pi = \sum_{i=1}^N m_i \underbrace{(\hat{u} \wedge OG)^2}_{b^2} + 2 \sum_{i=1}^N m_i (\hat{u} \wedge OG) (\hat{u} \wedge GP_i) + \sum_{i=1}^N m_i (\hat{u} \wedge GP_i)^2$$

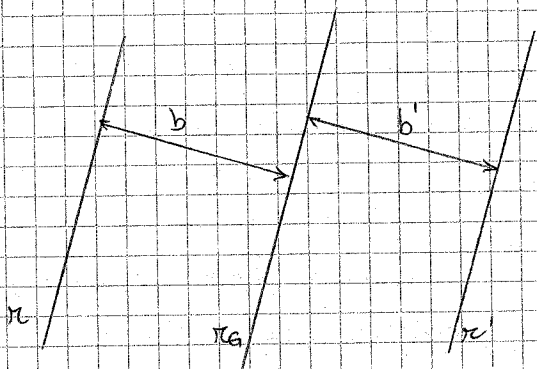
$$2 \sum m_i (\hat{u} \wedge OG) (\hat{u} \wedge GP_i) = (\hat{u} \wedge OG) (\hat{u} \wedge \sum m_i GP_i)$$

||  
MGG = 0

$\sum m_i (\hat{u} \wedge GP_i)$  è il momento

d'inerzia rispetto alla parallela a  $\pi$  passante per G.

$$\Rightarrow I_\pi = I_{\pi_0} + Mb^2 \quad \text{c.v.d.}$$

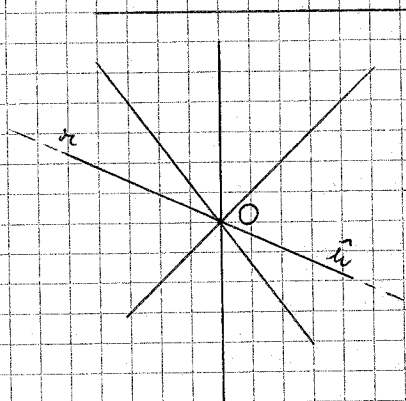


$$I_{\pi'} = Mb'^2 + I_G$$

$$I_\pi - I_{\pi'} = M(b^2 - b'^2)$$

$$I_{\pi'} = I_\pi - M(b^2 - b'^2)$$

(Si applica due volte il teorema di Huyghens)



Fissato un punto O qualsiasi nello spazio, considerata lo stella di rette di centro O, come varia il momento d'inerzia a secondo della rette scelta?

$\pi$  è individuata dai coseni direttori  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ .

$$I_\pi = \sum_{i=1}^N m_i (\hat{u} \wedge OP_i)^2$$

$$\hat{u} \wedge OP_i = (\beta z_i - \gamma y_i) \hat{i} + (\gamma x_i - \alpha z_i) \hat{j} + (\alpha y_i - \beta x_i) \hat{k}$$

$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$x_i$	$y_i$	$z_i$

$$\begin{aligned}
 I_{\pi} &= \sum_{i=1}^N m_i \left[ (\beta z_i - \gamma y_i)^2 + (\gamma x_i - \alpha z_i)^2 + (\alpha y_i - \beta x_i)^2 \right] = \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i (\alpha^2 z_i^2 + \alpha^2 y_i^2) + \dots \\
 &= A \alpha^2 + B \beta^2 + C \gamma^2 - 2 \sum m_i z_i y_i \beta \gamma - 2 \sum m_i x_i z_i \alpha \gamma + \\
 &\quad - 2 \sum m_i y_i x_i \alpha \beta
 \end{aligned}$$

Si definiscono:

$$D = \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i$$

$$E = \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i$$

$$F = \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i$$

$$\Rightarrow I_{\pi} = A \alpha^2 + B \beta^2 + C \gamma^2 - 2D \beta \gamma - 2E \alpha \gamma - 2F \alpha \beta$$

che è una forma quadratica di  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ ,

DEFINITA POSITIVA.

È uguale a 0 solo quando tutti i punti stanno su una retta ( $\pi$ ).

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$$

$\alpha, \beta, \gamma$  hanno il ruolo di indici della matrice

Il momento d'inerzia rispetto ad una retta  $\pi$  appartenente allo stesso di rette di centro  $O$  è rappresentato dal prodotto del tensore  $\tilde{I}$  per il vettore  $\vec{u}$  di  $\pi$

$$\tilde{I} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$A, B, C$  sono momenti d'inerzia sempre  $> 0$

$D, E, F$  sono sempre momenti d'inerzia (centrifughi), ma possono essere  $\leq 0$ .

La forma quadratica  $I_{\pi}$  invece è  $\geq 0 \forall P$ .

$\tilde{I}$  può sempre essere diagonalizzata (essendo simmetrica e a valori reali): ruotando il sistema di riferimento si può trovare la configurazione in cui  $\tilde{I}$  è diagonale.

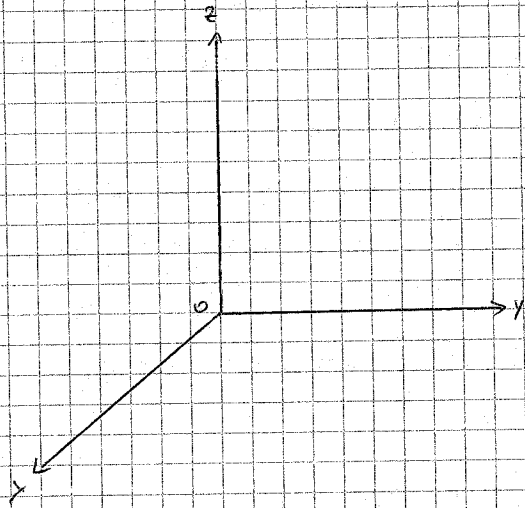
(Ellissoide d'inerzia). Questo significa liberarsi dei termini centrifughi. Nel caso di  $\tilde{I}$  diagonale, gli assi del sistema si dicono principali, come anche  $A, B$  e  $C$ .

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$I_{\pi} = a\alpha^2 + B\beta^2 + c\gamma^2$$

(Momento d'inerzia rispetto allo terzo principale d'inerzia)

17/11/2008



$$u = (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\alpha\gamma - 2F\alpha\beta$$

$$D = \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i$$

$$E = \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i$$

$$F = \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i$$

- ASSI PRINCIPALI posso sempre passare ad uno terzo di riferimento che annulli  $D$ ,  $E$  ed  $F$ .

Liberandoci dai termini centrifughi, la matrice che rappresenta il tensore del momento d'inerzia è

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

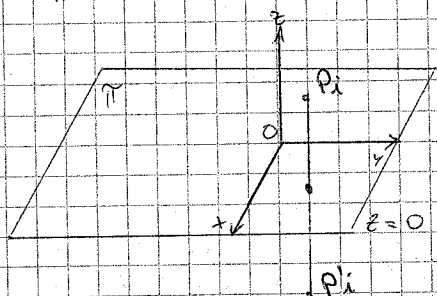
$$\text{e si ha: } I = a\alpha^2 + B\beta^2 + c\gamma^2$$

$$a = a(\epsilon) \quad B = B(\epsilon) \quad c = c(\epsilon)$$

Se ci poniamo in un sistema di riferimento solidale,  $a$ ,  $B$  e  $c$  si "fissano" e non sono più funzioni del tempo.

Come si trovano gli assi principali?

• Sfruttiamo le simmetrie del sistema



$\pi: z=0$  piano di simmetria ortogonale

$\Rightarrow \pi$  piano principale d'inerzia

$\Rightarrow \pi$  contiene 2 assi principali

$$D = E = 0$$

$\Rightarrow$  l'asse ortogonale a  $\pi$  è un asse principale

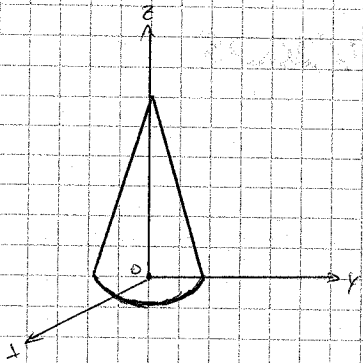
Non posso ancora dire con sicurezza  $D=E=F=0$ .

Il sistema ha 2 piani principali d'inerzia

Se ho 2 piani di simmetria  $\pi_1$  e  $\pi_2$

la tena d'inerzia è automaticamente assequata

Se ci sono infiniti piani di simmetria?



Qualsiasi piano contenente l'asse del cono (che è un asse principale) è un piano di simmetria.

Qualsiasi asse ortogonale ad esso è principale  $\Rightarrow$  qualsiasi tena solidale è principale

$\Rightarrow$  in questo caso l'ellissoide d'inerzia è rotondo  
 $a = b$

Un GIROSCOPIO è un sistema che ha ellissoide d'inerzia ROTONDO ( $a = b$ )

Un giroscopio non è per forza un corpo con distribuzione rotazionale dei punti (es: CUBO)

Una SFERA è un sistema che ha ellissoide d'inerzia SFERICO ( $a = b = c$ )

Idem come sopra: il cubo è addirittura una sfera!

## SISTEMI PIANI

Si suppone  $z_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$

$\Rightarrow D = E = 0$   $\Downarrow$  l'asse  $z$  è sicuramente un asse principale

$$A = \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + \cancel{z_i^2})$$

$$B = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + \cancel{z_i^2})$$

$$C = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

In un sistema piano si ha:  $F \neq 0$ ,  $C = A + B$



Supponiamo una terna centrata nel baricentro:  
 $\vec{G}(G; x', y', z')$  Se è una terna principale,  
 si chiama Terna baricentrale principale.  
 Se la traslo, resta una terna principale.

Dimostrazione:

$$\begin{array}{l} x'_i \rightarrow x_i = x'_i \\ y'_i \rightarrow y_i = y'_i \\ z'_i \rightarrow z_i = z'_i - h \end{array} \quad \parallel \quad \begin{array}{l} \text{traslazione lungo l'asse } z \\ \text{di una distanza } h \end{array}$$

$$(\forall i) \quad \vec{G}(0, x, y, z)$$

$$D = \sum_{i=1}^N m_i y_i^2 (z_i^2 - h^2) = \sum_{i=1}^N m_i y_i^2 z_i^2 - h^2 \sum_{i=1}^N m_i y_i^2 = 0$$

Per lo stesso motivo,  
 anche  $E = 0$

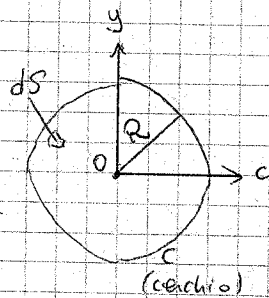
(per ipotesi)      (poiché la terna era baricentrale)

Parto da una terna principale d'inerzia e posso traslare tutti gli assi restando comunque in una terna principale d'inerzia.

### ESEMPLI

#### • Disco

Una terna baricentrale sarà centrata in  $O$ .



— sistema piano  
 — simmetria rotazionale  
 $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$  costante

Nel piano posso scegliere qualsiasi coppia di assi ortogonali tra loro: il terzo è uscente.

sistema piano  $\Rightarrow \underline{C = A + B}$

$$A = \iint_C \sigma y^2 dS = \sigma \iint_C y^2 dS$$

$$B = \sigma \iint_C x^2 dS \quad C = A + B$$

Se ruoto gli assi  $x$  e  $y$  resto in una terna principale (il disco è un piroscopio)

$$\underline{A = B} \Rightarrow A = B = C/2$$

↑  
simmetria rotazionale

$$C = \sigma \iint_C (x^2 + y^2) dS$$

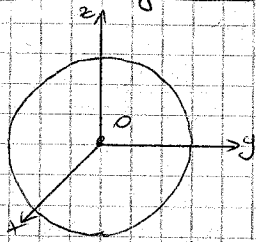
Passando in coordinate polari:  $C = \frac{M}{\pi R^2} \iint_C r^2 |J| dr d\theta =$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\theta = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\theta = \frac{2M\pi R^4}{R^2\pi 4} = \frac{MR^2}{2}$$



$$C = \frac{1}{2} MR^2 \quad A = B = \frac{1}{4} MR^2$$

• Sfera omogenea



- ellissoide d'inertia sferico

$$A = B = C$$

- simmetria sferica

$$\rho = \frac{3}{4} \frac{M}{\pi R^3} \quad (V = \frac{4}{3} \pi R^3)$$

$$A = \rho \iiint_V y^2 dx dy dz$$

$$\begin{aligned} 3A &= 3B = 3C = A + B + C = \\ &= \rho \iiint_V 2(x^2 + y^2 + z^2) dV \end{aligned}$$

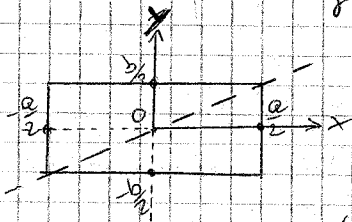
Si passa in coordinate sferiche:  $|J| = r^2 \sin \theta$

$$3A = 2\rho \iiint_V r^2 |J| dr d\theta d\varphi = \frac{3}{2} \frac{M}{\pi R^3} \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta =$$

$$= \frac{6R^2 M}{5} = A + B + C$$

$$A = B = C = \frac{2}{5} MR^2$$

• Lasta rettangolare di dimensioni a e b



z è un asse pz. d'inertia

x, y assi di simmetria

$\Rightarrow \vec{G}(0, x, y, z)$  è una buona

terza baricentrale d'inertia.

sistema piano  $\Rightarrow C = A + B$

$$\sigma = \frac{M}{ab}$$

$$\text{Area} = ab$$

$$A = \frac{M}{ab} \iint_{\text{Area}} y^2 dx dy = \frac{M}{ab} a \cdot \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-b/2}^{b/2} = \frac{2M}{b} \frac{b^3}{3 \cdot 8} = \frac{Mb^2}{12}$$

$$B = \frac{M}{ab} \iint_{\text{Area}} x^2 dx dy = \frac{Ma^2}{12}$$

$$C = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}$$

Prendiamo una diagonale della lastra. Qual è I relativo a quell'asse?

$$I = A_x^2 + B_y^2 + C_z^2$$

$$I = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$

Cosa succede se la lastra diventa un'asta ( $b=0$ )?

$a \equiv l$  (lunghezza della sbarra)



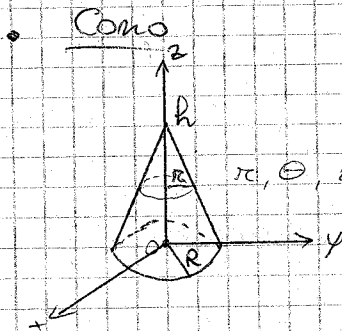
$$I = \frac{1}{12} M l^2$$

$$a = 0 \quad B = \frac{1}{12} M l^2$$

Come cambiano le cose se voglio far ruotare l'asta attorno ad un'asse passante per un suo estremo?

Teorema di Huygens  $I = I_G + M d^2$

$$I = \frac{1}{12} M l^2 + \frac{M l^2}{4} = \frac{1}{3} M l^2$$



$$R, h \quad \rho \quad V = \frac{\text{base} \cdot h}{3}$$

$\pi, \theta, z$  - simmetria rotazionale ( $A = B$ )

$$A + B = C + 2 \iint \rho r^2 dV$$

\* fare i calcoli a casa \*

(coordinate cilindriche)  
 $\rho = r$

$$\text{Risultato: } C = 3 \frac{M R^2}{10} \quad A = B = \frac{3 M R^2}{10} + \frac{M h^2}{10}$$

18/11/2008

$$\text{Quantità di moto: } \underline{Q} = \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i = M \underline{v}_G$$

$$\text{Momento angolare: } \underline{L}_A = \sum_{i=1}^N \underline{r}_{Pi} \wedge m_i \underline{v}_i \quad (\text{risp. al polo } A)$$

Sappiamo di considerare, "osservando" da una qualsiasi

terno  $\mathcal{G}$ , una terza con origine in  $A$  ( $\mathcal{G}_A$ ) che si muove di moto traslatorio rispetto a  $\mathcal{G}$ :

$$\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_A$$

$\underline{v}_i$  velocità di  $P_i$  misurata da un osservatore in  $\mathcal{G}$

$$\underline{v}_i \rightarrow \underline{v}_i = \underline{v}_A + \underline{v}_i^{(x)} \quad \underline{v}_A = \underline{v}_i(t)$$

$$\Rightarrow \underline{L}_A = \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_{Pi} \wedge (\underline{v}_A + \underline{v}_i^{(x)}) \quad \underline{L}_A \text{ è costituito da 2 termini}$$

Il primo termine è globale:  $M \underline{v}_A \wedge \underline{r}_A$

per la def. di centro di massa.

$$OG = \left( \sum_{i=1}^N m_i OP_i \right) \cdot \frac{1}{M}$$

Il secondo termine lo indichiamo con  $\underline{L}_A^{(r)}$

$$\Rightarrow \underline{L}_A^{(r)} = \sum_{i=1}^N AP_i \wedge m_i \underline{v}_i^{(r)} \quad \text{momento angolare relativo}$$

$$\underline{L}_A = M \underline{AG} \wedge \underline{v}_A + \underline{L}_A^{(r)}$$

Il momento angolare in  $\mathcal{C}$  è uguale al momento angolare in  $\mathcal{C}_A$  più un certo contributo.

Tale contributo si annulla se  $A \equiv G$  ( $\underline{AG} = 0$ )

Cosa succede all'energia cinetica?

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i$$

Cosa fa l'osservatore in  $\mathcal{C}_A$ ?  $\underline{v}_i = \underline{v}_A + \underline{v}_i^{(r)}$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\underline{v}_A + \underline{v}_i^{(r)}) \cdot (\underline{v}_A + \underline{v}_i^{(r)}) =$$

$$= \frac{1}{2} M \underline{v}_A^2 + \dots$$

Definisco l'energia cinetica relativa:

$$T^{(r)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i^{(r)} \cdot \underline{v}_i^{(r)}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} M \underline{v}_A^2 + T^{(r)} + \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i^{(r)} \cdot \underline{v}_A \quad (\text{il prodotto scalare è commutativo})$$

$$T = \frac{1}{2} M \underline{v}_G^2 + T^{(r)} + M \underline{v}_G^{(r)} \cdot \underline{v}_A$$

TEOREMA DI KÖNIG GENERALIZZATO

Cosa succede se  $A \equiv G$ ?

$$T = \frac{1}{2} M \underline{v}_G^2 + T^{(r)}$$

l'ultimo pezzo è 0 perché la velocità relativa di G in G è 0.

(em. cinetica del baricentro)

Questo è il Teorema di KÖNIG non generalizzato.

$T^{(r)}$  si dice energia cinetica del moto attorno al baricentro, e il teorema vale per  $\mathcal{C}_A \equiv \mathcal{C}_G$

Cosa succede se il sistema è un corpo rigido?  
 Quanto detto prima ha valore per ogni generico  
 sistema di punti materiali ( $N$  punti).  
 $\{P_i\}_{i=1 \dots N}$

### CORPO RIGIDO

Il vincolo di rigidità si traduce nell'atto di  
 moto (c'è un legame tra le velocità)

$$\underline{v}_i = \underline{v}_A + \underline{\omega} \wedge A P_i \quad \forall i = 1 \dots N$$

( $A$  è solidale con il corpo)

$$\underline{L}_A = \sum_{i=1}^N A P_i \wedge m_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^N A P_i \wedge m_i (\underline{v}_A + \underline{\omega} \wedge A P_i)$$

(il prodotto vettoriale si avvale delle proprietà distributive)

$$= \sum_{i=1}^N m_i A P_i \wedge \underline{v}_A + \sum_{i=1}^N m_i A P_i \wedge (\underline{\omega} \wedge A P_i)$$

$$= M A G \wedge \underline{v}_A + \underline{L}_A^{(r)}$$

↳ contributo globale (contiene i gradi di libertà di traslazione)

Vogliamo esplicitare  $\underline{L}_A^{(r)}$

$$\underline{L}_A^{(r)} = \sum_{i=1}^N m_i A P_i \wedge (\underline{\omega} \wedge A P_i) \quad \boxed{a \wedge (b \wedge c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)}$$

$$a \equiv A P_i \equiv c \quad b \equiv \underline{\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{L}_A^{(r)} = \sum_{i=1}^N m_i \left[ \underline{\omega} (A P_i \cdot A P_i) - A P_i (\underline{\omega} \cdot A P_i) \right] = \left( \begin{array}{l} \underline{C}_A \equiv \underline{C}_A^* \text{ (terno)} \\ \text{solidale} \end{array} \right)$$

= (leggiamo i vettori dalla terno  $\underline{C}_A^*$ , cui versori sono  $p, q$  ed  $r$ )

indici  $\begin{cases} i, j, k = 1 \dots N \\ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3 \text{ componenti rispetto a } \underline{C}_A^* \end{cases}$

$\underline{L}_A^{(r)}$  è un ente intrinseco che ora esplicitiamo rispetto a  $\underline{C}_A^*$

$$\left( \underline{L}_A^{(r)} \right)_\alpha = \sum_{i=1}^N m_i \left[ \omega_\alpha \left( \sum_{\beta=1}^3 x_\beta^{(i)} x_\beta^{(i)} \right) - x_\alpha^{(i)} \left( \sum_{\beta=1}^3 \omega_\beta x_\beta^{(i)} \right) \right]$$

sottintesa per convenzione  
sottintesi anche gli asterischi

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$A P_i = \begin{pmatrix} x_1^*(i) \\ x_2^*(i) \\ x_3^*(i) \end{pmatrix}$$

- $\beta$  e  $\gamma$  sono indici ripetuti
- $\alpha$  è libero (non c'è nessuna somma sottintesa)



$$\alpha = 1, 2, 3$$

Componenti  $x_1, x_2, x_3$   
dell' $i$ -esimo punto

$$\left[ \underline{L}_A^{(x)} \right]_{\alpha} = \sum_{i=1}^N m_i \left[ \omega_{\alpha} \left( x_1^2(i) + x_2^2(i) + x_3^2(i) \right) - x_1^{(i)} \left( \omega_1 x_1^{(i)} + \omega_2 x_2^{(i)} + \omega_3 x_3^{(i)} \right) \right]$$

( $\underline{L}_A^{(x)}$  esplicitato nella sua prima componente)

$$= \sum_{i=1}^N m_i \left[ \omega_1 x_2^2(i) + \omega_1 x_3^2(i) - \omega_2 x_1^{(i)} x_2^{(i)} - \omega_3 x_1^{(i)} x_3^{(i)} \right]$$

Questa espressione contiene il tensore d'inerzia.

$$\left[ \underline{L}_A^{(x)} \right]_{\alpha} = \sum_{i=1}^N m_i \left[ \omega_1 \left( x_2^2(i) + x_3^2(i) \right) - \omega_2 x_1^{(i)} x_2^{(i)} - \omega_3 x_1^{(i)} x_3^{(i)} \right]$$

$$\omega_1 \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) = A \omega_1$$

$$= A \omega_1 - F \omega_2 - E \omega_3$$

tensore  
d'inerzia

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

Le componenti di  $\underline{L}_A^{(x)}$  sono  
il risultato di un prodotto  
righe - colonne tra  $\underline{\omega}$  e  $\tilde{\mathbf{I}}$ .

$$\underline{L}_A^{(x)} = \tilde{\mathbf{I}} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A\omega_1 & -F\omega_2 & -E\omega_3 \\ -F\omega_1 & B\omega_2 & -D\omega_3 \\ -E\omega_1 & -D\omega_2 & C\omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[ \underline{L}_A^{(x)} \right]_1 \\ \left[ \underline{L}_A^{(x)} \right]_2 \\ \left[ \underline{L}_A^{(x)} \right]_3 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{\beta=1}^3 \tilde{\mathbf{I}}_{\alpha\beta} \omega_{\beta} = \left( \underline{L}_A^{(x)} \right)_{\alpha}$$

$\alpha$  è l'indice di riga  
 $\beta$  è l'indice di colonna

↳ forma vettoriale

↳ forma scalare

Possiamo "fare questo giochino" utilizzando qualsiasi terne  $\mathcal{B}$ ,  
basta esprimere  $\tilde{\mathbf{I}}$  e  $\underline{\omega}$  rispetto a  $\mathcal{B}$ .

Tutte le componenti di  $\underline{\omega}$  e di  $\tilde{\mathbf{I}}$  dipendono dal  
tempo, se non ci troviamo nella terne solidale  $\mathcal{B}^*$ .

In  $\mathcal{B}^*$  questi sono costanti.



Con questa scelta di  $\hat{b}^*$ , per ottenere la  $\alpha$ -esima componente di  $\underline{L}_A^{(\alpha)}$ , è sufficiente una combinazione lineare delle componenti di  $\underline{\omega}$  ( $\omega_1^*$ ,  $\omega_2^*$ ,  $\omega_3^*$ ) con gli elementi della matrice  $\hat{I}$  come coefficienti. Se la terna solidale è una terna principale d'inertzia mancano i termini centrifughi:

$$\underline{L}_A^{(\alpha)} = A\omega_1 + B\omega_2 + C\omega_3$$

Se la terna è solidale e principale d'inertzia  $\underline{L}_A^{(\alpha)}$  e  $\underline{\omega}$  NON possono essere paralleli... a meno che il corpo rigido non abbia un ellissoide sferico ( $A=B=C$ ): in questo caso,  $\underline{L} = \hat{I} \underline{\omega}$  (TROTTO LA SFERICA)

Componente per componente,  $(\underline{L}_A^{(\alpha)})_d \parallel \omega_d$  (sempre).

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{L}_A^{(\alpha)} = A p \hat{i}^* + B q \hat{j}^* + C r \hat{k}^*$$

Se la terna è solidale, baricentrale e principale,

$$\underline{L}_A = A p \hat{i}^* + B q \hat{j}^* + C r \hat{k}^*$$

19/11/2008

$$v_i = v_A + \omega \Lambda A P_i$$

$$\underline{L}_A = M A G \Lambda v_A + \underline{L}_A^{(r)}$$

$$\underline{L}_A^{(r)} = Q p_i^{1*} + B q_j^{2*} + C x_k^{3*} \quad (\underline{L}_A^{(r)})_d = \mathbb{I}_{\alpha\beta} \omega_\beta \quad \underline{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$\alpha, \beta = 1, 2, 3$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i \cdot v_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (v_A + \omega \Lambda A P_i) \cdot (v_A + \omega \Lambda A P_i) =$$

$$(\text{teor. di König}) = \frac{1}{2} M v_A^2 + \sum_{i=1}^N m_i v_A (\omega \Lambda A P_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\omega \Lambda A P_i)^a (\omega \Lambda A P_i)^b$$

$$= \frac{1}{2} M v_A^2 + M v_A (\omega \Lambda A G) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\omega \Lambda A P_i)^2 =$$

$(a \Lambda b) \cdot (c \Lambda d) =$ $= (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$ $c = a, d = b \Rightarrow$ $(a \Lambda b) \cdot (a \Lambda b) = (a - b)^2$
---

$$= \frac{1}{2} M v_A^2 + M v_A (\omega \Lambda A G) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[ \omega_\alpha \omega_\alpha x_p^{(i)} x_p^{(i)} - \omega_\alpha x_\alpha^{(i)} \omega_\beta x_\beta^{(i)} \right]$$

somme sulle somme sugli indici

Da quest'ultimo termine "viene fuori" il tensore d'inerzia. Proporzionale al teorema di König generalizzato:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[ \omega_\alpha \omega_\alpha x_p^{(i)} x_p^{(i)} - \omega_\alpha x_\alpha^{(i)} \omega_\beta x_\beta^{(i)} \right] = T_A^{(r)}$$

Vogliamo estrarre uno scalare da una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \underline{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Possiamo ad esempio moltiplicare per  $\omega^T$  (trasposto):

$$(\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3) \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{\alpha\beta} \omega_\beta \\ \mathbb{I}_{2\beta} \omega_\beta \\ \mathbb{I}_{3\beta} \omega_\beta \end{pmatrix} \quad \text{In questo modo si somma su } \alpha, \text{ saturando anche l'altro indice.}$$

$T_A^{(r)} = \frac{1}{2} \omega_\alpha \mathbb{I}_{\alpha\beta} \omega_\beta$	(Sommato su $\alpha$ e su $\beta$ )
---	-------------------------------------

Se andiamo a confrontare con l'espressione componente per componente, questa è verificata:

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i \left[ (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) (x_1^{2(i)} + x_2^{2(i)} + x_3^{2(i)}) - (\omega_1 x_1^{(i)} + \omega_2 x_2^{(i)} + \omega_3 x_3^{(i)}) \cdot (\omega_1 x_1^{(i)} + \omega_2 x_2^{(i)} + \omega_3 x_3^{(i)}) \right]$$

Molti di questi contributi, svolgendo il calcolo, si semplificano. Quelli che non si semplificano sono quelli descritti dalla precedente espressione di  $T_A^{(r)}$ .

$$T_A^{(r)} = \frac{1}{2} \left[ \mathbb{I}_{1\beta} \omega_\beta \omega_1 + \mathbb{I}_{2\beta} \omega_\beta \omega_2 + \mathbb{I}_{3\beta} \omega_\beta \omega_3 \right] \quad \text{è una FORMA QUADRATICA}$$

Una forma quadratica è uno scalare.

Se la terna di riferimento è principale d'inerzia ed il tensore  $\tilde{I}$  è diagonale, alcuni termini della somma si annullano, e risulta:

$$T_A^{(r)} = \frac{1}{2} [A p^2 + B q^2 + C r^2]$$

$$e: T_A = \frac{1}{2} M \underline{v}_A^2 + M \underline{v}_A \cdot (\underline{\omega} \wedge \underline{A} G) + \frac{1}{2} [A p^2 + B q^2 + C r^2]$$

Se, inoltre,  $A \equiv G$ ,  $T_G \equiv T_G^{(r)}$

Con queste conclusioni, vogliamo specificare meglio la dinamica del corpo rigido. Sappiamo che:

$$\begin{cases} \underline{\dot{Q}} = \underline{R}^{(a,e)} + \underline{R}^{(r,e)} = \underline{R}^{(e)} \\ \underline{\dot{L}}_A = \underline{M}_A^{(e)} - \underline{v}_A \wedge \underline{Q} \end{cases}$$

$l = 6$  3 di traslazione + 3 di rotazione

Nelle equazioni cardinali intervengono le reazioni vincolari. Tali equazioni sono  $3+3$ , ma, oltre alle coordinate lagrangiane, contengono come incognite le reazioni vincolari: perciò, nella maggior parte dei casi, il sistema non è risolvibile. Lo è solo in rari casi, come quando i vincoli non contengono attrito.

Studiamo la dinamica di un corpo rigido con un punto fisso. Sottinteso: SENZA ATRITO

$A \equiv O \equiv$  punto fisso  $\equiv$  polo  $\equiv$  origine di una terna principale solidale

$$\Rightarrow \underline{v}_A = 0$$

$$\underline{\dot{L}}_O = \underline{M}_O^{(a,e)} \quad \underline{L}_O = A p \hat{i}^{1*} + B q \hat{j}^{1*} + C r \hat{k}^{1*}$$

eq. vettoriale letta su una terna solidale centrata in  $O$  e principale d'inerzia

$A, B$  e  $C$  sono costanti nel tempo.

$$\underline{\dot{L}}_O = A p \hat{i}^{1*} + A p \frac{d\hat{i}^{1*}}{dt} + B q \hat{j}^{1*} + B q \frac{d\hat{j}^{1*}}{dt} + C r \hat{k}^{1*} + C r \frac{d\hat{k}^{1*}}{dt} = \underline{M}_O^{(a,e)}$$

Posso usare le formule di Poisson:  $\frac{d\hat{i}^{1*}}{dt} = \underline{\omega} \wedge \hat{i}^{1*}$  ...

$$\dot{L}_O = A \dot{p}_i^{1*} + A_p \omega 1_i^{1*} + B \dot{q}_j^{1*} + B_q \omega 1_j^{1*} + C \dot{r}_k^{1*} + C_r \omega 1_k^{1*}$$

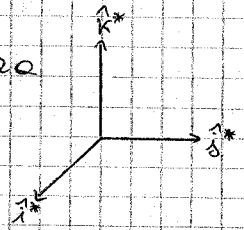
$$\omega = p \hat{i}^{1*} + q \hat{j}^{1*} + r \hat{k}^{1*}$$

$$\omega 1_i^{1*} = q \hat{j}^{1*} \cdot 1_i^{1*} + r \hat{k}^{1*} \cdot 1_i^{1*} \quad i, j, k \text{ terzo legopiro}$$

$$\Rightarrow \omega 1_i^{1*} = -q \hat{k}^{1*} + r \hat{j}^{1*}$$

$$\omega 1_j^{1*} = p \hat{k}^{1*} - r \hat{i}^{1*}$$

$$\omega 1_k^{1*} = -p \hat{j}^{1*} + q \hat{i}^{1*}$$



$$\Rightarrow \dot{L}_O = A p \hat{i}^{1*} - A_p q \hat{k}^{1*} + A_p r \hat{j}^{1*} + B q \hat{j}^{1*} + B_p q \hat{k}^{1*} - B_p r \hat{i}^{1*} + C r \hat{k}^{1*} - C_p r \hat{j}^{1*} + C_p q \hat{i}^{1*} = \underline{M}_O^{(a,e)}$$

Dividiamo l'eq. coordinata in forma vettoriale in 3 eq. scalari:

$$\begin{cases} A p - (B - C) q r = m_1^{(a,e)} \\ B q - (C - A) p r = m_2^{(a,e)} \\ C r - (A - B) p q = m_3^{(a,e)} \end{cases} \quad \underline{M}_O = (m_1, m_2, m_3)$$

Tre equazioni scalari proiettate sui tre assi solidali.

Si chiamano **EQUAZIONI DI EULERO**

Sono equazioni del primo ordine non lineari.

### MOTI ALLA POINSON

Sono moti caratterizzati dal

fatto che il momento risultante delle forze esterne è nullo.

$$\underline{M}_O^{(a,e)} = 0 \iff \text{non ci sono forze, o sono applicate ad } O.$$

Il sistema delle equazioni di Eulero diventa omogeneo.

Le soluzioni di queste equazioni si dicono **ROTAZIONI PERMANENTI**

Esistono rotazioni uniformi (tali che  $\dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0$ )?

Suppongo  $A \neq B \neq C$ .

$$\left. \begin{matrix} p = p_0 \\ q = q_0 \\ r = r_0 \end{matrix} \right\} \text{ costanti.} \quad \text{Si hanno rotazioni uniformi solo se si verifica che:}$$

$$\begin{cases} q_0 r_0 = 0 \\ p_0 r_0 = 0 \\ p_0 q_0 = 0 \end{cases} \quad \text{Supponiamo } p_0 \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} q_0 = 0 \\ r_0 = 0 \end{cases}$$

Le uniche soluzioni sono del tipo  $(p_0, 0, 0)$ ,  $(0, q_0, 0)$ , oppure  $(0, 0, r_0)$ . Nell'ambito dei moti alla Poinson, le uniche rotazioni uniformi sono quelle attorno ad uno degli assi principali d'inerzia.



Quali sono le leggi di conservazione associate ai moti alla Poinsot?

$L_0 = \text{costante}$

$L_0$  vettore che può essere letto sia nello spazio fisso che nello spazio solidale.

$A_p$ ,  $B_q$  e  $C_r$  non sono singolarmente costanti, mentre è invariante il modulo di  $L_0$ :

$$|L_0|^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = \text{cost.}$$

Moltiplichiamo a sinistra il vettore colonna  $\begin{pmatrix} A_p \\ B_q \\ C_r \end{pmatrix}$  al sistema delle eq. di Eulero e sommiamo in verticale:

$$A^2 \dot{p} \dot{p} - A B p \dot{q} \dot{r} + A C p \dot{q} \dot{r} + B^2 q \dot{q} - B C p \dot{q} \dot{r} + A B p \dot{q} \dot{r} + C^2 r \dot{r} - A C p \dot{q} \dot{r} + B C p \dot{q} \dot{r} = 0$$

$$A^2 \dot{p} \dot{p} + B^2 q \dot{q} + C^2 r \dot{r} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2] = 0$$

La derivata di  $|L_0|^2$  è nulla  $\Rightarrow |L_0|$  costante

Ci si aspetta che si conservi, senza attrito, l'energia totale.

Facciamo la stessa operazione di prima con  $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ :

$$A p \dot{p} - B p \dot{q} \dot{r} + C p \dot{q} \dot{r} + B q \dot{q} - C p \dot{q} \dot{r} + A p \dot{q} \dot{r} + C r \dot{r} - A p \dot{q} \dot{r} + B p \dot{q} \dot{r} = 0$$

$$A p \dot{p} + B q \dot{q} + C r \dot{r} = \frac{d}{dt} [A p^2 + B q^2 + C r^2] = \frac{d}{dt} T = 0$$

$\Rightarrow T$  si conserva nel tempo.

- Nel caso del moto alla Poinsot di un giroscopio si verifica una precessione regolare.



24/11/2008

$$\begin{cases} a\dot{p} - (B-e)q\dot{\pi} = 0 \\ B\dot{q} - (e-a)p\dot{\pi} = 0 \\ e\dot{\pi} - (a-B)p\dot{q} = 0 \end{cases}$$

MOTI ALLA POINCARÉ  
DI UN GIROSCOPIO

$$a = B$$

$Oz^*$  = asse del giroscopio

$$a = B \Rightarrow \dot{\pi} = 0$$

$\pi(t) = \pi_0 = \text{costante}$

$$\begin{cases} a\dot{p} - (a-e)q\pi_0 = 0 \\ a\dot{q} + (a-e)p\pi_0 = 0 \\ \dot{\pi} = 0 \end{cases}$$

$$\dot{p} = \frac{a-e}{a} \pi_0 q$$

$$\dot{q} = \frac{e-a}{a} \pi_0 p$$

$$2\bar{E} = a(p^2 + q^2) + e\pi_0^2$$

↓ costante

↓ costante

Dalla legge di conservazione per i moti alla Poincaré mi aspetto che  $p^2 + q^2 = \text{costante}$

$$\ddot{p} = \frac{a-e}{a} \pi_0 \dot{q} = \frac{a-e}{a} \pi_0 \frac{e-a}{a} \pi_0 p$$

Definisco:  $\mu = \frac{e-a}{a} \pi_0$

$$\ddot{p} + \mu^2 p = 0$$

Suppongo:  $0 \leq a \leq B \leq e$

$p(t) = C \cos(\mu t + \alpha)$

$$\dot{q} = \mu C \cos(\mu t + \alpha) \Rightarrow \text{q(t) = C sen}(\mu t + \alpha)$$

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ \pi_0 \end{pmatrix}$$

$p(t), q(t), \pi_0$  moti  
 $\Rightarrow$  riduzione esplicita dei moti alla Poincaré.

$C$  è qualcosa che ruota nel piano ortogonale a  $\pi$

$$\underline{L}_0 = a p \hat{i}^* + a q \hat{j}^* + e \pi_0 \hat{k}^* = a(p \hat{i}^* + q \hat{j}^* + \pi_0 \hat{k}^*) + (e-a) \pi_0 \hat{k}^* =$$

$$= a \underline{\omega} + (e-a) \pi_0 \hat{k}^*$$

$$\Rightarrow \underline{\omega} = \frac{\underline{L}_0}{a} - \frac{(e-a)}{a} \pi_0 \hat{k}^* = \frac{\underline{L}_0}{a} + \frac{(a-e)}{a} \pi_0 \hat{k}^* = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2$$

Nei moti alla Poincaré  $\underline{L}_0$  è costante perché  $\underline{M}_0^{(e)} = 0$

$$\underline{\omega}_1 = \frac{\underline{L}_0}{a} = \text{velocità angolare di precessione}$$

$$\underline{\omega}_2 = \frac{a-e}{a} \pi_0 \hat{k}^* = \text{rotazione propria}$$

Entrambi i contributi sono costanti  
 $\Rightarrow$  il caso piú generale dei moti alla Poinsot  
 per un giroscopio è una PRECESSIONE REGOLARE

## STUDIO DEL MOTO DI UN CORPO RIGIDO LIBERO

(soggetto a forze esterne attive, soggetto al  
solo vincolo di rigidità)

$$\begin{cases} \underline{M} \underline{a}_c = \underline{R}^{(e,a)} & \text{risultante forze attive esterne} \\ \underline{L}_G = \underline{M}^{(e,a)} & \text{momento forze attive esterne} \end{cases}$$

$\mathcal{G}$  fissa  $(0, x, y, z)$

$\mathcal{G}$  solidale, baricentrale, principale d'inerzia  $(G, x^*, y^*, z^*)$

Angoli di Eulero:  $\Psi, \Theta, \Phi$

(c'è sicuramente una terza principale d'inerzia  
centrata nel baricentro  $G$ )

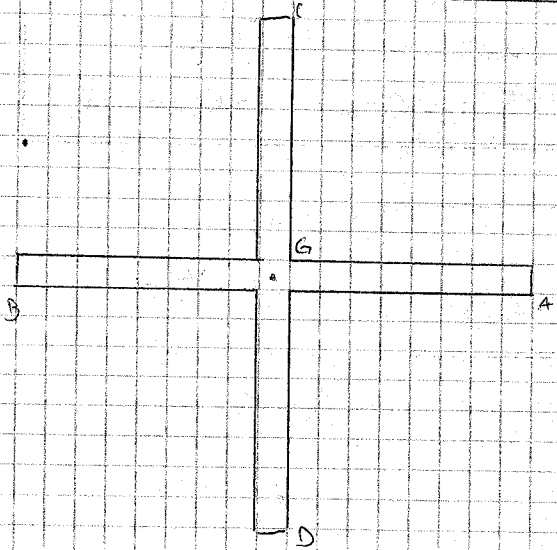
Coord. Lagrangiane:  $\{x_G, y_G, z_G, \Psi, \Theta, \Phi\} \quad \ell = 6$   
 $q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6$

Si proietta la prima equazione sulla terra fissa:

$$\begin{cases} M \ddot{x}_G = R_1(x_G, y_G, z_G, \dot{x}_G, \dot{y}_G, \dot{z}_G, \Psi, \Theta, \Phi, t, \dot{\Psi}, \dot{\Theta}, \dot{\Phi}) \\ M \ddot{y}_G = R_2(\dots) \\ M \ddot{z}_G = R_3(\dots) \end{cases}$$

Si proietta la seconda equazione sulla terra solidale  
(diventano le eq. di Eulero): [si "separano" i moti:  
gli angoli compariranno solo nelle 2<sup>e</sup> 3 equazioni,  
le coordinate di  $G$  solo nelle 1<sup>e</sup>] [se tutte le forze  
sono applicate al baricentro, la 2<sup>a</sup> eq. coord. produce  
le equazioni del moto per inerzia (alle Poinsot)]

Esercizio stile esame:

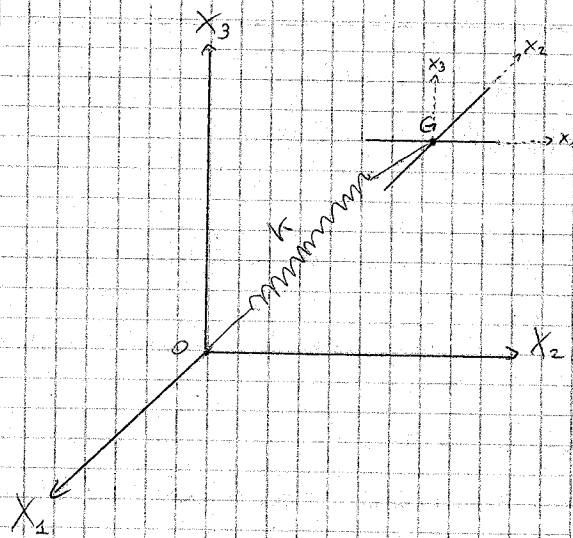


Due asticelle di lunghezza  $l$  e massa  $m$  inchiodate in  $G$

$G$  è collegato ad  $O$  tramite una molla di cost. elastica  $k$

- Calcolare  $A, B$  e
- Scrivere  $\bar{C}$  Totale
- Dimostrare la separazione dei moti
- Risolvere la 1° eq. con una cond. in.
- Dimostrare che  $(G, x_1, x_2, x_3)$  è una buona terna pr. d'inerzia.

$AB = CD = l$



Il sistema è piano  $\Rightarrow$  il piano su cui giace è un piano principale d'inerzia, e l'asse ortogonale è principale d'inerzia. Il sistema è simmetrico, gli assi sono ortogonali  $\Rightarrow (G, x_1, x_2, x_3)$  è una terna baricentrica e principale d'inerzia.

Il sistema è piano  $\Rightarrow C = A + B$

$$A = \lambda \int (y^2 + z^2) dS \quad z=0 \quad \lambda = m/l \quad A = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} y^2 dy = \frac{2m}{l} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^{l/2} = \frac{2m}{l} \frac{l^3}{24} = \frac{1}{12} m l^2$$

$B = \frac{1}{12} m l^2$  (o: fa lo stesso conto)

Il corpo ha una simmetria discreta di  $\pi/2$  ma ha comunque un ellissoide d'inerzia sferico, come un giroscopio

$C = A + B = \frac{1}{6} m l^2 = 2A$

$E = T + U$  Teorema di König (non generalizzato)

$$\bar{C} = \frac{1}{2} \cdot 2m \overset{\substack{\dot{x}_{1G}^2 \\ \dot{x}_{2G}^2 \\ \dot{x}_{3G}^2}}{v_G^2} + \frac{1}{2} (A \overset{\substack{\dot{\varphi}_1^2 \\ \dot{\varphi}_2^2}}{q^2} + 2A \overset{\substack{\dot{\varphi}_3^2 \\ \dot{\varphi}_4^2}}{r^2}) + U$$

(-)  $\rightarrow X_3$  è diretto verso il basso!

$$U = 2mg X_{3G} + \frac{1}{2} k \overline{OG}^2$$

Si scrivono le eq. cardinali:

$$M_{G_G} = \underline{R}^{(e,a)}$$

$\Downarrow$

$$2m \ddot{X}_G = -Mg \hat{k} - k \overline{OG}$$

$\downarrow$  peso  $\downarrow$  f. elastica

$$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$$

$$\begin{cases} 2m \ddot{X}_G = -k X_G \\ 2m \ddot{Y}_G = -k Y_G \\ 2m \ddot{Z}_G = -2mg - k Z_G \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sistema self consistent} \\ \text{non coinvolge i gradi di} \\ \text{libertà di rotazione} \end{array}$$

Dato iniziale:  $G \equiv (0, d, 0)$

$$X_G(0) = 0 \quad Y_G(0) = d \quad Z_G(0) = 0$$

$$\begin{cases} \dot{X}_G(0) = 0 \\ \dot{Y}_G(0) = 0 \\ \dot{Z}_G(0) = -g \sqrt{\frac{2m}{k}} \end{cases}$$

Risolviamo:  $X_G + \frac{k}{2m} X_G = 0 \quad X_G(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t\right)$

Mettendo dentro le cond. iniziali:  $A = B = 0 \quad X_G(t) = 0$

$$Y_G(t) = a \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t\right) + b \sin\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t\right) = d \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t\right)$$

$$\ddot{Z}_G + \frac{k}{2m} Z_G = -g \quad Z_G(t) = Z_0(t) + Z_p(t) \quad Z_p = -\frac{g}{\frac{k}{2m}}$$

$$Z_G(t) = a \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t\right) + b \sin\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t\right) - \frac{2mg}{k}$$

$$a = \frac{2mg}{k} \quad b = -g \frac{2m}{k}$$

$$\begin{cases} Z_G(t) = \frac{2mg}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t\right) - g \frac{2m}{k} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t\right) - \frac{2mg}{k} \\ Y_G(t) = d \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t\right) \\ X_G(t) = 0 \quad \forall t \end{cases}$$

Questa è la soluzione del moto del baricentro -

Qual è l'equazione parametrica che descrive la traiettoria di G? (Viene un'ellisse nel piano  $Y, Z$ )

$$\text{Chiamiamo } \Omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

$$\frac{y_G}{d} = \cos(\Omega t)$$

$$\left[ \left( 2g + \frac{2mg}{k} \right) - \frac{2mg}{kd} y_G \right] \frac{k}{2mg} = -\sin(\Omega t)$$

$$\left[ \left( 2g + \frac{2mg}{k} \right) - \frac{2mg}{kd} y_G \right]^2 \frac{k^2}{4m^2g^2} + \frac{y_G^2}{d^2} = 1 \quad \leftarrow \sin^2 + \cos^2$$

è l'equazione di un'ellisse.

Risolviamo la 2<sup>a</sup> eq. cond.:

$\underline{L}_G = \underline{r}^{(P, O)}$  Se tutte le forze sono applicate al

baricentro:  $\underline{L}_G = 0$

$$\begin{cases} a\dot{p} - (a-e)q\pi = 0 \\ a\dot{q} - (e-a)p\pi = 0 \\ \pi = \pi_0 \quad [C\dot{\pi} = 0] \end{cases}$$

$$e = 2a$$

$$\begin{cases} a\dot{p} + aq\pi_0 = 0 \\ a\dot{q} + (-a)p\pi_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p} + \pi_0 q = 0 \\ \dot{q} - \pi_0 p = 0 \end{cases}$$

Condizioni iniziali:  $p(0) = \Omega_0$   $q(0) = 0$   $\pi(0) = \pi = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{p} = 0 \\ \dot{q} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = p_0 = \Omega_0 \\ q = q_0 = 0 \\ \pi = \pi_0 = 0 \end{cases}$$

Sottocaso della  
precessione regolare.



25/11/2009

- 1) PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI
- 2) PRINCIPIO DI D'ALEMBERT
- 3) TRASFORMAZIONI DI LAGRANGE
- 4) EQUAZIONI DI LAGRANGE

$l$  gradi di libertà

$q_1, \dots, q_l$

$$\text{Eq. di LAGRANGE} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = q_1(t) \\ q_2 = q_2(t) \\ \dots \\ q_l = q_l(t) \end{cases}$$

$$O P_i = O P_i(q_1, \dots, q_l, t) \\ \forall i = 1, \dots, N$$

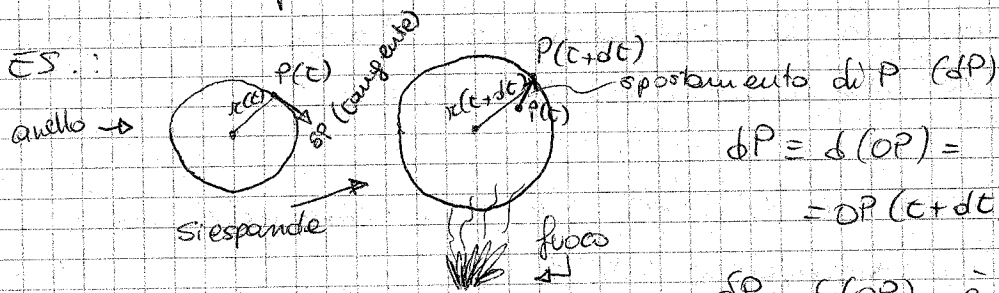
$$\{P_i\}_{i=1, \dots, N} \quad \int$$

### PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Spostamento virtuale  $\delta S = \{\delta P_1, \delta P_2, \dots, \delta P_N\}$   
relativo all'istante  $t$

Porta il sistema dalla configurazione  $C$ , compatibile con i vincoli all'istante  $t$ , ad una configurazione  $C'$  compatibile con i vincoli allo stesso istante  $t$ .

$\delta S$  = spostamento infinitesimo della collezione di tutti i punti del sistema.



$\delta P = \delta(OP)$  è un oggetto matematico

Se i vincoli non dipendono dal tempo,  $\delta P \equiv \delta P$

Spostamenti virtuali  $\begin{cases} \rightarrow \text{Reversibili se i vincoli del sistema permettono, dice a } \delta S, \text{ anche } -\delta S \\ \rightarrow \text{Irreversibili quando non lo permettono.} \end{cases}$

Esempio:

equazione di vincolo  $\equiv (z = 0)$

Permette  $\delta S$  e  $-\delta S$

I vincoli bilaterali sono sempre reversibili

Equazione di vincolo  $\equiv (z \geq 0)$

produce spostamenti irreversibili.

Quando il vincolo è unilaterale, si hanno spostamenti da una situazione di confine ad una situazione ordinaria (irreversibili) e tra due situazioni di confine (reversibili).

Altro di moto (CINEMATICA RIGIDA)

$$\frac{dOP_i}{dt} = \frac{dOA}{dt} + \omega \wedge AP_i$$

definisco:  $\underline{\varepsilon} = \omega dt$

$$dOP_i = dOA + \underline{\varepsilon} \wedge AP_i \quad \forall i$$

Corpo rigido

$$\delta P_i = \delta A + \underline{\varepsilon} \wedge AP_i$$

$$\underline{\varepsilon} = \omega dt \quad \delta P_i = \delta OP_i \quad \delta A = \delta OA$$

→ Vincolo di puro rotolamento (sistemi  $S_1$  e  $S_2$ )  
Non c'è strisciamento  $\Rightarrow \delta P_1 = \delta P_2$

$S_i$  definisce LAVORO VIRTUALE associato ad uno spostamento virtuale:

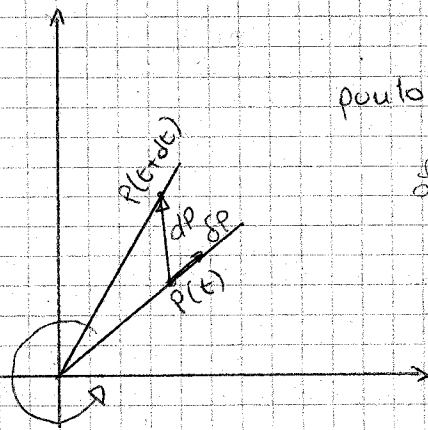
$\sum_{i=1}^N \underline{F}_i \cdot \delta P_i$  (lavoro virtuale compiuto dalla collezione di forze  $\underline{F}_i$  associato allo spostamento virtuale  $\delta S$  all'istante  $t$  con  $\delta t = 0$ )

Si indica con:  $\delta L$

Spostamento effettivo  $\neq$  Spostamento virtuale

↓  
fisico

↓  
matematico



punto che si muove su una sbarra ruotante

Lo spostamento virtuale

"congela" la sbarra al tempo  $t$  e considera solo lo spostamento del punto.

### SPOSTAMENTO RIGIDO

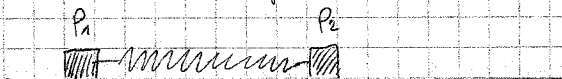
$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \cdot (\delta \underline{A} + \underline{\epsilon} \wedge \underline{A} \wedge \underline{P}_i) = \\ &= \underline{R} \cdot \delta \underline{A} + \underline{\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^n (\underline{A} \wedge \underline{P}_i \wedge \underline{F}_i) = \\ &= \boxed{\underline{R} \cdot \delta \underline{A} + \underline{\epsilon} \cdot \underline{M}_A = \delta L} \end{aligned}$$

"fattorizzazione" del sistema di forze

Se prendo un qualsiasi sistema di forze equilibrato a  $O$  (risultante  $= 0$ ) il lavoro virtuale è sempre nullo.  $\vec{R} = \vec{0}$

Es.: il sistema di forze interne che assicura la rigidità NON produce lavoro virtuale.

Controesempio:



Lo spostamento  $\delta P_2$  non è rigido.

$$\delta L \neq 0$$

# Caratterizzazione dei vincoli privi di attrito

Legge sperimentale:

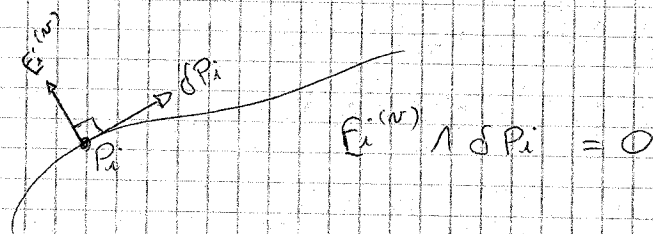
$$\delta L^{(nr)} = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i^{(nr)} \cdot \delta P_i \geq 0 \text{ sempre.}$$

=  $\rightarrow$  reversibili

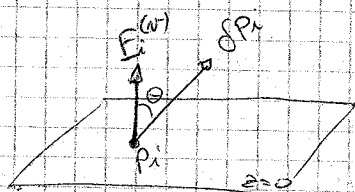
>  $\rightarrow$  irreversibili

Esempio: punto che si muove su una linea senza attrito.

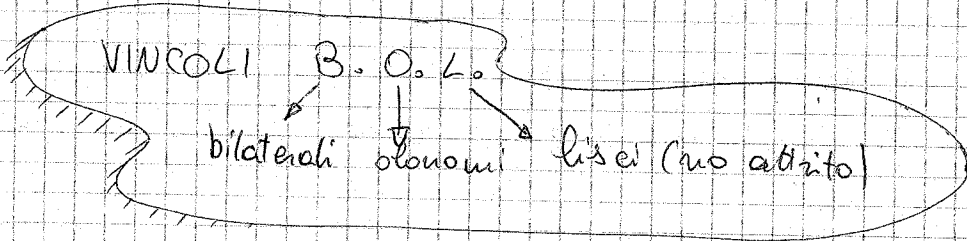
Punto per punto c'è una reazione ortogonale alla curva. Lo spost. virtuale è sempre tangente alla curva. (al vincolo)\*



es:  $z \geq 0$  (vincolo)



$\ominus$  sempre acuto  $\Rightarrow$   
 $\underline{F}_i^{(nr)} \cdot \delta P_i$  sempre  $> 0$



La legge sperimentale vale per il puro rotolamento?

$P_1$   $P_2$  punti dove si toccano le due superfici

$$(\underline{P}_1, \underline{F}_1^{(nr)}) \quad (\underline{P}_2, \underline{F}_2^{(nr)})$$

$$\underline{F}_2^{(nr)} = - \underline{F}_1^{(nr)} \quad (\text{Azione - Reazione})$$

$$\delta L = \underline{F}_1^{(nr)} \cdot \delta P_1 + \underline{F}_2^{(nr)} \cdot \delta P_2 = \underline{F}_1^{(nr)} (\delta P_1 - \delta P_2) = \underline{F}_1^{(nr)} \cdot (0) = 0$$

$\uparrow$   
 e c'è puro rotolamento

⇒ la legge sperimentale vale sia per i moti senza attrito sia per i moti di puro scivolamento.

↓  
"l'attrito c'è, ma non si vede"

Che ce ne facciamo di questa legge sperimentale? Passiamo alla dinamica:

$$m_i \underline{a}_i = \underline{F}_i^{(a)} + \underline{F}_i^{(nr)}$$

Definisco  $\underline{F}_i^{(cm)}$  (forza d'inerzia) relativa all' $i$ -esimo punto  $-m_i \underline{a}_i$

$$\underline{F}_i^{(cm)} + \underline{F}_i^{(a)} + \underline{F}_i^{(nr)} = 0 \quad \text{principio di d'Alembert}$$

Le  $\underline{F}_i^{(cm)}$  sono forze che compensano la risultante delle altre.

$$-\sum_{i=1}^N m_i \underline{a}_i = \underline{R}^{(cm)}$$

faccio il prodotto scalare con un generico spostamento virtuale. Sommo su  $i$ :

$$\sum_{i=1}^N \underline{F}_i^{(cm)} \cdot \delta \underline{P}_i + \sum_{i=1}^N \underline{F}_i^{(a)} \cdot \delta \underline{P}_i + \sum_{i=1}^N \underline{F}_i^{(nr)} \cdot \delta \underline{P}_i = 0$$



$$\delta L^{(cm)} + \delta L^{(a)} + \delta L^{(nr)} = 0$$

Nale ancora la legge sp.  $\delta L^{(nr)} \geq 0$

$$\Rightarrow \delta L^{(cm)} + \delta L^{(a)} = -\delta L^{(nr)} \leq 0$$

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

$$\text{P.L.V.: } \delta L^{(cm)} + \delta L^{(a)} \leq 0$$

P.L.V.  $\equiv$  Relazione simbolica della dinamica dei sistemi

Se vale il segno " $=$ ". Equazione simbolica della dinamica dei sistemi.



P.L.V. vale  $\forall \delta S$  e  $\forall t$ .

È una condizione necessaria e sufficiente per la dinamica.



Definiamo  $\forall i$ :  $\underline{F}_i^{(m)} = m_i \underline{\dot{a}}_i - \underline{F}_i^{(a)}$

$$- \underline{F}_i^{(m)} = -m_i \underline{\dot{a}}_i + \underline{F}_i^{(a)}$$

$$- \delta L^{(m)} = \delta L^{(m)} + \delta L^{(a)} \leq 0$$

$$\Rightarrow -\delta L^{(m)} \leq 0 \Rightarrow \delta L^{(m)} \geq 0!$$

Ora supponiamo che i vincoli siano B.O.L.

$$\Rightarrow \delta L^{(m)} + \delta L^{(a)} = 0$$

In STATICA le  $\underline{F}_i^{(m)} = 0 \quad \forall i$

P.L.V.  $\Rightarrow \delta L^{(a)} = 0$  (particolare del P.L.V.)

$OP_i = OP_i(q_1, q_2, \dots, q_e, t)$   
 e gradi di libertà

$$\dot{v}_i = \frac{dOP_i}{dt} = \frac{\partial OP_i}{\partial t} + \left( \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \dot{q}_h \right) \sum_{h=1}^e$$

( $q_2 \dots q_e$  dipendono dal tempo)

$$\delta OP_i = (\text{si "compelo" il tempo}) \sum_{h=1}^e \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \delta q_h$$

$$\boxed{\frac{\partial \dot{v}_i}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial OP_i}{\partial q_h}}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial \dot{q}_h} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} = \frac{\partial}{\partial q_h} \left( \frac{dOP_i}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial q_h}$$

$$\delta L^{(m)} = - \sum_{i=1}^N m_i a_i \cdot \delta OP_i = - \sum_{i=1}^N m_i a_i \cdot \sum_{h=1}^e \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \delta q_h =$$

$$= - \sum_{h=1}^e \left( \sum_{i=1}^N m_i a_i \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \right) \delta q_h$$

$$T_h := \sum_{i=1}^N m_i a_i \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \frac{dv_i}{dt} \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} =$$

$$= \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N m_i v_i \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \right] - \sum_{i=1}^N m_i v_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \right)$$

$$= - \sum_{h=1}^e T_h \delta q_h$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_h}$$

(TRASFORMAZIONE  
DI LAGRANGE)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i \cdot v_i$$

26/11/2008

P.L.V. + PRINCIPIO DI D'ALEMBERT

$$\delta L^{(a)} = \sum_{i=1}^N F_i^{(a)} \cdot \delta P_i$$

$$\delta L^{(m)} = - \sum_{i=1}^N m_i \underline{a}_i \cdot \delta P_i$$

EQUAZIONI DI LAGRANGE

$$\delta L^{(a)} + \delta L^{(m)} = 0$$

B.O.L.

Vogliamo trasformare le somme su  $N$  in somme degli  $l$  gradi di libertà.

$$\delta L^{(a)} = \sum_{h=1}^l Q_h \delta q_h$$

$$\delta L^{(m)} = - \sum_{h=1}^l T_h \delta q_h$$

$\delta P_i$ : spostamento virtuale rispetto all' $i$ -esimo punto

$$P_i = P_i(q_1, \dots, q_l, t)$$

$$\delta P_i = \sum_{h=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h = \delta P_i$$

$$Q_h = \sum_{i=1}^N F_i^{(a)} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \quad h=1 \dots l$$

COMPONENTI LAGRANGIANE DELLE FORZE ATTIVE

$$T_h = \sum_{i=1}^N m_i \underline{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \quad h=1 \dots l$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial P_i}{\partial q_h}$$

$$\Rightarrow T_h = \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \right] - \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial q_h} =$$

$$= \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_h} \right] - \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial q_h}$$

eu. cinetica  $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i$

$$\Rightarrow T_h = \dots - \frac{\partial T}{\partial q_h} =$$

$$T_h = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_h}$$

$$\delta L^{(a)} + \delta L^{(m)} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{h=1}^l (Q_h - T_h) \delta q_h = 0$$

Trasformazioni di Lagrange:  
trasformare le somme su  $i$   
in somme su  $h$

Se  $\delta q_h$  sono tutte indipendenti tra di loro  $\Rightarrow$  le  $l$  equazioni concatenate si annullano solo se  $Q_h = T_h \forall h$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \quad h=1 \dots l$$

EQ. DI LAGRANGE DI  
II<sup>a</sup> SPECIE

## FORZE POTENZIALI

$$\exists U = U(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

tale che  $F_i^{(a)} = -\nabla_i U$

- dipendenti dalla posizione
- indipendenti dalla velocità
- esprimibili tramite una unica fz. potenziale

$$\Rightarrow Q_h = \sum_{i=1}^n (-\nabla_i U) \cdot \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_h} = - \frac{\partial U}{\partial q_h}$$

Tutto è letto in termini delle coordinate Lagrangiane!

Se il sistema è soggetto a vincoli INDIPENDENTI dal tempo (sistema scleronomo) la fz. potenziale non dipende dal tempo e si chiama energia potenziale, e le forze che derivano da essa si dicono conservative.

$$U = U(q_1, \dots, q_l, t)$$

Le seguenti equazioni sono valide anche se i vincoli dipendono dal tempo.

contributo dinamico  
 $\uparrow$   
 $Q_h$   
contributo cinematico  
 $\downarrow$   
 $T_h$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = - \frac{\partial U}{\partial q_h} \quad h=1 \dots l$$

$\Downarrow$   
sistema di equazioni differenziali

Definiamo la funzione lagrangiana.

$$L = T - U \quad \text{"LAGRANGIANA"}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_h} \quad (U \text{ non dipende da } \dot{q})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_h}$$

EQUAZIONI DI LAGRANGE

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i$$

$$OP_i = OP_i(q_1, \dots, q_\ell, t)$$

$$\underline{v}_i = \frac{\partial OP_i}{\partial t} + \sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \cdot \dot{q}_h$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[ \frac{\partial OP_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial t} + 2 \frac{\partial OP_i}{\partial t} \cdot \sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \sum_{h=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_k} \dot{q}_h \cdot \dot{q}_k \right]$$

$$T = T_0 + T_1 + T_2$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial OP_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial t} \quad T_0 \Leftrightarrow \text{le potenze delle } \dot{q} \text{ e } 0$$

$$T_1 \Leftrightarrow \dot{q} \text{ al primo ordine (con potenza } = 1)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^{\ell} m_i \left( \frac{\partial OP_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \right) \cdot \dot{q}_h \quad \text{combinazione lineare delle } \dot{q}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} \left( m_i \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_h \dot{q}_k \quad \text{contributi delle } \dot{q} \text{ sono quadratici.}$$

A volte si usa la notazione:

$$T_1 = \sum_{h=1}^{\ell} b_h \dot{q}_h \quad T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k$$

Se il sistema è scleronomo  $\Rightarrow \frac{\partial OP_i}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow T_0 = 0, T_1 = 0$$

$$\Rightarrow T \equiv T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} m_i \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \frac{\partial OP_i}{\partial q_k} \dot{q}_h \dot{q}_k =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_h \sum_k a_{hk}(q) \dot{q}_h \dot{q}_k$$

$$L = T(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, t) - U(q_1, \dots, q_l, t)$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{h=1}^l \frac{\partial L}{\partial q_h} \dot{q}_h + \sum_{h=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h = \quad (\text{usando eq. Lagrange})$$

$$= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{h=1}^l \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \right) \dot{q}_h \right) + \sum_{h=1}^l \frac{\partial L}{\partial q_h} \dot{q}_h =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{h=1}^l \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h \right]$$

↑  
contributo per  
la dipendenza  
esplicita dal tempo

↑  
dipendenza implicita

Vincici indipendenti dal tempo  $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$  ma non l'altro

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_{h=1}^l \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h \right] \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \sum_{h=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - L \right] = 0$$

è una legge di conservazione

TEOREMA

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \sum_{h=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - L = \text{costante}$$

$H$  si conserva lungo il moto.

$H$  si chiama ENERGIA GENERALIZZATA  
oppure INTEGRALE DI JACOBI.



02/12/2008

$$O p_i = O p_i (q_1, \dots, q_e, t) \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$L = T - U \quad U = U(q_1, \dots, q_e, t)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_h} \quad h = 1, \dots, e$$

Primo esempio: piccola oscillazione / molla

o | m m m m m  $\xrightarrow{m}$  x l = 1  $q_1 = x$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad U = \frac{1}{2} k x^2$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{Lagrangiano dell'oscillatore armonico}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\Rightarrow m \ddot{x} = -kx$$

$$m \ddot{x} + kx = 0 \quad (\text{eq. oscillatore armonico})$$

Secondo esempio: punto in un campo centrale

$$l = 2 \quad q_1 = r \quad q_2 = \theta$$

$$L = T - U(r) \quad \leftarrow \text{campo centrale conservativo}$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r)$$

Come si scrivano le eq. di Lagrange?

$$\text{Sono: } \frac{\partial L}{\partial r} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$$

U dipende solo da r, T è quella scritta

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - \frac{dU}{dr}$$

$$m r \dot{\theta}^2 = m r \dot{\theta}^2 - dU/dr \quad \text{prima equazione}$$

$$\frac{d}{dt} [m r^2 \dot{\theta}] = 0 \quad \text{seconda equazione}$$

La seconda eq. è sotto forma di una legge di conservazione:  $m r^2 \dot{\theta}$  è costante.

In fatti è il momento angolare, costante nel campo centrale (ne è un integrale primo).

Si definisce:

$$p_h = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \quad (\text{momento cinetico})$$

Una  $q_k$  rispetto alla quale  $\mathcal{L}$  non varia, si chiama COORDINATA CICLICA. Ogni volta che ne appare una, il corrispondente momento cinetico è costante.

$$\frac{d}{dt} (p_h) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0$$

$\Rightarrow p_h$  è costante nel tempo

Ogni volta che appare una coordinata ciclica, si ha una corrispondente legge di conservazione.

Nel caso precedente,  $p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$   
 $\Rightarrow p_\theta$  costante.

$$\mathcal{L} = T - U = T_0 + T_1 + T_2 - U(q_1, \dots, q_e, t)$$

Abbiamo dimostrato che se  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ , esiste l'integrale di Jacobi:

$$\mathcal{H} = \sum_{h=1}^e \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - \mathcal{L} = \text{costante}$$

$\mathcal{H} \rightarrow$  ENERGIA GENERALIZZATA

Supponiamo che i vincoli siano B.O.L. e scleronomi (fissi)

$$\Rightarrow T = T_2 = \frac{1}{2} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k$$

$$U = U(q_1, \dots, q_e)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_h} \quad \text{teorema della funzione implicita}$$

$$\sum_{k=1}^e a_{hk} \dot{q}_k \quad a_{hk} = a_{hk}(q_1, \dots, q_e)$$

$$\mathcal{H} = \sum_{h=1}^e \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - \mathcal{L} = a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k - \mathcal{L} = 2T_2 - \mathcal{L} =$$

$$= 2T_2 - T_2 + U = T_2 + U \quad (\text{energia generalizzata})$$

vincoli scleronomi  $\Rightarrow$  sist. conservativo

$\Rightarrow f_2$  potenziale diventa energia potenziale.

L'energia generalizzata si scrive anche:

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}$$

Scriviamo la Lagrangiana del problema dei 2 corpi.  
Il sistema è sottoposto ad una forza esprimibile come una  $f_2$  potenziale dell'unica variabile  $|\underline{r}|$ , perché vale l'invarianza sotto traslazione e rotazione globale.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\underline{r}}_2^2 - U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$$

Definiamo una coordinata relativa  $\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$   
e la posizione del baricentro:  $\underline{r}_G = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}$

Vogliamo esprimere tutto in  $f_2$  di  $\underline{r}$  e  $\underline{r}_G$ .  
viene fuori che:

$$\underline{r}_1 = \underline{r}_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \underline{r}, \quad \underline{r}_2 = \underline{r}_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \underline{r}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\underline{r}}_G^2 + \frac{1}{2} \left[ m_1 \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_2 \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \right] \dot{\underline{r}}^2 - U(r)$$

||  
 $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu$  MASSA RIOTTA

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\underline{r}}_G^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\underline{r}}^2 - U(r)$$

Questa Lagrangiana ammette la separazione dei moti (moto del baricentro + moto relativo)

Non compaiono le componenti di  $\underline{r}_G$

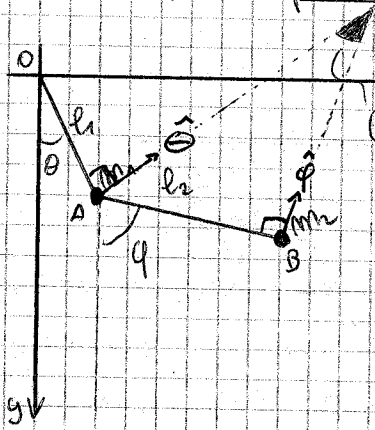
$\Rightarrow$  sono cicliche  $\Rightarrow$  mi aspetto tre leggi di conservazione (una per componente)

$$m_1 + m_2 := M$$

$$M \underline{v}_G = \text{COSTANTE}$$

(quantità di moto)

Altro esempio: pendolo doppio



$$l = 2$$

$l_1, l_2$  inestensibili

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$U = U(\theta, \varphi) = -m_1 g l_1 \cos \theta - m_2 g (l_1 \cos \theta + l_2 \cos \varphi)$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \underline{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \underline{v}_2^2 \quad \text{pungo: } l_1 = l_2 = l \quad m_1 = m_2 = m$$

$$\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \underline{v}_A^2 + \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2 + m \underline{v}_A \underline{v}_B \cos(\varphi - \theta)$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m l^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \hat{\theta} \cdot \hat{\varphi}$$

$$(\underline{v}_A = l \dot{\theta} \hat{\theta}) \quad (\underline{v}_B = l \dot{\varphi} \hat{\varphi})$$

$$\hat{\theta} \cdot \hat{\varphi} = \cos(\varphi - \theta)$$

$$\mathcal{L} = m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m l^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) + 2 m g l \cos \theta + m g l \cos \varphi$$

$q_1 = \theta$   $q_2 = \varphi$  servono  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$  e  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}$  e  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$

qua non c'è separazione dei moti.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 2 m l^2 \dot{\theta} + m l^2 \dot{\varphi} \cos(\varphi - \theta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = m l^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin(\varphi - \theta) - 2 m g l \sin \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2 m l^2 \ddot{\theta} + m l^2 \dot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) + m l^2 \dot{\varphi} (-\sin(\varphi - \theta) \cdot (\dot{\varphi} - \dot{\theta})) =$$

$$= m l^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin(\varphi - \theta) - 2 m g l \sin \varphi \Rightarrow$$

$$2 m l^2 \ddot{\theta} + m l^2 \dot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) - m l^2 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \theta) = -2 m g l \sin \varphi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\varphi} + m l^2 \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = -m l^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin(\varphi - \theta) - m g l \sin \varphi$$

$$m l^2 \ddot{\varphi} + m l^2 \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta) + m l^2 \dot{\theta}^2 \sin(\varphi - \theta) = -m g l \sin \varphi$$

lagrangiane per il pendolo doppio simmetrico non sono lineari. sono accoppiate.

03/12/2008

Piccole oscillazioni e gradi di libertà

- configurazioni di equilibrio
- stabilità
- piccoli moti

Perturbando il sistema, questo resta in un intorno della configurazione di equilibrio.

Come si trovano le configurazioni d'equilibrio?

Se un corpo viene posto in una configurazione con tutte le velocità nulle e ci resta per sempre, è una configurazione di equilibrio.

$l$ -upla  $(q_1, \dots, q_l)$  al tempo  $t$  = CONFIGURAZIONE

$$\text{P.L.V. : } \delta L^{(a)} + \delta L^{(cm)} = 0$$

Adattiamo il P.V. al caso statico (sempre B.O.L.)

ponendo tutte le velocità = 0 :

$$\delta L^{(a)} = 0$$

Supponiamo che esista una energia potenziale dipendente solo dalle  $q_i$ .

IPOTESI:

- configurazione B.O.L.
- vincoli fissi
- $\exists U = U(q_1, q_2, \dots, q_l)$

$$\text{p.l.v. statica: } \sum_{i=1}^N F_i^{(a)} \delta p_i = 0 = \sum_{h=1}^l Q_h \delta q_h = 0$$

(con  $Q_h = \sum_{i=1}^N F_i^{(a)} \frac{\partial p_i}{\partial q_h}$ )

$\iff Q_h = 0 \quad \forall h=1 \dots l$  È un sistema di  $l$  equazioni.



$$Q_h = - \sum_{i=1}^N \nabla_i U \cdot \frac{\partial \text{OP}}{\partial q_h} \equiv - \frac{\partial U}{\partial q_h} = Q_h$$

⇒ il sistema di  $l$  equazioni diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial U}{\partial q_l} = 0 \end{array} \right.$$

Nel pseudo doppio avremmo:

$$U(\theta, \varphi) = -2mgl \cos \theta - mgl \cos \varphi \quad (l=2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial U / \partial \theta = 0 \\ \partial U / \partial \varphi = 0 \end{array} \right.$$

ovvero:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2mgl \sin \theta = 0 \quad (\Rightarrow \sin \theta = 0) \\ mgl \sin \varphi = 0 \quad (\Rightarrow \sin \varphi = 0) \end{array} \right.$$

In un intervallo almeno  $[0, 2\pi]$  ho molte soluzioni:

$\theta = 0, \pi \quad \varphi = 0, \pi$  combinate, danno:

$(0, 0) \quad (0, \pi) \quad (\pi, 0) \quad (\pi, \pi)$

Queste soluzioni sono TUTTE le configurazioni d'equilibrio. A noi interessano quelle STABILI.

Il CRITERIO DI DIRICHLET stabilisce quando una configurazione d'equilibrio è stabile.



STABILE



NON STABILE

← ciotola finita!

Spostando di poco il punto materiale, nel primo caso torna indietro, nel secondo se ne va.

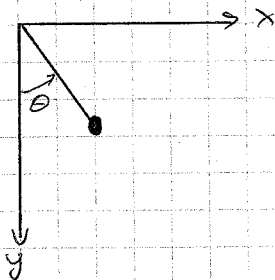
$$E = T + U$$

## CRITERIO DI DIRICLET

Una situazione d'equilibrio è statica se in sua corrispondenza  $U$  presenta un minimo relativo.

( $T$  aumenta,  $E$  costante  $\Rightarrow U$  diminuisce)

Esempio: PENDOLO SEMPLICE

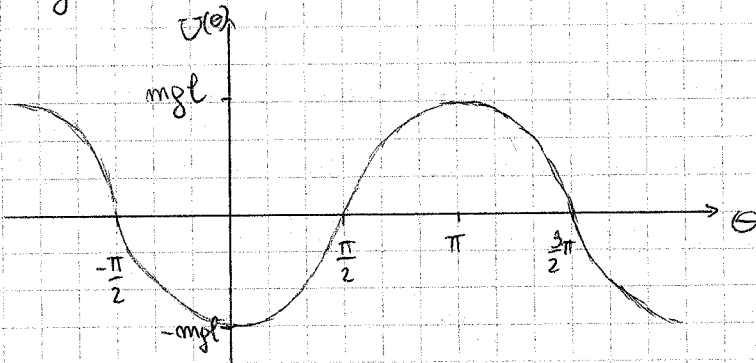


$$l = 1$$

$$U = -mgl \cos \theta$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = mgl \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$$

grafico di  $U$  misurato in unità  $mgl$ :



(ribaltato:  $\frac{U}{mgl} = -\cos \theta$ )

$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = mgl \cos \theta$   $\Leftarrow$  se è positiva è un p.to di min.,  
se è negativa è un p.to di max.

$$= \begin{cases} mgl & \theta = \theta_1 \\ -mgl & \theta = \theta_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \theta = 0$  è l'unica configurazione stabile.

Continuiamo a limitarci al caso  $l = 1$ :

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - U(q)$$

pendolo semplice  $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \underbrace{l^2}_{\downarrow}$   $\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$

momento d'inerzia

Voglio studiare i piccoli moti attorno alla (alle) configurazione (i) stabile(i).

Pensiamo ad una espansione di Taylor per  $U$  e per  $T$  per poter troncare al 2° ordine.

$q^0$  = soluzione stabile d'equilibrio

$U(q)$  sviluppo intorno a  $q^0$

$$U(q) \approx U(q^0) + \left. \frac{dU}{dq} \right|_{q=q^0} (q-q^0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=q^0} (q-q^0)^2 + \dots$$

Definisco:  $Q = q - q^0$  (il sx in sostanza)

$$\Rightarrow U(q) \approx U(q^0) + \left. \frac{dU}{dq} \right|_{q=q^0} Q + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=q^0} Q^2$$

↓  
costante

↓  
\*

L'energia potenziale è sempre definita a meno di una costante  $\Rightarrow$  posso trascurare questo termine

(significa valutare  $U$  rispetto a  $U(q^0)$ ).

\*  $q^0$  è stato trovato imponendo  $\frac{dU}{dq} = 0$

$\Rightarrow$  questo termine è nullo

Rimane solo  $\frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=q^0} Q^2$ , che abbiamo visto

essere  $> 0$  per il criterio di Dirichlet.

$$\Rightarrow \boxed{U(q) \approx \frac{1}{2} k Q^2}$$

Per l'energia cinetica invece, essendo già una forma quadratica in  $\dot{q}$ , basta valutare  $q(q)$  in  $q^0$  all'ordine 0. In questo modo i termini delle Lagrangiana sono entrambi quadratici e hanno lo stesso "peso".

$$Q = q - q^0 \iff \dot{Q} = \dot{q}$$

Lagrangiana delle piccole oscillazioni:

$$\mathcal{L}_{p.o.} = \frac{1}{2} a(q^0) \dot{Q}^2 - \frac{1}{2} k Q^2$$

$$\Theta_1 = q^0 = 0$$

$a$  non dipende da  $q$ .  $a = mL^2$

$$\mathcal{L}_{p.o.} = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\Theta}^2 - \frac{1}{2} mgL \Theta^2$$

Equazioni di Lagrange delle piccole oscillazioni:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} \quad h = 1 \dots l$$

$$a(q^0) \ddot{Q} + kQ = 0$$

EQUAZIONE DI LAGRANGE  
PER TUTTI I SISTEMI  
C.C.  $l = 1$

è l'equazione dell'oscillatore armonico  
di pulsazione  $\omega^2 = k/a(q^0)$

$$\ddot{Q} + \omega^2 Q = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{a(q^0)}$$

$$\Rightarrow Q(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

Il sistema oscilla intorno a  $q^0$  con  
pulsazione  $\omega^2$ .

Per il pendolo semplice resta:

( $l \equiv l$ )

$$mL^2 \ddot{\Theta} + mgL \Theta = 0$$

diviso per  $mL^2$

$$\ddot{\Theta} + \frac{g}{L} \Theta = 0$$

- scrivere Lagrangiana
- trovare conf. equilibrio stabili
- sviluppare  $\mathcal{L}$  al II ordine intorno alle configurazioni stabili

Se  $l = 1$  viene SEMPRE  $a(q^0)\ddot{q} + kq = 0$ .

La tecnica delle piccole oscillazioni permette quindi di linearizzare equazioni di partenza più complesse -

CASO  $l > 1$

$$\mathcal{L} = T - U \quad \{q_1^0, \dots, q_l^0\} = \underline{q}^0 \quad \text{l-uplo di conf. d'equilibrio}$$

$$T = T_2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} a_{hk}(\underline{q}) \dot{q}_h \dot{q}_k - U(\underline{q}) \quad \underline{q} = (q_1, \dots, q_l)$$

↓  
sottrarre le somme

$$U(q_1, \dots, q_l) \approx \underbrace{U(q^0)} + \sum_{h=1}^l \frac{\partial U}{\partial q_h} \Big|_{\underline{q}=q^0} (q_h - q_h^0) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} \Big|_{\underline{q}=q^0} (q_h - q_h^0)(q_k - q_k^0)$$

ci liberiamo dei primi termini per lo stesso motivo di prima.

Definisco:  $Q_h = q_h - q_h^0$  ( $\Delta x$  nella direzione  $h$ )

$$\boxed{U(\underline{q}) \approx \frac{1}{2} U_{hk} Q_h Q_k}$$

↑  
elementi dell'Hessiana della  $U$

$$\mathcal{L}_{p.o.} = \frac{1}{2} a_{hk}(q^0) \dot{Q}_h \dot{Q}_k - \frac{1}{2} U_{hk} Q_h Q_k$$

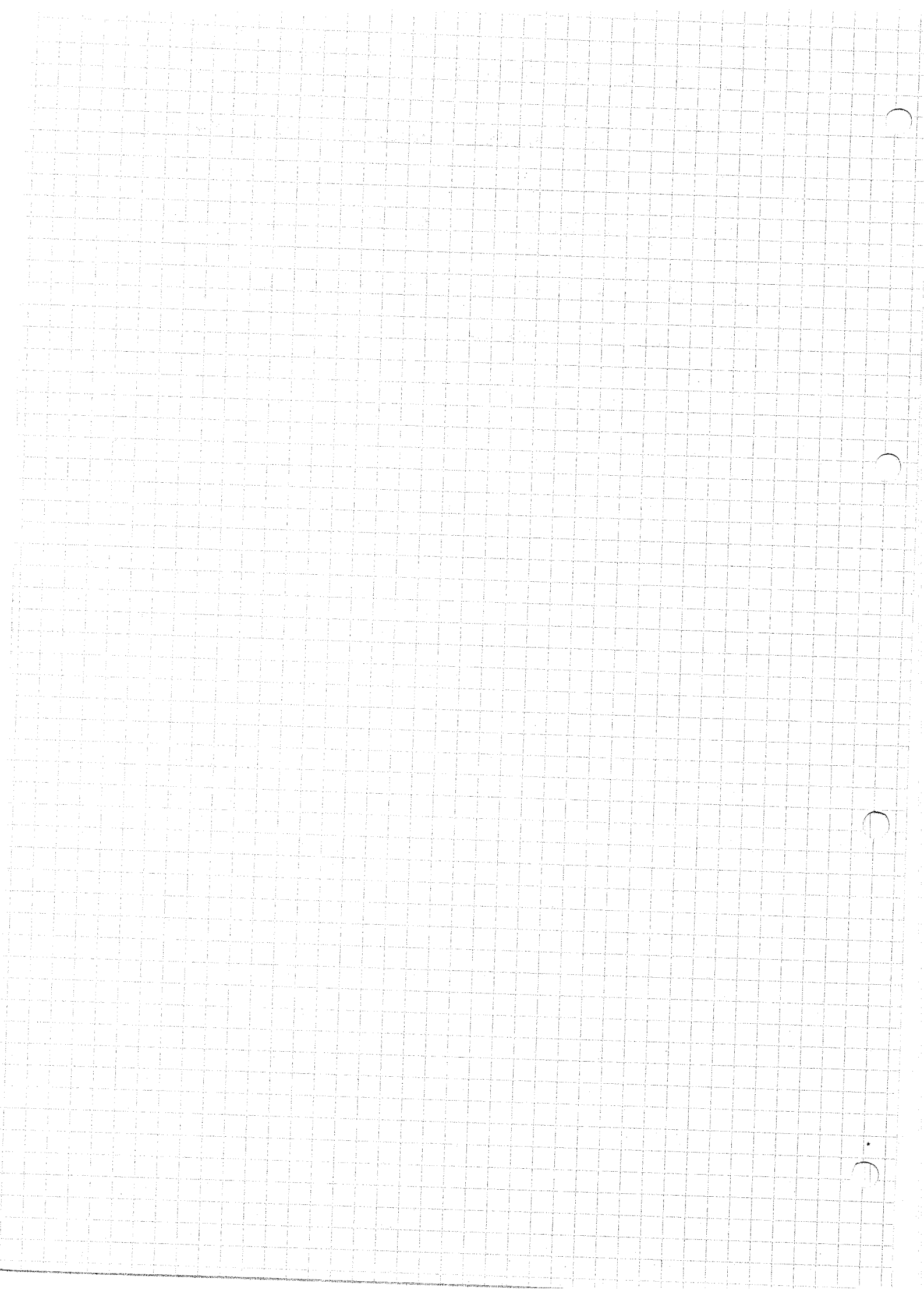


Per uniformità defuisco:  $a_{nk}(\underline{q}^0) = T_{nk}$

$T_{nk}$ ,  $U_{nk}$  matrici reali e simmetriche

$$L_{p.o.} = \frac{1}{2} T_{nk} \dot{q}_k \dot{q}_k - \frac{1}{2} U_{nk} q_k q_k$$

Lagrangiana delle piccole oscillazioni per più gradi di libertà.



$$\mathcal{L}_{p.o.} = \frac{1}{2} T_{hk} \dot{q}_k - \frac{1}{2} U_{hk} q_k$$

Abbiamo individuato due forme quadratiche.

$$T_{hk} = a_{hk}(q^0) \quad U_{hk} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} \quad \text{elementi di matrice.}$$

Supponiamo  $q^0$  configurazione di equilibrio stabile.

La forma quadratica  $U_{hk}$  è definita positiva.  
formata da

$U_{hk} \in \mathbb{R}$  sono gli elementi di una matrice  $l \times l$

Equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt} (T_{hk} \dot{q}_k) = U_{hk} q_k \quad (\text{tutto sommato su } k)$$

La derivazione agisce solo su  $\dot{q}$  ( $T_{hk} \in \mathbb{R}$ )

$$T_{hk} \ddot{q}_k + U_{hk} q_k = 0 \quad \text{sistema di } l \text{ equazioni lineari}$$

Le soluzioni sono  $\{q_1(t), \dots, q_l(t)\}$

Sono equazioni dell'oscillatore armonico.

Il problema è che sono ancora accoppiate tra di loro. L'espansione al II ordine con Taylor le ha "solo" linearizzate.

Pendolo doppio  $\mathcal{L} = T - U = m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m l^2 \cos(\varphi - \theta) \dot{\theta} \dot{\varphi} + 2 m g l \cos \theta + m g l \cos \varphi$

(caso simmetrico) Come sono fatte le matrici?

$$(0, 0) = (\theta_1, \varphi_1)$$

$$(0, \pi) = (\theta_2, \varphi_2)$$

$$(\pi, 0) = (\theta_2, \varphi_1)$$

$$(\pi, \pi) = (\theta_2, \varphi_2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 m l^2 & m l^2 \\ m l^2 & m l^2 \end{pmatrix} = T_{hk} = m l^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 m g l & 0 \\ 0 & m g l \end{pmatrix} = U_{hk} = m g l \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = \theta \quad q_2 = \varphi$$

Come sono fatti gli autovalori della matrice  $U$ ?

Gli autovalori della matrice diagonale sono gli elementi della diagonale.

$$U \underline{\xi} - \lambda \underline{\xi} = 0$$

$$\det(U - \lambda \mathbb{1}) = 0 \quad (\text{equazione caratteristica})$$

$$\det \begin{pmatrix} 2mgl - \lambda & 0 \\ 0 & mgl - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \left\| \begin{array}{cc} 2mgl - \lambda & 0 \\ 0 & mgl - \lambda \end{array} \right\| = 0$$

$$\lambda_1 = 2mgl \quad \lambda_2 = mgl$$

A noi degli autovalori interessa il segno.

In  $(0,0)$  sono entrambi positivi.

- Calcolare la matrice  $U_{hk}$  nelle altre posizioni d'equilibrio. Risulterà:

$(0,0)$  stabile  
 $(0,\pi)$  sella  
 $(\pi,0)$  sella  
 $(\pi,\pi)$  instabile

Come sono fatte le equazioni di Lagrange?

$$\begin{cases} T_{11} \ddot{Q}_1 + T_{12} \ddot{Q}_2 + U_{11} Q_1 + U_{12} Q_2 = 0 & h=1 \\ T_{21} \ddot{Q}_1 + T_{22} \ddot{Q}_2 + U_{21} Q_1 + U_{22} Q_2 = 0 & h=2 \end{cases}$$

Tutti i coefficienti sono numeri.

Le equazioni sono accoppiate. Se esplicito:

$$\begin{cases} 2ml^2 \ddot{Q}_1 + ml^2 \ddot{Q}_2 + 2mgl Q_1 = 0 & \text{equazioni di Lagrange} \\ ml^2 \ddot{Q}_1 + ml^2 \ddot{Q}_2 + mgl Q_2 = 0 & \text{per il pendolo doppio} \\ & \text{simmetrico.} \end{cases}$$

Torniamo al caso generale.

Se  $q^0$  è una configurazione stabile, mi aspetto di trovare una soluzione oscillante intorno a  $q^0$ . Usiamo come ansatz una funzione oscillante: l'esponenziale complesso.

$$Q_h(t) = A_h e^{i\omega t}$$

Poi ne prenderemo solo la parte reale. Inseriamo l'ansatz nelle equazioni.

$$-\omega^2 T_{hk} A_k e^{i\omega t} + U_{hk} A_k e^{i\omega t} = 0$$

$$\text{moltiplico per } e^{-i\omega t} \Rightarrow -\omega^2 A_k T_{hk} + U_{hk} A_k = 0$$

Fissato  $\omega$ , le incognite sono le componenti di  $A$ .

Sistema di  $l$  equazioni in  $l$  incognite.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_l \end{pmatrix}$$

$$-\omega^2 T A + U A = 0$$

$\begin{matrix} T & U \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix}$   
prodotti righe per colonne

È un sistema algebrico omogeneo. Per ottenere una soluzione non banale il determinante della matrice dei coefficienti deve essere nullo.

$$\det(U - \omega^2 T) = 0 \quad \text{EQUAZIONE CARATTERISTICA}$$

È una equazione algebrica in  $\omega^2$  di grado  $l$ .

Le  $\omega_i^2$  si dicono FREQUENZE PROPRIE del sistema.

$$\underline{\omega}^2 = (\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_l^2) \quad \text{le frequenze proprie}$$

• Poiché  $U$  e  $T$  sono reali e simmetriche, le soluzioni dell'equazione sono reali e positive.

• Il sistema omogeneo associato all'equazione caratteristica può essere scritto come:

$$U \underline{A} = \omega^2 T \underline{A} \quad \Rightarrow \text{le } \omega^2 \text{ giocano il ruolo di autovalori}$$

( $\underline{A}$  autovettore) ... Ma c'è una  $T$  di troppo. La

soluzione di questo porta ai cosiddetti MODI

NORMALI.

Problema di autovalori e autovettori in senso

GENERALIZZATO:

$$U \underline{A} = \omega^2 T \underline{A} \quad \lambda_i := \omega_i^2$$

•  $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow$  i prodotti scalari  $\langle \underline{A}^{(i)}, T \underline{A}^{(j)} \rangle$  è NULLO nella metrica  $T$ .



$U \underline{A}^{(i)} = \lambda_i T \underline{A}^{(i)}$  La matrice non è data dalla matrice  $\underline{U}$  bensì dalla matrice  $T$ .

$$\langle \underline{A}^{(i)}, T \underline{A}^{(j)} \rangle = 0 = \sum_{h=1}^n A_h^{(i)} T_{hk} A_k^{(j)} \quad (\text{prodotto scalare})$$

Ad autovalori distinti corrispondono autovettori ortogonali nella matrice  $T$ .

Pseudo doppio  $U - \lambda T \quad (\lambda \equiv \omega^2)$

$$U - \lambda T = \begin{pmatrix} 2mgl - 2\lambda ml^2 & -\lambda ml^2 \\ -\lambda ml^2 & mgl - \lambda ml^2 \end{pmatrix}$$

$$\det(U - \lambda T) = 2(mgl - \lambda ml^2)^2 - m^2 l^4 \lambda^2 = 0$$

(equazione caratteristica per il pseudo doppio)

$$mgl - \lambda ml^2 = \pm \frac{ml^2 \lambda}{\sqrt{2}} \quad (\text{eq. di prim'ordine})$$

$$\frac{g}{l} - \lambda = \pm \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \quad \frac{g}{l} = \lambda \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{g}{l} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \pm 1} \quad \text{razionalizzo:}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{g}{l} (2 + \sqrt{2}), \quad \frac{g}{l} (2 - \sqrt{2})$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} (2 + \sqrt{2}) \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} (2 - \sqrt{2}) \quad \text{FREQUENZE PROPRIE}$$

Sono entrambe positive, come ci aspettavamo.

Ultimo passo: disaccoppiare le equazioni. Torniamo al caso generale.

Abbiamo le frequenze proprie:  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$

Fissata una frequenza propria, posso inserirla nell'ansatz trovando i coefficienti associati e quindi la soluzione del problema.

$$Q_k(t) = \sum_{i=1}^n a_i A_k^{(i)} e^{i\omega_i t}$$

di cui va presa solo la parte reale.

Come faccio a disaccoppiare? (Cosa sono i modi normali?)

Impongo che, nella matrice  $T$ , se  $i = j \Rightarrow$

$$\langle A^{(i)}, T A^{(i)} \rangle = 1$$

Posso dire:  $\langle A^{(i)}, T A^{(j)} \rangle = \delta_{ij}$

Costruisco una matrice  $A$  di cui le colonne sono gli  $l$  autovettori.

$$A = (A^{(1)}, \dots, A^{(l)}) \quad \text{matrice } l \times l$$

$A^T U A$  (rotazione di  $U$  sotto  $A$ )

$$A^T U A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_l \end{pmatrix} \quad (l \times l)$$

$$A^T T A = \mathbb{1}$$

(dimostrando)

$A$  diagonalizza sia la matrice  $U$  che la matrice  $T$ .

$$\underline{Q} = \underline{A} \underline{\Xi}$$

Le  $\Xi_i$  si dicono MODI NORMALI del sistema e permetteranno di disaccoppiare le equazioni:

$$\mathcal{L} \text{ p.o.} = \frac{1}{2} \left( \dot{\Xi}_1^2 + \dots + \dot{\Xi}_l^2 \right) - \frac{1}{2} \left( \omega_1^2 \Xi_1^2 + \dots + \omega_l^2 \Xi_l^2 \right)$$

Esercizio per casa: matrice  $U_{h,k}$  nei casi:

1.  $(0, \pi)$

2.  $(\pi, 0)$

3.  $(\pi, \pi)$

$$U(\theta, \varphi) = -2mgl \cos \theta - mgl \cos \varphi$$

$U_{h,k}$  sono gli elementi della Hessiana della  $U$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = \frac{d}{d\theta} (+2mgl \sin \theta) = 2mgl \cos \theta$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \frac{d}{d\varphi} (mgl \sin \varphi) = mgl \cos \varphi$$

$$U_{h,k} = \begin{pmatrix} 2mgl \cos \theta & 0 \\ 0 & mgl \cos \varphi \end{pmatrix}$$

①  $U_{h,k}(0, \pi) = \begin{pmatrix} +2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} mgl$  sella

②  $U_{h,k}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} mgl$  sella

③  $U_{h,k}(\pi, \pi) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} mgl$  instabile

09/12/2008

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} a_{nk}(\underline{q}) \dot{q}_n \dot{q}_k - U(q_1, \dots, q_e)$$

- conf. di equilibrio
- stabilità ( $e=2 \Rightarrow \dots$ )
- $\{\underline{q}^0\} \Rightarrow$  sviluppo al 2° ordine  $\Rightarrow$  L.p.o. (LINEARIZZAZIONE)
- $\mathcal{L}_{p.o.} = \frac{1}{2} T_{hk} \dot{Q}_h \dot{Q}_k - \frac{1}{2} U_{hk} Q_h Q_k$

$$Q_h = q_h - q_h^0$$

$$T_{hk} = a_{nk}(\underline{q}^0)$$

$$U_{hk} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} \right|_{\underline{q}=\underline{q}^0}$$

$$U \underline{A}^{(i)} = \lambda_i T \underline{A}^{(i)}$$

$$\lambda_i = \omega_i^2$$

$$U_{hk} A_k - \omega^2 T_{hk} A_k = 0$$

$$Q_h = A_h e^{i\omega t}$$

$\det[U - \lambda T] = 0 \Rightarrow$  equazione caratteristica  
(fornisce le frequenze proprie)

$$(\underline{A}^{(i)}, T \underline{A}^{(j)}) = 0$$

$$A_h^{(i)} T_{hk} A_k^{(j)}$$

(prodotto scalare  $(i \neq j)$   
 $\Rightarrow$   $i$ -esimo e  $j$ -esimo  
autovettore sono ortogonali  
nella matrice  $T$ )

$$Q = (\underline{A}^{(1)}, \underline{A}^{(2)}, \dots, \underline{A}^{(e)})$$

matrice  $e \times e$   
formata da  
autovettori

$$\text{Pongo } (\underline{A}^{(i)}, T \underline{A}^{(i)}) = 1$$

Posso definire in modo più generale:

$$(\underline{A}^{(i)}, T \underline{A}^{(j)}) = \delta_{ij}$$

 $\Leftrightarrow$ 

$$Q^T T Q = \mathbb{1}$$

$$(a^T T a) = (a^T)_{ih} (T a)_{hj} = (a^T)_{ih} T_{hk} a_{kj}$$

l'indice di colonna indica l'autovettore,  
l'indice di riga la k-esima componente:

$$a_{kj} = A_k^j$$

$$\Rightarrow (a^T T a) = a_{hi} T_{hk} a_{kj} = A_h^{(i)} T_{hk} A_k^{(j)}$$

i e j sono liberi ma sono sommati su h e su k.

$$A_h^{(i)} (T A^{(j)})_h = A_h^{(i)} T_{hk} A_k^{(j)} = \delta_{ij}$$

$\delta_{ij}$  = delta di Kronecker = elemento ij di  $\mathbb{1}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Tramite  $Q$  diagonalizzo anche la  $U$ :

$$(A^{(i)}, U A^{(j)}) = (A^{(i)}, \lambda_j T A^{(j)}) \quad \text{per definizione}$$

$$\lambda_j \in \mathbb{R}$$

$$(A^{(i)}, U A^{(j)}) = \lambda_j (A^{(i)}, T A^{(j)}) = a^T U a =$$

$$= \lambda_j \delta_{ij} = \Lambda$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \dots \\ & & & & \lambda_e \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a^T T a = \mathbb{1} \\ a^T U a = \Lambda \end{array}}$$

La soluzione di un problema  
autovettore - autovalore in senso  
generalizzato ( $U A^{(i)} = \lambda_i T A^{(i)}$ )  
fornisce la contemporanea  
diagonalizzazione di 2 matrici  
( $U$  e  $T$ )



Definiamo delle nuove coordinate  $\underline{\xi}$ :

$$\begin{aligned}\underline{Q} &= \underline{a} \underline{\xi} \\ T\underline{Q} &= T\underline{a} \underline{\xi} & \underline{Q}^T T \underline{Q} &= \overbrace{\underline{a}^T T \underline{a}}^{\mathbb{1}} \underline{\xi} \\ \Rightarrow \quad \underline{\xi} &= \underline{a}^T T \underline{Q} & \dot{\underline{Q}} &= \underline{a} \dot{\underline{\xi}}\end{aligned}$$

I  $\underline{\xi}_i$  si dicono MODI NORMALI.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{P.O.} &= \frac{1}{2} T_{Rk} \dot{Q}_k \dot{Q}_k - \frac{1}{2} U_{Rk} Q_k Q_k = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\underline{Q}}, T \dot{\underline{Q}}) - \frac{1}{2} (\underline{Q}, U \underline{Q}) = \\ &= \frac{1}{2} (\underline{a} \dot{\underline{\xi}}, T \underline{a} \dot{\underline{\xi}}) - \frac{1}{2} (\underline{a} \underline{\xi}, U \underline{a} \underline{\xi}) = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\underline{\xi}}, \underbrace{\underline{a}^T T \underline{a}}_{\mathbb{1}} \dot{\underline{\xi}}) - \frac{1}{2} (\underline{\xi}, \underbrace{\underline{a}^T U \underline{a}}_{\Lambda} \underline{\xi}) = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\underline{\xi}}, \dot{\underline{\xi}}) - \frac{1}{2} (\underline{\xi}, \Lambda \underline{\xi}) = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dots + \dot{\xi}_e^2) - \frac{1}{2} (\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \dots + \lambda_e \xi_e^2) = \mathcal{L}_{P.O.}\end{aligned}$$

È somma di  $e$  lagrangiane separate.

Le equazioni sono state disaccoppiate esprimendole in termini di modi normali.

Ogni contributo è l'equazione di un moto armonico con pulsazione  $\lambda_i = \omega_i^2$  (frequenze proprie):

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0$$

$$\begin{cases} q_h(0) = c_h & h=1 \dots e \\ \dot{q}_h(0) = d_h \end{cases} \quad (\text{condizioni iniziali note})$$

$\Rightarrow$  tramite  $Q_h = q_h - q_h^i$  conosco  $Q_h(0)$  e  $\dot{Q}_h(0)$

$\Rightarrow$  tramite  $\underline{\xi} = A^{-1} T \underline{Q}$  conosco  $\xi_h(0)$ ,  $\dot{\xi}_h(0)$

$\Rightarrow$  risolvo la LPO: ( $\xi_h$  sono soluzioni di oscillatori armonici).

$$\begin{aligned} Q_h &= (A \underline{\xi})_h && (\text{principio di sovrapposizione}) \\ &= \sum_{k=1}^e a_{hk} \xi_k \end{aligned}$$

Ogni  $\xi$  è periodica  $\Rightarrow$  ogni  $Q$  è MULTIPERIODICA perché è combinazione lineare di moti periodici.

Torniamo al pendolo doppio simmetrico:

$$\begin{aligned} L &= m l^2 \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m l^2 \Theta \dot{\varphi} \cos(\varphi - \Theta) - \\ &\quad - [-2 m g l \cos \Theta - m g l \cos \varphi] \end{aligned}$$

$\Theta = \varphi = 0 \Rightarrow$  equilibrio stabile

$$U = m g l \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = m l^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l} (2 \pm \sqrt{2}) = \text{frequenze proprie}$$

Devo trovare gli autovettori corrispondenti per trovare  $Q$ .

$$U A^{(i)} = \lambda_i T A^{(i)} \quad l=2$$

$$\lambda_1 = \frac{g}{l} (2 - \sqrt{2}) \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$m g l \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{g}{l} (2 - \sqrt{2}) m l^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix} = (2 - \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 2a + b \\ a + b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = (2 - \sqrt{2})(2a + b) \\ b = (2 - \sqrt{2})(a + b) \end{cases} \quad (\text{sono la stessa equazione})$$

$$\Rightarrow b = (2 - \sqrt{2})a + (2 - \sqrt{2})b$$

$$\Rightarrow b \cdot (\sqrt{2} - 1) = (2 - \sqrt{2})a$$

$$b = \frac{(2 - \sqrt{2})}{(\sqrt{2} - 1)} a = \sqrt{2} a$$

$$\Rightarrow \underline{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{2}a \end{pmatrix}$$

ho la libertà di fissare la norma di  $\underline{A}^{(1)}$  nella metrica  $T$ .

$$\Rightarrow (\underline{A}^{(1)}, T \underline{A}^{(1)}) = 1$$

$$\Rightarrow (a \quad \sqrt{2}a) \begin{pmatrix} m l^2 (2 + \sqrt{2}) a \\ m l^2 (1 + \sqrt{2}) a \end{pmatrix}$$

$$= m l^2 [(2 + \sqrt{2})a^2 + (\sqrt{2} + 2)a^2] = 1$$

$$\Rightarrow m l^2 (2 + \sqrt{2}) 2a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{2 m l^2 (2 + \sqrt{2})} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4 m l^2} \Rightarrow a = \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{4 m l^2} \right)^{1/2}$$

$\Rightarrow$  conosco  $\underline{A}^{(1)}$

facendo lo stesso calcolo, trovo  $\underline{A}^{(2)}$  del tipo  $\begin{pmatrix} a \\ -\sqrt{2}a \end{pmatrix}$

Potero anche imporre  $(\underline{A}^{(1)}, T \underline{A}^{(2)}) = 0$  conoscendo completamente  $\underline{A}^{(1)}$ . Comunque:

$$a = \begin{pmatrix} a & a \\ \sqrt{2}a & -\sqrt{2}a \end{pmatrix}$$

$$\underline{Q} = a \underline{\xi}$$

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$a^T T \underline{q} = \underline{\xi}$$

$$a^T = \begin{pmatrix} a & \sqrt{2}a \\ a & -\sqrt{2}a \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \sqrt{2}a \\ a & -\sqrt{2}a \end{pmatrix} m l^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Il primo esercizio del compito contiene piccole oscillazioni.

10/12/2008

$$l=2$$

Come faccio a capire subito se una configurazione d'equilibrio è stabile?

$$U_{\text{Max}} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \quad \{q_1^0, q_2^0\}$$

L'equazione secolare ha dei minimi da entrambe le parti.

$$\det[U - \lambda \mathbb{I}] = 0 ?$$

$$U \underline{\varphi} = \lambda \underline{\varphi}$$

$$U - \lambda \mathbb{I} = \begin{pmatrix} U_{11} - \lambda & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det[U - \lambda \mathbb{I}] &= (U_{11} - \lambda)(U_{22} - \lambda) - U_{12}^2 = \\ &= U_{11}U_{22} + \lambda^2 - \lambda(U_{11} + U_{22}) - U_{12}^2 \end{aligned}$$

$$\lambda^2 - \lambda(U_{11} + U_{22}) + U_{11}U_{22} - U_{12}^2 = 0$$

⇔

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{Tr} U + \det U = 0$$

$$\operatorname{Tr} U = \text{Traccia di } U = U_{11} + U_{22}$$

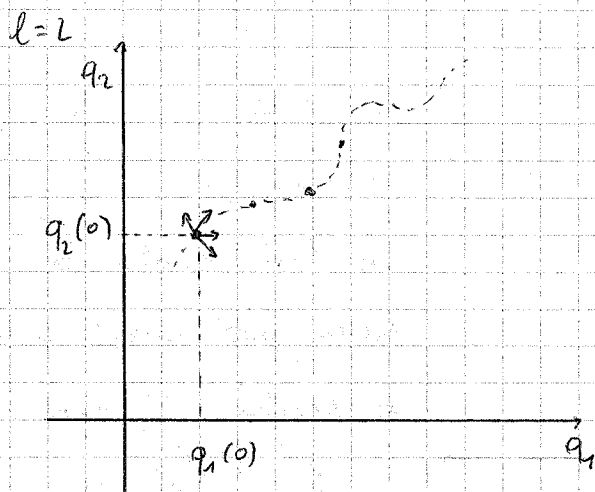
$$\det U > 0 \Rightarrow U_{11}U_{22} > U_{12}^2 > 0$$

⇔  $U_{11}$  e  $U_{22}$  o entrambi positivi o entrambi negativi ⇒ basta osservare la traccia.

CASI:	$\det U > 0$ $\operatorname{tr} U > 0$	$\begin{matrix} + & - & + \end{matrix}$	$\lambda_{1,2} > 0$ <u>STABILE</u> (p. min)
	$\det U > 0$ $\operatorname{tr} U < 0$	$\begin{matrix} + & + & + \end{matrix}$	$\lambda_{1,2} < 0$ <u>INSTABILE</u> (p. max)
	$\det U < 0$	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$	<u>INSTABILE</u> (sella)

## TRASFORMAZIONE DI LEGENDRE

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$



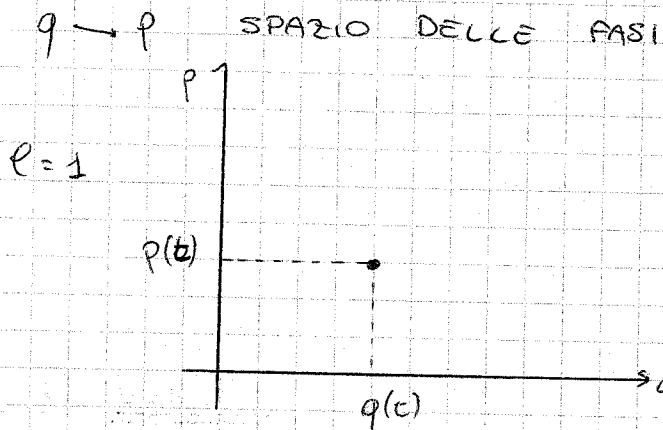
$$\{q_1(t), q_2(t)\}$$

Se fisso la configurazione in un punto, posso conoscerla in tutti gli altri? NO  
 Non basta come condizione iniziale.



In ambito lagrangiano, per ogni  $q_i$  esiste un momento cinetico coniugato:

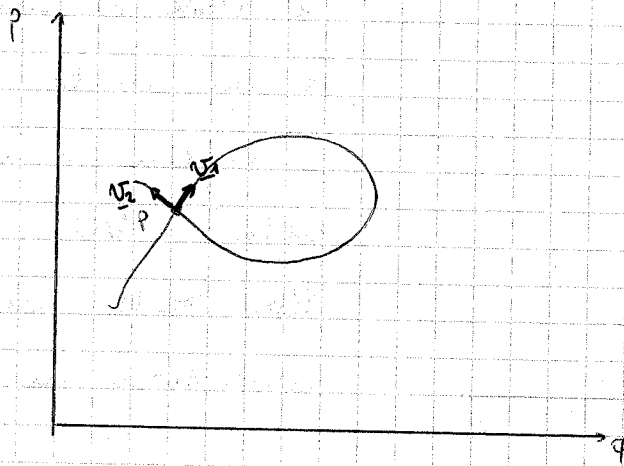
$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$$



Es. Oscillatore armonico:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

In generale, sul piano [spazio] delle fasi, assegnare un punto significa assegnare sia  $x(0)$  che  $\dot{x}(0)$ . Ogni traiettoria è univocamente determinata e non si possono mai intersecare:



$P =$  stato iniziale

$$P = (q(0), p(0))$$

In  $P$  il sistema non può avere due velocità diverse.

La traiettoria è una curva parametrizzata dal tempo.

$$l \text{ dimensioni} \Rightarrow P = (q(0), p(0))$$

$$p_h = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}; t) \quad h=1 \dots l$$

L'Hessiana è simmetrica  $\Leftrightarrow p_h(\underline{q}, \dot{\underline{q}}; t)$  è  
INVERTIBILE.

Cioè, posso esprimere le  $\dot{q}$  in termini di  
 $q$  e di  $p$ .

$$p_h \xrightarrow{\text{INVERSIONE}} v_h(\underline{q}, \underline{p}, t) \quad h=1 \dots l$$

Questa è la trasformazione di Legendre.  
In questa nuova ottica lo spazio degli stati  
è naturalmente lo spazio delle fasi.

$$\boxed{\dot{q}_h = v_h(\underline{q}, \underline{p}; t) \quad h=1 \dots l}$$

Consideriamo l'energia generalizzata:

$$\mathcal{H} = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - \mathcal{L}$$

Quando sparisce la dipendenza dal tempo  
 $\mathcal{H}$  diventa l'integrale di Jacobi e rappresenta  
l'energia totale.

$\mathcal{H}$  si può anche scrivere:

$$\mathcal{H} = \sum p_h \dot{q}_h - \mathcal{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$$

Definisco la funzione Hamiltoniana:

$$\boxed{H(\underline{q}, \underline{p}; t) = \mathcal{H}(\underline{q}, \underline{v}(\underline{q}, \underline{p}; t); t)}$$

(ho sostituito  $\underline{v}$  a  $\dot{\underline{q}}$ )

Hamiltoniana:

$$H(\underline{q}, \underline{p}, t) = \underline{p}_k v_k(\underline{q}, \underline{p}; t) - \mathcal{L}(\underline{q}, \underline{v}(\underline{q}, \underline{p}; t); t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = p_k \frac{\partial v_k}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \Big|_{\dot{q}=\underline{v}} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial q_k}$$

↑  
sommato su k

Si elidono termine a termine

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_k} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = v_k + p_k \frac{\partial v_k}{\partial p_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \Big|_{\dot{q}=\underline{v}} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial p_k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial p_k} = v_k$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = p_k \frac{\partial v_k}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \Big|_{\dot{q}=\underline{v}} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Il nostro sistema è lagrangiano  $\Rightarrow$  esistono le equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$$

$\iff$

$$\dot{p}_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_k} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = - \dot{p}_k$$

$$\begin{cases} \dot{p}_h = - \frac{\partial H}{\partial q_h} \\ \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \end{cases}$$

## EQUAZIONI DI HAMILTON

$l + l = 2l$  equazioni

Le eq. di Lagrange erano  $l$  equazioni del II ordine, le eq. di Hamilton sono  $2l$  eq. di I grado.

Lo spazio naturale associato a questo sistema di equazioni è lo spazio delle fasi.

$$\| \underline{q} = \underline{q}(t) \|$$

$$\| \underline{p} = \underline{p}(t) \|$$

Se una  $q_h$  è ciclica ( $\Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0$ )

$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_h} = 0 \Rightarrow$  il corrispondente  $\dot{p}_h$  è nullo  
 $\Rightarrow p_h$  è costante.

Le eq. di Hamilton sono anche simmetriche:

se una  $p_h$  è ciclica si conserva la corrispondente  $q_h$ .

**SIMMETRIA TOTALE**

Se  $\mathcal{L}$  non dipende dal tempo, nemmeno  $H$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Derivata totale risp. al tempo:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial H}{\partial p_h} \dot{p}_h = \frac{\partial H}{\partial q_h} \frac{\partial H}{\partial p_h} - \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial H}{\partial q_h} = 0!$$

La funzione generata dal moto ha un significato fisico: è l'energia totale meccanica.

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1 \overset{q_j \text{ ciclica}}{\dots} q_e, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_e; t)$  (si "estrae"  $q_j$ )  
 ma compare comunque  $\dot{q}_j$

$\Rightarrow$  una coordinata ciclica non è  
 comunque ignorabile nella lagrangiana.

$$H = H(q_1 \overset{q_j}{\dots} q_e, p_1 \dots p_e; t)$$

$q_j$  ciclica  $\Leftrightarrow p_j$  costante =  $\alpha$

$p_1 \dots p_e = p_1 \dots \alpha \dots p_e$   
 è un numero che contribuisce  
 al nostro schema.

$\Rightarrow$  In ambito Hamiltoniano le coordinate  
 cicliche sono veramente ignorabili.

Esempio 1: oscillatore armonico  $e=1$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad (\text{sistema scleronomo})$$

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad v = \dot{x} = \frac{p_x}{m} = p/m$$

$$H = p_h \dot{q}_h \Big|_{\dot{q}=v} - \mathcal{L} = p \cdot \frac{p}{m} - \frac{1}{2} m \frac{p^2}{m^2} + \frac{1}{2} k x^2 =$$

$$= \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$$

$\frac{p^2}{2m}$  è l'energia cinetica espressa secondo  
 le trasformazioni di Legendre.

[ in coordinate cartesiane  $p$  è sempre una quantità di moto ]

Equazioni di Hamilton:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q} = - kx \\ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \end{array} \right.$$

Derivandole otteniamo:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$



Esempio 2: punto mat. in campo centrale cons.

$$l=2$$

$$\mathcal{L} = T - U(r) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r)$$

$$q_1 = r \quad q_2 = \theta \quad (\text{coordinate polari})$$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

$$\text{Invertiamole: } \begin{cases} \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2} \end{cases} \quad \begin{matrix} p_1 = p_r \\ p_2 = p_\theta \end{matrix}$$

Anche questo sistema è conservativo  $\Rightarrow$

$H$  coincide con l'eu. totale meccanica.

$$H = T + U = \frac{1}{2} m \frac{p_r^2}{m^2} + \frac{1}{2} m \frac{r^2 p_\theta^2}{m^2 r^4} + U(r) =$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m r^2} + U(r)$$

Equazioni di Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{m r^3} - \frac{dU}{dr} \quad \left( \begin{array}{l} \text{derivata TOTALE di } U \\ \text{rispetto a } r \text{ (} U \text{ dipende} \\ \text{solo da } r \text{)} \end{array} \right) \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad (\theta \text{ è ciclica}) \Leftrightarrow p_\theta = m r^2 \dot{\theta} = \text{cost.} \\ \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2} = \frac{l}{m r^2} \end{cases}$$

" momento  
angolare  
"  $l$  \*

$$* H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{l^2}{2m r^2} + U(r)$$

$\mathcal{L}$  l'integrale primo è  $m r^2 \dot{\theta}$ .

15/12/2008

- Parentesi di Poisson
- Funzione di Routh (lagrangiana ridotta)
- Potenziale generalizzato (campo elettromagnetico)

Le parentesi di Poisson inseriscono ulteriori simmetrie nel sistema hamiltoniano.

$$H = H(q_1, \dots, q_\ell, p_1, \dots, p_\ell; t)$$
$$\begin{cases} \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \\ \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \end{cases} \quad h = 1 \dots \ell$$

Supponiamo  $A = A(q, p; t)$ ,  $B = B(q, p; t)$  (variabili dinamiche)

Parentesi di Poisson di A con B:

$$\{A, B\} = \sum_{h=1}^{\ell} \left( \frac{\partial A}{\partial q_h} \frac{\partial B}{\partial p_h} - \frac{\partial A}{\partial p_h} \frac{\partial B}{\partial q_h} \right)$$

Proprietà:

- Algebro delle p. di Poisson:  $\{A, B\} = -\{B, A\}$
- $\{A, A\} = 0$
- $\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}$
- Identità di Jacobi:  $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$

Derivata totale di una variabile dinamica:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial A}{\partial p_h} \dot{p}_h = \text{Applico le eq. di Hamilton:}$$
$$= \frac{\partial A}{\partial t} + \left( \frac{\partial A}{\partial q_h} \frac{\partial H}{\partial p_h} - \frac{\partial A}{\partial p_h} \frac{\partial H}{\partial q_h} \right) = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}$$

$\Rightarrow$  gli integrali primi ( $\frac{dA}{dt} = 0$ ) sono individuati dall'annullarsi della somma  $\frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}$ .

$$\boxed{\begin{array}{l} A \text{ integrale primo} \\ \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \end{array} \Leftrightarrow \{A, H\} = 0}$$

•  $\frac{d}{dt} \{A, B\} = \frac{\partial \{A, B\}}{\partial t} + \{\{A, B\}, H\}$  Applico l'id. di Jacobi ( $C=H$ )

$$\frac{d}{dt} \{A, B\} = \frac{\partial \{A, B\}}{\partial t} + \{A, \{B, H\}\} + \{B, \{H, A\}\} =$$

$$= \left\{ \frac{\partial A}{\partial t}, B \right\} + \left\{ A, \frac{\partial B}{\partial t} \right\} + \left\{ \{A, H\}, B \right\} + \left\{ A, \{B, H\} \right\}$$

(proprietà di linearità)

$$= \left\{ \frac{dA}{dt}, B \right\} + \left\{ A, \frac{dB}{dt} \right\} = \frac{d}{dt} \{A, B\}$$

TEOREMA DI POISSON

Se  $A$  e  $B$  sono integrali primi, anche la loro parentesi di Poisson è un integrale primo.

$$\{x, 0\} = 0 \Rightarrow \text{Se } A, B = \text{costanti} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \{A, B\} = 0 + 0 \Rightarrow \{A, B\} = \text{costante.}$$

Come si simmettizzano le eq. di Hamilton?

$q_i, q_j$  variabili dinamiche

$$\{q_i, q_j\} = 0$$

$$\{p_i, p_j\} = 0$$

$$\{q_i, p_j\} = \sum_{h=1}^p \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_h} \frac{\partial p_j}{\partial p_h} - \frac{\partial q_i}{\partial p_h} \frac{\partial p_j}{\partial q_h} \right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

$$\{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i$$

$$\begin{cases} \dot{q}_h = \{q_h, H\} \\ \dot{p}_h = \{p_h, H\} \end{cases}$$

Abbiamo simmettizzato il sistema di equazioni hamiltoniane.

Supponiamo di avere un set di variabili dinamiche  $\{\underline{q}, \underline{p}\}$ . Operiamo nello spazio delle fasi un cambio di coordinate:

$$\{\underline{q}, \underline{p}\} \longrightarrow \{\underline{Q}, \underline{P}\}$$

TRASFORMAZIONE

$$\underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q}, \underline{p}, t)$$

DI CONTATTO

$$\underline{P} = \underline{P}(\underline{q}, \underline{p}, t)$$

Ma non è detto che l'Hamiltoniana nelle nuove variabili sia ancora una generatrice della dinamica.

Non si passa sempre da un sistema hamiltoniano ad un altro sistema hamiltoniano. In caso questo succeda, la trasformazione è detta CANONICA e si ha:

$$\exists \bar{H}(\underline{Q}, \underline{P}, t) \text{ t.c.}$$

$$\dot{Q}_h = \partial \bar{H} / \partial P_h$$

$$\dot{P}_h = -\partial \bar{H} / \partial Q_h$$

Sotto trasformazione di contatto, la parentesi di Poisson è invariante? In generale, NO.

Solo se la trasformazione è canonica.

Esercizio punto materiale in campo centrale conservativo.

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r)$$

$\theta$  ciclica  $p_{\theta} = m r^2 \dot{\theta} = l = \text{costante}$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_h} \quad h=1, 2 \quad q_1 = r \quad q_2 = \theta$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (r \dot{\theta}) = m r \dot{\theta}^2 - \frac{dU}{dr} \\ \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = 0 \end{cases} \quad \text{eq. di Lagrange}$$

$$\dot{\theta} = l / m r^2$$

$\Leftrightarrow$

$$m \ddot{r} = \frac{m r l^2}{m^2 r^4} - \frac{dU}{dr} = \left[ \frac{l^2}{m r^3} - \frac{dU}{dr} \right] \quad \text{1° eq. di Lagrange}$$

$$L^* = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \frac{l^2}{m^2 r^4} - U(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2 m r^2} - U(r)$$

Scriviamo la nuova eq. di L.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial L^*}{\partial r} \Leftrightarrow m \ddot{r} = - \frac{l^2}{m r^3} - \frac{dU}{dr} \quad \text{è diversa dalla precedente}$$

questa è SBAGLIATA! Quando c'è una coordinata ciclica la lagrangiana ridotta è:

$$\boxed{L^1 = L - p_h \dot{q}_h = \text{FUNZIONE DI ROUTH}} \quad (q_h \text{ ciclica})$$

ROUTHIANA

$$\begin{aligned} \text{In questo caso, } L^1 &= L - p_{\theta} \dot{\theta} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - U(r) - p_{\theta} \dot{\theta} = \\ &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{m r^2 l^2}{2 m^2 r^4} - U(r) - \frac{l^2}{m r^2} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{l^2}{2 m r^2} - U(r) \end{aligned}$$

Scriviamo l'eq. di Lagrange:

$$m \ddot{r} = \frac{l^2}{m r^3} - \frac{dU}{dr} \quad \text{CORRETTA}$$

A partire dalla Hamiltoniana non serve fare questa correzione.



La funzione di Routh ha la funzione di leggere le coordinate cicliche dal punto di vista Hamiltoniano, e le coordinate non cicliche dal punto di vista Lagrangiano.

## POTENZIALE GENERALIZZATO

Partiamo dalle eq. di Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \quad \text{Vincoli B.O.L. lisci}$$

Supponiamo che  $T = U(q, \dot{q}; t)$  e c. vale:

$$Q_h = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_h} \quad \rightarrow \quad \mathcal{P}_z \text{ potenziale generalizzata}$$

Definisco quindi  $\mathcal{L} = T - U(q, \dot{q}; t)$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h}$$

Si dimostra che  $U$  può al massimo dipendere

linearmente dalle  $\dot{q} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} = 0 \quad \forall h, k = 1 \dots l$

Anche in questo caso la Lagrangiana è una forma quadratico nelle  $\dot{q}$  ereditata dall'energia cinetica (al più).

Esempio campo elettromagnetico.

$(\varphi, A)$  potenziali le cui derivate forniscono i campi.

$$\begin{cases} \underline{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \\ \underline{B} = \nabla \wedge A \quad (\text{rotore}) \end{cases} \Rightarrow \underline{E} \text{ e } \underline{B} \text{ soddisfano le eq. di Maxwell}$$

$$\underline{F} = e \underline{E} + \frac{e}{c} \underline{v} \wedge \underline{B} \rightarrow \text{forzo di Lorentz}$$

$$= -e \nabla \varphi - \frac{e}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} \underline{v} \wedge (\nabla \wedge \underline{A})$$

Dimostriamo che questa forza è derivabile da un potenziale generalizzato  $U$  e che

$$U = e\varphi - \frac{e}{c} \underline{v} \cdot \underline{A}$$

$$\varphi = \varphi(x, y, z, t) \quad \dot{\varphi} = \underline{v}$$

$$Q_3 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial U}{\partial z} = F_z = \frac{d}{dt} \left( -\frac{e}{c} A_z \right) - e \frac{\partial \varphi}{\partial z} +$$

$$+ \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\underline{v} \cdot \underline{A}) = -\frac{e}{c} \left[ \frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \dot{z} \right] - e \frac{\partial \varphi}{\partial z} +$$

$$+ \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\underline{v} \cdot \underline{A}) = -\frac{e}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} - e \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{e}{c} \left[ \frac{\partial A_z}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \dot{y} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial A_z}{\partial z} \dot{z} - \frac{\partial}{\partial z} (\dot{x} A_x + \dot{y} A_y + \dot{z} A_z) \right] =$$

$$= -\frac{e}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} - e \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{e}{c} \left[ \dot{x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + \dot{y} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right] =$$

$$= Q_3 = -\frac{e}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} - e \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{e}{c} \left[ -\dot{x} (\nabla \wedge \underline{A})_y + \dot{y} (\nabla \wedge \underline{A})_x \right]$$

$$\nabla \wedge \underline{A} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y, \partial_z A_x - \partial_x A_z, \partial_x A_y - \partial_y A_x)$$

$$-\dot{x} (\nabla \wedge \underline{A})_y + \dot{y} (\nabla \wedge \underline{A})_x = -(\underline{v} \wedge (\nabla \wedge \underline{A}))_z$$

$$Q_3 = -\frac{e}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} - e \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{e}{c} [\underline{v} \wedge (\nabla \wedge \underline{A})]_z$$

Un altro esempio tipico è la forza di Coriolis

$$\underline{B} \rightarrow \underline{\omega}$$

Anche in questo caso la forza

deriva da un potenziale

generalizzato.

Torniamo al campo el. mag.

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m v^2 - e\varphi + \frac{e}{c} \underline{v} \cdot \underline{A}$$

$$H = p \dot{q}_h - \mathcal{L}$$

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m \underline{v} + \frac{e}{c} \underline{A}$$

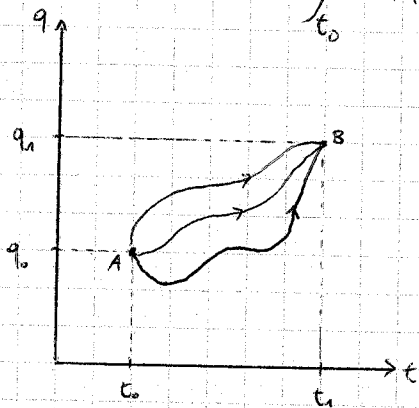
trasf. di Legendre:  $\underline{v} = \frac{(p - \frac{e}{c} \underline{A})}{m}$

$$H = (p - \frac{e}{c} \underline{A})^2 / 2m + e \varphi$$

16/12/2008

Principio variazionale di tipo differenziale: P.L.V. (per cercare le configurazioni d'equilibrio)

" " " " integrale: in meccanica l'azione  
si scrive  $S \equiv \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t); t) dt$  (AZIONE CLASSICA)



fissati  $q_0$  e  $q_1$ , si sceglie una traiettoria  $q(t)$ . Integrando, ad esso si associa un numero ("funzionale")

Questo deriva dal problema della brachistocrona (1696).  
Cambiando la traiettoria, cambia  $S$ . Voglio trovare la traiettoria a cui corrispondono i minimi valori di tempo e di azione (Principio di minima azione)

Principio di Hamilton

Una traiettoria tra due configurazioni è minima se e solo se sono soddisfatte le equazioni di Lagrange. (l'azione classica risulta stazionaria)

Le eq. di Eulero-Lagrange sono soluzioni di un problema variazionale (il princ. di Hamilton)

funzione:  $q(t): t \in [t_0, t_1] \rightarrow q(t) \in \mathbb{R}^l$

funzionale:  $S: q \in \mathcal{M} \rightarrow S_0 \in \mathbb{R}$

$\mathcal{M} = \{ \underline{q}(t): t \in [t_0, t_1] \rightarrow \underline{q}(t) \in \mathbb{R}^l, \underline{q}(t_0) = \underline{q}_0, \underline{q}(t_1) = \underline{q}_1 \}$

La Lagrangiana è un artificio matematico e non ha nessun significato fisico, al contrario dell'Hamiltoniana.

Osservando le equazioni di Lagrange si nota che sono equivalenti le seguenti espressioni:

$$\mathcal{L} \quad \cdot \quad \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} F(\underline{q}, t)$$

con  $F =$  una qualsiasi funzione: il suo contributo è nullo integrando secondo i principi variazionali (si integra tra estremi fissi)

#### TEOREMA DI NOETHER (1918)

$\mathcal{L}$  INVARIANTE sotto una certa trasformazione  
 $\Rightarrow \exists$  un integrale primo

(Ad ogni simmetria dello  $\mathcal{L}$  corrisponde una legge di conservazione: lo avevamo visto con coord. cicliche e momenti cinetici)

Esempio 1 Traslazione:  $x \rightarrow x' = x + a$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \dot{x})$$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(x', \dot{x}') \equiv \mathcal{L}(x, \dot{x}) \quad \text{con } x = x' - a \quad (a = \text{costante})$$

$$\text{Es.: } \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$\mathcal{L}'(x', \dot{x}') \equiv \frac{1}{2} m \dot{x}'^2 - \frac{1}{2} k (x' - a)^2$$

La nuova  $\mathcal{L}$  non è più invariante sotto la stessa trasformazione: compare un termine lineare in  $x'$  che prima non c'era. La Lagrangiana dell'oscillatore armonico non è invariante sotto traslazione perché la sua forma

funzionale (la sua dipendenza dagli argomenti) è diverso tra la trasformata e l'originale.

INVARIANTE: la trasformata e la fz. originale sono la stessa funzione dei loro argomenti.

$$0 = \mathcal{L}(x', x') - \mathcal{L}(x, x')$$

Valutiamo l'ultima espressione al prim'ordine (vedendo  $a$  come  $\epsilon$ ) intorno a  $x$  e a  $x'$ .

$$0 = \mathcal{L}(x', x') - \mathcal{L}(x, x') = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \underbrace{(x' - x)}_a + O(a^2)$$

$$\Rightarrow a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad \forall a$$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow$  il momento cinetico coniugato alla  $x$  è una costante del moto. (per ogni  $x_i$ )

Esempio  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_i^2 - \sum_{j=1}^N U(\underline{r}_i - \underline{r}_j)$  sistema di punt. materiali interagenti con un potenziale

Questa lagrangiana è invariante sotto traslazione  $\Rightarrow$  si conserva la quantità di moto totale del sistema.

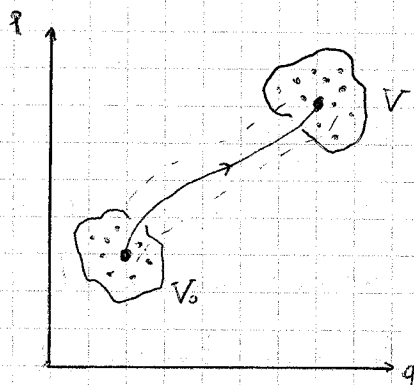
/// Invarianza sotto traslazione  $\Rightarrow$  si conserva la q. di moto

/// Invarianza sotto rotazione  $\Rightarrow$  si cons. il momento angolare.

$$\underline{r}_i \rightarrow \underline{r}'_i = \underline{r}_i + \underline{a} \quad \underline{r}'_i - \underline{r}'_j = (\underline{r}_i + \underline{a}) - (\underline{r}_j + \underline{a})$$

$\Rightarrow \underline{a}$  non dà contributi.

TEOREMA DI LIOUVILLE  
(Spazio delle fasi)



$$l=1$$

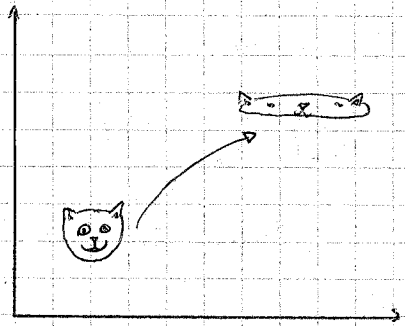
$$\{q(t_0), p(t_0)\} \rightarrow \{q(t), p(t)\}$$

Pseudo tante repliche del sistema il cui stato iniziale è poco diverso dal primo



$$V_0 \longrightarrow V_t$$

Il volume  $V$  resta costante  
nel tempo (anche se cambia  
forma)



Il fluido nello spazio delle fasi è un fluido  
incompressibile (che densità costante)

$$\Delta V = \Delta q \Delta p \quad \rho = \frac{N(\Delta V)}{\Delta V} \quad (\text{lim}_{\Delta V \rightarrow 0})$$

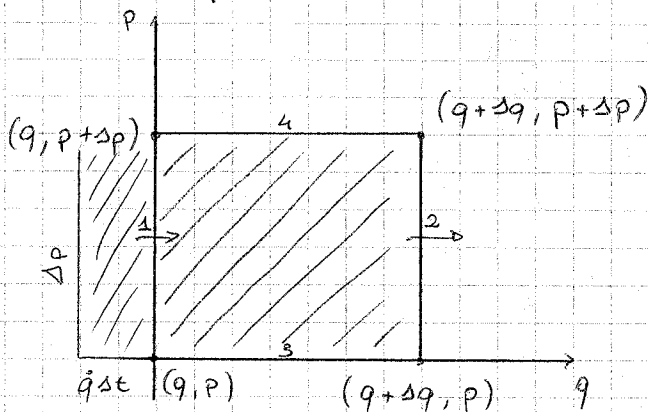
$N(\Delta V)$  = numero di stat. che cadono in  $\Delta V$ .

$$\rho = \rho(q, p; t)$$

$$N_{\text{tot}} = \iint_V \rho(q, p; t) dq dp$$

Voglio dimostrare che  $\frac{d\rho}{dt} = 0$

Suddivido lo sp. delle fasi in tanti rettangoli  
del tipo:



$$\Delta N = \rho \Delta p \Delta q$$

Voglio fare un bilancio  
tra la quantità di

stati che entrano ed escono nel tempo da  
questo volumetto  $\Delta q \Delta p$ .

→ EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

$$\Delta N_1 = \rho \Delta p q \Delta t \quad (\text{numero di stati che entrano dal lato 1})$$

$$= \rho q|_q \Delta p \Delta t$$

$$\Delta N_2 = \rho q|_{q+\Delta q} \Delta p \Delta t \cdot (-1)$$

$\Delta N_{12}$  = somma algebrica tra  $\Delta N_1$  e  $\Delta N_2 =$

$$= [p\dot{q}|_q - p\dot{q}|_{q+\Delta q}] \Delta p \Delta t$$

~ rapporto incrementale tra  $p\dot{q}|_q$  e  $p\dot{q}|_{q+\Delta q}$

$$\Rightarrow \Delta N_{12} \approx - \frac{\partial(p\dot{q})}{\partial q} \Delta q \Delta t \Delta p$$

$$\Delta N_{34} \approx - \frac{\partial(p\dot{p})}{\partial p} \Delta p \Delta q \Delta t$$

come varia  $N$  dentro  $V$

$$\Delta N_{im} = \frac{\partial p}{\partial t} \Delta q \Delta p \Delta t = \Delta N_{12} + \Delta N_{34}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial(p\dot{q})}{\partial q} - \frac{\partial(p\dot{p})}{\partial p}$$

Nello spazio delle fasi vale questa

EQUAZIONE DI CONTINUITA':

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(p\dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial(p\dot{p})}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial p}{\partial q} + p \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial p}{\partial p} + p \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = 0$$

Inserisco le equazioni di Hamilton:  $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ ,  $\dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q}$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial p}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial p}{\partial p} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} = 0 \quad \text{c.v.d.}$$

Quindi:  $p(\Delta V)$  costante  $N(\Delta V)$  costante

$\Rightarrow \Delta V$  è costante

$$V_0 = V$$

Il flusso nello spazio delle fasi è rappresentato da un gruppo  $g^t$ :

$$g^t: (\underline{q}(0), \underline{p}(0)) \longrightarrow (\underline{q}(t), \underline{p}(t))$$

$$D \quad \text{Volume}(g^t D) = \text{Volume}(D)$$

Il volume del dominio  $D$  resta costante sotto la trasformazione  $g^t$ .

TEOREMA DI LIOUVILLE

Strada verso il caos: studio di sistemi non hamiltoniani (per cui non vale questo teorema).

