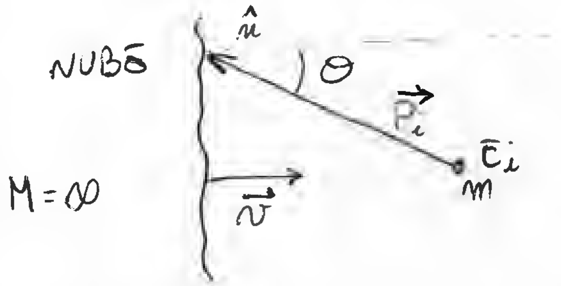
Accelerazione col meccanismo di Fermi

- particelle distribuite in modo isotropo
- nube che si sposta a velocità $v \ll c$

Nel s.d.r. della galassia si ha



supponiamo la particella ultrarelativistica: $v_i \equiv c$

Spostandosi al s.d.r. della nube, che è anche il sistema del centro di massa:

$$E_i^* = \gamma (E_i + \beta c P_i \cos\theta)$$ (c'è il + perché le due velocità sono opposte in verso)

$$c P_{i_{//}}^* = \gamma (c P_i \cos\theta + \beta E_i)$$

dove $\beta = v/c$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Nel sistema del centro di massa l'urto è elastico:

$$E_f^* = E_i^*$$
$$P_{f_{//}}^* = P_{i_{//}}^*$$

Riportiamo E_f^* e $P_{f_{//}}$ nel s.d.r. della galassia:

$$E_f = \gamma (E_f^* + \beta c P_{i_{//}}^*) = \gamma [\gamma(E_i + \beta c P_i \cos\theta) + \beta\gamma(c P_i \cos\theta + \beta E_i)]$$

$$= \gamma^2 E_i \left(1 + \beta c 2 \frac{P_i}{E_i} \cos\theta + \beta^2\right)$$

$\gamma^2 \simeq 1 + \beta^2$ (sviluppo di $\frac{1}{1-\beta^2}$)

$$E_f \simeq E_i (1+\beta^2)\left(1 + 2\beta c \frac{P_i}{E_i} \cos\theta + \beta^2\right)$$

$\beta \ll 1 \Rightarrow$ butto i termini superiori al 2° ordine:

$$E_f \simeq E_i \left(1 + \beta^2 + \beta^2 + 2\beta c \frac{P_i}{E_i} \cos\theta\right)$$

$$\boxed{\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_f - E_i}{E_i} \simeq 2\beta^2 + 2\beta\beta_p \cos\theta}$$ $\rightarrow$ nel caso ultrarelativistico il β_p della particella vale 1

e l'espressione dipende solo dal moto della nube e dall'angolo di impatto.

Quello che voglio ottenere è lo spettro, descritto da $E^{-\alpha}$ con $\alpha = 2.7$ fino al ginocchio e $=3$ dopo. Siccome la distribuzione di particelle nello spazio è supposta isotropa, calcolo $\langle \frac{\Delta E}{E} \rangle$ mediando in $\cos\theta$.
Ma anche il rate d'interazione particella-nube ha dipendenza da θ: $R \propto 1 + \beta \cos\theta \Rightarrow$ devo usare questa forma come peso.

$$\langle 2\beta\beta_p \cos\theta \rangle = 2\beta\beta_p \frac{\int_{-1}^{1} x(1+\beta x)dx}{\int_{-1}^{1}(1+\beta x)dx} = 2\beta\beta_p \frac{\int_{-1}^{1}(x+\beta x^2)dx}{2+\beta\int_{-1}^{1} x dx} =$$

$$= 2\beta\beta_p \frac{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} + \beta\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}}{2+\beta\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1}} = \cancel{2}\beta\beta_p \frac{2/3\beta}{\cancel{2}} =$$

$$= \frac{2}{3}\beta^2\beta_p \simeq \frac{2}{3}\beta^2 \text{ nel limite ultrarelativistico}$$

Quindi:

$$\boxed{\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \langle 2\beta^2 \rangle + \langle 2\beta\cos\theta \rangle = \left(2+\frac{2}{3}\right)\beta^2 = \frac{8}{3}\beta^2}$$

$\Delta E = \frac{8}{3}\beta^2 E \equiv \xi E$ N.B. ξ dipende dalla nube attraversata.

Per calcolare lo spettro devo tener conto che la particella può urtare varie nubi.

P_f = probabilità di fuga, cioè prob. che dopo un urto qualsiasi la particella esca dalla regione delle nubi

$(1-P_f)^n$ = probabilità che dopo n urti la particella sia ancora nella regione delle nubi.

Dopo n urti:

$$E_n - E_{n-1} = \xi E_{n-1} = \xi(1+\xi)E_{n-2} \Rightarrow E_n = (1+\xi)^n E_0$$

$$\log\left(\frac{E_n}{E_0}\right) = n\log(1+\xi) \Rightarrow n(E_n) = \frac{\log(E_n/E_0)}{\log(1+\xi)}$$

Calcolo la cumulativa dello spettro, ovvero:

$$N(E \geq E_n) = \sum_{i=n}^{\infty}(1-P_f)^i N_{TOT} = N_{TOT}\frac{(1-P_f)^n}{1-(1-P_f)} = \frac{N_{TOT}}{P_f}(1-P_f)^n$$

$$\log N(E \geq E_n) = n\log(1-P_f) + \log(N_{TOT}/P_f) = \frac{\log(E_n/E_0)\log(1-P_f)}{\log(1+\xi)} + \log\left(\frac{N_{TOT}}{P_f}\right)$$

$$\equiv -\gamma \log\left(\frac{E_n}{E_0}\right) + K \quad \Rightarrow N(E \geq E_n) = k\left(\frac{E_n}{E_0}\right)^{-\gamma}$$

che è la forma cercata. Infatti, differenziando:

$$\frac{dN}{dE} = k' E^{-(\gamma+1)}$$

$$\gamma = -\frac{\log(1-P_f)}{\log(1+\xi)} \simeq \frac{P_f}{\xi}$$

Questo modello non è convincente, perché l'esponente dipende da quale zona di galassia le particelle attraversano prima di arrivare da noi, e non c'è riscontro sperimentale.

FLUIDO DINAMICA

Eq. di continuità: $\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\int_S ds\, \rho \vec{v}\cdot\hat{n} \overset{\text{teorema della divergenza}}{=} -\int_V \rho \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\, dV$

Scritte in modo generale anziché locale:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0}$$

La forza agente sul fluido è data dalla pressione: $\vec{F} = -\int_S p\hat{n}\, ds = -\int_V \vec{\nabla} p\, dV$

$$-\int_V \vec{\nabla} p\, dV \equiv m\vec{a} = \int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV \Rightarrow \boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p}$$

Separo le derivate:

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + dx \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$$

Equazione di Eulero

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p}$$

μ = potenziale chimico $\qquad c_v = \frac{g}{2} R \qquad g$ = numero di gradi di libertà

n = numero di moli

$R \equiv N_A k$

<u>A volume costante</u>: $dQ = dU + p dV \rightarrow dQ = dU \equiv \mu c_v dT = \frac{g}{2} R dT$

<u>A pressione costante</u>: $dQ = dU + pdV \equiv \mu c_p dT = \mu c_v dT + p dV$

Equazione di stato dei gas perfetti: $pV = \mu RT \Rightarrow p dV = \mu R dT$ a p cost.

$$\Rightarrow dQ = \mu c_v dT + \mu R dT \equiv \mu c_p dT$$

$$\Rightarrow \boxed{c_p = c_v + R}$$

<u>Def.</u>: $\gamma \equiv c_p / c_v = 1 + R/c_v = \underset{\text{monoatomico}}{\frac{5}{3}}, \underset{\text{biatomico}}{\frac{7}{5}}, \dots \qquad \boxed{\gamma = \frac{2}{g} + 1}$

Consideriamo un gas perfetto che subisce trasformazioni adiabatiche

$\Rightarrow dQ = 0 \Rightarrow dU = -pdV = \mu c_v dT \Rightarrow c_v = -pdV/\mu dT, \quad dT = -pdV/\mu c_v$

$[dQ = dU + pdV = 0 \Rightarrow dU = -pdV]$

$\boxed{pV = \mu RT} \Longrightarrow pdV + Vdp = \mu R dT = -\cancel{\mu} R \frac{p dV}{\cancel{\mu} c_v}$

$pdV \left(1 + \frac{R}{c_v}\right) + VdP = 0 \qquad \gamma P dV + V dP = 0$

Divido per VP: $\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0 \Rightarrow \gamma \log V + \log P = \text{costante}$

Esponenziando: $\boxed{P \cdot V^{\gamma} = \text{costante}}$ gas perfetto in trasformazione adiabatica ($dQ = 0$)

$P \propto V^{-\gamma} \Rightarrow P \propto \rho^{\gamma}$

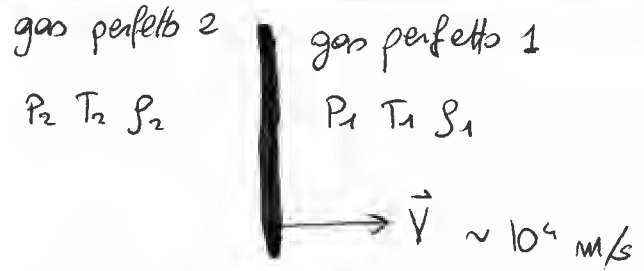
La velocità di una onda nel mezzo è data da: $v^2 = \left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_{dQ=0}$

(perturbazione adiabatica in un fluido perfetto)

$$v^2 = \left.\frac{\partial [\alpha \rho^{\gamma}]}{\partial \rho}\right|_{dQ=0} = \frac{P\gamma}{\rho} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}}$$

$\rho^{\gamma-1} \propto \frac{P}{\rho}$

Accelerazione da fronte di shock



ENTALPIA = quantità di energia libera di un sistema a p ed S costanti.
- solo P cost.: $\Delta h = \Delta Q$
- P, V cost.: $\Delta h = Q = \Delta U$

Condizioni di shock:

- conservazione massa: $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \equiv J$
- conservazione energia: $\rho_1 v_1 \left(\frac{1}{2} v_1^2 + h_1\right) = \rho_2 v_2 \left(\frac{1}{2} v_2^2 + h_2\right)$
- conservazione impulso: $P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_2 + \rho_2 v_2^2$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}$$

V = volume per unità di massa $\Rightarrow \boxed{\rho V = 1} \Rightarrow v_i = J V_i$

L'entalpia per un gas perfetto vale: (usando $pV = \mu R T$)

$$h = \varepsilon + pV = \overbrace{\mu C_V T + \mu R T}^{Q} = \frac{C_V P V}{R} + PV = PV\left(1 + \frac{C_V}{R}\right) = \boxed{\frac{\gamma}{\gamma - 1} PV = h}$$

La conservazione dell'energia diventa:

$$\frac{1}{2} J^2 V_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} P_1 V_1 = \frac{1}{2} J^2 V_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} P_2 V_2$$

Dalla conservazione dell'impulso:

$$P_1 + J^2 V_1 = P_2 + J^2 V_2 \qquad P_1 - P_2 = J^2 (V_2 - V_1) \Rightarrow J^2 = \frac{P_1 - P_2}{V_2 - V_1} = \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}$$

$$\boxed{J^2 = [\dots] = \frac{P_2(\gamma+1) + P_1(\gamma-1)}{2 V_1}}$$

Queste espressioni sono simmetriche sotto scambio di indici.

$$\Rightarrow v_1^2 = J^2 V_1^2 = \frac{V_1}{2}\left[P_2(\gamma+1) + P_1(\gamma-1)\right]$$

Chiamando C_i la velocità di propagazione delle onde meccaniche nel mezzo i, ovvero $C_i^2 = \gamma \frac{P_i}{\rho_i}$, si definisce il

numero di Mach

$$\boxed{M_1^2 = \left(\frac{v_1}{c_1}\right)^2 = \frac{v_1^2}{\gamma P_1 V_1}}$$

In termini di questo: $\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma}{1 + \gamma}$

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1 + \gamma}{(\gamma - 1) + 2/M_1^2}}$$

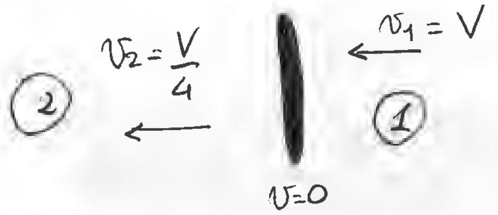
Il fronte d'urto si muove a velocità molto più alte rispetto ai tempi d'interazione delle particelle nel mezzo $\Rightarrow$ possiamo valutare il limite $M_1 \to \infty$: per un gas monoatomico,

$$\lim_{M_1 \to \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1+\gamma}{\gamma - 1} = \frac{1 + 5/3}{5/3 - 1} = 4$$

TUTTA QUESTA FLUIDODINAMICA SERVIVA A RICAVARE QUESTO 4

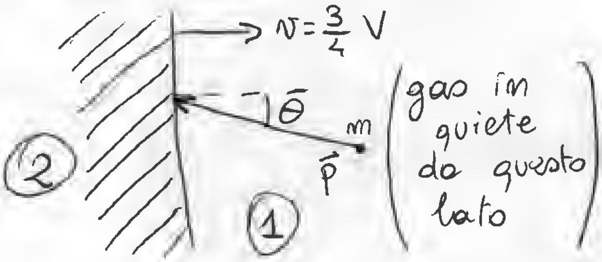
Per la conservazione della massa. $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} \xrightarrow{M_1 \to \infty} \boxed{4}$

Nel sistema di riferimento solidale al fronte di shock.



la velocità relativa tra i due gas vale $\frac{3}{4}V$ in ogni s.d.r.

Vediamo l'energia acquistata da una particella relativistica passata da 1 a 2 e viceversa:



$E^* = \gamma \left(E + \beta \, p_c \cos\theta\right)$

γ, β del fronte. velocità del fronte di shock

Tipicamente $V \ll c \Rightarrow \gamma \simeq 1$

$\Rightarrow E^* \simeq E + E\beta\cos\theta \quad (p \simeq E)$

$\Rightarrow \frac{\Delta E}{E} \simeq \beta \cos\theta$

Mediando sulla distribuzione isotropa di particelle. (N.B.: mediare in $1+\cos\theta$ = mediare in $\cos\theta$, l'1 non contribuisce perché dà origine ad un termine dispari)

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \beta \frac{\int_0^1 \cos^2\theta \, d\cos\theta}{\int_0^1 \cos\theta \, d\cos\theta} = \boxed{\frac{2}{3}} \frac{v}{c} = \frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{V}{c} = \frac{V}{2c}$$

vel. del fronte

Per un doppio attraversamento $\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \frac{V}{c}$

Rate particelle che attraversano il fronte: $\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 c\cos\theta \, d\cos\theta = \frac{c}{4}$

Rate particelle che si allontanano senza riattraversare il fronte: $\frac{V}{4}$

$\Rightarrow P_f = \frac{V}{c}$

Distribuzione in energia particelle accelerate:

$$\frac{dN}{dE} = K E^{-(\gamma+1)} = K E^{-\left(\frac{P_f}{\xi} + 1\right)} \qquad \left(N(E \geq \bar{E}) = K E^{-\gamma}\right)$$

$P_f = \frac{V}{c} \qquad \xi = \frac{V}{c}$

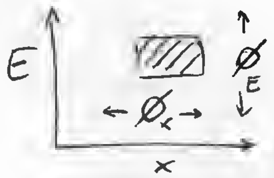
$\boxed{\frac{dN}{dE} = K E^{-2}}$ Meccanismo di Fermi del primo tipo

In questo schema:

- accelerazione dell'ordine di 10^{14} eV (shock da SN $\sim 10^5$ anni)
- problema dell'iniezione (le particelle devono essere già relativistiche)
- giusta densità di energia dei cosmici (~ 1 MeV/m^3)
- $\gamma = 2 \neq 2.7$

Trasporto dei raggi cosmici

Consideriamo una porzione di spazio delle fasi associato ad uno spazio 1-D:



La variazione del numero di occupanti di questo volumetto è data da:

$$\frac{\partial n(E,x,t)}{\partial t}\Delta E \Delta x = \left[\phi_x(E,x,t) - \phi_x(E,x+\Delta x,t)\right]\Delta E + \left[\phi_E(E,x,t) - \phi_E(E+\Delta E,x,t)\right]\Delta x$$
$$+ Q(E,x,t)\Delta E \Delta x$$

dove Q rappresenta il contributo di sorgenti esterne.

$$\frac{\partial n(E,x,t)}{\partial t}\Delta E\Delta x = -\frac{\partial \phi_x}{\partial x}\Delta E \Delta x - \frac{\partial \phi_E}{\partial E}\Delta E\Delta x + Q(E,x,t)\Delta E\Delta x$$

$\phi_E = n\frac{dE}{dt} \equiv -n\,b(E)$ dove $b(E)$ rappresenta la perdita di energia di un tipo di particella

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial[n\,b(E)]}{\partial E} + Q}$$ Scrittura generale

Consideriamo un GAS di particelle. $\phi_x \equiv -D\frac{\partial n}{\partial x}$ $\boxed{D = \text{coefficiente di diffusione}}$

Generalizzando allo spazio 3-D è naturale ottenere:

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n + \frac{\partial[n\,b(E)]}{\partial E} + Q}$$

MODELLO LEAKY BOX: $D\nabla^2 n \to -\frac{n}{\tau_f}$ (τ_f tempo di fuga dalla galassia)

Considerando l'accelerazione da supernova: $b(E) = -\alpha E$, $\alpha > 0$

Cerco soluzioni stazionarie:

$$0 = \frac{\partial(-n\alpha E)}{\partial E} - \frac{n}{\tau_f} = -\frac{n}{\tau_f} - \alpha n - \alpha E\frac{\partial n}{\partial E} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial E} = -\frac{1}{\alpha E}\left(\frac{n}{\tau_f} + \alpha n\right)$$

$$\frac{\partial n}{\partial E} = -\frac{n}{E}\left(1 + \frac{1}{\alpha\tau_f}\right) = -\frac{n}{E}\left(1 + \frac{P_f}{\xi}\right) \Rightarrow n(E) \propto E^{-(1+P_f/\xi)}$$

Modello di trasporto + spallazione

Cambio variabile: $t \longrightarrow \xi = \rho c t$ $[g/cm^2]$

Assunzioni:

- tutti i RC viaggiano per lo stesso tempo t
- " " " a $v = c$
- densità costante di protoni ρ nello spazio interstellare

Trascuriamo il termine di fuga $-\frac{n}{\xi_f}$ e consideriamo RC già accelerati ($Q=0$, $\frac{\partial \phi_E}{\partial E}=0$) - Rimane:

$$\frac{\partial n}{\partial \xi} = -\frac{n_E}{\xi_{E,s}} + \sum_{k \geq E} \frac{n_k}{\xi_{k,s}} P(k \to E)$$

dove E rappresenta l'elemento preso in considerazione, e k gli elementi più pesanti di E. Conviene dividere in gruppi le particelle:

- elem. leggeri (L) = Li, Be, B
- elem. pesanti (H) = C, N, O

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial n_L}{\partial \xi} = -\frac{n_L}{\xi_{L,s}} + P_{H\to L}\frac{n_H}{\xi_{H,s}} \\ \frac{\partial n_H}{\partial \xi} = -\frac{n_H}{\xi_{H,s}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow n_H(\xi) = n_{H_0} e^{-\xi/\xi_H}$$

$$\frac{\partial n_L}{\partial \xi} + \frac{n_L}{\xi_L} = P_{HL}\frac{n_{H_0}}{\xi_H} e^{-\xi/\xi_H}$$ Moltiplico a dx e sx per e^{ξ/ξ_L}:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[n_L e^{\xi/\xi_L}\right] = \frac{P_{HL} n_{H_0}}{\xi_H} e^{-\left(\xi/\xi_H - \xi/\xi_L\right)}$$

La cui soluzione è: $\boxed{n_L(\xi) = \frac{n_{H_0} P_{HL} \xi_L}{\xi_L - \xi_H}\left(e^{-\xi/\xi_L} - e^{-\xi/\xi_H}\right)}$

Tramite la misura di $\frac{n_L(\xi)}{n_H(\xi)}$, conoscendo le lunghezze d'interazione, si ottiene $\xi \simeq 5 g/cm^2$.

Reintroduciamo la possibilità che il nucleo esca dalla galassia:

$$-\frac{n_L}{\tau_L} + P_{HL}\frac{n_H}{\tau_H} - \frac{n_L}{\tau_f} = 0 \quad \Rightarrow \quad n_L\left(\frac{1}{\tau_L}+\frac{1}{\tau_f}\right) = P_{HL} n_H \frac{1}{\tau_H}$$

$$\Rightarrow \frac{n_L(E)}{n_H(E)} \simeq \frac{P_{HL}}{\tau_H}\tau_f(E) \quad (\text{perché } \tau_L \gg \tau_f)$$

Si misura: $\tau_f(E) \simeq E^{-\delta}$, $\delta \simeq 0.6$

Per i nuclei pesanti:

$$-\frac{n_H}{\tau_H} - \frac{n_H}{\tau_f} + Q(E) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \tau_H \gg \tau_f \\ n_H \simeq Q(E)\,\tau_f \end{cases}$$

Introducendo il modello precedente $Q(E) \sim E^{-(1+\gamma)} = E^{-2}$:

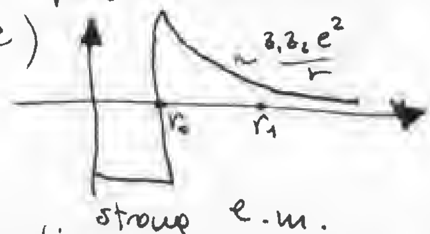
$$n_H(E) \simeq E^{-2} E^{-0.6} = E^{-2.6} \simeq E^{-2.7} = \text{spettro osservato.}$$

Produzione di neutrini solari

Prima fusione: $pppp \longrightarrow {}^4He + 2e^+ + 2\nu_e$

La % di energia che si trasforma in radiazione è $B.E.({}^4He)/4m_p \simeq 7‰$.
B.E./A per l'elio non è massima (lo è per il ferro), ma si produce molto più facilmente elio che ferro ⇒ questo è il contributo principale.
Sistema protone-protone:

- onda S (le funzioni d'onda devono essere sovrapponibili per poter interagire)
- $V(r)$:



$r_0 \simeq 1.4\, A^{1/3}\, 10^{-13}\,\text{cm}$

La probabilità di superare la barriera di potenziale per agitazione termica vale

$$P \propto e^{-\frac{z_1 z_2 e^2}{r_0 kT}} \sim 10^{-400}$$ stimando la temperatura al centro del sole $\sim 10^7$ K.

⇒ la barriera si passa solo per effetto tunnel.

$$P = e^{-2\int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left[V(r) - E\right]}\,dr} \qquad r_1 = r_1(E) \quad E \text{ fissata} \quad r_1 = \frac{z_1 z_2 e^2}{E}$$

$$= e^{-\pi\sqrt{\frac{2m(z_1 z_2 e^2)^2}{\hbar^2 E}}} \equiv e^{-\sqrt{\frac{E_G}{E}}}$$

Energia di Gamow
$$\boxed{E_G \equiv \frac{2m(z_1 z_2 e^2)^2 \pi^2}{\hbar^2}}$$

La sezione d'urto del processo si stima in generale con

$\sigma(E) \equiv \frac{S(E)}{E}$, con $S(E) \equiv$ "fattore astrofisico", misurabile ad alte energie ed estrapolabile ad energie più basse.

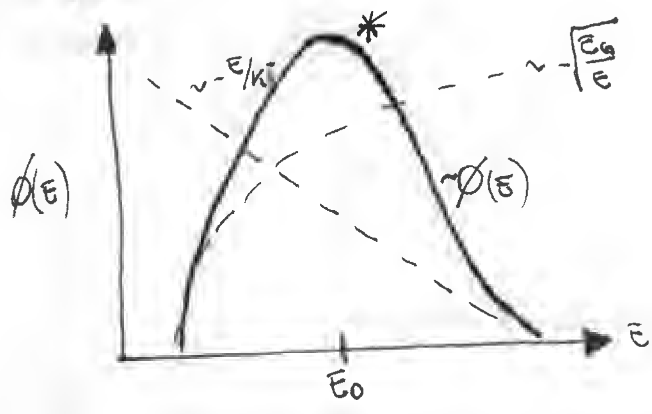
Supponiamo le particelle distribuite Maxwellianamente in energia:

$$f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{E}}{(kT)^{3/2}} e^{-E/kT}$$

Il rate di produzione di neutrini al variare della temperatura sarà dato allora da:

$$R(T) = \int_0^\infty \sigma(E)\, v\, f(E)\, e^{-\sqrt{\frac{E_G}{E}}}\, dE = \int_0^\infty \frac{S(E)}{\cancel{E}} \sqrt{\frac{2\cancel{E}}{m}} \frac{2}{\pi} \frac{\cancel{\sqrt{E}}}{(kT)^{3/2}} e^{-\left(\frac{E}{kT} + \sqrt{\frac{E_G}{E}}\right)} dE$$

Definendo: $\phi(E) \equiv -\left(\frac{E}{kT} + \sqrt{\frac{E_G}{E}}\right)$



* picco di Gamow

risulta: $R(T) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{m}}(kT)^{-3/2}\int_0^\infty dE\, S(E)\, e^{\phi(E)}$

La dipendenza più forte dall'energia sta in $e^{\phi(E)}$, che è una funzione piccata attorno al punto per cui:

$$\frac{d\phi(E)}{dE} = -\frac{1}{kT} + \frac{\sqrt{E_G}}{2E^{3/2}} = 0 \Rightarrow E_0 \equiv E_G^{1/3}\left(\frac{kT}{2}\right)^{2/3}$$ posizione del picco di Gamow

Valutiamo quindi $S(E)$ in E_0 e consideriamola costante rispetto ad $e^{\phi(E)}$, e sviluppiamo $e^{\phi(E)}$ al second'ordine attorno ad E_0.

$$\phi(E_0) = -\frac{3E_0}{kT} \equiv -\tau$$

$$\left.\frac{d^2\phi(E)}{dE^2}\right|_{E=E_0} = -\frac{3}{4}\sqrt{E_G}\,E_0^{-5/2} = -\frac{\tau}{2E_0^2}$$

Espandendo: $\phi(E) \simeq \phi(E_0) + \frac{1}{2}(E-E_0)^2\frac{d^2\phi(E)}{dE^2} = -\tau - \frac{1}{2}(E-E_0)^2\frac{\tau}{2E_0^2}$

$R(T) =$ costante $\cdot \int_0^\infty dE\, e^{-(E-E_0)^2\frac{\tau}{4E_0^2}} =$ costante $\cdot \sqrt{\pi}$

↳ rispetto ad E

Vogliamo esplicitare la dipendenza da τ e dalla temperatura.

$$R(T) = \text{costante} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}}\frac{2E_0}{\sqrt{\tau}}e^{-\tau}$$

- $E_0 \propto (kT)^{2/3}$
- $\tau \propto E_0/kT \propto (kT)^{-1/3}$

$\Rightarrow R(\tau) \propto \tau^2 e^{-\tau}$

Voglio passare ad una forma $R(T) \propto T^\nu$ dove in ν ci può essere una piccola dipendenza da T.

$R(T) \propto T^\nu \Rightarrow \ln R = c + \nu \ln T \Rightarrow \nu = \frac{\partial \ln R}{\partial \ln T}$

$R \propto T^{-2/3}e^{-\tau} \Rightarrow \ln R = c - \frac{2}{3}\ln T - \tau$

$\tau \propto T^{-1/3} \Rightarrow \ln\tau = c_1 - \frac{1}{3}\ln t$

$$\frac{\partial \ln R}{\partial \ln T} = -\frac{2}{3} - \frac{\partial\tau}{\partial \ln T} = -\frac{2}{3} - \tau\frac{\partial\ln\tau}{\partial\ln T} = -\frac{2}{3} - \frac{\tau}{3} = \nu$$

$$R(T) \propto T^{-\left(\frac{2}{3}+\frac{\tau}{3}\right)} \equiv T^\nu$$

N.B.: l'errore che commetto nello stimare R dipende da ν, che a sua volta dipende da z_1 e z_2.

$$\frac{\Delta R}{R} = \nu\frac{\Delta T}{T}$$

Più aumentano gli z dei nuclei che partecipano alla fusione, più precisamente è necessario misurare la temperatura.

OSCILLAZIONE DEI NEUTRINI NELLA MATERIA

Pontecorvo nel 1957 ipotizzò che i neutrini potessero cambiare sapore leptonico, in seguito all'osservazione di un deficit di neutrini ν_e solari in arrivo sulla terra.

- Matrice di interazione con autostati ν_e, ν_μ, ν_τ
- Matrice di massa / evol. temporale con autostati ν_1, ν_2, ν_3

In 2 dimensioni l'ipotesi più semplice è:

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \qquad U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Produzione: ν_e prodotto nel sole a $t=0$:

$$\nu(0) = \nu_e = \cos\theta\, \nu_1 - \sin\theta\, \nu_2$$

Trasporto: ν_1 e ν_2 sono autostati di H e in quanto tali evolvono nel tempo con fasi date dalle loro energie:

$$\nu(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \left(\cos\theta\, \nu_1 - \sin\theta\, \nu_2\right) =$$

$$= \cos\theta\, e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}} \nu_1 - \sin\theta\, e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}} \nu_2 =$$

$$= \cos\theta\, e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}} \left(\cos\theta\, \nu_e + \sin\theta\, \nu_\mu\right) - \sin\theta\, e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}} \left(-\sin\theta\, \nu_e + \cos\theta\, \nu_\mu\right)$$

$$= \left(e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}} \cos^2\theta + e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}} \sin^2\theta\right) \nu_e + \left(e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}} - e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}}\right) \cos\theta \sin\theta\, \nu_\mu$$

Rivelazione: nel disegno a 2 dimensioni la probabilità di scomparsa del ν_e è uguale alla probabilità di comparsa del ν_μ:

$$\left|\langle \nu_\mu | \nu(t) \rangle\right|^2 = \left| \left(e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}} - e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}}\right) \cos\theta \sin\theta \right|^2 =$$

$$= \frac{\sin^2(2\theta)}{4} \left[2 - \left(e^{i\left(\frac{E_1t}{\hbar} - \frac{E_2}{\hbar}t\right)} + e^{-i\left(\frac{E_1t}{\hbar} - \frac{E_2t}{\hbar}\right)}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sin^2(2\theta)}{4} \left[2 - 2\cos\left(\frac{E_1t}{\hbar} - \frac{E_2t}{\hbar}\right)\right] =$$

$$= \sin^2(2\theta) \sin^2\left[(E_1 - E_2)\frac{t}{2\hbar}\right]$$

Tenendo conto che i neutrini sono relativistici:

$$E_2 - E_1 = pc\left(\sqrt{1+\frac{m_2^2c^2}{p^2}} - \sqrt{1+\frac{m_1^2c^2}{p^2}}\right) \simeq pc\left[\left(1+\frac{m_2^2c^2}{2p^2}\right)-\left(1+\frac{m_1^2c^2}{2p^2}\right)\right]$$

$$= \frac{(m_2^2-m_1^2)c^3}{2p} \equiv \frac{\delta m^2 c^4}{2E}$$

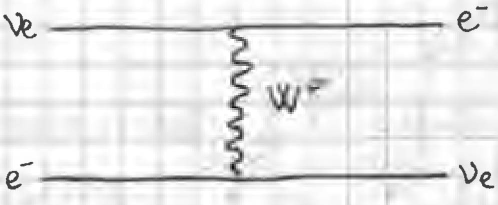
Risulta:

$$|\langle \nu_\mu | \nu(t)\rangle|^2 = \sin^2(2\theta)\sin^2\left(\frac{\delta m^2[eV^2]\,L[m]}{E[MeV]}\cdot 1,27\right)$$

con l'argomento del $\sin^2$ adimensionale.

- δm^2 grande $\Rightarrow P(\nu_\mu) \to \frac{1}{2}\sin^2(2\theta)$
- δm^2 piccolo $\Rightarrow P(\nu_\mu) \to \delta m^2 \sin^2(2\theta)$
- Sensibilità a $\delta m^2 \approx 1,27\, E/L\ [eV^2]$

Tutto questo vale per neutrini che viaggiano nel vuoto.
Nel tragitto tra il punto di produzione all'interno del sole ed il punto in cui vengono rivelati, i neutrini elettronici possono interagire in corrente carica con gli elettroni della materia:



l'ampiezza in avanti di questo processo è

$$\sigma \simeq \sqrt{2}\, G_F\, n_e$$

dove n_e = densità di e nel mezzo

Nel vuoto:

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\end{pmatrix} = U\ H\, U^{-1}\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} p^2+\frac{m_1^2}{2p} & 0 \\ 0 & p^2+\frac{m_2^2}{2p}\end{pmatrix}$$

Nella materia:

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\end{pmatrix} = \tilde{H}\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\end{pmatrix} \qquad \tilde{H} = U H U^{-1} + \begin{pmatrix}\sqrt{2}\, G_F\, n_e & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

n_e cambia all'interno del sole $\Rightarrow \tilde{H} = \tilde{H}(t)$!

La matrice dell'evoluzione temporale è cambiata $\Rightarrow$ gli autostati di interazione sono gli stessi, ma quelli di massa sono diversi da come erano nel vuoto!

$$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix} \equiv \tilde{U} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \qquad \tilde{U} \equiv \begin{pmatrix} \cos\tilde{\theta} & \sin\tilde{\theta} \\ -\sin\tilde{\theta} & \cos\tilde{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{U}\, i \frac{d}{dt} \tilde{U}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix} = \tilde{U} \tilde{H} \tilde{U}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}$$

$\tilde{U}$ è la matrice che diagonalizza $\tilde{H}$ $\Rightarrow$ imponendo nulli gli elementi fuori diagonale otteniamo:

$$\boxed{\operatorname{tg}(2\tilde{\theta}) = \frac{\delta m^2 \sin(2\theta)}{\delta m^2 \cos(2\theta) - 2p\sqrt{2} G_F n_e}}$$

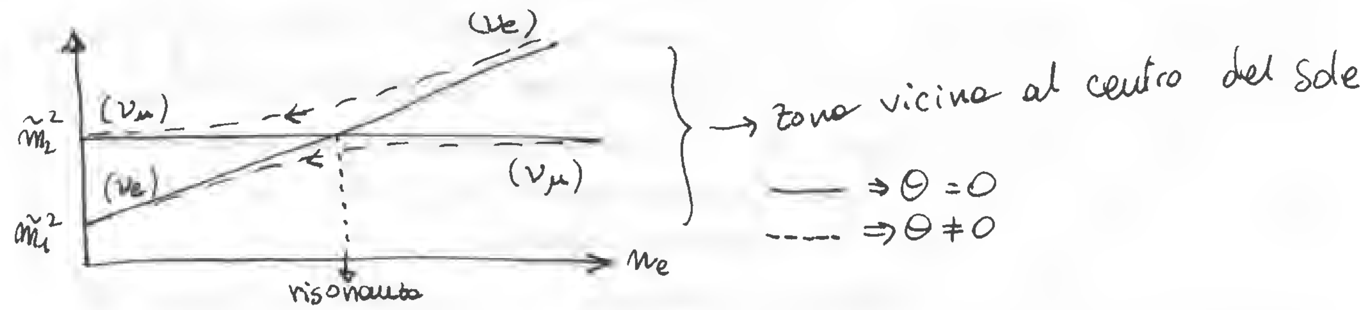
- condizione di RISONANZA MKW: $\delta m^2 \cos(2\theta) = 2p\sqrt{2} G_F n_e$
  $\Rightarrow$ qualsiasi sia θ, il mescolamento è massimo $\left(\tilde{\theta} = \frac{\pi}{4}\right)$

$$\tilde{U}\, i \frac{d}{dt} \tilde{U}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & \dot{\tilde{\theta}} \\ -\dot{\tilde{\theta}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}$$

- condizione di adiabaticità: $\dot{\tilde{\theta}} \ll |\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2|$
  $\Rightarrow$ l'equazione di Schrödinger è risolvibile analiticamente.
  In condizione di risonanza la condizione di adiabaticità si traduce in:

$$\boxed{n_e \ll \frac{\delta m^4 \sin^2(2\theta)}{2\sqrt{2}\, G_F\, p^2}}$$ (condizione verificata nel sistema in esame)

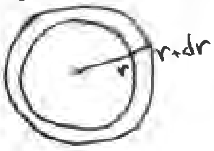
In queste condizioni si ha



Alla risonanza la probabilità di oscillazione $\nu_e \to \nu_\mu$ aumenta.
Questo modello spiega il flusso dei neutrini solari.

STRUTTURA STELLARE E SUPERNOVAE

Stella all'equilibrio $\Rightarrow$ pressione uguale ed opposta alla forza gravitazionale.



$$dF \equiv 4\pi r^2 p(r) - 4\pi (r+dr)^2 p(r+dr) \simeq 4\pi r^2 \left(-\frac{dP}{dr}\right) dr$$

$$dF = \frac{G M(r) dM}{r^2} = \frac{G M(r)}{r^2} 4\pi r^2 \rho(r)\, dr$$

$$\Longrightarrow \frac{dP}{dr} = -\frac{\rho(r) M(r)}{r^2} G$$

Integrando si ottiene:

$$4\pi r^3 \frac{dP}{dr} = -4\pi r^3 G \frac{\rho(r) M(r)}{r^2} \Rightarrow 4\pi \int_0^R r^3 \frac{dP}{dr} dr = -\int_0^M G \frac{M(r)}{r} dm = E_G$$

$$\Rightarrow P(r) 4\pi r^3 \Big|_0^R - \int_0^R P(r)\, 12\pi r^2 dr = E_G \Rightarrow E_G = -12\pi \int_0^R P(r) r^2 dr$$

(la pressione al bordo è nulla)

Considerando un gas perfetto in trasformazione adiabatica, usando il teorema del viriale si ottiene:

$$E_G = -3 E_i (\gamma - 1) \Rightarrow E_T = E_G + E_i = (4 - 3\gamma) E_i$$

Per un gas monoatomico: $E_T = -E_i < 0 \Rightarrow$ stella STABILE, il calore specifico è negativo (aggiungo energia $\Rightarrow$ diminuisce $E_i \propto T$). [...]

Massima massa che una stella può avere per essere mantenuta in equilibrio dalla pressione di degenerazione degli elettroni:

$$M_{ch} = 1.39\, M_\odot \qquad \text{Massa di Chandrasekhar}$$

- SUPERNOVA DI TIPO 1: nane bianche che hanno bruciato H ed He ma non C $\Rightarrow$ collasso fino all'equilibrio $\Rightarrow$ accrescimento massa ad es. da sistema binario $\Rightarrow$ i ν non riescono più a portare energia fuori dalla stella (interagiscono) $\Rightarrow$ fonde il nucleo di C e la stella detona (carbon flash).
- SUPERNOVA DI TIPO 2: stelle più massive, si innesca la fusione del ferro $\Rightarrow$ collasso $\Rightarrow$ aumento densità $\Rightarrow$ aumento T, E fino a $E_e \simeq 1\,\text{MeV} \simeq 10^{10}\,\text{K}$ tale che sia possibile $e^- + p \to n + \nu_e \Rightarrow$ si forma un nucleo compattissimo (non c'è più la pressione degli e^-) di n, con una densità di $1\, n/fm$, e la parte esterna viene spazzata via durante il collasso, principalmente tramite reazioni tipo $\gamma \to e^+ e^- \to \nu_x \bar{\nu}_x$.

$$\Delta E = E_{prima} - E_{dopo} \simeq -E_{dopo} = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R_{dopo}} \sim -10^{46}\, J$$

RELATIVITÀ GENERALE

- dx'^{μ} contravariante: $dx'^{\mu} = \dfrac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}$
- dx'_{μ} covariante: $dx'_{\mu} = \dfrac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} dx_{\nu}$

PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

In ogni punto di un campo gravitazionale arbitrario è possibile scegliere un sistema di coordinate locali tali che in un intorno di quel punto le leggi della fisica sono quelle della relatività ristretta (sistema inerziale)

Legge del moto in un sistema inerziale:

ξ^{μ} coordinate galileiane, τ tempo proprio

$$\frac{d^2\xi^{\mu}}{d\tau^2} = 0$$

Passiamo ad un s.d.r. qualsiasi (x^{μ}):

$$\frac{d\xi^{\mu}}{d\tau} = \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\nu}}{d\tau} \qquad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \xi^{\mu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\rho}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau} + \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{d^2 x^{\nu}}{d\tau^2} = 0 \qquad \text{Moltiplico a dx e sx per } \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\mu}}:$$

$$\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\mu}}\frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{d^2 x^{\nu}}{d\tau^2} + \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\mu}}\frac{\partial^2 \xi^{\mu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\rho}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0 \qquad \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\mu}}\frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\sigma}_{\nu}$$

$$\boxed{\frac{d^2 x^{\sigma}}{d\tau^2} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\nu}\frac{dx^{\rho}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0 \qquad \Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\mu}}\frac{\partial^2 \xi^{\mu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\nu}}} \qquad \Gamma \equiv \text{CONNESSIONE METRICA}$$

Equazione della geodetica

Soluzioni di questa equazione sono le linee di universo (4-dimensionali) lungo cui si svolge il moto di una particella, nel campo dato.

Espressione di Γ in termini del TENSORE METRICO $g^{\mu\nu}$:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, d\xi^{\mu} d\xi^{\nu} = \left[\eta_{\mu\nu}\frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right] dx^{\rho}dx^{\sigma} \equiv g_{\rho\sigma}\, dx^{\rho}dx^{\sigma} \qquad \boxed{g_{\rho\sigma} = g_{\sigma\rho}}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left[\eta_{\rho\sigma}\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\right] = \eta_{\rho\sigma}\frac{\partial^2 \xi^{\rho}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}}\frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \eta_{\rho\sigma}\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial^2 \xi^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}} =$$

$$= \eta_{\rho\sigma}\frac{\partial^2 \xi^{\rho}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\rho}}\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \eta_{\rho\sigma}\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial^2 \xi^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\sigma}}\frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}} =$$

$$= \eta_{\rho\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \eta_{\rho\sigma}\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}\frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}} = \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} g_{\alpha\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} g_{\mu\alpha}$$

Di conseguenza:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} = \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} g_{\alpha\nu} + \cancel{\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} g_{\mu\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} g_{\alpha\nu} + \cancel{\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} g_{\lambda\alpha}} - \cancel{\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} g_{\alpha\lambda}} - \cancel{\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} g_{\mu\alpha}} =$$

(la connessione metrica è simmetrica rispetto ai due indici in basso)

$$= 2 g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} \qquad \text{Moltiplico a dx e sx per } g^{\nu\beta}:$$

$$\boxed{\frac{1}{2} g^{\nu\beta}\left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right] = g_{\alpha\nu} g^{\nu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} = \delta^{\beta}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} = \Gamma_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\mu}}$$

LIMITE NEWTONIANO

$\boxed{\text{MOTO IN UN CAMPO} \quad \vec{a} = -\vec{\nabla}\phi}$

- $v \ll c \Rightarrow dx^i \ll c\,dt \Rightarrow \left|\frac{dx^i}{dx^0}\right| \ll 1$

  L'equazione del moto è approssimativamente

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = 0$$

- campo statico: $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} = 0$

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2} g^{\nu\mu}\left[\cancel{\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^0}} + \cancel{\frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial x^0}} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}\right] = -\frac{1}{2} g^{\nu\mu}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}$$

- campo debole: $g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $h_{\mu\nu} \ll 1$

  Al 1° ordine:

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}(\eta_{\nu\mu} + h_{\nu\mu})\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\nu} \simeq -\frac{1}{2}\eta_{\nu\mu}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\nu}$$

Da cui:

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{1}{2}\eta_{00}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} = 0 \quad \text{(campo statico)}$$

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}\eta_{ii}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \qquad \left(\eta_{\mu\nu} \text{ è diagonale } \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & 0 & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\right)$$

Sappiamo inoltre che:

$$d\tau = (g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu)^{1/2} \Rightarrow \frac{d\tau}{dx^0} = \left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dx^0}\frac{dx^\nu}{dx^0}\right)^{1/2} = \sqrt{g_{00}} \simeq 1 \text{ per campi deboli}$$

Le equazioni del moto diventano:

$$\begin{cases} \frac{d^2x^0}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow \frac{dx^0}{d\tau} = \text{costante} \simeq 1 \\ \frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} = 0 \Rightarrow +\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \simeq \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \end{cases}$$

Da cui si ricava $h_{00} = 2\phi$ (condizioni al contorno: $h \to 0$ a grande distanza)

$$d\tau = dx^0\sqrt{1+2\phi}$$

$\boxed{\text{SISTEMA CO-MOVING} \quad d\tau^2 \equiv dx^{0\,2} \Rightarrow g_{00} \equiv 1}$

Questo vuol dire anche $dx^i = 0$

Infatti: $d\tau^2 = g_{00}\,dx^{0\,2} + \alpha\,dx^{i\,2}$

Un sistema di riferimento co-moving è un sistema di coordinate che fattorizza via l'espansione dell'universo: le coordinate degli oggetti risultano statiche, ad es. la distanza tra due galassie co-moving è costante nel tempo (in un altro s.d.r. aumenta nel tempo).

Un osservatore solidale ad un sistema co-moving è l'unico che possa percepire l'universo come isotropo.

METRICA DI ROBERTSON-WALKER-FRIEDMANN

- Setting degli orologi all'interno di un sdr comoving (in cui il tensore metrico è invariante) (ISOTROPIA)

$$\Rightarrow \quad d\tau^2 = dt^2 - B(r,t)dr^2 - r^2 C(r,t)d\Omega^2$$

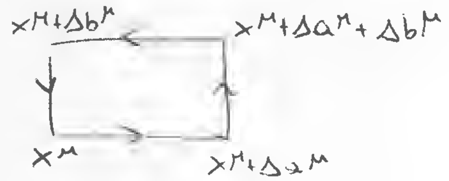
- Omogeneità dell'universo (principio cosmologico) $\Rightarrow$ B, C fattorizzabili

$$\Rightarrow \quad d\tau^2 = dt^2 - a^2(t)\left[B'(r)dr^2 + C'(r)r^2 d\Omega^2\right]$$

- Ridefinizione $r' \equiv \sqrt{C'(r)}\, r$

$$\Rightarrow \quad d\tau^2 = dt^2 - a^2(t)\left[f(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2\right]$$

- Opero un trasporto parallelo di un vettore:



Nel s.d.r. del principio di equivalenza il vettore deve rimanere invariato:

$dv^\mu \equiv 0$

Negli altri sdr: $v^\mu = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} v'^\nu$

$$dv^\mu = 0 \Rightarrow \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\mu} dv^\mu = 0 \Rightarrow \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\mu} d\left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} v'^\nu\right) = 0 \Rightarrow \Gamma^\alpha_{\rho\gamma} dx^\rho v'^\gamma + dv'^\alpha = 0$$

$$\boxed{dv'^\alpha = -\Gamma'^\alpha_{\rho\gamma} dx^\rho v'^\gamma}$$

Da cui: $\boxed{\frac{\partial v'^\mu}{\partial x^\sigma} = -\Gamma^\mu_{\sigma\rho} v'^\rho}$ e

DERIVATA COVARIANTE

$$\boxed{\frac{Dv^\mu}{Ds} \equiv \frac{dv^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{ds} v^\rho}$$

- Si valuta al 1° ordine (spostamenti piccoli) la variazione δv^μ lungo i 4 spostamenti: usando $\frac{\partial v'^\mu}{\partial x^\sigma} = -\Gamma^\mu_{\sigma\rho} v'^\rho$, ottenendo

$$\boxed{\delta v^\mu \simeq R^\mu_{\rho\sigma\beta}\Delta a^\beta \Delta b^\sigma v^\rho \quad \text{con} \quad R^\mu_{\rho\sigma\beta} = \Gamma^\mu_{\sigma\nu}\Gamma^\nu_{\beta\rho} - \Gamma^\mu_{\beta\nu}\Gamma^\nu_{\sigma\rho} + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\beta\rho}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\sigma\rho}}{\partial x^\beta}}$$

con tutte le connessioni calcolate nel punto x^μ.

$R^\mu_{\rho\sigma\beta} \equiv$ tensore di Riemann, simmetrico per scambio di coppie di indici, antisimmetrico per scambio di indici adiacenti, gode della proprietà di ciclicità su 3 indici e dell'identità di Bianchi.

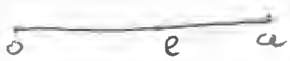
- Ci poniamo in due dimensioni ($t \equiv t_0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$) $\Rightarrow g_{\mu\nu} = -\begin{pmatrix} f(r) & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$
- Calcoliamo la curvatura k, ottenendo:

$$K = -\frac{1}{2} g^{\mu\kappa} g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2r}\frac{f'(r)}{f^2(r)} \Rightarrow f(r) = \frac{1}{1-kr^2}$$

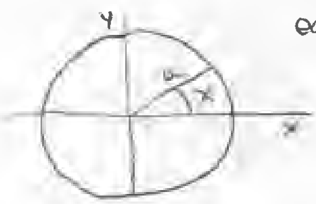
$$\boxed{ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right]}$$

Metrica di Robertson-Walker

- $K = 0 \Rightarrow$ universo piatto, coordinata 2D comoving: $X = \ell/a$



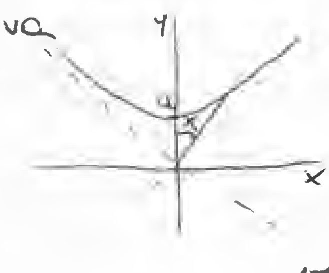
- $K > 0 \Rightarrow$ curvatura positiva



comoving: $r = \sin X = y/a$

- $K < 0 \Rightarrow$ curvatura negativa

comoving: $r = \frac{x}{a} = \sinh X$



TENSORE ENERGIA - IMPULSO

In relatività ristretta:

$$T^{\mu\nu} = \sum_n p_n^\mu \frac{dx_n^\nu}{dx^0} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n) = \sum_n \frac{p_n^\mu p_n^\nu}{E_n} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n)$$

In assenza di forze esterne, $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$

Applicando il principio cosmologico:

- omogeneità: $T^{00} = \rho \ \forall x$
- isotropia: $\langle p_i \rangle = 0 \Rightarrow T^{0i} = 0$, $T^{ij} \propto \delta^{ij}$

Dimensionalmente, trattasi di una pressione $\Rightarrow T^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$

- fluido ultrarelativistico: $p = \frac{1}{3}\rho$
- fluido non relativistico: $p \simeq 0$, $\rho \simeq m + \frac{3}{2} p$

Passiamo in un sistema di riferimento in moto a velocità u:

$$T^{\mu\nu} \equiv \alpha u^\mu u^\nu + \beta \eta^{\mu\nu}$$

Facendo il limite per $\vec{v} \to 0$ si ottiene:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu - p \eta^{\mu\nu}$$

Passando dalla relatività ristretta alla relatività generale:

$$\boxed{\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= (\rho + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \\ T^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= \frac{DT^{\mu\nu}}{Dx^\nu} = 0 \end{aligned}}$$

$\equiv$ universo omogeneo, isotropo, non viscoso. Equazioni valide in qualsiasi sdr.

EQUAZIONE DI EINSTEIN

$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$ ← voglio esprimerlo in termini di altri oggetti a 4-divergenza nulla.

- Parto dall'identità di Bianchi:

$$g^{\lambda\nu}\left[R_{\lambda\mu(\nu\rho;\eta)} + R_{\lambda\mu(\eta\nu;\rho)} + R_{\lambda\mu(\rho\eta;\nu)}\right] = 0$$

$$g^{\mu\rho}\left[R_{\mu\rho;\eta} + R_{\mu\eta;\rho} + R^\nu{}_{\mu\rho\eta;\nu}\right] = 0$$

$$R_{;\eta} + R^\rho_{\eta;\rho} + R^\nu_{\eta;\nu} = R_{;\eta} + 2R^\rho_{\eta;\rho} = 0$$

$$\delta^\rho_\eta R_{;\rho} + 2R^\rho_{\eta;\rho} = 0 \Rightarrow g^{\eta\alpha}\left(\frac{1}{2}\delta^\rho_\eta R + R^\rho_\eta\right)_{;\rho} = 0$$

$$\boxed{R^{\rho\alpha} - \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} R = \text{costante} \cdot T^{\rho\alpha}}$$

(più eventuali altri termini a 4-divergenza nulla)

Per calcolare la costante mi metto in approssimazione Newtoniana:

$$\bullet\ |T^{ij}| \propto \left|\frac{p^i p^j}{E}\right| \ll E = T^{00}$$

$$\bullet\ g^{00} \simeq 1, \quad g^{\mu\nu} \simeq \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}, \quad h \sim 2\phi = -\frac{2GM}{r}$$

L'equazione diventa:

$$\begin{cases} R^{00} - \frac{1}{2} g^{00} R = \text{cost.}\, T^{00} = \text{cost.}\, \rho \simeq R^{00} - \frac{1}{2} R \\ R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R \simeq 0 \Rightarrow g_{ij}\left(R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R\right) = 0 \Rightarrow \delta_{ij} R^{ij} - \frac{3}{2} R \simeq 0 \Rightarrow -R^{ii} \simeq \frac{3}{2} R \end{cases}$$

Ma vale anche:

$$R^{ij} = \frac{1}{2} g^{ij} R \simeq -\frac{1}{2} \delta^{ij} \left(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\right) \simeq -\frac{1}{2} \delta^{ij} \left(R_{00} - R_{ii} \right) = -\frac{1}{2} \delta^{ij} R$$

$$R = R_{00} - R_{ii} = R_{00} + \frac{3}{2} R \Rightarrow R_{00} = -\frac{1}{2} R$$

$$\text{cost} = \frac{1}{\rho}\left(R_{00} \cdot 2 \right)$$

Calcoliamo $R_{00} = g_{\lambda\nu} R^{\lambda 0 \nu 0} \simeq \overset{\text{antisimmetria}}{\cancel{R_{0000}}} - R_{i0i0} = - R_{i0i0}$

$$R_{\nu\rho\sigma\beta} = g_{\nu\mu} R^{\mu}{}_{\rho\sigma\beta} = g_{\nu\mu} \left[\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} \Gamma^{\nu}_{\beta\rho} - \Gamma^{\mu}_{\beta\nu} \Gamma^{\nu}_{\sigma\rho} + \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\beta\rho}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}}{\partial x^{\beta}} \right]$$

Prendo solo gli co-esimi più grandi:

$$\Gamma \sim g \frac{\partial g}{\partial x} \sim (1+h) \frac{\partial(1+h)}{\partial x} \sim \frac{\partial h}{\partial x} \sim \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \Gamma\Gamma \sim \frac{1}{r^4}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} \sim \frac{1}{r^3}$$

Di conseguenza. $R_{i0i0} = g_{i\mu} \left[\frac{\partial \Gamma^{\mu}_{00}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{0i}}{\partial x^0} \right] \overset{\text{campo statico}}{\simeq} -g_{i\mu} \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{00}}{\partial x^i} \simeq -\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}$

$$R_{i0i0} = -\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^r 4\pi\rho G\, r^2 dr = 4\pi G \rho$$

$$\Rightarrow \text{cost} = 8\pi G$$

Teniamo ora conto del fatto che $\exists$ un altro termine a 4-divergenza nulla, ovvero lo stesso tensore metrico:

$$\boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 8\pi G T^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}}$$

Equazione di Einstein

EQUAZIONI DI FRIEDMANN - EINSTEIN

Si contrae l'eq. di Einstein con $g^{\mu\nu} \Rightarrow R_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\mu}{}_{\mu}\right) \equiv 8\pi G S_{\mu\nu}$
A partire da S_{00} ed $S_{ii} = S_{11}$ calcolate nel sdr comoving si ricavano R_{00} ed R_{11}, esprimendo le Γ in maniera esatte in funzione delle componenti di $g_{\mu\nu}$ e di $T_{\mu\nu}$. Si ottengono due eq. scalari:

$$R_{00} = 4\pi G(\rho + 3p) = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad ; \quad (1-kr^2)R_{11} = 4\pi G a^2(\rho - p) = 2k + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}$$

Dalla $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ si ricava inoltre l'eq. di CONTINUITÀ:

$$d(\rho a^3) = -p\, d(a^3)$$

ovvero: la variazione di massa dipende solo dalla variazione del volume... Ri-implementando Λ $\left(\rho \to \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G},\ p \to p - \frac{\Lambda}{8\pi G}\right)$ e riarrangiando le prime due eq. si ottengono le

EQUAZIONI DI FRIEDMAN

$$\boxed{\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8}{3}\pi G\rho + \frac{\Lambda}{3} \qquad \frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi G p + \Lambda}$$

In particolare moltiplicando la prima per $m\frac{a^2}{2}$:

$$\frac{1}{2}m\dot{a}^2 = \left(\frac{4}{3}\pi\rho a^3\right)\frac{Gm}{a} + \frac{\Lambda m a^2}{6} - m\frac{k}{2}$$

en. cinetica — en. potenziale gravitazionale — forza repulsiva $\propto$ alla distanza — eventuale contributo della curvatura

Tra le due equazioni di F. e l'eq. di continuità solo due sono indipendenti.

Occorre introdurre una EQUAZIONE DI STATO della forma $p = \alpha\rho$

- fluido NR (matter domination): $\alpha = 0$, $\rho \propto a^{-3}$
- fluido UR (radiation domination): $\alpha = 1/3$, $\rho \propto a^{-4} \sim \text{redshift} \cdot a^{-3}$
- Λ-domination: $\alpha = -1$, $\rho = \frac{\Lambda}{8\pi G}$

Inserendo $p = \alpha\rho$ nell'equazione di continuità si ottiene infatti $\rho \propto a^{-3(\alpha+1)}$
Utilizzando questa e le eq. di F. si ricava $\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G(1+3\alpha)a^{-3(\alpha+1)+1}$; utilizzando l'ansatz $a \propto t^{\beta}$: $\beta = \frac{2}{3(\alpha+1)}$. Di conseguenza:

- Matter domination $\Rightarrow a \propto t^{2/3}$
- radiation domination $\Rightarrow a \propto \sqrt{t}$
- Λ-domination $\Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow a \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}$ (inflazione)

Dalla 1ª equazione di Friedman:

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho a^2 + \frac{\Lambda}{3}a^2 - k}$$

Questa eq. separa i contributi di ρ, Λ e k.

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \simeq 10^{-29}\ g/cm^3$$

La densità attuale di materia barionica (non relativistica), compresa la materia oscura, si stima attraverso lo studio di effetti come le lenti gravitazionali e le curve di rotazione delle galassie, e risulta:

$$\rho_{M_0} \sim 0.3\,\rho_c \sim 3\ 10^{-30}\ g/cm^3$$

di cui solo circa il 10% è visibile.

La densità di radiazione (materia relativistica) si stima trattando la CMB come un corpo nero:

$$\rho_{R_0} = \sigma_{SB} T^4 \simeq 4\ 10^{-34}\ g/cm^3 \Rightarrow$$ L'universo attuale è matter-dominated, $\rho_0 \sim a_0^{-3}$

$$\rho_R a^4 = \rho_{R_0} a_0^4 \ ; \quad \rho_M a^3 = \rho_{M_0} a_0^3 \Longrightarrow \frac{\rho_R}{\rho_M} = \frac{\rho_{R_0}}{\rho_{M_0}}\frac{a_0}{a} \simeq 10^{-4}\frac{a_0}{a}$$

Se l'universo è in espansione, questo rapporto $\rightarrow 0$.

Materia relativistica e materia barionica avevano lo stesso peso al tempo in cui $a(t) = 10^{-4} a_0$, cioè l'universo era più piccolo di un fattore 10^{-4} rispetto ad ora.

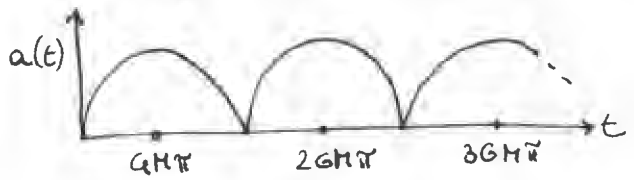
$$\left.\frac{da}{dt}\right|_{\rho \sim a^{-3}} = \sqrt{\frac{2MG}{a} + \frac{\Lambda}{3}a^2 - k} \rightarrow$$ Modelli di universo attuale.

- Universo di Einstein - de Sichter: $\Lambda \equiv 0$, $k \equiv 0$

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{2MG}{a}} \Rightarrow a(t) \propto t^{2/3}$$

- Universo a curvatura positiva: $\Lambda \equiv 0$, $k \equiv 1$

Cambio di variabile: $a \equiv GM(1-\cos\theta) \Rightarrow a(t)$ è una cicloide



$\Rightarrow$ universo ciclico

- Universo a curvatura negativa: $\Lambda \equiv 0$, $k \equiv -1$

Cambio variabile: $a \equiv GM(\cosh\theta - 1)$, $t \equiv GM(\sinh\theta - \theta)$

$\Rightarrow$ per $t \rightarrow \infty$ si ha $a \propto t \Rightarrow$ universo in espansione perenne

PARAMETRI COSMOLOGICI E STORIA DELL'UNIVERSO

Dall'equazione di Friedmann $\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8}{3}\pi G \rho + \frac{\Lambda}{3}$

riconoscendo che, almeno per "piccole" distanze,

$d = ar \Rightarrow v = \dot{d} = \frac{\dot{a}}{a} ra = \frac{\dot{a}}{a} d$ ma anche $v = Hd$,

$\boxed{H = \frac{\dot{a}}{a}}$. Dividendo l'equazione per H^2 ed imponendo $\boxed{\rho_c = \frac{3}{8}\frac{H^2}{\pi G}}$

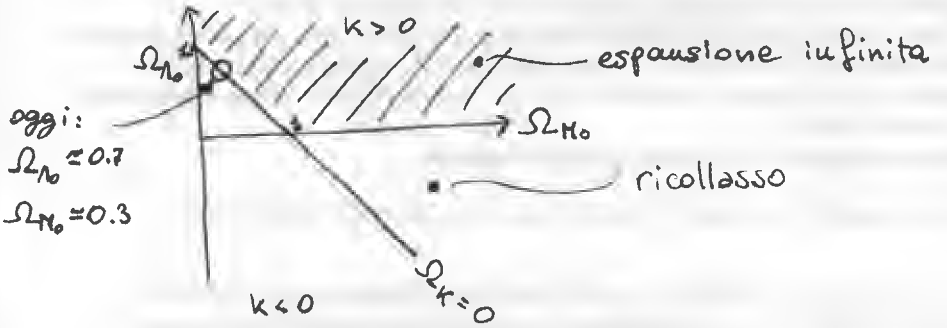
si ottiene: $1 = \frac{\rho}{\rho_c} + \frac{\Lambda}{3H^2} - \frac{k^2}{H^2 a^2}$

Definisco: $\boxed{\Omega_M \equiv \rho/\rho_c}$ $\boxed{\Omega_\Lambda = \Lambda/3H^2}$ $\boxed{\Omega_K = -K/a^2H^2}$

N.B.: a, H, ρ_c dipendono dal tempo!. Si ottiene:

$$\boxed{\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1}$$

- La curvatura dipende da Λ e da ρ! $\Omega_K = 1 - (\Omega_M + \Omega_\Lambda)$



Infatti dell'equazione in forma esplicita $\Lambda > 0 \Leftarrow a \to \infty$

Quindi $\Lambda < 0 \Rightarrow$ ricollasso

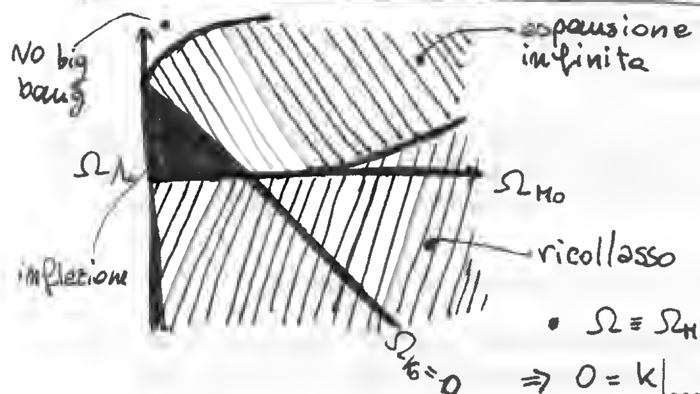
- In funzione dei parametri attuali: $\frac{\Omega_M}{\Omega_{M_0}} = \frac{H_0^2 a_0^3}{H^2 a^3}$, $\frac{\Omega_K}{\Omega_{K_0}} = \frac{H_0^2 a_0^2}{H^2 a^2}$, $\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{\Lambda_0}} = \frac{H_0^2}{H^2}$

$\Rightarrow 1 = \Omega_{M_0} \frac{H_0^2 a_0^3}{H^2 a^3} + \Omega_{K_0} \frac{H_0^2 a_0^2}{H^2 a^2} + \Omega_{\Lambda_0} \frac{H_0^2}{H^2}$

- Moltiplico per H^2 e sostituisco: $\Omega_{K_0} = 1 - (\Omega_{M_0} + \Omega_{\Lambda_0})$, $\boxed{R \equiv \frac{a}{a_0}}$

Si ottiene:

$$\boxed{\frac{\dot{R}^2}{H_0^2} = \Omega_{M_0}\left(\frac{1}{R} - 1\right) + \Omega_{\Lambda_0}\left(R^2 - 1\right) + 1}$$



Infatti:

- per $\Omega_{M_0} > 1$, $\Omega_{\Lambda_0} \ll 1$, se R è grande ho $\dot{R}^2 < 0$ (assurdo)
- per $\Omega_{M_0} \ll 1$, $\Omega_{\Lambda_0} > 1$, se R è piccolo ho $\dot{R}^2 < 0$ (assurdo) $\Rightarrow$ a ha un limite inferiore $\Rightarrow \nexists$ big bang

- $\Omega \equiv \Omega_M + \Omega_\Lambda$. Matter domination $\Rightarrow \frac{\Omega - 1}{\Omega} \sim ka \sim kt^{2/3}$

$\Rightarrow 0 = k\big|_{oggi} = \left(\frac{\Omega - 1}{\Omega}\right)\Big|_{oggi} \frac{1}{t_0^{2/3}} = \left(\frac{\Omega - 1}{\Omega}\right)\Big|_{t=1s} \frac{1}{1s^{2/3}} \Rightarrow \frac{\Omega - 1}{\Omega} \cdot (10^{10})^{2/3} \simeq 0$

$\Rightarrow$ curvatura nulla per forza?

No. Se in passato c'è stata Λ-domination anche per poco tempo, si ha avuto: $a \sim e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t}$, $\frac{\Omega - 1}{\Omega} \sim a^{-2} \sim e^{-2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t} \xrightarrow[\Lambda \gg 1]{} 0$ (INFLAZIONE).

REDSHIFT

Galassia in moto rispetto a noi, contiene fonte di luce.
Fotone emesso in r_1 al tempo t_1 e rivelato in O al tempo t_0.
La metrica si scrive:

$$d\tau^2 = 0 = dt^2 - a^2(t)\frac{dr^2}{1-kr^2}$$

perché è un fotone — perché stiamo considerando la direzione $\theta = \varphi = 0$

$$\Rightarrow \frac{dt^2}{a^2(t)} = \frac{dr^2}{1-kr^2}$$

valida in ogni punto del cammino del fotone $\Rightarrow$ posso integrare.

Il cammino percorso da una cresta è uguale a quello percorso dalla cresta successiva.

$$\int_0^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \cancel{\int_{t_1}^{t_0}\frac{dt}{a(t)}} = \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_0}\frac{dt}{a(t)} = \cancel{\int_{t_1}^{t_0}\frac{dt}{a(t)}} + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0}\frac{dt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1}\frac{dt}{a(t)}$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0}\frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1}\frac{dt}{a(t)}$$

Approssimando: $\frac{\Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\Delta t_1}{a(t_1)}$

$$\boxed{\Delta t_0 = \Delta t_1\frac{a(t_0)}{a(t_1)}} \Rightarrow \boxed{\nu_0 = \nu_1\frac{a(t_1)}{a(t_0)}} \quad \boxed{\lambda_0 = \lambda_1\frac{a(t_0)}{a(t_1)}}$$

Se l'universo è in espansione, $a(t_0) > a(t_1) \Rightarrow \lambda_0 > \lambda_1$
$\Rightarrow$ <u>spostamento verso il rosso</u>. Si definisce:

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1}\left[\frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1\right] = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1 \Rightarrow \boxed{\frac{a(t_0)}{a(t_1)} = 1 + z}$$

Misuro — Prevedo $\Longrightarrow$ misuro a!

Inoltre: $\nu \cdot a = \text{costante} \Rightarrow \nu \sim E \sim 1/a$

$$\boxed{\rho_{RD} \sim \rho_{MD}\frac{1}{a} \sim \frac{1}{a^4}}$$

- un contributo a^{-3} dalla diffusione di un certo numero di γ (come per le particelle massive)
- un contributo a^{-1} dal calo dell'energia trasportata dal singolo γ.

NUCLEOSINTESI

Sperimentalmente:

- nuclei leggeri ($\sim {}^4He$) $\sim 24\%$ materia
- $\Omega_M = 0.3$ $\quad \Omega_B = 0.03$ (materia barionica)

$\Rightarrow$ Non è possibile che l'elio sia prodotto solo nelle stelle, perché, supponendo che avvenga solo la reazione pp:

$$\frac{\dfrac{\text{luminosità galassia}}{\text{en. spesa per produrre 1 kg di } {}^4He} \cdot \text{età galassia}}{\text{massa galassia}} = \frac{\text{massa } {}^4He \text{ prodotto}}{\text{massa galassia}} \leq 1\%$$

Dobbiamo allora spiegarlo con quanto succedeva nei primi istanti di vita dell'universo, al variare della temperatura.

- $T \gg 1\,MeV$: ν contribuiscono ancora.

$$\nu_e + n \longrightarrow e^- + p \qquad p + \bar{\nu}_e \longrightarrow n + e^+ \qquad n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\frac{n}{p} \simeq e^{-(m_N - m_p)/T} \simeq 0{,}28 \quad \text{per } T = 1\,MeV$$

- $T < 1\,MeV$: ν disaccoppiati $\Rightarrow$ rimane solo $n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ con $\tau_n \simeq 15$ min.

$$\frac{n}{n+p} = \left.\frac{n}{n+p}\right|_{1\,MeV} e^{-t/\tau_n} = 0{,}216\, e^{-t/\tau_n}$$

Ma avviene anche:

- $T \geqslant 2.2\,MeV$ $\quad n + p \longleftrightarrow d + \gamma$
- $T < 2.2\,MeV$ $\quad n + p \longrightarrow d + \gamma$

$$d + d \longrightarrow {}^3He + n \qquad {}^3He + d \rightarrow {}^4He + p$$
$$d + d \longrightarrow {}^3H + p \qquad {}^3H + d \rightarrow {}^4He + n$$

- Scendendo ancora con la temperatura non riesco più a superare la barriera coulombiana $\Rightarrow$ no nuclei più pesanti.
- La catena parte quando $\nexists$ più abbastanza fotoni da spaccare il deuterio, ovvero quando:

$$\frac{n_\gamma(E \geqslant 2.2\,MeV)}{n_\gamma} \leq \frac{n_{barioni}}{n_\gamma} = \eta_B = 5.5 \; 10^{-10} \Rightarrow e^{-\frac{2.2\,MeV}{T}} \leq 5 \; 10^{-10} \Rightarrow T \leq 100\,KeV$$

$$\Rightarrow t \simeq \frac{1}{T^2[MeV^2]} \simeq 100\,s \quad (\sim 3 \text{ min in realtà}) \quad \Rightarrow \frac{n}{n+p} \simeq 0.17$$

$\Rightarrow$ frazione di ${}^4He$ prodotto per nucleosintesi $= \dfrac{4\, n_{{}^4He}}{n_p + n_n} = \dfrac{4\,(n/2)}{n+p} = 0.34$ (in realtà 0.24)

c.v.d.

Termodinamica dell'universo nelle sue fasi iniziali

1^a eq. di Friedmann: $H^2 + \frac{k^2}{a^2} = \frac{8}{3}\pi G \rho + \frac{\Lambda}{3}$ $\qquad \rho \begin{cases} a^{-3} & \text{N.R.} \\ a^{-4} & \text{R.} \end{cases}$

All'inizio a era piccolo $\Rightarrow$ domina ρ

$\Rightarrow H \simeq \frac{8}{3}\pi G \rho$

Vogliamo vedere come si evolvono le particelle nelle varie fasi ed identificarne le conseguenze verificabili sperimentalmente. Per trattare il sistema in modo termodinamico dobbiamo capire quali particelle sono all'equilibrio (e quindi trattabili in questo modo) e quali no.

$\boxed{\text{Equilibrio}: \Gamma_i \gg H}$ Ovvero, rate d'interazione della specie i-esima $\gg$ rate di espansione dell'universo

$\boxed{\text{Disaccoppiamento}: \Gamma_i \ll H \Rightarrow n_i a^3 = \text{cost.}}$ Chiameremo condizione di disaccoppiamento della specie i-esima $\Gamma_i = H$. A questo punto la distrib. della " " è dominata dall'espansione dell'universo piuttosto che dalle interazioni.

F.D. o B.E.: $f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu_i}{T}} \pm 1}$

$n_i = g_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_i(p)$ $\qquad \rho_i = \langle E_i \rangle n_i = \int g_i \frac{E_i\, d^3p}{(2\pi)^3} f_i(p)$ (densità di energia)

$P_i = g_i \int \frac{p_i^2}{E_i} \frac{1}{3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_i(p)$ (pressione, dalla definizione di tensore energia-impulso)

Vediamo quanto valgono queste grandezze per particelle relativistiche e non:

- NR: $m \gg T$ $E \simeq m$ si ottiene: $n_{i_{NR}} = g_i \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{T}}$

$\rho_{i_{NR}} = m\, n_{i_{NR}}$ $\qquad P_{i_{NR}} \simeq 0 = 2T n_{i_{NR}}$ Si vede che ρ_{NR} è esponenzialmente soppressa da $m/T \Rightarrow$ contribuiscono molto poco alla ρ_{TOT}.

- R: $E \gg m \Leftrightarrow T \gg m \wedge E \simeq p$ si ottiene: $n_{i_R} \simeq \frac{1,2}{\pi^2} g_i T^3 \left(\cdot \frac{3}{4} \text{ per fermioni}\right)$

$\rho_{i_R} = \frac{T}{30} n_{i_R} \left(\cdot \frac{7}{8} \text{ per fermioni}\right) \propto T^4$ $\qquad P_{i_R} \simeq \frac{1}{3}\rho_{i_R}$

È stato trascurato il potenziale chimico. Per definizione:

$\mu = -T\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,T}$. Consideriamo una reazione $n_1 A_1 + n_2 A_2 \leftrightarrow n_3 A_3 + n_4 A_4$ (n_3, n_4 negativi) $\Rightarrow \sum_i n_i A_i = 0$. Se siamo all'equilibrio:

$0 = \delta S = \sum_i \frac{\partial S}{\partial n_i} \delta n_i = -\sum_i \left(\frac{\mu_i}{T}\right) \delta n_i$ $\qquad \delta n_i = \text{cost} \cdot n_i$

$\Rightarrow -\sum_i \frac{\mu_i}{T} n_i = 0 \Rightarrow -\sum_i \mu_i n_i = 0$

Cioè il potenziale chimico è additivo e la sua somma è conservata. Dalle varie reazioni e dai numeri quantici conservati si scopre che $\exists$ 4 μ indipendenti, associati a Q, B, L_e, L_μ, che sono funzioni dispari di queste. Si sa che, considerando l'universo intero:

perché nel passaggio particella - antiparticella $Q(-\mu) = -Q(\mu)$.

$$\left.\begin{array}{l} Q, \quad L_\mu = 0 \\ \underset{\substack{\| \\ n_{e^-} - n_{e^+}}}{L_e} = B \simeq 0.03 \simeq 0 \end{array}\right\}$$ funzioni dispari in 0 fanno 0 $\Rightarrow$ μ trascurabili.

PROP.: <u>L'entropia è costante in un volume comoving</u> (Non è scontato: l'equilibrio mi dice solo che è stazionaria!)

1° princ. t.d.: $TdS = PdV - \cancel{\mu dN} + dU$

$\boxed{U = \rho V} \Rightarrow dU = d(\rho V) = \rho dV + V d\rho \qquad TdS = (P+\rho)dV + Vd\rho$

$dS = \frac{(P+\rho)}{T} dV + \frac{V d\rho}{T}$ ... Se S è una f. di stato, l'Hessiana è simmetrica.

$$\boxed{\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} \equiv \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}} \qquad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P+\rho}{T} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial S}{\partial V} = -\frac{1}{T^2}(P+\rho) + \frac{1}{T}\frac{\partial(P+\rho)}{\partial T}$$

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial S}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{V}{T}\frac{\partial \rho}{\partial T} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial V}\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial \rho}{\partial T} \qquad \boxed{\frac{\cancel{1}}{\cancel{T}}\frac{\partial \rho}{\partial T} = -\frac{1}{T^{\cancel{2}}}(P+\rho) + \frac{\cancel{1}}{\cancel{T}}\frac{\partial(P+\rho)}{\partial T}}$$

Quindi:

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial T}} = -\frac{P+\rho}{T} + \frac{\partial P}{\partial T} + \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial T}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial T} = -\frac{P+\rho}{T}}$$

$$dS = \frac{1}{T}(P+\rho)dV + \frac{V}{T}d\rho + \frac{V}{T}dP - \frac{V}{T}dP \qquad \left(\text{aggiungo e sottraggo } \frac{V}{T}dP\right)$$

$$dS = \frac{1}{T}d[(\rho+P)V] - \frac{V}{T}dP = \frac{1}{T}d[(\rho+P)V] + \frac{V}{T^2}(P+\rho)dT = d\left[\frac{(P+\rho)}{T}V\right]$$

$$\boxed{S = \frac{P+\rho}{T}V}$$ (più costante). Usiamo come V il volume comoving a^3 ed usiamo l'eq di continuità.

$$d(\rho a^3) = -P\, d(a^3)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{(P+\rho)}{T}a^3\right] = \qquad = \frac{1}{T}\frac{d}{dt}\left[(P+\rho)a^3\right] - \frac{1}{T^2}(P+\rho)a^3\frac{dT}{dt}$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{d(Pa^3)}{dt} - P\frac{d(a^3)}{dt}\right] - \frac{1}{T^2}\underbrace{(P+\rho)a^3\frac{dT}{dt}}_{= dP} = \frac{1}{T}\left[\frac{d(Pa^3)}{dt} - P\frac{d(a^3)}{dt} - \frac{a^3 dP}{dt}\right] = 0$$

Questo vale per tutte le specie che sono all'equilibrio termodinamico.
<u>L'entropia $\propto T^3$</u>: contano solo le specie relativistiche $\Rightarrow P = \frac{1}{3}\rho$

$$\Rightarrow S = \frac{4}{3}\rho_R\frac{a^3}{T} \propto \frac{a^3}{T}T^4 \Rightarrow S \propto a^3T^3$$

PROP.: $\boxed{t \sim T^{-2}}$ Contano solo le particelle relativistiche. $H^2 = \frac{8}{3}\pi G \sum_{i\,rel.} \rho_{i_R} \Rightarrow H^2 \propto GT^4$

sapevamo che: radiation domination $\Rightarrow a \propto \sqrt{t} \Rightarrow \dot{a} \propto \frac{1}{\sqrt{t}}$

$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto \frac{1}{t^2}$ ma anche $H^2 \propto T^4 \Rightarrow \frac{1}{t} \propto T^2$ c.v.d.

Facendo il conto esatto: $t[s] \simeq \frac{2}{\sqrt{g_{eff}}}\frac{1}{T^2[\mathrm{MeV}^2]}$

I neutrini si disaccoppiano quando $\Gamma = H$.

$$\Gamma = n \sigma v_{rel} = n \sigma c \propto T^3 \cdot S \cdot G_F^2 \cdot c \propto G_F^2 c T^5 \equiv H \propto \sqrt{\rho G} \propto \sqrt{T^4 G} = \sqrt{G}\, T^2$$

Quindi: $G_F^2 c T^3 \equiv \sqrt{G} \Rightarrow T^3 = \frac{\sqrt{G}}{G_F^2} \Rightarrow T = \frac{\sqrt[6]{G}}{G_F^{2/3}}$

In unità naturali:

$$\boxed{G = 6 \cdot 10^{-37}\ GeV^{-2}} \qquad \boxed{G_F = 1.16 \cdot 10^{-5}\ GeV^{-2}}$$

risulta: $T_{disacc.\,\nu} \simeq 1.8\ MeV \equiv T_D$

Dopodiché i ν non hanno più una T definita (non sono più all'equilibrio), ma $E \cdot a = \text{costante} \Rightarrow E_0 a_0 = E_D a_D$

$\Rightarrow$ definendo $T_{eff} \equiv T_D \frac{a_D}{a_0}$, siccome al disaccoppiamento la distribuzione resta congelata, i ν restano descritti da una Fermi-Dirac formale:

$$f(E) = \frac{1}{e^{E/T_{eff}} + 1}$$

A $T \sim 2\ MeV$ sono relativistici $e^\pm, \nu, \gamma$. Dopo T_D restano $e^\pm$ e γ, mantenuti in equilibrio dalla reazione:

$e^+ e^- \longleftrightarrow \gamma\gamma$ () che a $T < 1\ MeV$ va sottosoglia e procede solo verso destra.

Restano comunque anche e^+ ed e^- all'eq., ma si annichilano e diminuiscono molto. Fanno Compton coi fotoni.
In poco tempo l'entropia è tutta retta dai γ. Calcoliamo la temperatura attuale dei ν:

$$S = \frac{4}{3} \rho \frac{a^3}{T} \qquad \rho = \sum_i \rho_{i_R} = \frac{T^4 \pi^4}{30 \cdot 1{,}2} \sum_i g_i = \frac{T^4 \pi^4}{30 \cdot 1{,}2} g_{eff}$$

$$g_{eff}\Big|_{e^\pm\gamma} = \underbrace{\frac{7}{8} 2}_{e^-} + \underbrace{\frac{7}{8} \cdot 2}_{e^+} + \underbrace{2}_{\gamma} = \frac{11}{2} \qquad g_{eff}\Big|_\gamma = 2$$

$\boxed{Ta = \text{costante}}$

$$S\Big|_{e^\pm\gamma} \equiv S\Big|_\gamma \Rightarrow \cancel{\frac{4}{3}} \frac{T_p^4 \cancel{\pi^4}}{\cancel{30 \cdot 1{,}2}} \frac{11}{2} \frac{a_p^3}{T_p} = \cancel{\frac{4}{3}} \frac{T_d^4 \cancel{\pi^4}}{\cancel{30 \cdot 1{,}2}} 2 \frac{a_d^3}{T_d}$$

$$\Rightarrow (aT)^3_{e^\pm\gamma}\, g_{eff_{e^\pm\gamma}} = (aT)^3_\gamma\, g_{eff_\gamma} \Rightarrow (aT)_\gamma = \sqrt[3]{\tfrac{11}{4}}\, (aT)_{e^\pm\gamma}$$

Ma $(aT)_{e^\pm\gamma} = (aT)_{\nu_{ora}}$ perché i ν si sono disaccoppiati mantenendo la loro energia.

$$(aT)_{\gamma_{ora}} = \sqrt[3]{\tfrac{11}{4}}\, (aT)_{\nu_{ora}} \Rightarrow T_{\nu_0} = \sqrt[3]{\tfrac{4}{11}}\, T_{CMB} \simeq 1.7\ K$$

$\boxed{\eta_B}$ FRAZIONE DI MATERIA BARIONICA

$\eta_B \equiv \frac{n_B}{n_\gamma}$ B barioni

Si misura che: $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_B = 0.03$ quantità note

$\Omega_M = \frac{\rho_M}{\rho_c}$ $\Omega_B = \frac{\rho_B}{\rho_c} \approx \frac{1}{\rho_c} n_B m_B \cdot \frac{n_\gamma}{n_\gamma} = \frac{1}{\rho_c} \eta_B m_p n_\gamma$

barioni non relativistici

$$\Rightarrow \eta_B = \frac{\rho_c \Omega_B}{m_p n_\gamma} \approx \frac{10^{-29} \cdot 0{,}03 \cdot 6}{400 \cdot 10^{-23}} \simeq 9 \cdot 10^{-10}$$

DISACCOPPIAMENTO FOTONI

Andiamo ad energie dell'$\sim$ eV: le reazioni che avvengono sono:

- $\gamma e^- \leftrightarrow \gamma e^-$ $\quad \sigma \sim \alpha / m_e^2$
- $\gamma p \to \gamma p$ $\quad \sigma \sim \alpha / m_p^2$ trascurabile
- $e^- p \to H \gamma$ $\quad$ B.E.(H) $\sim$ 13.6 eV, che sono le T che stiamo considerando

Il 3° processo fa calare il numero di e^- liberi $\Rightarrow$ influenza il 1° processo.

$$\mu_e + \mu_p = \mu_H + \mu_\gamma = \mu_H + 0$$

Tutte le particelle sono NR eccetto i fotoni.

$$n_{i_{NR}} = g_i \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-m/T} e^{\mu_i/T}$$

Calcoliamo la frazione di atomi rispetto alla densità di e ep:

$$\frac{n_H}{n_e n_p} = \frac{g_H}{g_e g_p} \left(\frac{m_H}{m_e m_p}\right)^{3/2} e^{\overbrace{\frac{-m_H + m_e + m_p}{T}}^{B.E.(H)}} \cancel{e^{\overbrace{\mu_H - \mu_e - \mu_p}^{1}} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{3/2}} = \frac{g_H}{g_e g_p} \left(\frac{m_H}{m_e m_p}\right)^{3/2} e^{-\frac{B.E.}{T}} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{3/2}$$

$m_H \simeq m_p$, $g_H \simeq g_e g_p \Rightarrow$
$Q = 0 \Rightarrow n_{e^-} \simeq n_p \Rightarrow n_e n_p \simeq n_e^2$

$$\boxed{n_H = n_e^2 \left(\frac{2\pi}{m_e T}\right)^{3/2} e^{-\frac{B.E.}{T}}}$$

Vogliamo capire qual è la frazione di e^- liberi, che mantiene in equilibrio i γ con la 1° reazione

$$\frac{e^- \text{ liberi}}{e^- \text{ tot}} = \frac{n_e}{n_e + n_H} \equiv X_e = X_p = \frac{n_p}{n_p + n_H}$$

Osserviamo che: $\boxed{n_p + n_H = n_B}$

$\Rightarrow \boxed{X_e = \frac{n_p}{n_B}}$ Calcolo: $\frac{1 - X_e}{X_e^2} = \frac{n_H}{n_B} \frac{n_B^2}{n_p^2} = \frac{n_H n_B}{n_e^2} = n_B \left(\frac{2\pi}{m_e T}\right)^{3/2} e^{-\frac{B.E.}{T}} \cdot \frac{n_\gamma}{n_\gamma} \Rightarrow$

$$\frac{1 - X_e}{X_e^2} = \eta_B n_\gamma \left(\frac{2\pi}{m_e T}\right)^{3/2} e^{-\frac{B.E.}{T}}$$

N.B.: $n_\gamma \neq n_{\gamma_0}$!! $\quad \boxed{n_\gamma = \frac{2 \cdot 1{,}2}{\pi^2} T^3}$

Impongo che, dal disaccoppiamento dei γ in poi, X_e non sia cambiato.
$X_{e_0} = 10\%$.

Sappiamo che $a_D T_D = a_0 T_0 \Rightarrow T_D = \frac{a_D}{a_0} T_0 = (1+z_D) T_0$.

Vogliamo: $\Gamma \equiv H$. $\Gamma(\gamma e \to \gamma e) = n_e \sigma c$

H e Γ sono funzioni diverse di $(1+z)$: si incontrano nel punto $1+z \simeq 1100$. $\Rightarrow T_D \simeq 3000\,K$

Ed il momento in cui è avvenuto il disaccoppiamento dei γ è dato da:

$$t_D = \int_{z_D}^{\infty} \frac{dz}{(z+1)^{3/2} H_0 (z+1)}$$ dove $(z+1)^{3/2} \simeq E(z)$ in caso di M.D. Infatti

$$E(z) = \sqrt{\Omega_{\Lambda_0} + (1+z)^3 \Omega_{M_0} + (1+z)^2 \Omega_{K_0}}$$ $\left(\text{da } \frac{\dot a}{a} = H_0 E(z)\right)$ *

$$* \quad \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = H_0 E(z) \Rightarrow \int_0^{a(z)} \frac{da}{a\, H_0\, E(z)} = \int_0^{T_D} dt$$

sto supp. che ∃ big bang

Cambio variabile: $\frac{a_0}{a} = 1+z \Rightarrow -da = \frac{a_0}{(1+z)^2} dz \Rightarrow \int = \int_{\infty}^{z} \frac{-\cancel{a_0}}{(1+z)^{\cancel{2}}} \frac{dz}{\cancel{a_0}\, E(z)} \cancel{(1+z)} \frac{1}{H_0}$

$$\int_0^{T_D} dt = \int_{Z}^{\infty} \frac{-dz}{E(z)(1+z) H_0}$$

Matter domination: $E(z) \simeq (1+z)^{3/2} \sqrt{\Omega_{M_0}}$

dalle misure attuali $\simeq 0.55$

$$T_D = \frac{-1}{\sqrt{\Omega_{M_0}}} \frac{1}{H_0} \int_{z_D}^{\infty} dz \left(\frac{1}{1+z}\right)^{+\frac{3}{2}-1} = \frac{-2}{3 H_0 \sqrt{\Omega_{M_0}}} \left[\left(\frac{1}{1+z}\right)^{+\frac{3}{2}}\right]_{z_D}^{\infty} = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_{M_0}}} \frac{1}{(1+z_D)^{3/2}}$$

MATERIA OSCURA

$\Omega_B = 0.03$, $\Omega_M = 0.3$, e il resto? Ad es. neutrini: $n_\nu \simeq 400\ \nu/cm^3$

$$\Omega_\nu = \frac{\rho_\nu}{\rho_c} = \frac{m_\nu n_\nu}{\rho_c} \simeq 0.07\ m_\nu[eV]$$

Imponendo $\Omega_\nu \equiv 0.3$ si ottiene $m_\nu \equiv 5$ eV, ma le misure sperimentali dicono $m_\nu \ll$ eV.

Supponiamo che $\exists$ una particella ignota χ mantenuta all'equilibrio dalla reazione:

$$\chi + \bar{\chi} \longleftrightarrow \bar{X} + X \qquad \text{con } X \text{ particella nota.}$$

Allora:

$$\frac{dN_{\chi+\bar\chi}}{dV\,dt} = -\sigma_{\chi\bar\chi} v_\chi n_\chi^2 + \sigma_{X\bar X} v_X n_X^2$$

All'equilibrio $dVdt\, N_{\chi+\bar\chi} = 0 \Rightarrow \sigma_{\chi\bar\chi} v_\chi n_{\chi_{eq.}}^2 = \sigma_{X\bar X} v_X n_{X_{eq.}}^2$

Supponiamo che ad un certo punto χ e $\bar\chi$ escano dall'equilibrio, mentre X e $\bar X$ no: allora

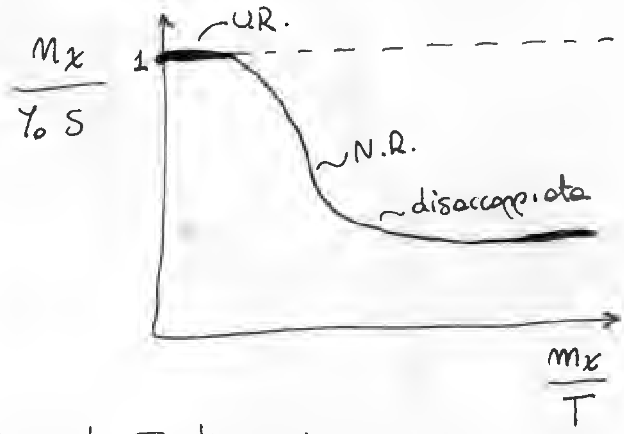
$$\frac{dN_{\chi\bar\chi}}{dV\,dt} = -\sigma_{\chi\chi} v_\chi n_\chi^2 + \sigma_{X\bar X} v_X n_{X_{eq.}}^2 = -\sigma_{\chi\bar\chi} v_\chi \left[n_\chi^2 - n_{\chi_{eq.}}^2\right]$$

$dV \equiv a^3$

$$\frac{1}{a^3}\frac{d}{dt}(n_\chi a^3) = -\langle\sigma_{\chi\chi} v_\chi\rangle\left(n_\chi^2 - n_{\chi_{eq}}^2\right)$$

dove la media è fatta su tutte le particelle X che possono fare reazioni di questo tipo.

Studiamo l'andamento di:



- $T \gg m_\chi$ la specie è relativistica $\Rightarrow n_\chi \propto T^3$. Sappiamo che $S \propto a^3 T^3 \Rightarrow n_\chi/s \to$ costante per $m_\chi/T \to 0$.

$$\lim_{\frac{m_\chi}{T}\to 0} \frac{n_\chi}{s} \equiv Y_0$$

$$\Rightarrow \frac{n_\chi}{Y_0 S}\left(\frac{m_\chi}{T} = 0\right) = 1$$

- Quando T diminuisce n_χ cambia forma e viene esponenzialmente soppresso da $\exp\left(-\frac{m_\chi}{T}\right)$.
- Ad un certo punto χ esce dall'equilibrio e si disaccoppia $\Rightarrow n_\chi a^3$ rimane costante: $\frac{d}{dt}(n_\chi a^3) \simeq 0$

Per i ν, che si disaccoppiano quando sono ancora relativistici, la curva rimarrebbe costante.

EQUAZIONE DI BOLTZMANN

$$\boxed{x \equiv \frac{m_\chi}{T} \qquad y \equiv \frac{n_\chi}{s} \qquad x\frac{dy}{dx} = -\frac{\langle\sigma_{\chi\chi} v_\chi\rangle n_{\chi_{eq}}^2}{H}\, y_{eq}\left[\frac{y^2}{y_{eq}^2} - 1\right]}$$

Se la χ che si disaccoppia, a prescindere dalla sua massa, ha una sezione d'urto non esagerata ($\sim m_\chi^2$), x_D = valore di m_χ/T per cui χ si disaccoppia dipende solo logaritmicamente da m_χ ⇒ posso ragionarci su abbastanza tranquillamente.

$$\Gamma \equiv H \qquad \Gamma = n\sigma v \qquad H^2 = \frac{8}{3}\pi G \rho$$

- Hot dark matter: si disaccoppia da relativistica (tipo ν)
- Cold dark matter: " " non relativistica

Consideriamo la CDM, dato che abbiamo già escluso i ν.

$$n\sigma v = \left[\frac{8}{3}\pi G \underbrace{\rho}_{\text{dell'universo, non delle } x}\right]^{1/2} \qquad n_{NR} = g\left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{T}}$$

A ρ contribuisce solo la materia relativistica: $\rho = \frac{\pi^2}{30} T^4 g_{eff}$

$$H = \sqrt{\frac{8}{3}\pi G \rho} = \frac{1{,}66}{M_p} T^2 \sqrt{g_{eff}} \qquad \text{avendo usato } \boxed{G = \frac{1}{M_p^2}}$$

La particella è N.R., voglio esprimere tutto in f. di T. Per il teorema di equipartizione dell'energia:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} KT \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3KT}{m}}$$

$$\Gamma = H \Rightarrow \sigma g \left(\frac{m\cancel{T}}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-m/T} \left(\frac{3K\cancel{T}}{m}\right)^{1/2} = \frac{1{,}66}{M_p} \cancel{T^2} \sqrt{g_{eff}}$$

Mettiamo la temperatura in eV ⇒ $KT \equiv T$

$$\sigma m g\, e^{-m/T} \frac{\sqrt{3}}{(2\pi)^{3/2}} = 1{,}66 \frac{1}{M_p}\sqrt{g_{eff}}$$

Porto a destra tutto tranne $e^{-m/T}$ e faccio il logaritmo, ottenendo.

$$\frac{m_x}{T_D} = X_D = \ln\left[\frac{\sigma\, m_x\, g\, M_p \sqrt{3}}{1{,}66\,(2\pi)^{3/2}\sqrt{g_{eff}}}\right] = \ln\left[C_1 \cdot \sigma_{xx}\, m_x\right]$$

Se l'interazione è debole: $\sigma_{xx} \sim G_F^2 m_x^2 \Rightarrow x_D = \ln\left[C_1 \cdot G_F^2 M_p m_x^3\right]$

Per vari valori di m_x, usando: $\boxed{M_p = \frac{1}{\sqrt{G}} = 10^{18}\,\text{GeV}}$ $\boxed{G_F \simeq 10^{-5}\,\text{GeV}^{-2}}$

$m_x \equiv 1\,\text{GeV} \Rightarrow x_D = 17 \div 18$
$m_x \equiv 100\,\text{GeV} \Rightarrow x_D = 27 \div 29$

Prendiamo quindi un valore approssimativo di $X_D \simeq 25$. Voglio calcolare la densità attuale ρ_{x_0} di queste particelle, partendo da quella al momento del disaccoppiamento.

$$\sigma n_D v = \frac{1.66}{M_p}\sqrt{g_{eff}}\, T_D^2 \qquad n_D a_D^3 = n_0 a_0^3 \Rightarrow \qquad n_{x_0} = \left(\frac{a_D}{a_0}\right)^3 \frac{1.66}{M_p}\sqrt{g_{eff}}\,\frac{T_D^2}{\sigma v}$$

$\left(\frac{a_D}{a_0}\right) = \left(\frac{T_D}{T_{CMB}}\right)^{-1}$ Ma i γ erano ancora all'equilibrio con le x ⇒ erano alla stessa temperatura. (A meno di un fattore $2/g$ di quando i γ prendono la S degli $e^\pm$).

$$n_{x_0} = \frac{1.66\sqrt{g_{eff}}}{M_p \sigma v T_D} T_{CMB}^3 \qquad v = \sqrt{\frac{3T}{m}} \Rightarrow \qquad n_{x_0} = \frac{1.66\sqrt{g_{eff}}\, 2}{\sqrt{3}\; g}\frac{1}{M_p \sigma}\frac{T_{CMB}^3}{T_D^{3/2}}\sqrt{m_x}$$

$$\rho_{0_x} = m_x n_x \Rightarrow \boxed{\Omega_x = \frac{m_x n_x}{\rho_c} = \frac{T_{CMB}^3}{M_p \rho_c \sigma} X_D^{3/2}}$$

$X_D \simeq 25$, $\Omega_x \equiv 0.3$ ⇒ ricavo $\boxed{\sigma = 3 \cdot 10^{-36}\,\text{cm}^2}$

Se adesso imponiamo $\sigma = G_F^2 m_\chi^2$ otteniamo $\boxed{m_\chi \simeq 5\ \text{GeV}}$.
Ma non si è ancora vista una particella del genere. Abbiamo usato $\sigma \sim G_F^2 m^2$ che è vero solo a basse energie. Se usiamo la vera σ_{weak} del Modello Standard, cioè $\sigma \propto \frac{g_W^2}{(s+M_W^2)^2}$, otteniamo $\boxed{m_\chi \simeq 2\ \text{TeV}}$.

RIVELAZIONE MATERIA OSCURA

- Produzione agli acceleratori ($E_{missing}$)
- $\chi\bar{\chi} \to X\bar{X}$ (riv. indiretta)
- Rivelazione diretta: scattering su nucleone.
  Le wimp sono ferme nella galassia, il sole si muove $\Rightarrow$ i nostri nucleoni possono andare a sbattere su qualcuna di esse. Siccome $v_{Terra} \simeq \frac{1}{10} v_\odot$ (moto di rivoluzione attorno al sole), ci aspettiamo una modulazione del segnale con periodo 1 anno.

MATERIA OSCURA

- NO barioni: $\eta_B \simeq 6\,10^{-10} \Rightarrow \Omega_B \simeq 0.03 \div 0.04$
- NO neutrini: $n_{\nu_0} \sim n_{\gamma_0} \Rightarrow 0.3 = m_\nu n_{\gamma_0}/\rho_c \Rightarrow m_\nu \simeq 5$ eV
  ma esperimenti danno $m_1 \ll$ eV e Δm^2_{ij} molto piccoli
- supp. $\exists\ \chi$ tenuta all'eq. dalla reazione $\chi\bar{\chi} \leftrightarrow X\bar{X}$, X nota:

$$\frac{dN_\chi}{dt\,dV} = -\Gamma_{\chi\bar{\chi}} + \Gamma_{X\bar{X}} = n^2_\chi \sigma_{\chi\bar{\chi}} v_\chi - n^2_X \sigma_{X\bar{X}} v_X$$

$$0 = n^2_{\chi_{eq}} \sigma_{\chi\bar{\chi}} v_\chi - n^2_{X_{eq}} \sigma_{X\bar{X}} v_X$$

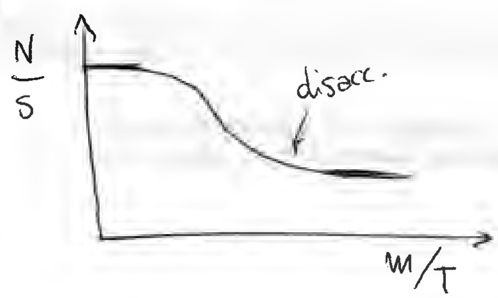
- Supp. che:
  - vale CPT
  - χ escono dall'eq.
  - X vengono mantenute all'eq. da altre reaz.

$$\Rightarrow \frac{dN_\chi}{dt\,dV} = \sigma_{\chi\bar{\chi}} v_\chi \left[n^2_\chi - n^2_{\chi_{eq}}\right]$$

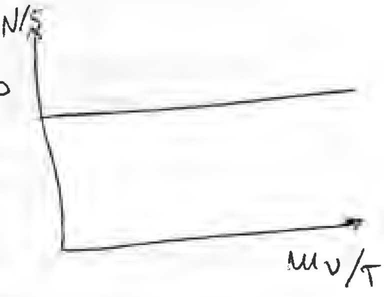
- Sappiamo che

$$n_{NR} \sim e^{-m/T} \qquad n_{UR} \sim T^3$$

$\Rightarrow$
- all'inizio T alta $\Rightarrow \chi$ u.r. $\Rightarrow N_\chi \sim a^3 T^3$. Ma anche $S \sim a^3 T^3 \Rightarrow N/S$ cost.
- dopo le χ diventano n.r. e il loro numero è soppresso da $a^3 e^{-m/T}$
- dopo, quando si disaccoppiano, $N \sim$ costante. Anche S costante $\Rightarrow N/S$ costante di nuovo:



per i ν, che si disaccoppiano da u.r., si avrebbe:



È possibile dimostrare che il valore di m/T per cui le χ si disaccoppiano dipende solo logaritmicamente da m_χ:

$$m_\chi = 1\text{ GeV} \Rightarrow \frac{m_\chi}{T_D} \sim 17 \qquad m_\chi = 100\text{ GeV} \Rightarrow \frac{m_\chi}{T_D} \sim 29$$

Vogliamo calcolare la ρ_{χ_0}. Sappiamo che $n a^3$ - cost. $\Rightarrow n_0 = n_D \left(\frac{a_D}{a_0}\right)^3$

Sappiamo che i γ erano ancora all'eq. quando i χ si sono disaccoppiati $\Rightarrow T_D^{\chi} = T_D^{\gamma}$ ma per i γ $a \cdot T = \text{cost}$

$\Rightarrow T_D^{\chi} = T_{\gamma 0} \frac{a_0}{a_D} \Rightarrow n_{\chi_0} = n_{\chi_D} \left(\frac{T_{0\gamma}}{T_{\chi_D}} \right)^3$

Al disaccoppiamento i χ erano non rel. $\Rightarrow n_{\chi_D} \sim \left(\frac{m_\chi T_D}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m_\chi / T_D}$

Ma sappiamo che il disaccoppiamento è dato da $\Gamma = H$, ovvero

$$n_{\chi_D} \sigma_\chi v_\chi = \frac{1.66}{M_p} \sqrt{g_{eff}}\, T_D^2 \Rightarrow n_{\chi_D} = \frac{1.66 \sqrt{g_{eff}}}{M_p} T_D^2 \frac{1}{\sigma_\chi} \frac{1}{v_\chi}$$

$$v_\chi = \sqrt{\frac{3T}{m_\chi}} \Rightarrow n_{\chi_D} = \text{cost.} \frac{T^2}{\sigma_\chi} \sqrt{\frac{m_\chi}{3T_D}}$$

$$n_{\chi_0} = \frac{1{,}66 \sqrt{g_{eff}}}{M_p} \frac{T_D^2}{\sigma_\chi} \frac{\sqrt{m_\chi}}{\sqrt{3 T_D}} \frac{T_{CMB}^3}{T_D^3}$$

$$\rho_{\chi_0} = \frac{1{,}66 \sqrt{g_{eff}}}{M_p \sqrt{3}} \left[\frac{m_\chi^{3/2}}{T_D^{3/2}} \right] \frac{T_{CMB}^3}{\sigma_\chi}$$

Se ora pongo un valore ragionevole di $m_\chi / T_D \cong 25$ ottengo:

$M_p \sim 10^{18}\,\text{GeV} \sim 10^{27}\,\text{eV}$

$$\frac{\rho_{\chi_0}}{\rho_c} \cong 0.3 \Rightarrow \frac{1{,}66 \sqrt{g_{eff}}}{\rho_c M_p \sqrt{3}} 25^{3/2} \frac{T_{CMB}^3}{\sigma_\chi} = 0{,}3$$

$$\sigma_\chi = 0{,}3 \frac{\rho_c M_p \sqrt{3}}{1{,}66 \sqrt{g_{eff}}} \frac{1}{25^{3/2}} \frac{1}{T_{CMB}^3}$$

$$g_{eff} = \Big[\underbrace{\tfrac{7}{8} \cdot 4}_{e^\pm} + \underbrace{\tfrac{7}{8} \cdot 6}_{\nu_x \bar{\nu}_x} + 1 \Big] \cdot 2 = 7 + \frac{7}{2} + 2 = \frac{14 + 7 + 4}{2} \simeq 12{,}5$$

$\sqrt{g_{eff}} \sim 3.5$ $\qquad 25^{3/2} \simeq 125$

$$\sigma_\chi = \frac{0{,}3 \; 10^{-29} \; 10^{27} \sqrt{3}}{1{,}66 \;\; 3{,}5 \;\; 1{,}25 \; 10^2 \left(2{,}7 \cdot 8{,}6 \cdot 10^{-5} \right)^3} \quad \frac{g}{cm^3} \frac{eV}{eV^3}$$

EQUAZIONI DI FRIEDMANN

$$H^2 = \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G \rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \qquad (1)$$

$$H^2 = \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = -8\pi G p + \Lambda - \frac{k}{a^2} - 2\frac{\ddot a}{a} \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p\frac{d}{dt}(a^3) \qquad \text{(eq. di cont.)}$$

In una diversa formulazione:

$$4\pi G(\rho + 3p) = -3\frac{\ddot a}{a} \qquad (3)$$

$$4\pi G(\rho - p) = 2k + 2\dot a^2 + a\ddot a \qquad (4)$$

(*)
$\left(\text{con } \rho = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G},\ p = p - \frac{\Lambda}{8\pi G}\right)$

Equazione di stato: $p = \alpha\rho$

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -\alpha\rho\frac{d}{dt}(a^3) \Rightarrow \frac{d\rho}{dt}a^3 + 3a^2\rho\frac{da}{dt} = -3\alpha\rho a^2\frac{da}{dt}$$

$$\frac{d\rho}{dt}\cancel{a^3} = -(3\rho + 3\alpha\rho)\cancel{a^2}\frac{da}{dt}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(\alpha+1)\frac{da}{a}$$

$$\int\frac{1}{\rho}d\rho = -3(\alpha+1)\int\frac{1}{a}da$$

$$\ln\rho = -3(\alpha+1)\ln a$$

$$\rho = k a^{-3(\alpha+1)} \qquad (5)$$

Dalla (2) e dalla (5) otteniamo anche $a \propto t^\beta$ con $\beta = \frac{2}{3(\alpha+1)}$.

Dallo studio di $T_{\mu\nu}$ a basse energie

matter domination $\Rightarrow p = 0$, $\alpha = 0$, $\rho \sim a^{-3}$, $a \sim t^{2/3}$

Ad alte energie:

radiation domination $\Rightarrow p = \frac{1}{3}\rho$, $\alpha = \frac{1}{3}$, $\rho \sim a^{-4}$, $a \sim \sqrt{t}$

Dalle (*) vediamo che:

Λ-domination: $p = -\rho$, $\alpha = -1$, $\rho = \frac{\Lambda}{8\pi G}$, da (3):

$$\cancel{-}\frac{3\ddot a}{a} = \cancel{4\pi G}\left(\cancel{-2}\frac{\Lambda}{\cancel{8\pi G}}\right) \Rightarrow \frac{\ddot a}{a} = \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow a \sim e^{\sqrt{\Lambda/3}\,t}$$

Dalla (1). $H^2 = 8\pi G \rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \Rightarrow 1 = \frac{8\pi G \rho}{3H^2} + \frac{\Lambda}{3H^2} - \frac{k}{H^2 a^2}$

Def: $\frac{3H^2}{8\pi G} \equiv \rho_c \qquad \Omega_M \equiv \frac{\rho}{\rho_c} \qquad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \qquad \Omega_k = -\frac{k}{H^2 a^2}$

$\Rightarrow 1 = \Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_k$

matter domination $\Rightarrow \rho \sim a^{-3}$

Utilizzando i parametri attuali:

$$\frac{\Omega_M}{\Omega_{M_0}} = \frac{a_0^3 H_0^2}{a^3 H^2} \qquad \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{\Lambda_0}} = \frac{H_0^2}{H^2} \qquad \frac{\Omega_k}{\Omega_{k_0}} = \frac{H_0^2 a_0^2}{H^2 a^2}$$

$$1 = \frac{a_0^3 H_0^2}{a^3 H^2}\Omega_{M_0} + \frac{H_0^2}{H^2}\Omega_{\Lambda_0} + \frac{H_0^2 a_0^2}{H^2 a^2}\Omega_{k_0}$$

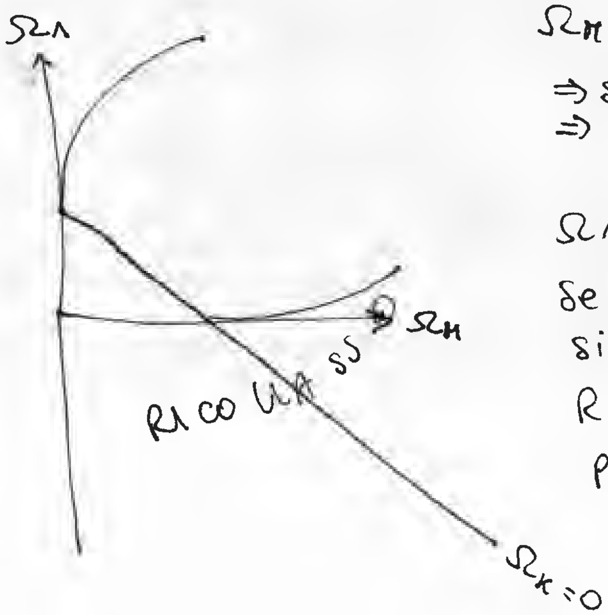
$$H^2 = H_0^2 \left[\frac{a_0^3}{a^3}\Omega_{M_0} + \Omega_{\Lambda_0} + \frac{a_0^2}{a^2}(1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{\Lambda_0}) \right]$$

Def.: $\frac{a}{a_0} \equiv R \Rightarrow \frac{\dot a}{a_0} = \dot R$

$$H^2 = \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 \left(\frac{a_0}{a_0}\right)^2 = \frac{\dot R^2}{R^2} = H_0^2 \left[R^{-3}\Omega_{M_0} + \Omega_{\Lambda_0} + R^{-2}(1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{\Lambda_0}) \right]$$

$$\dot R^2 = H_0^2 \left[\Omega_{M_0}\left(\frac{1}{R} - 1\right) + \Omega_{\Lambda_0}(R^2 - 1) + 1 \right]$$

Dalla (1), se $a \to \infty$ $H^2 \to \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow \Lambda > 0$. Se, per contro, $\Lambda < 0$, a non può aumentare indefinitamente $\Rightarrow$ ricollasso.



Ω_M grande, $\Omega_{\Lambda_0} \ll 1$

$\Rightarrow$ se R cresce molto $\dot R^2 / H_0^2 < 0$ ASSURDO

$\Rightarrow$ ricollasso

Ω_Λ grande, $\Omega_M \ll 1$

se R diminuisce fino ad $R^2 < 1$ si ha $\dot R^2 / H^2 < 0 \Rightarrow$ assurdo $\Rightarrow$ R non può essere stato infinitamente piccolo $\Rightarrow$ No big bang.

DISACCOPPIAMENTO ν

$\Gamma = H \qquad H = \sqrt{\frac{8}{3}\pi G \rho}$ a piccole a domina la materia u.r. $\Rightarrow \rho \sim T^4$

$\Gamma = n_\nu \sigma v \sim T^3 G_F^2 T^2 \sim G_F^2 T^5$

Come ord. di g.: $\sqrt{G}\, T^2 = G_F^2 T^5 \Rightarrow T_D^3 = \frac{\sqrt{G}}{G_F^2}$ $\left(\begin{array}{l} \sqrt{G} = \frac{1}{M_P} = \frac{1}{10^{18} GeV} \\ G_F = 10^{-5} GeV^{-2} \end{array} \right)$

$\Rightarrow T_D \sim 1$ MeV $\Rightarrow t_D \sim 1$ sec

DISACCOPPIAMENTO γ

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \gamma e^- \longleftrightarrow \gamma e^- \\ (2) & e^- p \longrightarrow H + \gamma \end{array}\right\}$$ a temp. $\sim$ eV.
(più altri proc. con σ piccola)

La (2) diminuisce la frazione di e^- liberi $\Rightarrow$ rallenta la 1.
A queste T solo i γ sono relativistici.

$$n_i \sim g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-m_i/T}$$

Voglio calc. la frazione di e^- liberi $x_e = \frac{n_e}{n_e + n_H}$. 2 modi

semplice: $\frac{n_e}{n_e + n_H} = \frac{n_p}{n_p + n_H} = \frac{n_p}{n_B} \cdot \frac{n_\gamma}{n_\gamma} = \frac{n_p}{n_\gamma} \eta_B = n_p \eta_B \frac{1}{n_{\gamma 0}} \frac{a^3}{a_0^3} = \frac{n_p}{n_{\gamma 0}} \eta_B (1+z)^3$

difficile: calc. $\frac{n_H}{n_e n_p} \rightarrow$ calc. $\frac{1 - x_e}{x_e^2}$ ...

$H \sim H_0 \sqrt{(1+z)^3 \Omega_{M0}}$

$n_e \sim x_e \eta_B n_\gamma \sim x_e(z)(1+z)^3$

Incrocio le due funzioni di z $\Rightarrow$ trovo $z \sim 1100$.

Se $\Omega_{M0} \sim 1 \qquad t(z) = \int_z^\infty \frac{dz}{(1+z) H_0 E(z)} \sim \frac{1}{H_0} \int_z^\infty \frac{dz}{(1+z)^3} \sim 10^5$ anni