

10/10/2008

ELETTROMAGNETISMO

	OTTOBRE	NOVEMBRE	DICEMBRE	GENNAIO
Mercoledì 14-15-18	16 21 (28)	4 11 18 25	(2) 9 16	13 20 (27)
Venerdì 15-16-30	10 17 24 (31)	7 14 21 28	5 12 19	9 16 23 (30)

COSTITUENTI DELLA MATERIA

protoni neutroni elettroni
 $m_p \approx 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \approx m_n$ $m_e \approx 0,9 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$
 $q_p > 0$ $q_p = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ $q_n = 0$ $q_e < 0$ $q_e = -q_p$

$$|q_p| = |q_e|$$

F

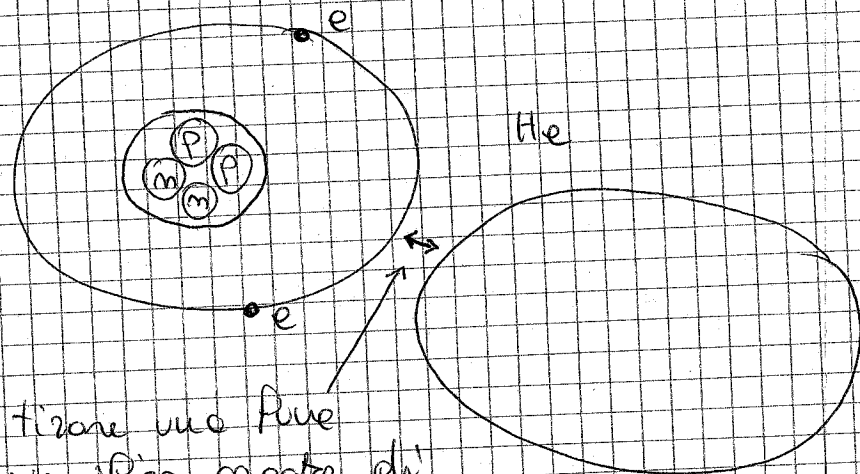
$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



gravitazione universale
(forza a distanza)

In natura F 4 tipi di forze:

- gravitazionale *
- elettromagnetica (f. di contatto)
- nucleare forte *
- nucleare debole *
- * f. a distanza

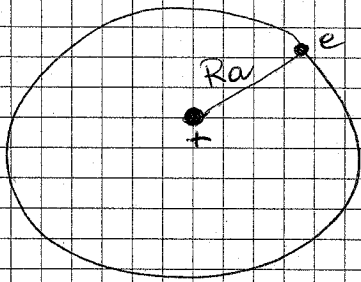


forza non f. a
significativa causa di
abbottonare 2 atomi

R (diam. nucleo) $\approx 10^{-15}$ m

I protoni sono sottoposti ad enormi forze repulsive, ma le forze nucleari forti li tengono insieme.

Le forze nucleari deboli determinano i decadimenti radioattivi.

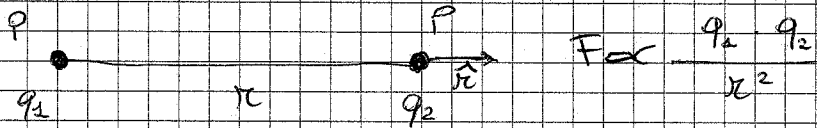


$$R_a \approx 10^{-10} \text{ m}$$

$$R_n \approx 10^{-15} \text{ m}$$

$$R_e \approx ? \leq 10^{-15} \text{ m}$$

cariche puntiformi



$$F \approx k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

dipende da come misuro le cariche elettriche

$$[q] = \sqrt{[F][L^2]} \quad \text{coulomb}$$

$$k \approx 9 \cdot 10^9 \quad [k] = \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^3}{\text{C}^2 \cdot \text{s}^2} \right]$$

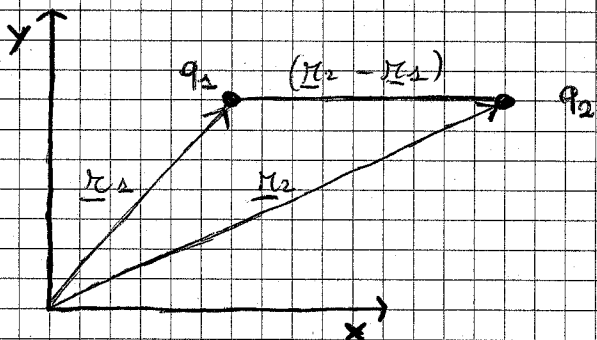
la direzione di F è quella individuata dalla retta che passa per le due particelle.

\underline{F}_{12} è la forza esercitata da q_1 su q_2

$$\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

LEGGE DI COULOMB

vale per cariche puntiformi.



$$\underline{r}_{12} = x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j} + z_1 \underline{k}$$

- \underline{i} versore x
- \underline{j} versore y
- \underline{k} versore z

$$\underline{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^2} \frac{(\underline{r}_2 - \underline{r}_1)}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|} \text{ esercitata dallo primo} \\ \text{particella sullo seconde}$$

$$= K \frac{q_1 q_2 (\underline{r}_2 - \underline{r}_1)}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^3}$$

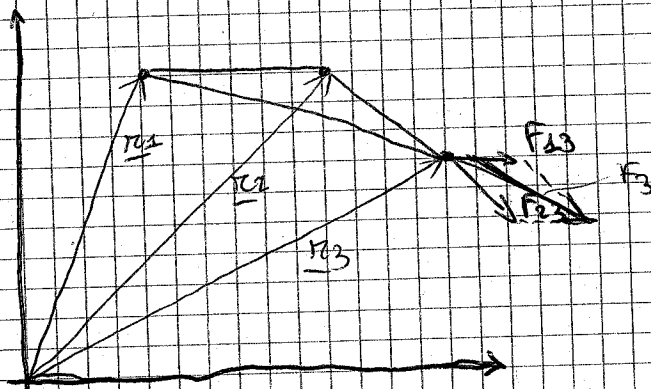
$$|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^3 = ?$$

$$(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) = (x_2 - x_1)\underline{i} + (y_2 - y_1)\underline{j} + (z_2 - z_1)\underline{k}$$

$$|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^3 = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]^{\frac{3}{2}}$$

$$\underline{F}_{12} = (F_{12x})\underline{i} + (F_{12y})\underline{j} + (F_{12z})\underline{k}$$

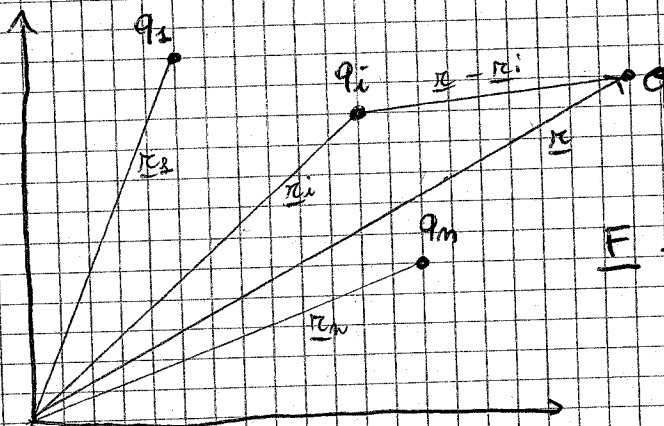
$$F_{12y} = \frac{K q_1 q_2}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^3} (y_2 - y_1)$$



$$\underline{F}_B = \underline{F}_{13} + \underline{F}_{23}$$

$$\underline{F}_{13} = K \frac{q_1 q_3}{|\underline{r}_3 - \underline{r}_1|^3} (\underline{r}_3 - \underline{r}_1)$$

$$\underline{F}_{23} = K \frac{q_2 q_3}{|\underline{r}_3 - \underline{r}_2|^3} (\underline{r}_3 - \underline{r}_2)$$



$$\underline{F} = q \sum_{i=1}^n K \frac{q_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3} (\underline{r} - \underline{r}_i)$$

$$\underline{E} = \frac{\underline{F}}{q} = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3} (\underline{r} - \underline{r}_i)$$

Principio di sovrapposizione

↑
Campo elettrostatico

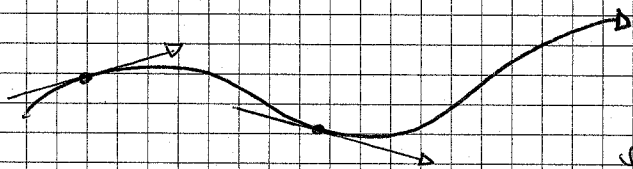
Fissati gli \underline{r}_i e q_i , \underline{E} dipende solo dalla posizione individuata da \underline{r}

Campo elettrostatico := campo elettrico

$$\underline{E} = \underline{E}(\underline{r})$$

è una perturbazione delle proprietà dello spazio dovuta alla presenza delle cariche.

$$\underline{F} = q \underline{E}$$

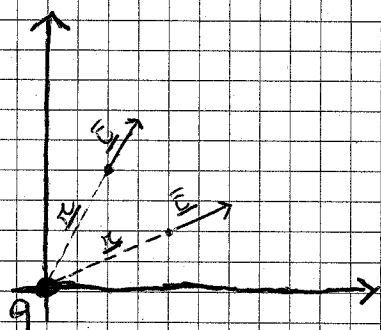
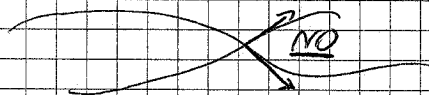


LINEA DI FORZA

in ogni punto la tangente è \underline{E}

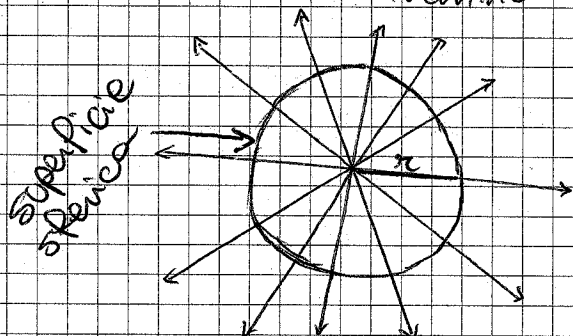
Le linee di forza occupano tutto lo spazio, per convenzione se ne disegnano solo alcune.

Le linee di forza non si possono incrociare.



$$\underline{E}(\underline{r}) = k \frac{q_i}{r^3} \underline{r}$$

Le linee di forza escono dal punto dove si trova la particella e vanno all'infinito



$N =$ linee di forza diseguate

$$\frac{N}{4\pi r^2} = n \text{ num. di linee di forza / unit\`a di superficie}$$

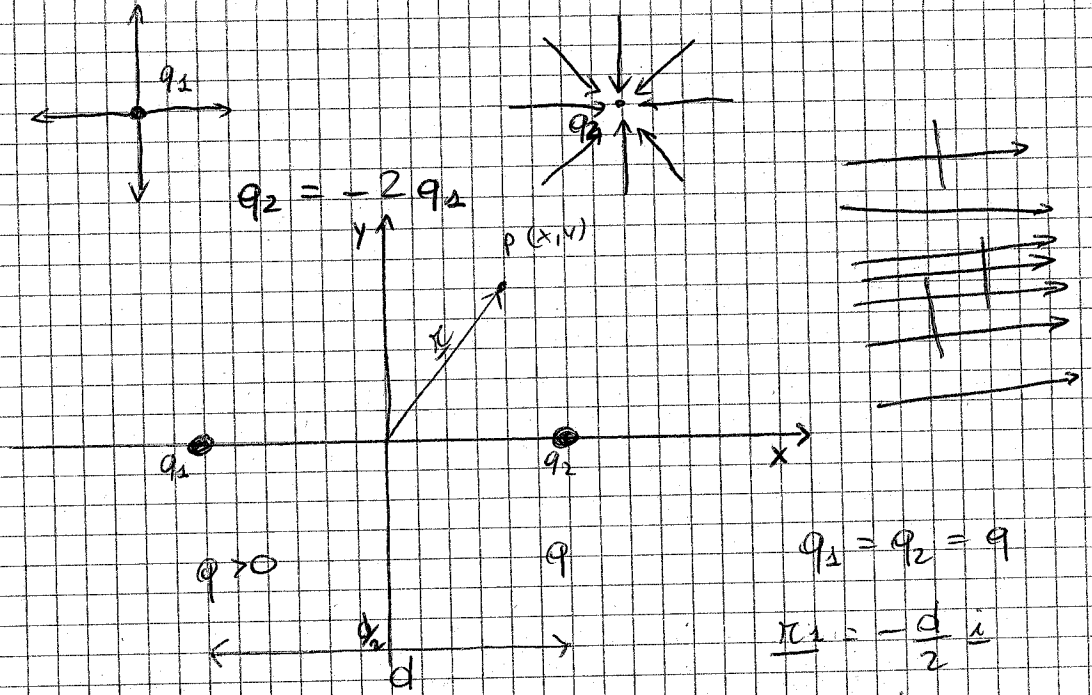
$$\underline{E}(\underline{r}) = k \frac{q}{r^3} \underline{r}$$

$$E(r) = \frac{kq}{r^2}$$

$$\frac{k}{4\pi\epsilon^2} = n$$

$$\propto \frac{1}{r^2}$$

la densità di linee di forza è proporzionale all'intensità del campo elettrico



$$q_1 > 0$$

$$q_2 = -2q_1$$

$$q_1 = q_2 = q$$

$$\underline{r}_1 = -\frac{d}{2} \underline{i}$$

$$\underline{r}_2 = \frac{d}{2} \underline{i}$$

$$\underline{r} = x \underline{i} + y \underline{j}$$

$$\underline{E} = \sum_{i=1}^n \underline{E}_i$$

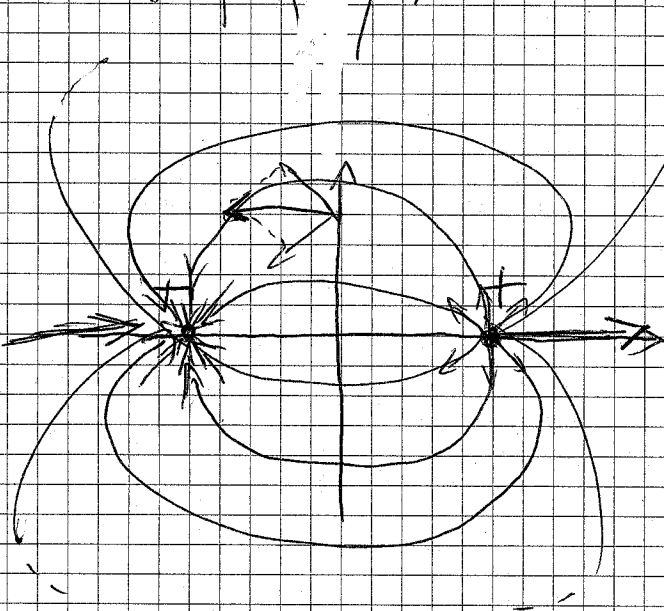
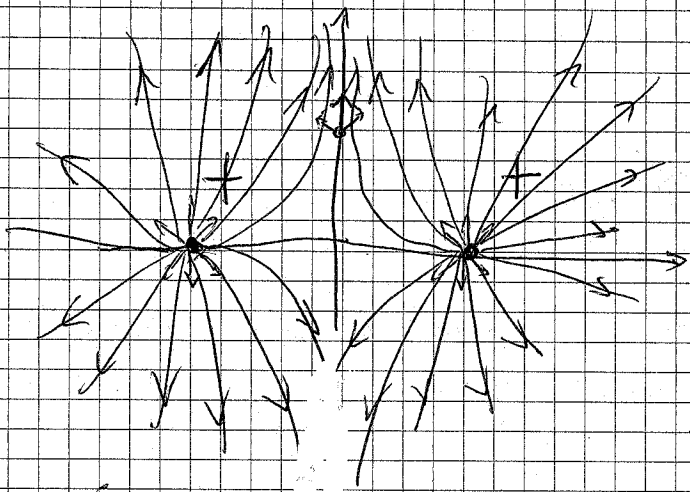
$$\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}(x, y) = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 = E_x \underline{i} + E_y \underline{j}$$

$$= \frac{kq_1}{|\underline{r} - \underline{r}_1|^3} (\underline{r} - \underline{r}_1) + \frac{kq_2}{|\underline{r} - \underline{r}_2|^3} (\underline{r} - \underline{r}_2) =$$

$$= \frac{kq_1}{\left| \underline{r} + \frac{d}{2} \underline{i} \right|^3} \left[\left(x + \frac{d}{2} \right) \underline{i} + y \underline{j} \right] + \frac{kq_2}{\left| \underline{r} - \frac{d}{2} \underline{i} \right|^3} \left[\left(x - \frac{d}{2} \right) \underline{i} + y \underline{j} \right] =$$

$$= k \left\{ q_1 \frac{\left[\left(x + \frac{d}{2} \right) \underline{i} + y \underline{j} \right]}{\left[\left(x + \frac{d}{2} \right)^2 + y^2 \right]^{3/2}} + \frac{\left[\left(x - \frac{d}{2} \right) \underline{i} + y \underline{j} \right]}{\left[\left(x - \frac{d}{2} \right)^2 + y^2 \right]^{3/2}} q_2 \right\}$$

$$\frac{E_y}{E_x} = \text{direzione linee di forza}$$



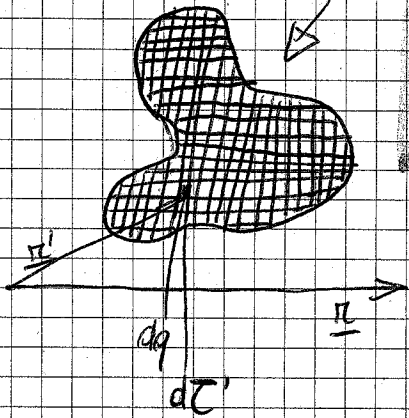
$$q_1 - q_2 = 0$$

$$q_1 = -q_2$$



DIPOLO
ELETTRICO

corpo microscopico



$$\vec{E} = \int d\vec{E} = k \int \frac{dq}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} (\underline{r} - \underline{r}')$$

densità di carica volumetrica
 $f(\underline{r}') = \frac{dq}{dT'}$

$$dq = f dT'$$

Diventa un integrale di volume:
 per sovrapposizione

$$\vec{E} = \int_V \frac{f(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} (\underline{r} - \underline{r}') dT'$$

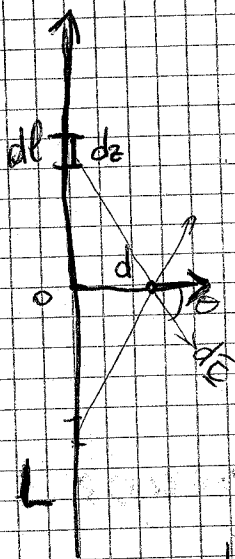
densità di carica superficiale:

$$f(\underline{r}') = \frac{dq}{d\Sigma} \quad dq = f d\Sigma$$

↑
superficie

densità di carica lineare:

$$\lambda(z) = \frac{dq}{dz} \quad dq = \lambda dz$$



$$\lambda = \frac{dq}{dz} \quad d \ll L$$

$$\lambda = \frac{Q}{L} > 0 \quad (\text{omogenea})$$

$$\lambda = \frac{dq}{dz} \quad dq = \lambda dz$$

$$d\vec{E} = \frac{k dq}{d^2 + z^2} \quad \text{modulo del campo elettrico generato da } dq$$

Ma serve la componente orizzontale:

$$dE_x = \frac{k dq}{d^2 + z^2} \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + z^2}}$$

$$dE_z = 0$$

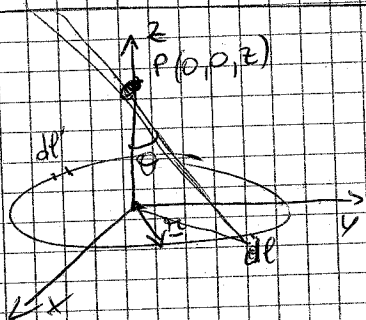
$$E_x = \frac{2k\lambda}{d}$$

generato dai 2 dl simmetrici

$$dE_x = \frac{2k dq d}{(d^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\int dE_x = 2kd \int \frac{\lambda dz}{(d^2 + z^2)^{3/2}} = E_x$$

considerando filo "infinito"



anello centrato nell'origine uniformemente carico

$$\frac{Q}{2\pi R} = \lambda \quad dq = \lambda dl$$

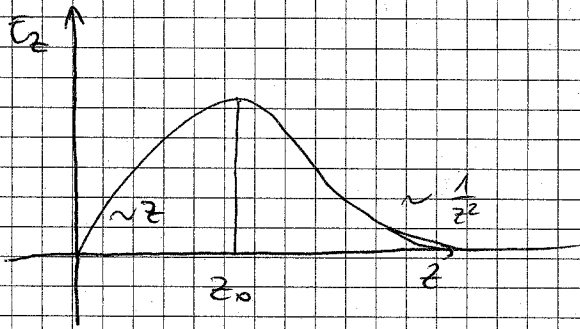
due dl simmetrici generano un campo solo lungo l'asse z.

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\int dE_z = \int \frac{dq \cdot K \cdot z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

componente campo z del campo generato da 2 dl simmetrici

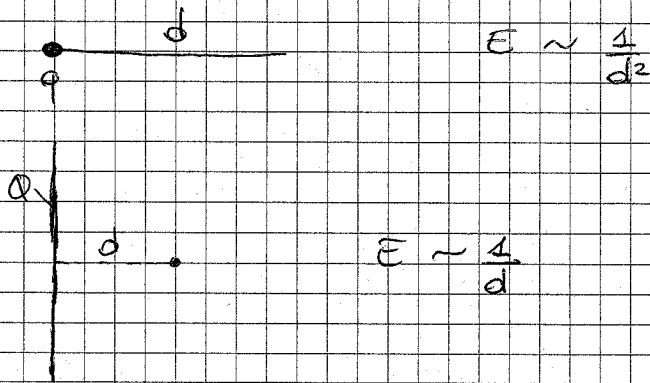
$$\vec{E} = k \frac{Q}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot z \cdot \underline{k} \quad \text{vettore}$$



per quale z_0 , $\vec{E}_z = \max$?

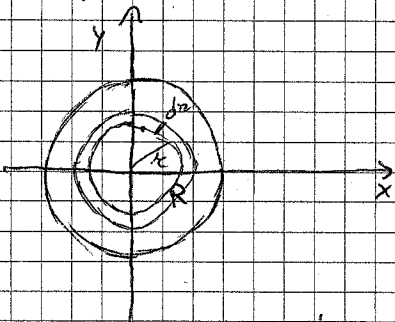
14/10/2008

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow \text{costante dielettrica del vuoto}$$



$$[E] = \frac{[Q]}{[\epsilon_0][L^2]}$$

Calcolo del campo elettrico generato da un disco uniformemente carico



$$E(z) = ?$$

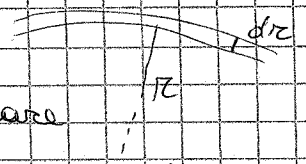
Considero il disco come composto da tanti anelli di spessore infinitesimo.

$$dE = k \frac{dq}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot z$$

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$dq = \sigma dS$$

↑
Corona circolare



$$dS = 2\pi r \cdot dr$$

$$dr \ll r$$

$$dq = 2\pi \sigma r \cdot dr$$

$$\Rightarrow d\vec{E} = k z \frac{2\pi \sigma r \cdot dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = k z \int_0^R \frac{2\pi r \cdot \sigma}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi \epsilon_0} z \frac{Q}{\pi R^2} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{Q}{2\pi R^2 \epsilon_0} \cdot z \cdot \int_0^R \frac{r dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{Q}{2\pi R^2 \epsilon_0} z \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^R =$$

$$= \frac{Q}{2\pi R^2 \epsilon_0} z \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \Big|_R^0 =$$

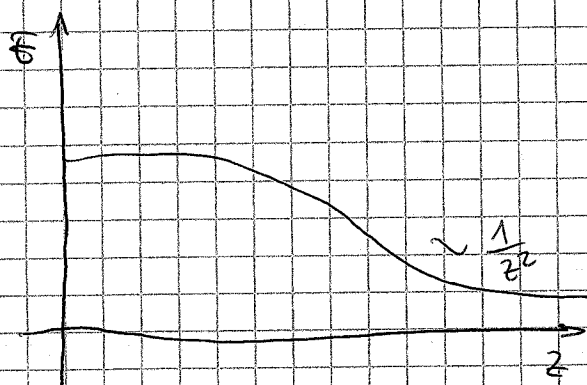
$$= \frac{Q}{2\pi R^2 \epsilon_0} z \cdot \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]$$

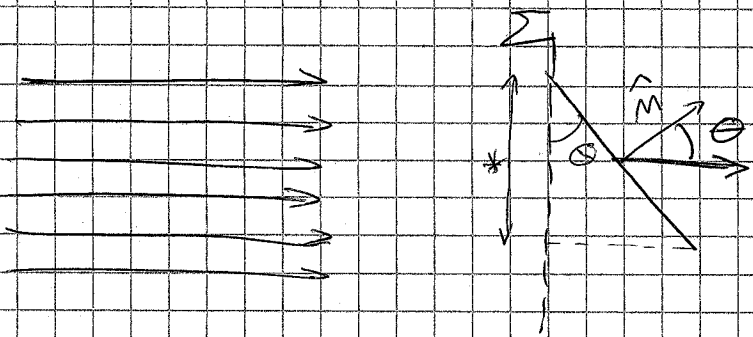
Verificare che $\lim_{z \rightarrow \infty} E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 z^2}$ ($z \gg R$)

(Usare Taylor)

Invece, per $z \rightarrow 0$ (come se $R \rightarrow \infty$, $z \ll R$) diventa

$$\frac{Q}{2\pi R^2 \epsilon_0} \left[1 - \frac{z^2}{R^2} \right] \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$





$$n = \frac{dN}{d\Sigma'}$$

* Σ' = proiezione di Σ su un piano \perp al campo

$$\Phi_{\Sigma}(\underline{E}) = \underline{E} \cdot \hat{n} \Sigma = E \cos \theta \Sigma = E \Sigma'$$

flusso del campo elettrico attraverso la superficie Σ

$$\Phi_{\Sigma}(\underline{E}) = \Phi_{\Sigma'}(\underline{E})$$

num. linee di forza per unita di superficie
 \downarrow
 $n \propto E \Rightarrow \Sigma' n \propto E \Sigma'$

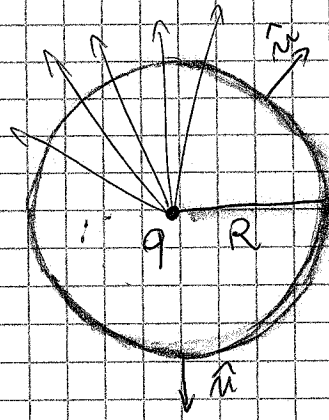


\hat{n} vettore normale a $d\Sigma$

$$\Phi_{\Sigma}(\underline{E}) = \int_{\Sigma} \underline{E} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

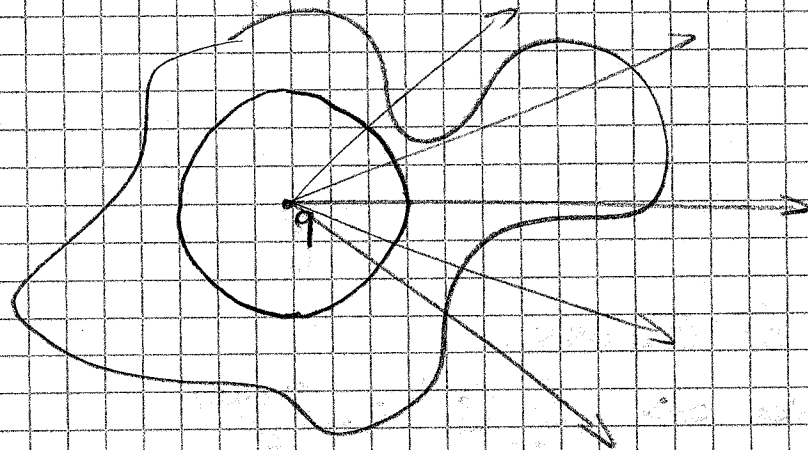
Consideriamo una superficie sferica con al centro una carica puntiforme.

Per convenzione i vettori \hat{n} sono diretti verso l'esterno.



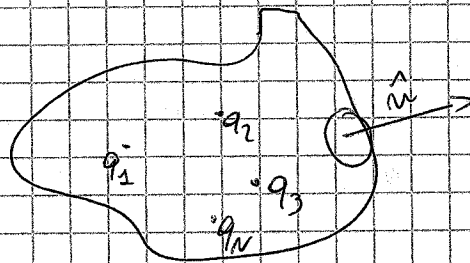
$$\underline{E} \cdot \hat{n} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$\oint_{\Sigma} (\underline{E} \cdot \hat{n}) d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$



Attraverso una qualsiasi superficie chiusa il flusso è lo stesso (le linee di forza sono in uguale numero)

Consideriamo di avere invece N cariche puntiformi:



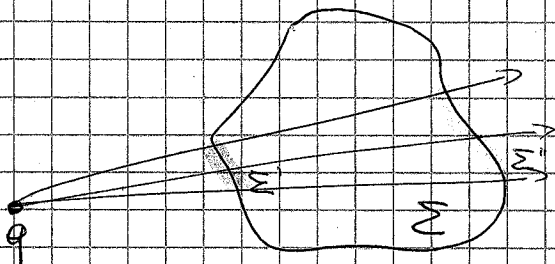
$$\phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma = \int_{\Sigma} \left(\sum_{i=1}^N \vec{E}_i \right) \cdot \hat{n} d\Sigma =$$

$$= \int_{\Sigma} \sum_{i=1}^N (\vec{E}_i \cdot \hat{n}) d\Sigma = \sum_{i=1}^N \int_{\Sigma} \vec{E}_i \cdot \hat{n} d\Sigma =$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{int.}}{\epsilon_0}$$

Non ha importanza come è distribuita la carica interna.

È se la carica è esterna?



In valore assoluto il flusso attraverso Σ' e quello attraverso Σ'' sono uguali.

Ma uno è entrante e l'altro uscente, quindi:

in generale:

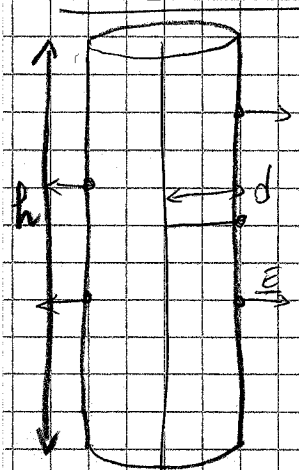
$$\phi_{\Sigma}(\vec{E}) = 0 \quad \left[\begin{array}{l} \text{CONTRIBUTO} \\ \text{DELLE CARICHE} \\ \text{ESTERNE} \end{array} \right]$$

Teorema di Gauss:

$$\Sigma \text{ chiusa} \Rightarrow \phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{Q_{int.}}{\epsilon_0}$$

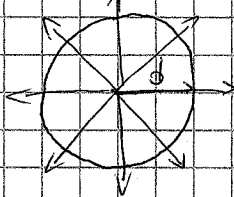
(prima equazione di Maxwell)

ESEMPIO



Filo uniformemente carico

$$\lambda = dq/dl$$



Il flusso attraverso le

basi del cilindro è 0, perché

\hat{n} e \vec{E} sono perpendicolari.

Sulle superfici laterali:

$$\vec{E}(d) \cdot 2\pi d h = \frac{Q_{int.}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

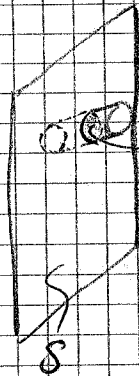
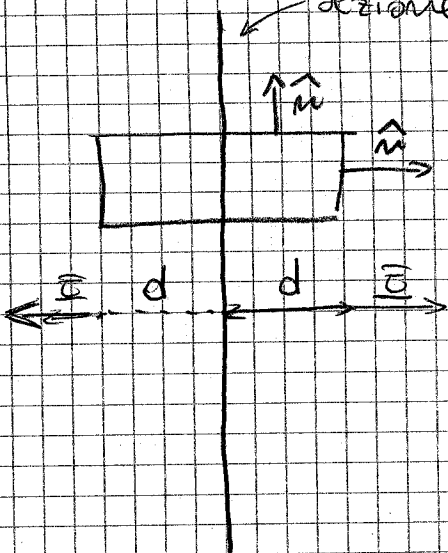
$$\vec{E}(d) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}$$

ALTRO ESEMPIO

Sezione di un piano uniformemente carico

$$\sigma = dq/dS$$

$$\sigma = \frac{Q_{TOT}}{S_{TOT}}$$



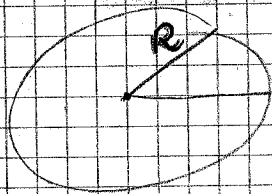
$$\int_S 2E(d) dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$2E(d)s = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma s}{\epsilon_0}$$

$$E(d) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{s2\epsilon_0}$$

Sfera uniformemente carica

$$\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \rho$$



sup. sferico di raggio r

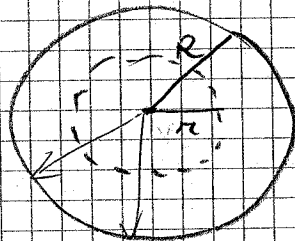
$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS$$

$$= E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Si comporta come due cariche puntiformi per $r > R$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$r < R$:



$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

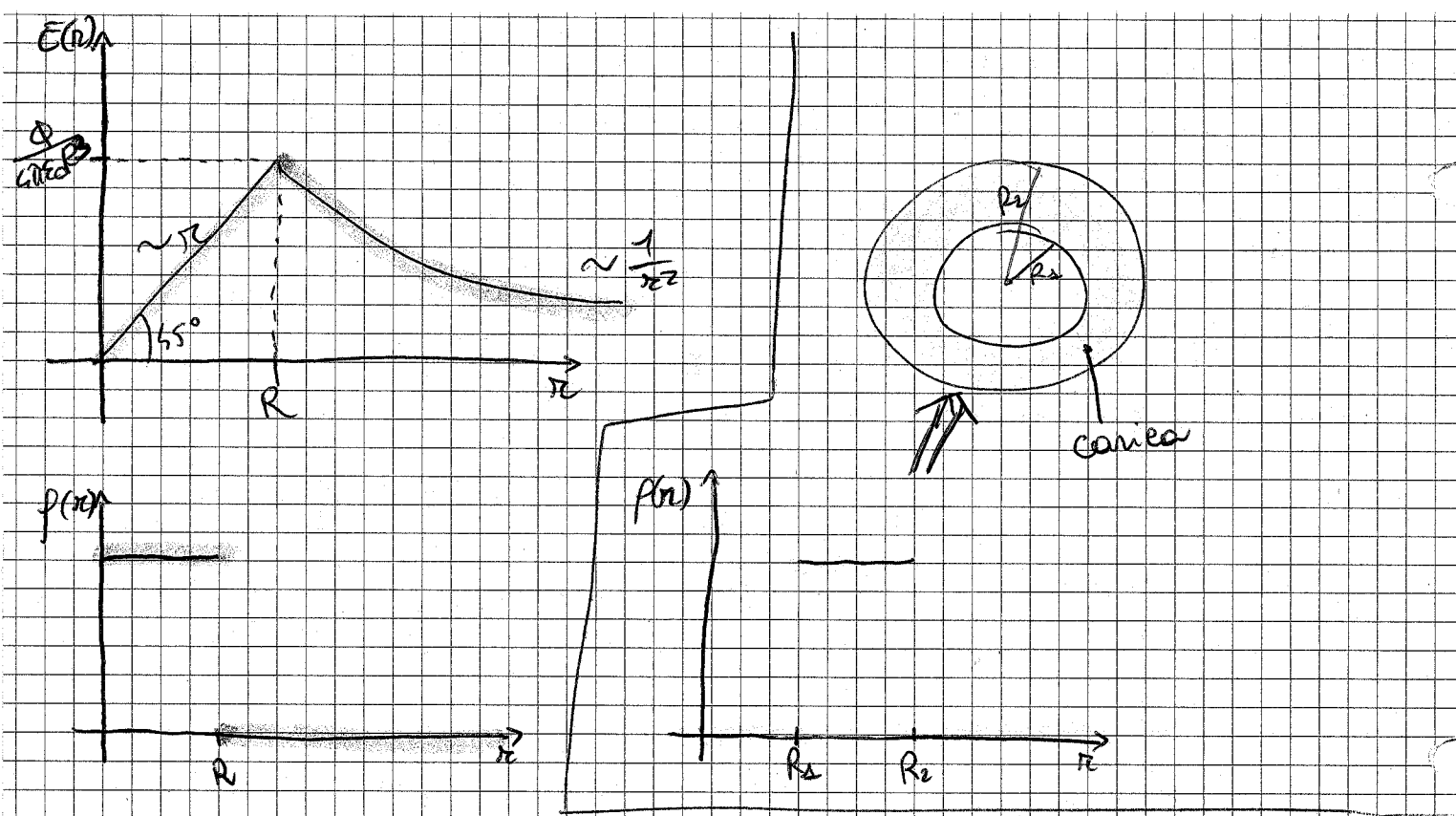
$$Q_{int} = \rho \cdot \text{Volume} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E(r) = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

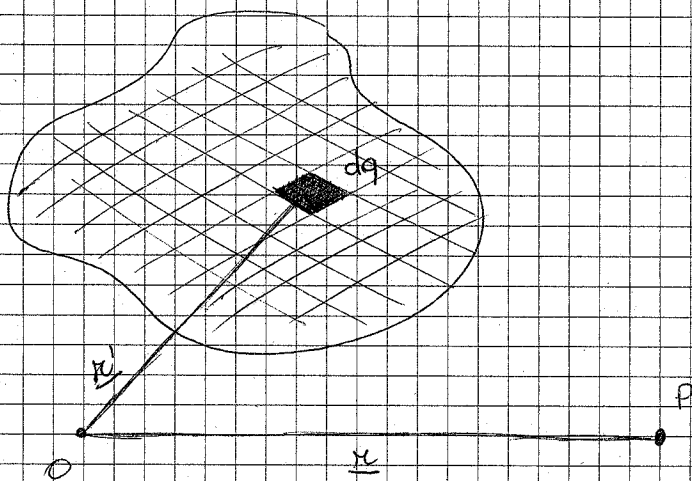
$$= \frac{\rho}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$$Q_{int} = \left(\frac{r}{R}\right)^3 Q$$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} & r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r \geq R \end{cases}$$



17/10/2008



$$\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 |\underline{r} - \underline{r}'|^3} (\underline{r} - \underline{r}') \rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\underline{r} - \underline{r}_i|^3} (\underline{r} - \underline{r}_i)$$

$$dq = \begin{cases} \rho dV \\ \sigma dS \\ \lambda dl \end{cases}$$

Se mettiamo una carica q nel punto P.

$$E = qE$$

forza conservativa

$$\int_{AB} \underline{F} \, d\underline{l}$$

$$\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}$$

$$\underline{B} = B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |\underline{A}| |\underline{B}| \cos \theta$$

$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k}$$

$$d\underline{l} = dx \underline{i} + dy \underline{j} + dz \underline{k}$$

$$\int_{AB} \underline{F} \, d\underline{l} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

↳ se è un differenziale esatto, si scrive come $dU(x, y, z)$

$$= \int_A^B dU = U(B) - U(A) \quad \text{Non dipende dal cammino percorso}$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

Se questo si verifica, si dice che

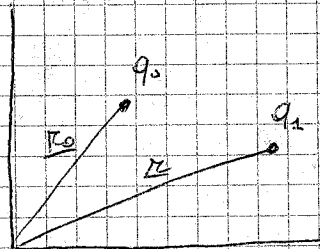
$$\underline{F} = -\underline{\nabla} U$$

(la forza è il gradiente di un'energia potenziale)

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{U} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \text{DIVERGENZA} = \text{div}(\underline{U})$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{U} = \text{ROTORE} = \text{rot}(\underline{U}) = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}$$

$U(x, y, z)$



$$\underline{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 [(x-x_0)\underline{i} + (y-y_0)\underline{j} + (z-z_0)\underline{k}]}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} \cdot q$$

$$U(x, y, z) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

$$\underline{F} = -\underline{\nabla} U$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left[+ \frac{1}{2} \frac{2(x-x_0)}{r^{3/2}} \right] = F_x$$

introduco la variabile $m = x, y, z$

$$-\frac{\partial U}{\partial m} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{(m-m_0)}{r^{3/2}} \right] = F_m$$

la forza ^{elettrostatica} è conservativa \Rightarrow

$$-\int_A^B \underline{dU} = +\int_A^B \underline{E} \cdot \underline{dl} = U(A) - U(B) = q \int_A^B \underline{E} \cdot \underline{dl} =$$

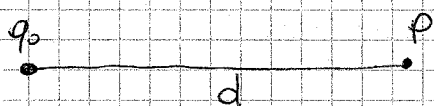
$$\boxed{V = \frac{U}{q}} = q [V(A) - V(B)]$$

$V =$ potenziale \rightarrow differenza di potenziale

$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (d)} + \text{const.}$$

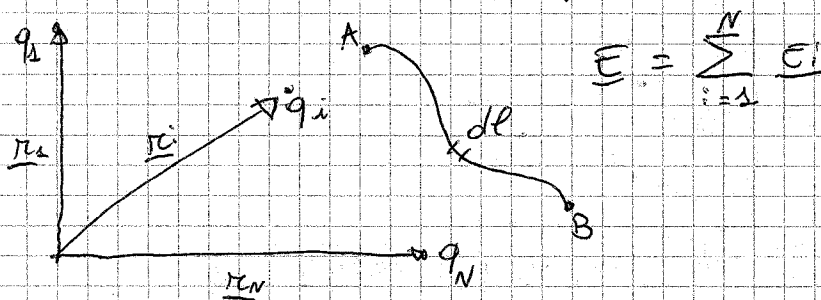
$d \rightarrow$ distanza tra le cariche

Il potenziale è uno scalare



per $d \rightarrow \infty$ $V \rightarrow 0 \Rightarrow \text{const.} = 0$
 \rightarrow non sempre è possibile

Consideriamo N cariche puntiformi



$$\underline{E} = \sum_{i=1}^N \underline{E}_i$$

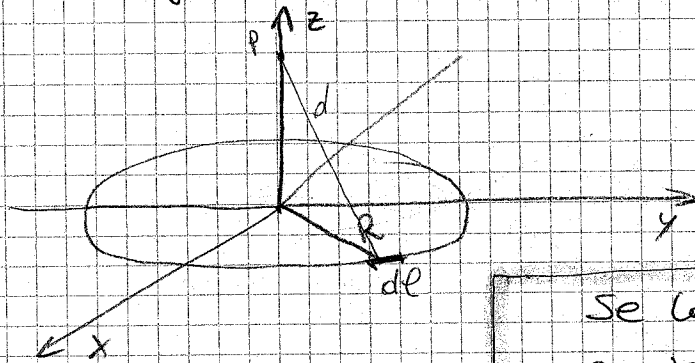
$$\int_A^B \underline{E} \cdot \underline{dl} = \sum_{i=1}^N \int_A^B \underline{E}_i \cdot \underline{dl} = \sum_{i=1}^N [V_i(A) - V_i(B)] =$$

= (poiché V non dipende dal cammino percorso)
 = $V(A) - V(B)$

$$V(\underline{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\underline{r} - \underline{r}_i|} \quad \left(\begin{array}{l} \text{DISTRIB. FINITA} \\ \text{DI CARICHE} \end{array} \right)$$

Non è possibile porre la cost. = 0 (considerarsi lontano all'infinito dalla carica) quando ho una distribuzione **INFINITA** di cariche.

ESEMPIO potenziale generato da un anello uniformemente carico lungo l'asse z



$$dq = \lambda dl$$

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{2\pi R}$$

$$\int dV = \int \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$$

per $z \rightarrow +\infty$ $V \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z}$ (potenziale di una carica puntiforme)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow E_x = E_y = 0$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = + \frac{1}{z} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = E_z$$

$$V = k_e \frac{q}{d}$$

Se la distrib. di carica è continua:

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 |\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$\int_C(\underline{r})(L)$$

$$\int_A^{+\infty} \underline{E} \cdot d\underline{\ell} =$$

(per definizione) = $V(A) - V(+\infty)$

= somma delle costanti arbitrarie

$$V = \sum_{i=1}^N \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_i} + C_i \right]$$

Se la dist. di cariche è finita,

$$V(A) - V(+\infty) = V(A) - 0 = V(A)$$

lastre uniformemente cariche

$$\underline{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

$$V(P) = \int_P^{+\infty} \underline{E} \cdot d\underline{\ell}$$

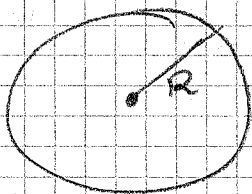
non si può fare.

Al massimo si può definire la

DIFFERENZA di POTENZIALE

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = E (z_B - z_A)$$

$z =$ distanza dal piano carico



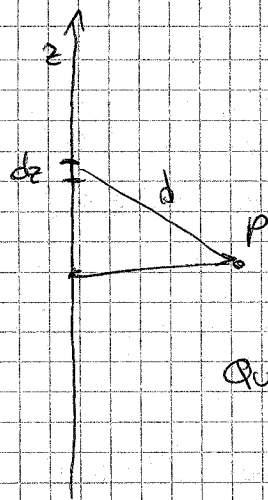
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$$

Questa espressione vale per un anello.

Proviamo ad usarla per un piano:

$$dV = \frac{dq (= \sigma dA = \sigma 2\pi r dr)}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\dots}} \Rightarrow$$

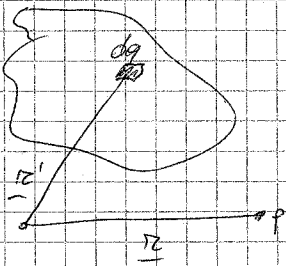
$$V = \int_0^{+\infty} \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[\sqrt{r^2 + z^2} \right]_0^{+\infty}$$



$$dq = \lambda dz \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^d \frac{\lambda dz}{\sqrt{d^2+z^2}}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{d^2+z^2}} dz \rightarrow +\infty$$

Queste espressioni non vanno bene, divergono.



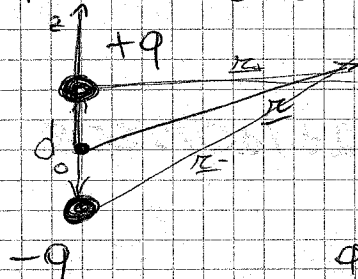
Distribuzione finita di carica elettrica:

$$V(P) = \int_P \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 |\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Distribuzione di carica infinita:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

DIPOLO ELETTROSTATICO



$$V = V_+ + V_- =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_- \cdot r_+}$$

$$\frac{r_+ + \frac{d}{2}}{2} = r \Rightarrow r_+ = r - \frac{d}{2}$$

$$\frac{r_- - \frac{d}{2}}{2} = r \Rightarrow r_- = r + \frac{d}{2}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{A} = |A|^2 \Rightarrow A = \sqrt{\underline{A} \cdot \underline{A}}$$

$$r_+ = \left[\left(r - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$= \left[r^2 + \frac{d^2}{4} - d \cdot r \right]^{1/2}$$

Se $r \gg d$:
$$= r \left[1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d \cdot r}{r^2} \right]^{1/2}$$

$$r_- = r \left[1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d \cdot r}{r^2} \right]^{1/2}$$

$$\epsilon = \frac{d \cdot \pi}{r^2} < 1 \quad r_+ = r [1 - \epsilon]^{1/2} \approx r (1 - \frac{1}{2} \epsilon)$$

$$r_- = r [1 + \epsilon]^{1/2} \approx r (1 + \frac{1}{2} \epsilon)$$

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x \quad (\text{Taylor})$$

$$r_- - r_+ = r \epsilon = \frac{d \cdot \pi}{r}$$

$$r_- \cdot r_+ = r^2 (1 - \epsilon^2)^{1/2} \approx r^2 \quad (\text{al } 1^{\circ} \text{ ordine } \epsilon^2 \text{ si trascura})$$

$$\Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cdot \pi}{r^3} \quad \underline{d} = d \cdot \hat{k}$$

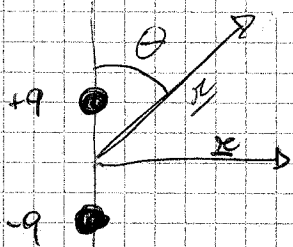
Momento del dipolo elettrico:

$$\underline{P} = q \cdot \underline{d}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{P} \cdot \underline{\pi}}{r^3} = V(\underline{\pi})$$

Non contiamo tanto le cariche e le loro distanze, bensì il loro prodotto.

21/10/2008



$$\underline{P} = qd$$

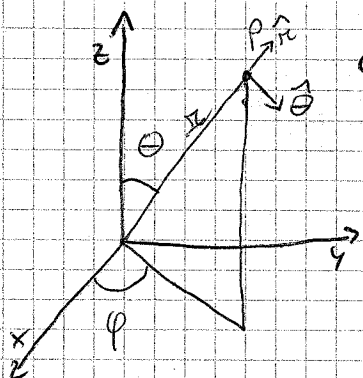
$$|\underline{P}| = qd$$

$$V(\underline{\pi}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{P} \cdot \underline{\pi}}{r^3}$$

$$\underline{P} \cdot \underline{\pi} = P \pi \cos \theta \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cos \theta}{r^2} = V(\underline{\pi})$$

$$\tau_x = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

Passiamo in coordinate sferiche:



$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

TRASF. OMOGENEA

$$z = r \cdot \cos \theta$$

$$x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi$$

E_r, E_θ, E_φ

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{componente radiale}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

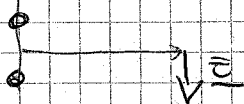
$$E_\varphi = 0 \quad \text{perché il campo del dipolo ha simmetria cilindrica}$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{\pi} \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^3}$$

Con $\theta = \pi/2$ abbiamo il campo elettrico E_r nullo mentre E_θ è max

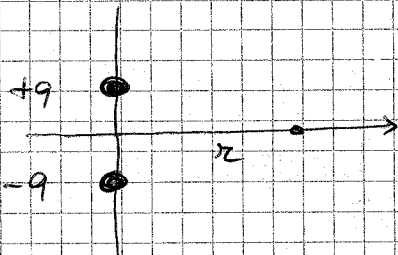
$$E_r = 0 \quad E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$



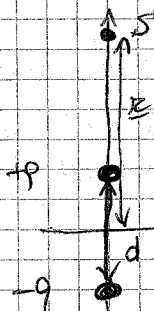
Con $\theta = 0$ la dir. del campo è radiale



$$E_r = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3} \quad E_\theta = 0$$



$$\sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} = 0$$



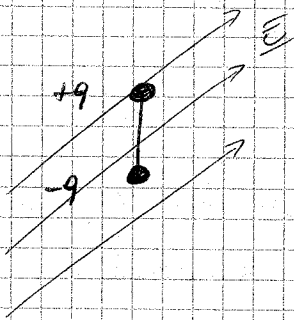
pot. esatto $\rightarrow V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{r+d/2} + \frac{1}{r-d/2} \right] =$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{r^2 - (d/2)^2} =$$

$$= \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{1 - (d/r)^2}$$

potenziale approssimato $\rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Immergiamo una dist. di carica di questo tipo in un campo elettrico uniforme:



Questo è un sist. di particelle. Posso scrivere la forza esterna totale che agisce sul sistema

$$\underline{F}^{(ext)} = \underline{F}_+ + \underline{F}_- =$$

$$= +q\underline{E} - q\underline{E} = 0$$

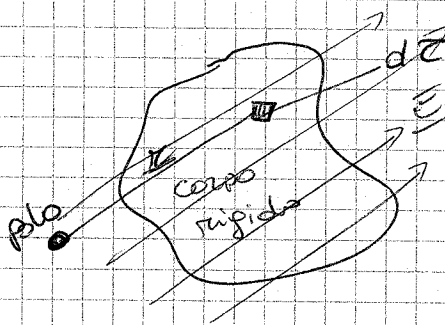
Momento delle forze: scelgo come polo $(-q)$

$$\underline{M}^{(ext)} = \underline{r}_+ \times \underline{F}_+ + \underline{r}_- \times \underline{F}_- =$$

$$= \underline{d} \times q\underline{E} = \underline{p} \times \underline{E} \quad \text{Il dipolo tende}$$

ad orientarsi verso il campo elettrico.

$\underline{p} \times \underline{E}$ non dipende dalla scelta del polo.



$$p = \frac{dq}{d\tau}$$

La carica totale dell'oggetto è nulla

$$\int_{\tau} p d\tau = 0$$

Immergiamo il corpo in un campo elett. uniforme

$$\underline{F}^{(ext)} = \int d\underline{F} = \int p \cdot \underline{E} d\tau = \underline{E} \int p d\tau = 0$$

Posso calcolare il momento con un polo qualsiasi

$$\underline{M}^{(ext)} = \int \underline{r} \times (p d\tau) \underline{E}$$

Il momento risultante NON è il momento DELLA risultante.

$$= \left(\int p \underline{r} \cdot d\tau \right) \times \underline{E}$$

Questa espressione sostituisce la definizione di "momento del dipolo" quando la distrib. di carica non è uniforme

$$\underline{p} = \int p \cdot \underline{r} \cdot d\tau$$

Centro di massa: $\rho = \frac{dm}{d\tau}$

$$\int dm \cdot \underline{r} = \underline{r}_{cm}$$

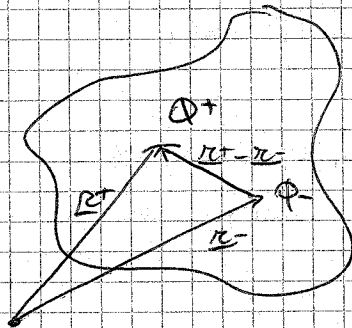
↓ applichiamo lo stesso ragionamento

$$\rho = \rho^+ + \rho^-$$

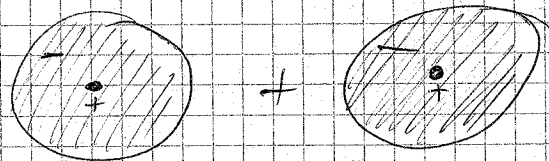
$$\underline{p} = \int \rho^+ \underline{r} d\tau + \int \rho^- \underline{r} d\tau$$

Il vettore posizione del punto dove posso immaginare
sia concentrata tutta la carica positiva

$$\underline{r}_+ \cdot Q = \underline{r}_- \cdot Q = Q(\underline{r}_+ - \underline{r}_-)$$



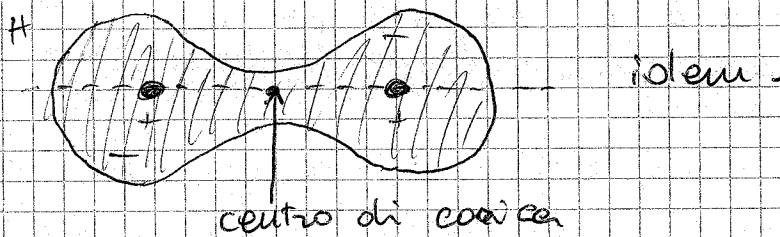
Molecola di H_2



Il baricentro delle
cariche positive coincide col
baricentro delle cariche negative

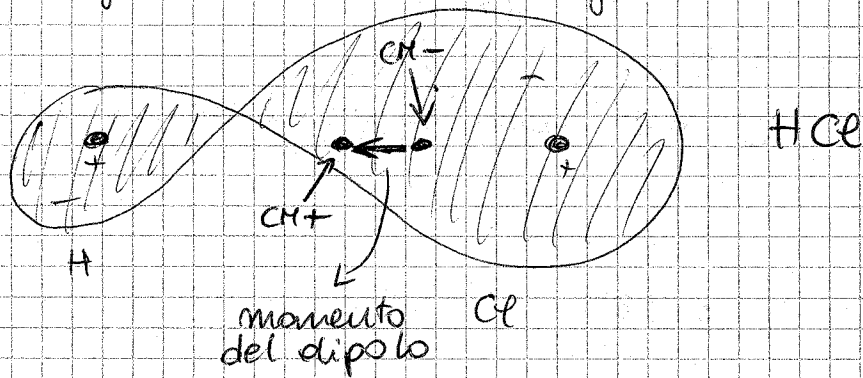
⇒ GLI ATOMI NON HANNO MOMENTO DI
DIPOLLO PERMANENTE

Si avvicinano gli atomi:

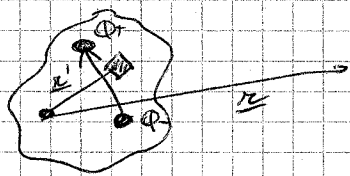
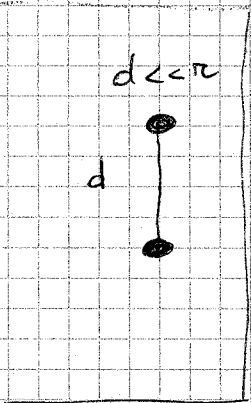


idrogeno

alogeno



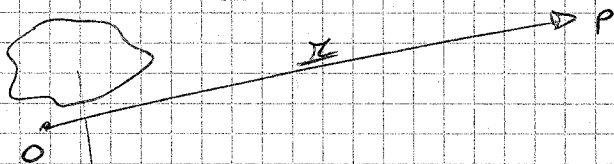
Solo le molecole simmetriche non hanno momento di dipolo permanente.



$$\int \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Sviluppare al prim' ordine in $\frac{r'}{r}$

$$\mathbf{P} = \int \rho \mathbf{r}' d\tau$$



dist. di carica finito

$$V(P) = \int_P^{+\infty} \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

$$\underline{F} = q \underline{E}$$

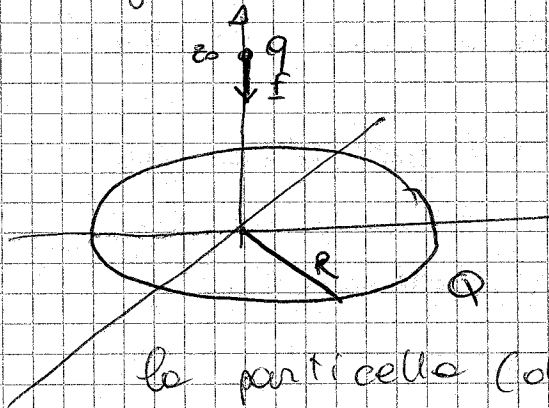
$$U(P) = \int_P^{+\infty} \underline{F} \cdot d\underline{l} = q \cdot V \quad \text{definito per un campo conservativo}$$

$\int_P^{+\infty}$ lavoro da 0 a $+\infty$ compiuto sul punto P quando questo si sposta all'infinito

$$\int_{P,S} \underline{F} \cdot d\underline{l} = q \int_P^S \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

$$\int_{P,S} = q(V_P - V_S) \quad \text{Diff. di potenziale tra } P \text{ ed } S$$

Immaginiamo un anello uniformemente carico:



$$Q > 0 \quad R \quad m$$

$$q < 0 \quad t = 0, z = z_0$$

$$\underline{F} = q \underline{E}$$

Quanto tempo impiega la particella (di massa m e di carica q) a raggiungere l'anello?

$$\underline{F} = m \underline{a}$$

$$F_z = q \cdot E_z = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$a_z = \ddot{z} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

$$m \ddot{z} = qQz \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

non è (in modo analitico) di immediata risoluzione ...

$$t = 0 \rightarrow z = z_0$$

$$t = ? \rightarrow z = 0$$

Voglio sapere con che energia la particella raggiungerà l'anello (vogliamo scherzare).

$$\underline{E} = T + U \quad U = q \cdot V$$

$$\text{const.} = T + qV$$

$$z_0, T = 0, q \cdot V(z_0) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z_0^2}}$$

$$z = 0, T = \frac{1}{2} m v^2, q \cdot V(0) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$q \cdot V(z_0) = \frac{1}{2} m v^2 + qV(0)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{Q \cdot q}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{1}{R} \right] > 0$$

Quando la particella arriva all'anello, prosegue verso $-z_0$, poi torna in su.

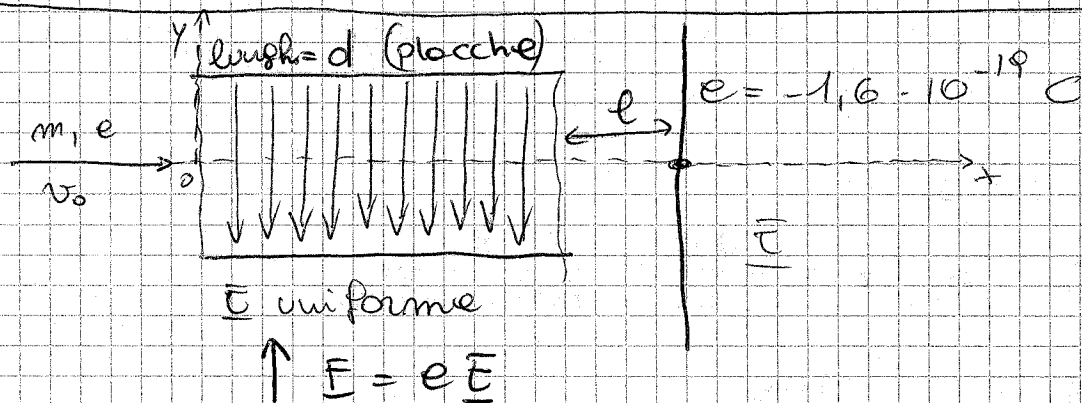
Quando questo moto è armonico?

Cioè, quando è approssimabile con $F = -kz$?

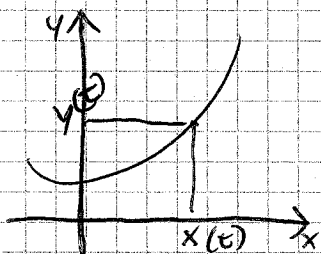
$$F = \frac{Qq}{4 \pi \epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad \approx -kz \Leftrightarrow z^2 \ll R^2$$

$$z \ll R$$

La particella è molto vicina all'anello.



Siamo in grado di determinare la traiettoria di questo "pennello" di elettroni?



Non ci sono forze lungo l'asse x : moto rettilineo uniforme.

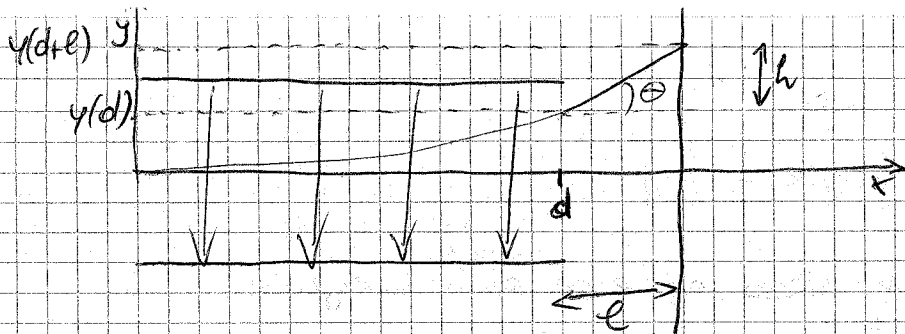
$$x(t) = v_0 \cdot t$$

Asse y : forze costante verso l'alto.

$$a_y = \frac{|e|E}{m} \quad y(t) = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{|e|E}{m} t^2$$

$0 < t < \frac{d}{v_0}$ → fino a quando non esce dal campo.

Poi procede in moto rettilineo uniforme nella direzione in cui si è trovato.



$$y = \frac{1}{2} \frac{|e| \bar{E}}{m} \frac{x^2}{v_0^2} \quad y(d) = \frac{1}{2} \frac{|e| \bar{E}}{m} \frac{d^2}{v_0^2} \quad \text{moto parabolico}$$

Voglio trovare θ .

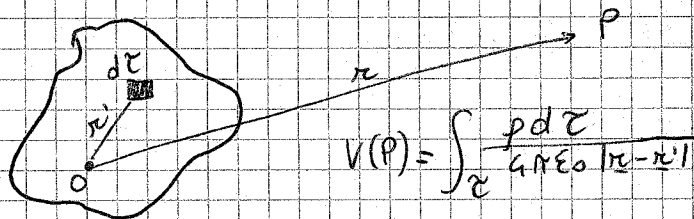
$$y' = \frac{1}{2} \frac{|e| \bar{E}}{m v_0^2} 2x \quad y'(d) = \frac{|e| \bar{E} d}{m v_0^2} = \text{tg } \theta$$

$$h = l \text{tg } \theta$$

$$y_{\text{fin}} = y(d+l) = \frac{1}{2} \frac{|e| \bar{E}}{m} \frac{d^2}{v_0^2} + \frac{|e| \bar{E}}{m v_0^2} \cdot d \cdot l$$

$$x_{\text{fin}} = d+l$$

24/10/2008



$$V(P) = \int \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 |r-r'|}$$

$$|r-r'| = \left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta \right)^{1/2}$$

$$r' \ll r$$

$$= r \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{rr'\cos\theta}{r^2} \right)^{1/2}$$

$$\frac{r'}{r} \ll 1$$

$$\approx r (1 - \epsilon)^{1/2}$$

$$\epsilon = \frac{2r \cdot r' \cos\theta}{r^2}$$

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \frac{\rho d\tau}{(1-\epsilon)^{1/2}}$$

$$(1-\epsilon)^{-1/2} \stackrel{\text{Taylor}}{\approx} 1 + \frac{1}{2} (1-\epsilon)^{-3/2} \epsilon \Big|_{\epsilon=0} = 1 + \frac{\epsilon}{2}$$

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho d\tau \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho d\tau \left(1 + \frac{r \cdot r' \cos\theta}{r^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\int \rho d\tau + \int \rho d\tau \frac{r \cdot r'}{r^2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[Q + \int \rho d\tau \frac{r \cdot r'}{r^2} \right]$$

↳ potenziale campo puntiforme

Ma $Q_{tot} = 0 \Rightarrow$

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int p d\tau (\underline{r} \cdot \underline{r}')$$

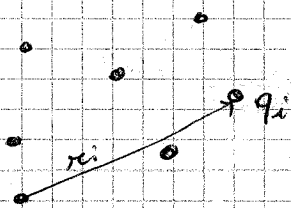
La somma di un prodotto scalare è il prodotto scalare delle somme

\underline{r} è sempre lo stesso ed esce dall'integrale

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\underline{r} \cdot \int p d\tau \right]$$

$$V = \frac{\underline{P} \cdot \underline{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\text{momento del dipolo})$$

Sistema di cariche puntiformi:



forze di tipo Coulombiano
(conservative)

En. potenziale = lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche quando lascio che agiscano (se le cariche sono concordi

si allontanano all'infinito).

$$\Delta T = L$$

$$T + U = E = \text{costante}$$

$$\Delta T + \Delta U = \Delta E = 0$$

$$L + \Delta U = 0$$

$$L = -\Delta U$$

Calcoliamo il lavoro da servire per costruire questa configurazione di carica partendo da cariche all'infinito.

Le particelle non sono sottoposte a nessuna forza.

Il lavoro compiuto per posizionare la prima particella è nullo.

$$L_1 = 0$$

$$L_2 = \int_{\infty}^{(2)} \underline{F} \cdot d\underline{l} \quad \text{posizione 2ª particella}$$

forza elettrostatica esercitata da q_1 su q_2

$$= \int_{\infty}^{(2)} q_2 \underline{E}_1 = \vec{c} \times \text{definizione il potenziale generato da } q_1 \text{ nel punto (2)}$$

$$= q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}, \quad r_{12} = |\underline{r}_1 - \underline{r}_2|$$

Porto la particella 3 nel punto ③

$\mathcal{L}_3 = q_3 \cdot V_3 \rightarrow$ potenziale nel punto ③ dovuto alla presenza delle altre due particelle

$$V_3 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

$$r_{ij} = |\underline{r}_i - \underline{r}_j|$$

$$\mathcal{L}_3 = q_3 \left[\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right]$$

$$\mathcal{L}_4 = \frac{q_1 q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{14}} + \frac{q_2 q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{34}}$$

$$\mathcal{L}_m = \frac{q_m}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{q_i}{r_{im}}$$

Supponiamo che le particelle siano solo 3

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right]$$

$$= \left[\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \right] \right] \cdot \frac{1}{2}$$

Supponendo di avere N cariche:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

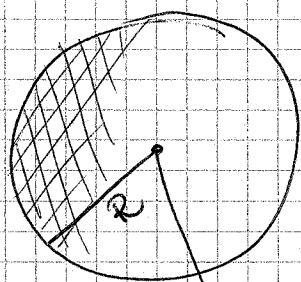
Energia potenziale di tutto il sistema.

Come si generalizza l'espressione precedente in una distribuzione continua di cariche?

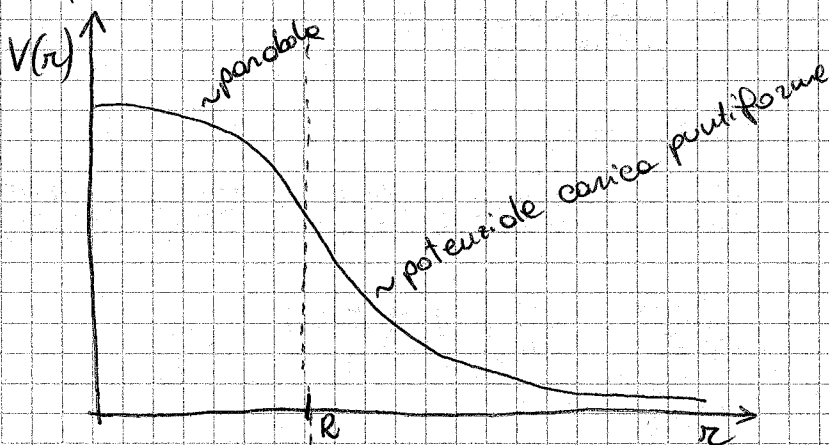
$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} V dq$$

V rappresenta il potenziale generato da tutto il sistema tramite dq .

Il potenziale generato da dq (in $d\tau$) è un infinitesimo trascurabile.



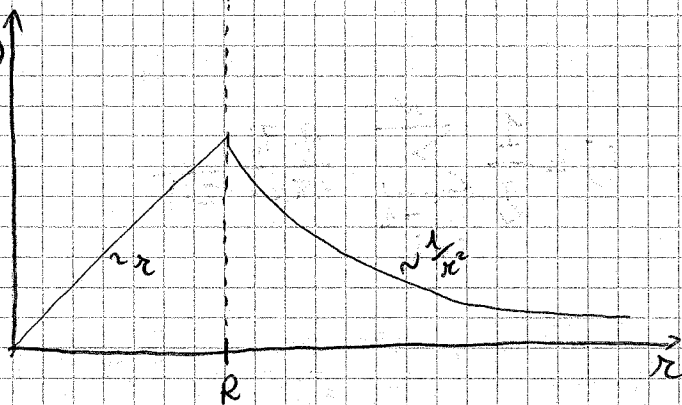
Sfera uniformemente carica



$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}, & r < R \end{cases}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$V(P) = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



$$\vec{E}(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

\vec{E} è definito in ogni punto $\Rightarrow V$ è continuo

$$\vec{E} = E(r) \cdot \hat{r} \quad d\vec{l} = dr \cdot \hat{r}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = E(r) dr$$

$$V(P) = \int_r^{\infty} E(r) dr$$

↑ distanza dal centro di carica
↑ variabile d'integrazione

$$V(r) = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \quad \boxed{r \gg R}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[-\frac{1}{r} \right]_r^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{pot. carica puntiforme})$$

$$\boxed{r < R}$$

$$V(r) = \int_r^{\infty} E(r) dr = \int_r^R E(r) dr + \int_R^{\infty} E(r) dr =$$

$$= \int_r^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_r^R r dr =$$

$$= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} [R^2 - r^2] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{se } r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

Potenziale nel centro della sfera?

$$r=0$$

$$\boxed{V(0) = \frac{3}{8} \frac{Q}{\pi\epsilon_0 R}}$$

Il modello atomico di Thompson prevedeva una sfera di raggio R (raggio dell'atomo) ~~era~~ uniformemente carica contenente gli elettroni nelle posizioni d'equilibrio.

L'energia potenziale di un unico elettrone posto al centro dell'atomo è $U = q_e V(0) < 0$

\Rightarrow è in equilibrio e per toglierlo va compiuto lavoro (energia di ionizzazione).

Em. ionizzazione idrogeno = 11,6 eV
⇒ potenziale al centro = 11,6 V

$$V(0) = 11,6 \text{ V} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot \frac{3}{8} \quad Q = \text{carica protone}$$

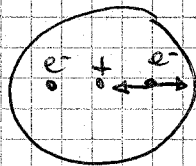
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$$

$$\frac{1,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 9 \cdot 10^9}{11,6} \quad \text{deve venire} \approx \text{raggio nucleo}$$

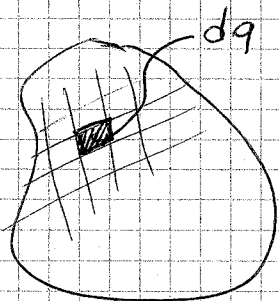
$\approx 2 \cdot 10^{-10}$ metri (dimensioni tipiche atomo)

Quindi il modello è verosimile.

Domanda da esame: em. ionizzazione atomo di elio nel modello di Thomson?



posizione d'equilibrio dell'elettrone:
forza repulsiva - forza attrattiva = 0



$$U = \frac{1}{2} \int V \cdot dq$$

$$= \frac{1}{2} \int (V' + \delta V) \cdot dq$$

Consideriamo sferico δr

$$\delta V \delta q < V(0) \delta q$$

$$\frac{3}{8} \frac{\delta q}{\pi \epsilon_0 \delta r} = \frac{3}{8} \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \pi \delta r^3}{\pi \epsilon_0 \delta r}$$

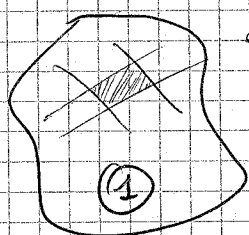
$$\lim_{r \rightarrow 0} V(0) \cdot \delta q = 0$$

quindi quel termine è trascurabile.

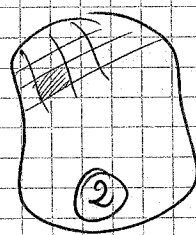
Energia di interazione tra due distribuzioni di carica

Considero una distribuzione fissa ed una che si muove nel campo elettrico generato dall'altra.

$U = \frac{1}{2} \int V dq$ è l'energia che ho dovuto "spendere" per costruire la distrib. di carica.



$$dq_1 = \rho_1 d\tau$$



$$dq_2 = \rho_2 d\tau$$

Anche se costituita da due "pezzi", anche questa è una distrib. di carica

$$\rho = \rho_1 + \rho_2$$

$$dq = \rho d\tau$$

$$V = V_1 + V_2$$

$$\frac{1}{2} \int (V_1 + V_2) (\rho_1 + \rho_2) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int V_1 \rho_1 d\tau + \int V_1 \rho_2 d\tau + \int V_2 \rho_1 d\tau + \int V_2 \rho_2 d\tau \right]$$

eu. spesa per costruire (1)

$$= U_1$$

" cost.

eu. spesa per avvicinare (1) e (2)

$U_{int} =$ eu. interazione

eu. spesa per costruire (2)

$$= U_2$$

" cost.

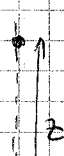
U_1 e U_2 possono essere chiamate "autoenergie" delle distr. di carica (1) e (2).

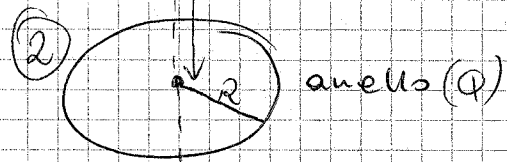
$$\int V_1 \rho_2 d\tau = \int V_2 \rho_1 d\tau$$

$$U_{\text{int}} = \int \rho_1 V_2 d\tau = \int \rho_2 V_1 d\tau$$

Esempio

① casacca puntiforme (q)

$$\int \rho_1 V_2 d\tau = q \cdot V_{\text{anello}}$$




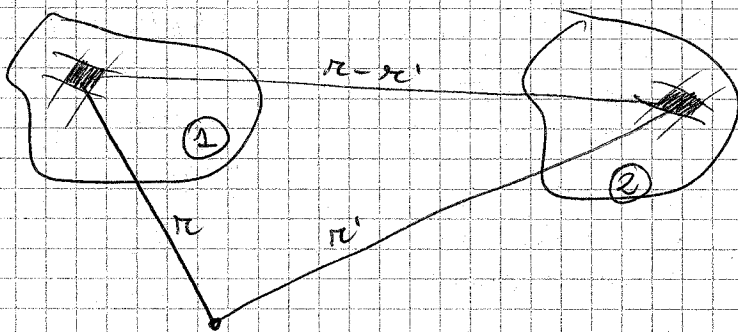
$$V_a(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\int \rho_2 V_1 d\tau = \int V_q \rho_2 d\tau = V_q \int \rho_2 d\tau = V_q \cdot Q$$

$$V_q(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$q \cdot V_a = V_q \cdot Q$$

$$\text{Em. interazione} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$$



$$U_{\text{int}} = \int_{\tau_1} \rho_1 \left(\int_{\tau_2} \frac{\rho_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau_2 \right) d\tau_1$$

Scrivere U_{int} tra un dipolo e un anello carico.

$$V_+ - V_- = \int_+^- \overset{\text{potenziale scalare}}{\underline{E}} \cdot d\underline{\ell} = \underline{E} \cdot \int_+^- d\underline{\ell}$$



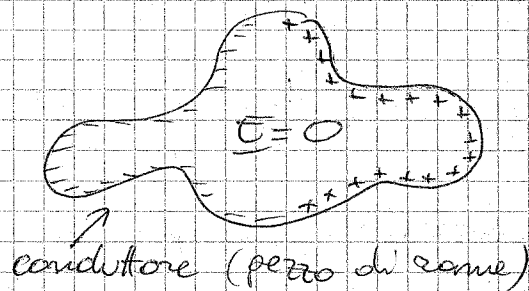
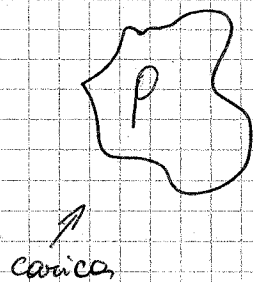
$$\Rightarrow U_{int} = q(-d \cdot \underline{E}) = -\underline{P} \cdot \underline{E}$$

$$\underline{F} = -\nabla(\underline{P} \cdot \underline{E}) = \nabla(\underline{P} \cdot \underline{E}) \quad \text{Il gradiente di uno scalare è un vettore}$$

ELETTROSTATICA NEI MEZZI MATERIALI

Conduttori

Isolanti



Gli elettroni del rame si spostano verso sinistra

Si crea una distribuzione di carica superficiale sul conduttore, e questa genera un campo elettrico \underline{E}_c

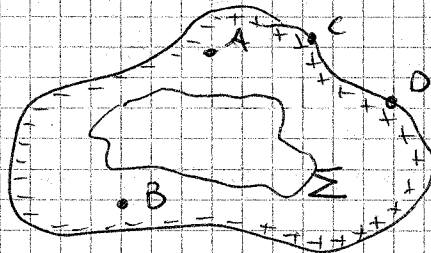
All'interno del conduttore il campo elettrico totale è 0

$$\underline{E}_{tot} = \underline{E} = \underline{E}_p + \underline{E}_c$$

Fenomeno di induzione: le cariche

si posizionano in modo da annullare il campo elettrico all'interno del conduttore.

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} (\underline{E}) \cdot \hat{n} d\Sigma &= 0! \\ &= \frac{\Phi_{int}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$



All'interno del conduttore

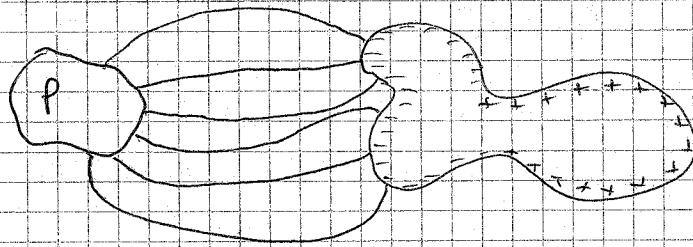
non si accumula carica, ma solo sulla superficie.

$$\forall A, B, \quad \int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = 0!$$

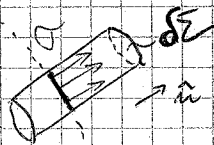
Tutti i punti all'interno del conduttore si trovano allo stesso potenziale.

$$\int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_C - V_D = 0$$

Se il prodotto scalare è nullo significa che \vec{E} è perpendicolare alla superficie del conduttore (equipotenziale)



Considero un elemento di superficie del conduttore:



σ densità di carica superficiale

Quanto vale il flusso attraverso quel cilindretto?

$$d\phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma = E d\Sigma \stackrel{\text{teor. Gauss}}{=} \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma d\Sigma}{\epsilon_0}$$

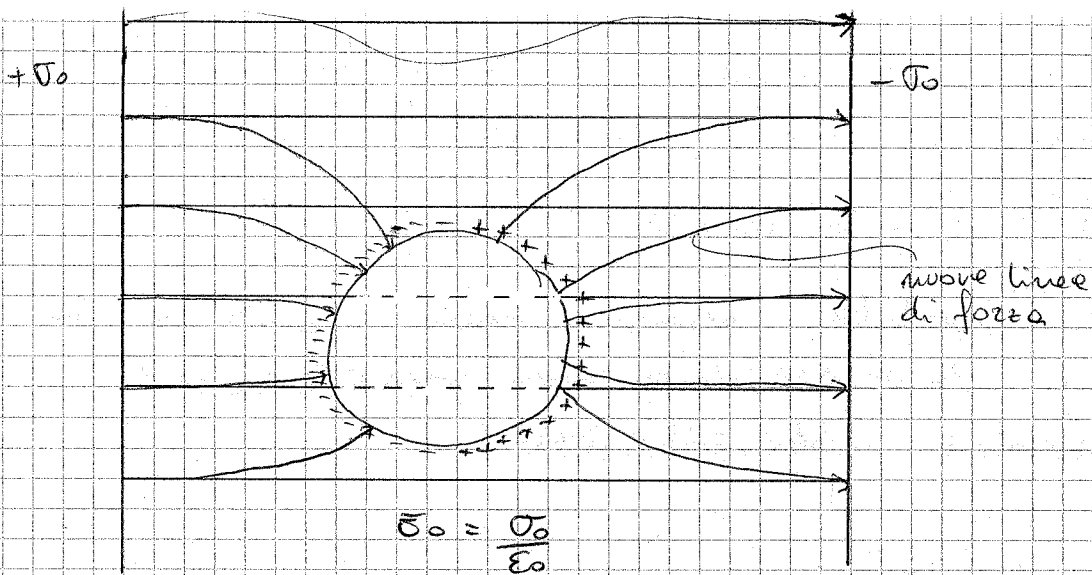
campo elettrico totale



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}}$$

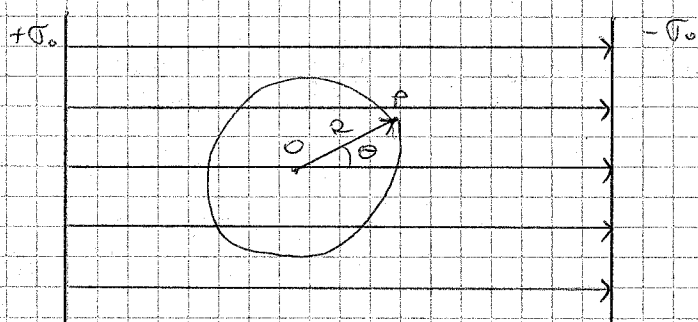
TEOREMA DI COULOMB



Cosa succede se ponga una sfera conduttrice nel sistema?

All'interno del conduttore $\underline{E}_0 + \underline{E}_c = 0$

Quanto vale il potenziale generato dalla distribuzione di carica $+\sigma_0, -\sigma_0$ sulla superficie sferica immersa in esso?



$$V_0 - V_P = \int_0^R \underline{E} \cdot d\underline{l} = \underline{E} \cdot (P - O) = \underline{E} \cdot \underline{R} = ER \cos \theta$$

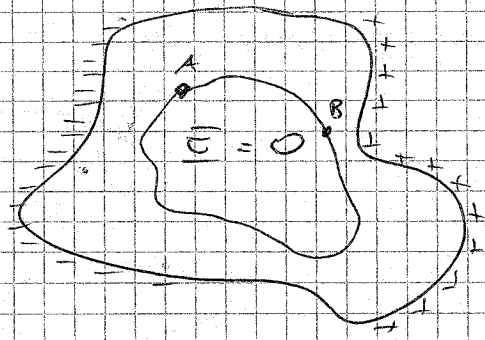
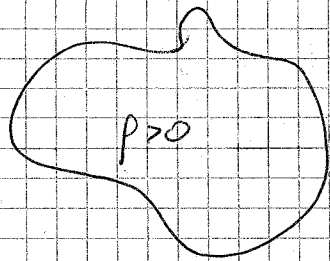
Ma se la sfera è un conduttore, la sua distribuzione di carica superficiale genererà un potenziale tale che $V_0 - V_P = -ER \cos \theta \quad \forall \theta$
 \Rightarrow la somma dei due è nulla

d = momento del dipolo (carica · distanza)

$$V_P = \frac{d \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 R^2}$$

Il potenziale è lo stesso generato da un dipolo V_d di momento d tale che: $\frac{d}{4\pi \epsilon_0 R^2} = \underline{E} \cdot R \Rightarrow d = 4\pi \epsilon_0 ER^3$

$$Q > 0$$



$$\vec{E}_p + \vec{E}_c = \vec{E} \quad \left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ interno} \\ \neq \vec{E}_p \text{ esterno} \end{array} \right.$$

Se il conduttore avesse una cavità all'interno, $\vec{E} = 0$ anche nella cavità e la superficie interna non è carica.

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

↑
 scelgo come cammino una linea di forza

$$\Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$$

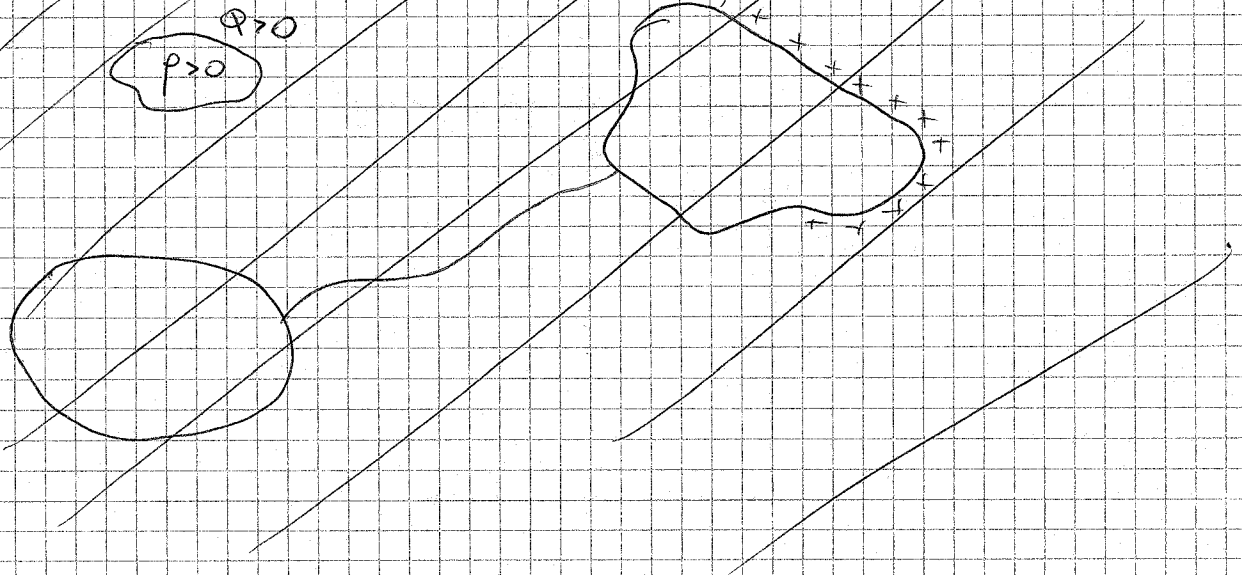
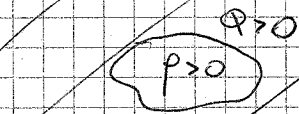
Se scelgo come cammino una linea lungo la superficie

$$\Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

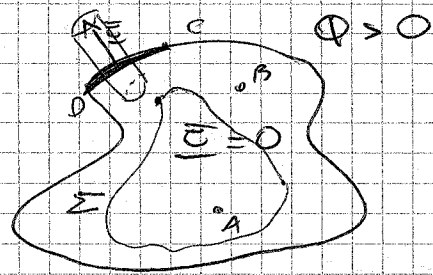
impossibile

Quindi non c'è distr. di carica sull'eventuale superficie interna.

Cosa succede se collego il conduttore col
 un altro conduttore?



Abbiamo un conduttore carico isolato (non immerso in un campo).



$\vec{E} = 0$ perché siamo in elettrostatica e le cariche non si muovono \Rightarrow sottoposte a forza nulla \Rightarrow campo nullo

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_A - V_B = 0$$

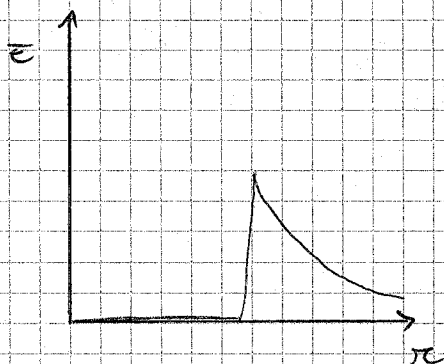
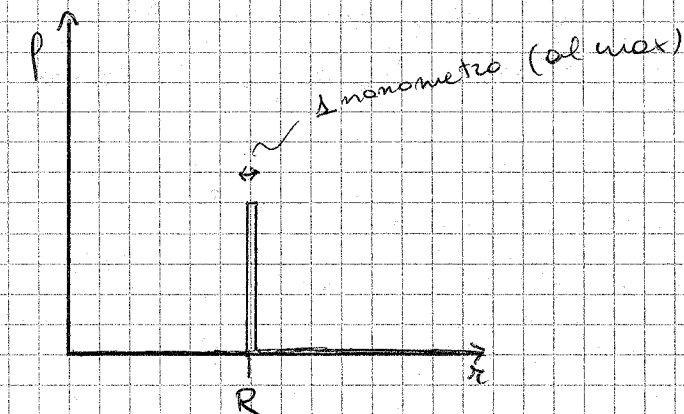
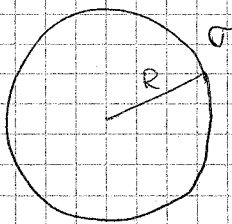
$$\oint_{\Sigma} (\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow Q_{int} = 0$$

flusso attraverso il cilindretto:

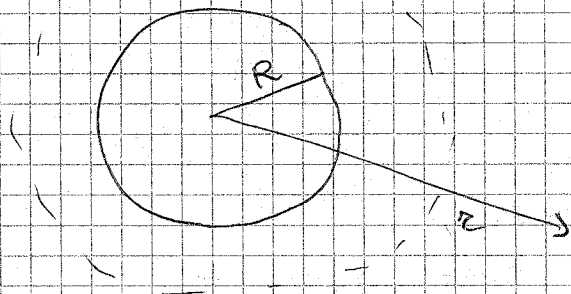
$$\vec{E} \delta \Sigma = \frac{\sigma \delta \Sigma}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

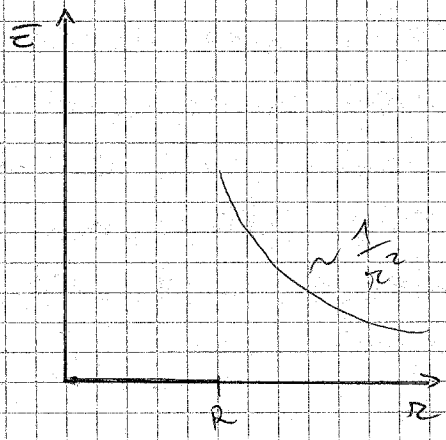
Sfere conduttrice



Applichiamo lo stesso ragionamento ad una sfera conduttrice carica



$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

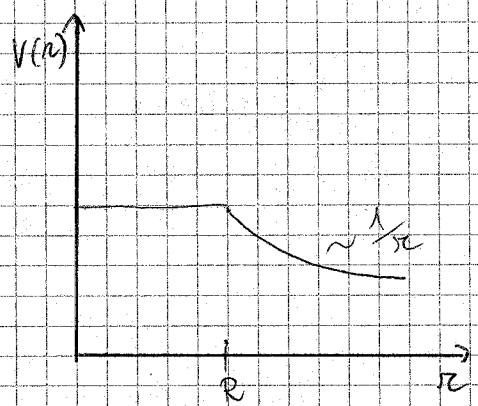


$r > R$ applico il teor. di Gauss su una superficie di raggio r

$$\vec{E}(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

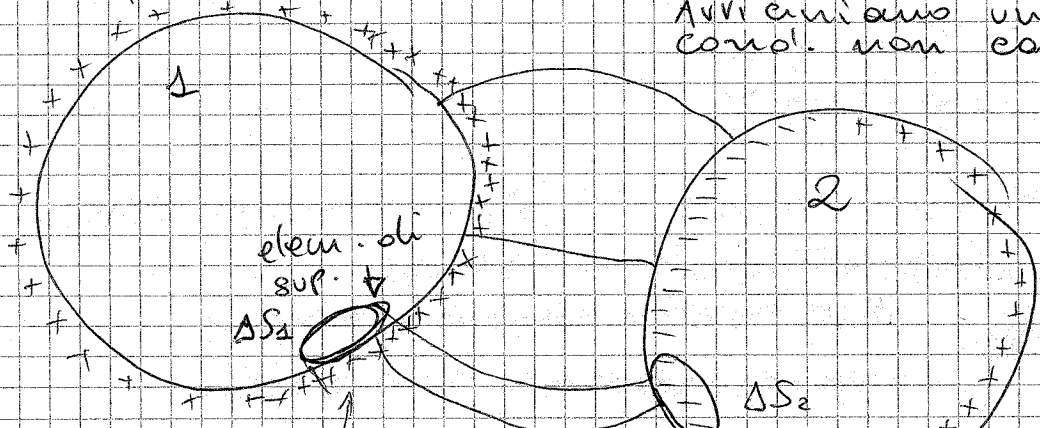


$$r > R \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}$$

$$r \leq R \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R}$$

A livello microscopico il punto non è angoloso e E non è discontinua.

Sfere cond. cariche



Avviciniamo una sfera cond. non carica:

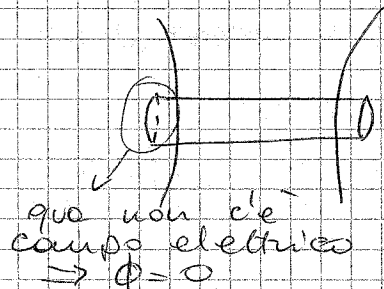
Si infiltrano le cariche positive su questo lato

$$\Delta S_1 \rightarrow \Delta Q_1$$

Se disegnassi tutte le linee di campo che partono dal "cortaino" di ΔS_1 avrei un tubo di flusso che genera un ΔS_2 sull'altra sfera

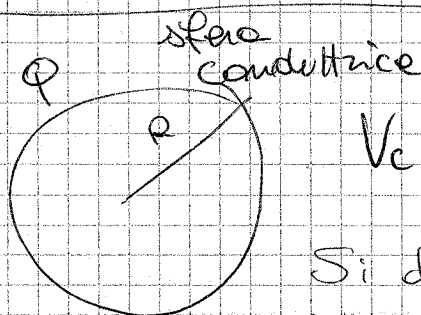
Applico il teor. di Gauss al tubo di flusso:

$$\oint_{\Sigma} (\vec{E}) = 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$



⇒ Tutte le linee di forza che escono da una sfera finiscono nell'altra solo quando le due sfere hanno carica totale uguale e contraria.
(in questo caso no)

↓
due conduttori in induzione completa



$$V_c = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Si definisce CAPACITA' di un conduttore isolato il rapporto

$$C = \frac{Q}{V_c} = 4\pi\epsilon_0 R$$

C è costante qualunque sia la forma del conduttore



$$Q \rightarrow V_c$$

$$kQ \rightarrow kV_c$$

Dalla sfera si capisce che più il conduttore è grande, maggiore è la capacità.

$$Q = C \cdot V_c$$

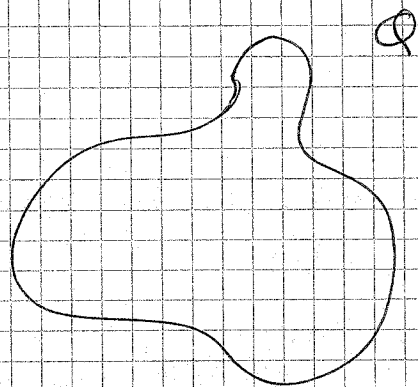
Maggiore è C, più carica posso accumulare tenendo il potenziale basso.

L'unità di misura è il Farad.

$$\frac{1 C}{1 V} = 1 F$$

$$C \sim \frac{R}{9 \cdot 10^9}$$

Se considero la terra un conduttore, la sua C è dell'ordine dei milli farad.



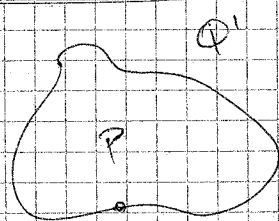
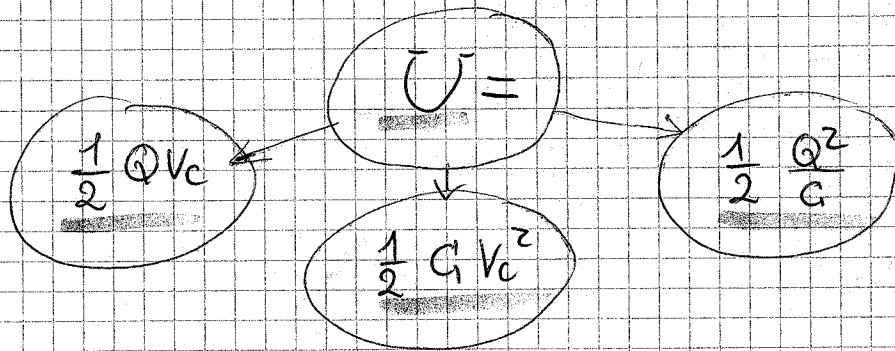
$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \cdot V d\tau$$

Energia elettrostatica totale = lavoro che bisogna spendere per costruire una distribuzione di cariche

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sigma \cdot V_c d\Sigma \quad \text{perché la densità di carica sta solo sulla } \Sigma$$

$$= \frac{1}{2} V_c \int \sigma d\Sigma = \frac{1}{2} V_c \cdot Q = U$$

$$C = \frac{Q}{V_c} \quad Q = C V_c$$



$$V' = \frac{Q'}{C}$$

$$dL = dQ' \bar{V}$$

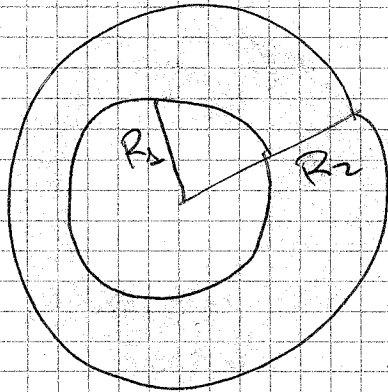
$Q' < Q =$ carica tot. \bar{V} vuole
Quale lavoro devo compiere per portare dall'infinito una carica dQ' su questo conduttore?

$$-\int_{\infty}^P dL \cdot d\ell$$

$$dL = -dQ' \int_{\infty}^P \underline{E} \cdot d\ell$$

$$d\mathcal{L} = d\varphi' \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = d\varphi' \cdot V' = d\varphi' \frac{\varphi'}{C}$$

$$\mathcal{L} = \int d\mathcal{L} = \int_0^{\varphi} \frac{\varphi'}{C} d\varphi' = \frac{1}{2} \frac{\varphi^2}{C}$$



Guscio sferico di spessore $R_2 - R_1$

~~$$C = 4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)$$~~

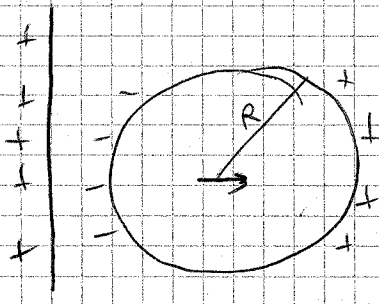
All'interno il campo elettrico è nullo

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

$$C = \frac{Q}{V}$$

~~L'importante non è la massa dell'oggetto bensì la forma della superficie esterna~~

07/11/2008

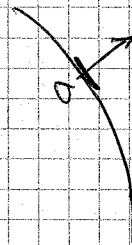


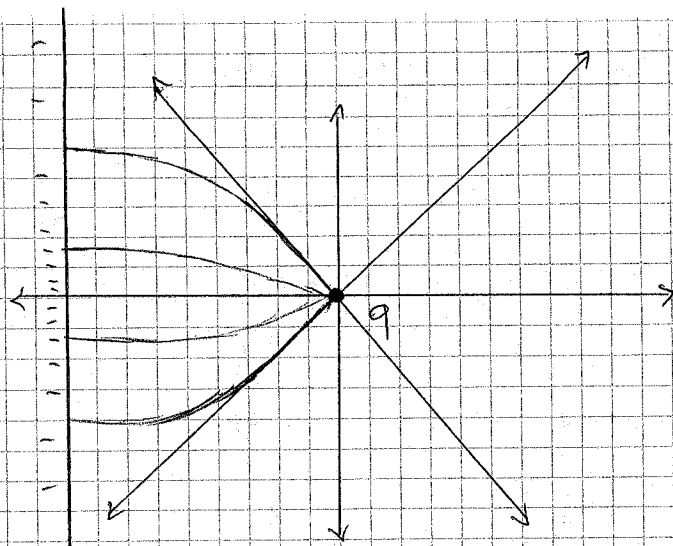
$$\frac{d}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \epsilon R$$

$$\vec{C} = \vec{\sigma}_0 + \vec{E}_0$$

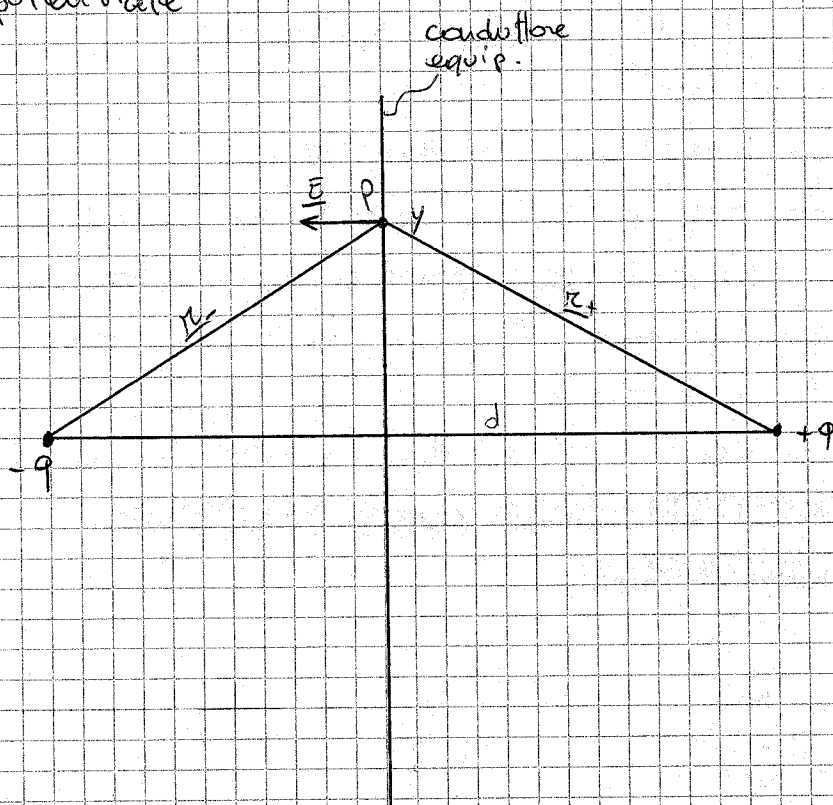
$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \vec{E}$$

Dimostrare tutto.





conduttore
equipotenziale



conduttore equip.

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = 0 \quad \cos\theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + y^2}}$$

$$\vec{E} = \frac{2qd}{4\pi\epsilon_0 (d^2 + y^2)^{3/2}} = \vec{E}_\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad \sigma = \frac{-2qd}{4\pi(d^2 + y^2)^{3/2}} =$$

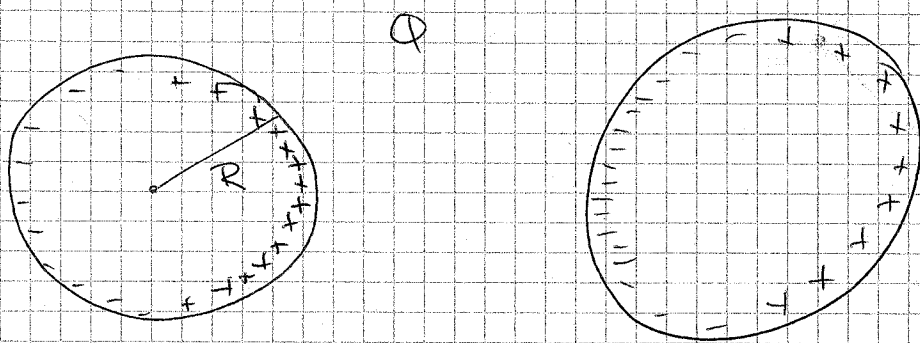
$$= -\frac{2q}{4\pi d^2} \cos\theta = \sigma(\theta)$$

Infatti, il problema è simmetrico rispetto all'asse che congiunge q e $-q$.

La distr. di carica negativa sul conduttore genera lo stesso campo elettrico di una $-q$ posizionata come nel disegno.

Il campo elettrico di $-q$ e quello di q si annullano (METODO DELLE CARICHE IMMAGINE)

(-q ha il compito di annullare il potenziale sulla superficie)



$$V_c = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \left| \frac{Q}{V_c} = C \right| = 4\pi\epsilon_0 R$$

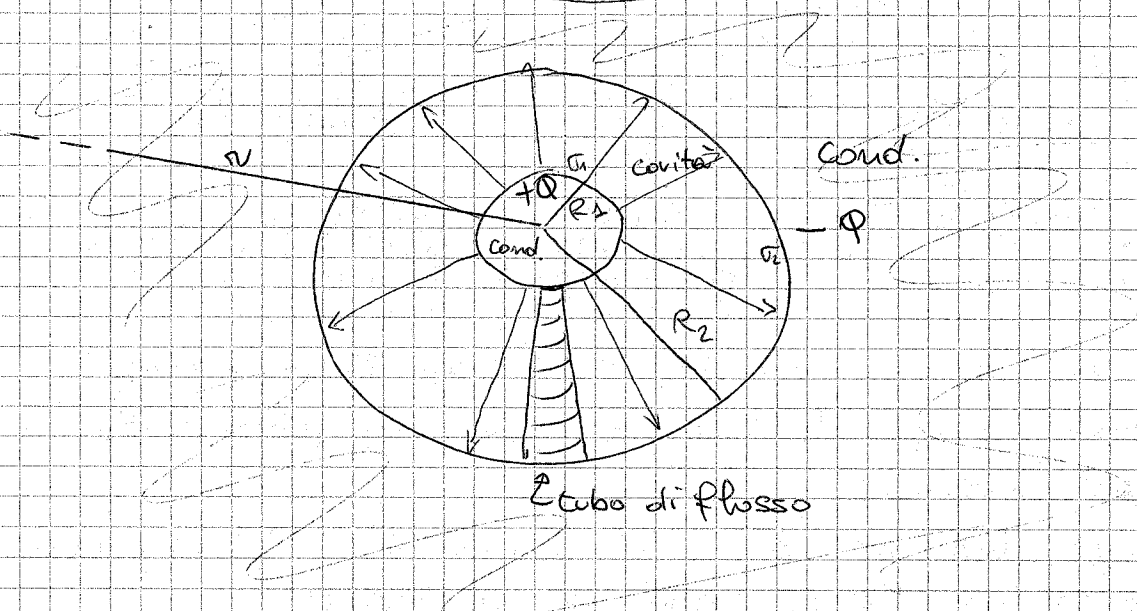
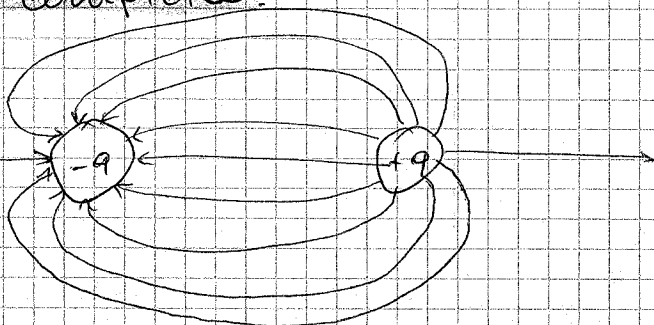
fenomeno d'induzione elettrostatica

il potenziale del primo conduttore cambia.

il secondo conduttore genera un addebolimento di carica sul primo. Le cariche negative abbassano il potenziale.

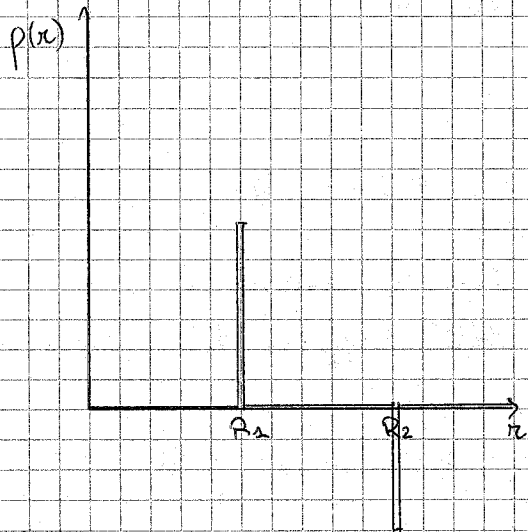
Se nel primo cond. V è diminuito, C è aumentato.

CAPACITORE: due conduttori in induzione completa.



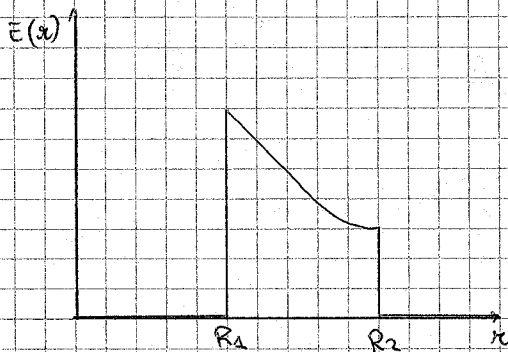
$$\sigma_1 = \frac{Q}{4\pi \cdot R_1^2}$$

$$\sigma_2 = -\frac{Q}{4\pi \cdot R_2^2}$$



$$E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$E(R_1) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_1^2} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}$$



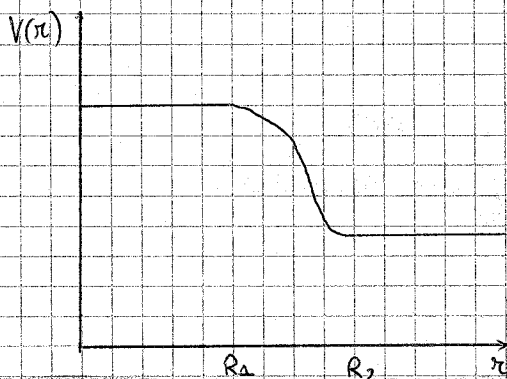
$$V(R_1) - V(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr =$$

$$= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) = \Delta V$$

(diff. di potenziale $V_+ - V_-$)

È proporzionale alla carica elettrica.



$$\frac{Q}{\Delta V} = C \quad \text{CAPACITÀ DEL CONDENSATORE}$$

$$\frac{Q}{\Delta V} = C = \frac{4\pi \epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

$$R_2 \rightarrow R_1 \Rightarrow C \rightarrow \infty$$

$$R_2 \rightarrow \infty \Rightarrow C \rightarrow 4\pi \epsilon_0 R_1$$

(il potenziale è definito a meno di una costante \Rightarrow l'altezza del grafico non ha molto significato)

$$U = \frac{1}{2} \int p \cdot V d\tau = \frac{1}{2} \left[\int p_+ \cdot V_+ d\tau + \int p_- \cdot V_- d\tau \right] \quad \left(\begin{array}{l} \text{divido le} \\ \text{superfici} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{2} [V_+ \cdot Q + V_- \cdot (-Q)] = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Si chiamano ARMATURE del condensatore le superfici dei conduttori su cui è depositata la carica.

Se faccio tendere R_1 a R_2 mi riconduco ad una situazione che vede due superfici piane cariche con densità σ .

$$\sigma_1 = -\sigma_2$$

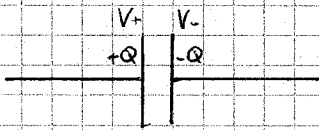
$$R_1 - R_2 = \Delta \quad \Delta \ll R_1$$

La separazione tra i piani è molto minore del raggio di curvatura.

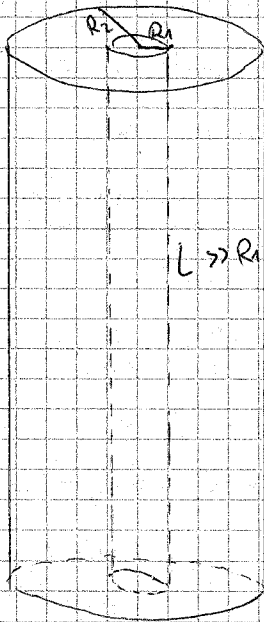
$$C = 4\pi\epsilon_0 R_1 \frac{(R_2 + \Delta)}{\Delta} = \frac{\epsilon_0 \cdot S}{\Delta}$$

$$\frac{Q}{\Delta V} = \sigma S \cdot \frac{1}{\epsilon_0 \Delta} \quad \epsilon_0 = \frac{\sigma}{E_0}$$

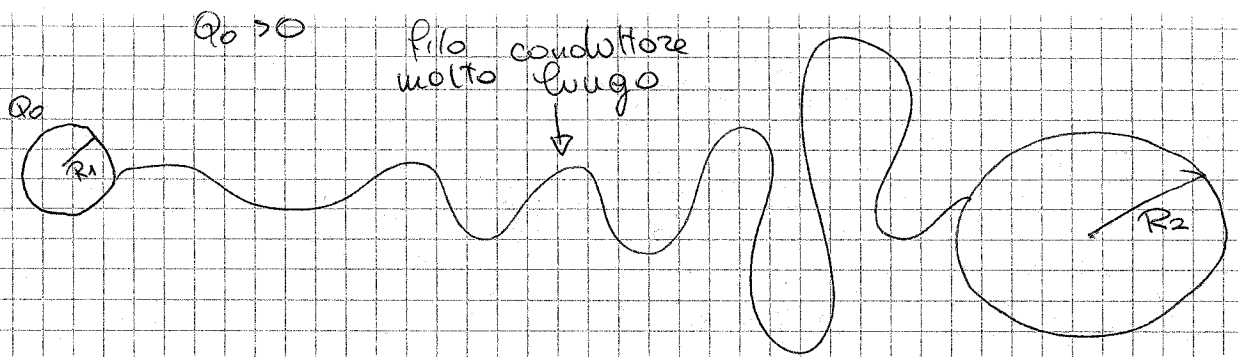
$$\parallel \frac{S}{\epsilon_0 \Delta} \quad \frac{S \epsilon_0}{\Delta}$$



Condensatore a facce piane



(fare lo stesso ragionamento)



Il sistema sfere - filo è diventato un unico conduttore.

La carica iniziale Q_0 si divide tra le due sfere:

$$Q_0 = Q_1 + Q_2$$

Dato che le sfere sono molto lontane, le due risultano isolate.

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$\text{Se } V_1 = V_2 \implies \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

Il tempo per raggiungere la situazione d'equilibrio è immediato.

$$Q_2 = Q_0 - Q_1$$

$$Q_1 = Q_0 - Q_2$$

$$\frac{Q_0}{R_2} = Q_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q_1 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$$

$$Q_1 = \frac{Q_0 R_1}{R_1 + R_2}$$

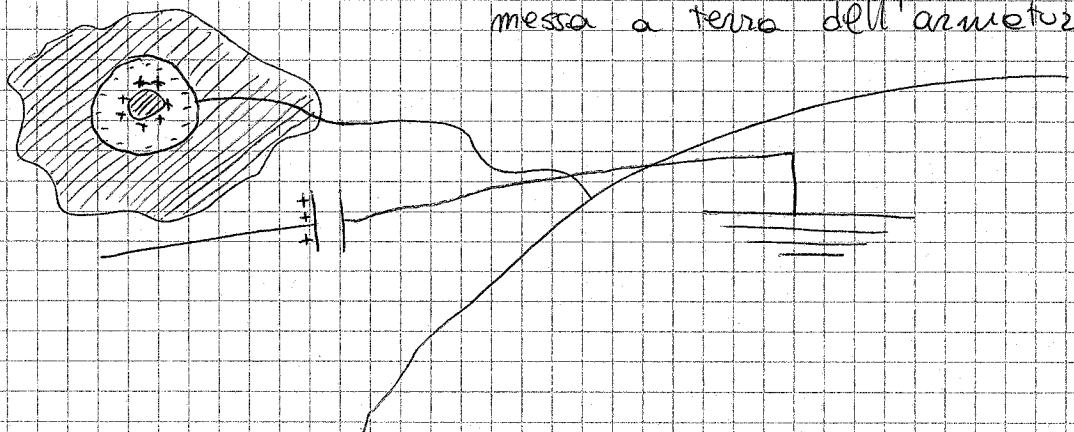
$$Q_2 = \frac{Q_0 R_2}{R_1 + R_2}$$

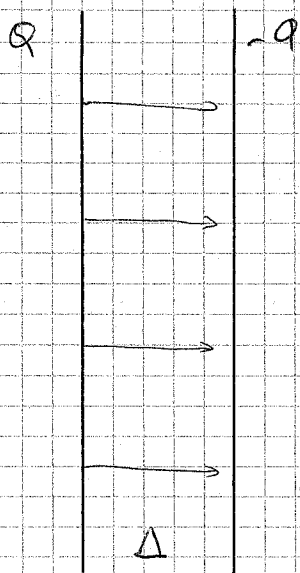
$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} = \frac{Q_0}{R_1 + R_2}$$

$$R_2 \gg R_1 \implies Q_2 \rightarrow Q_0$$

messa a terra dell'armatura





$$C = \frac{S \epsilon_0}{\Delta}$$

$$\bar{E}_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{S \epsilon_0}$$

$$\Delta V = \bar{E}_0 \Delta$$

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \frac{S \epsilon_0}{\Delta} \bar{E}_0^2 \Delta^3$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \epsilon_0 \bar{E}_0^2 S \Delta = U}$$

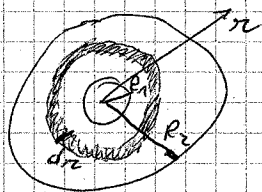
$$\frac{1}{2} \epsilon_0 \bar{E}_0^2 \tau \leftarrow \text{volume}$$

Densità di energia $u = \frac{dU}{d\tau} = \frac{U}{\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \bar{E}_0^2$

L'energia spesa si ritrova nello spazio sotto forma di campo elettrico con densità u .

Nel condensatore sferico \bar{E} non è più uniforme

$$U = \int_{\tau} u d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\tau} E^2 d\tau = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$



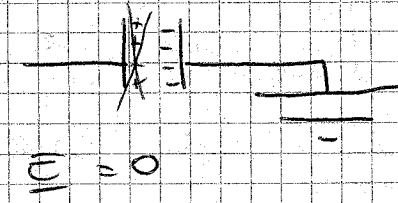
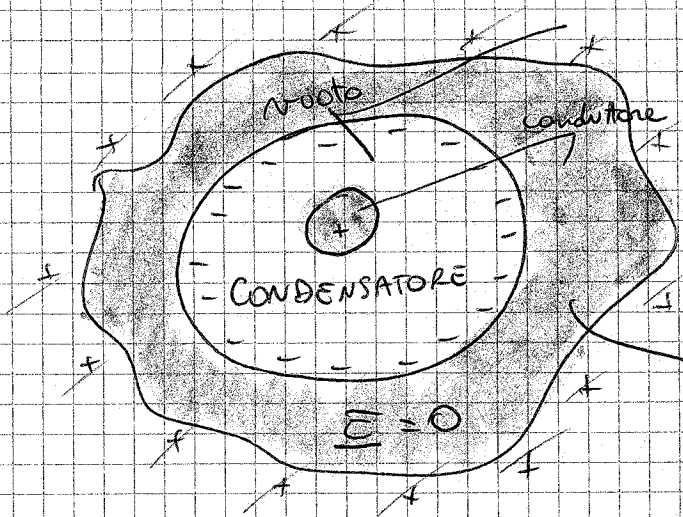
$$\frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{R_1}^{R_2} E^2(r) \cdot \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\text{differenziale del volume della sfera}} =$$

differenziale del volume della sfera

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 dr$$

Verificare che si può scrivere come $\frac{1}{2} C (\Delta V)^2$

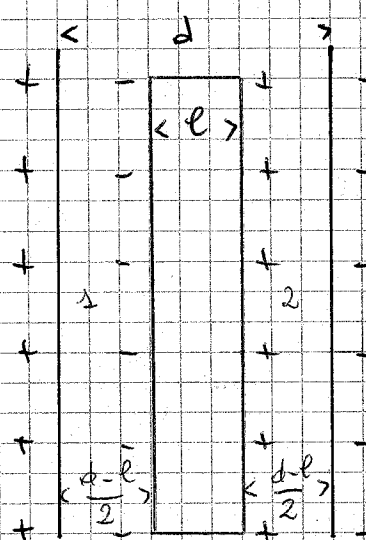
11/11/2008



Terra La carica esterna si disperde a terra

$\underline{E} = 0$ sia dentro che fuori del conduttore il potenziale del conduttore è il potenziale della terra, infatti:

$$\int_p^{+\infty} \underline{E} \cdot d\underline{l} = 0$$



$$\Delta V, S, d$$

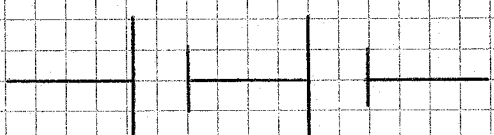
$$C = \epsilon_0 S / d$$

$$\underline{E} = \Delta V / d$$

$$\underline{E} = \sigma / \epsilon_0$$

Introduciamo in questo condensatore un'altra lastra conduttrice

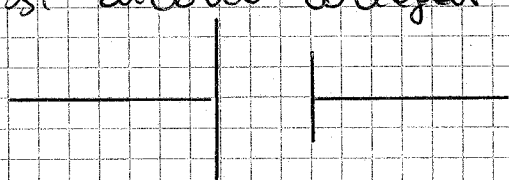
Sono due conduttori in involuzione completa che generano una coppia di condensatori collegati tra loro (allo stesso potenziale):



$$C_1 = \frac{S \epsilon_0}{d-l} \cdot 2 \quad C_2 = \frac{S \epsilon_0}{d-l} \cdot 2$$

C_{tot} = capacità totale del condensatore completo.

Il sistema è infatti equivalente ad un unico condensatore. Questi due condensatori si dicono collegati in serie.



Tutte le linee di forza che escono dalla prima si fermano comunque nella seconda.

La differenza di potenziale ΔV è cambiata rispetto a prima:

$$\Delta V = \int_0^d \underline{\bar{E}} \cdot d\underline{\ell} = \bar{E}_0 \left(\frac{d-l}{2} \right) + 0 + \bar{E}_0 \left(\frac{d-l}{2} \right)$$

All'interno della lastra conduttrice $\underline{\bar{E}} = 0$

$$\bar{E}_0 = \sigma / \epsilon_0$$

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d-l) \quad \text{Moltiplichiamo per } \frac{S}{S}$$

$$= \frac{\sigma S}{\epsilon_0 S} (d-l)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 S}{d-l}$$

$$= \frac{Q}{\epsilon_0 S} (d-l)$$

$$C_1 + C_2 = \frac{4\epsilon_0 S}{d-l} \quad \text{non si sommano le } C$$

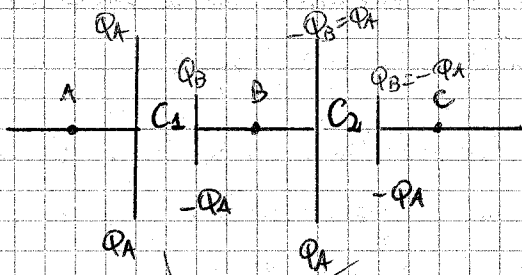
Vale, invece,

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C}$$

$$\frac{1}{2} \frac{(d-l)}{\epsilon_0 S} + \frac{1}{2} \frac{(d-l)}{\epsilon_0 S} = \frac{d-l}{\epsilon_0 S}$$

Collegando in serie due condensatori di capacità C_1 e C_2 si ottiene un condensatore di capacità C tale

$$\text{che } \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$



in inclusione completa

$$C_1 = \frac{Q_A}{V_A - V_B}$$

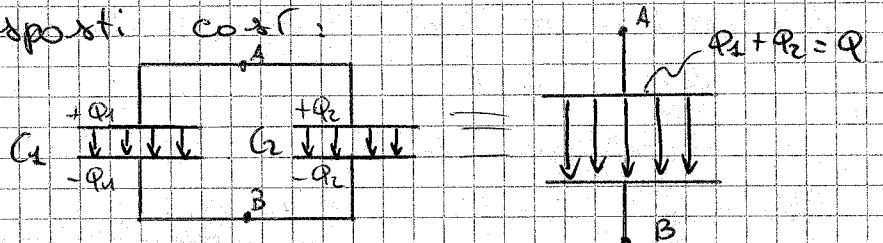
$$C_2 = \frac{Q_A}{V_B - V_C}$$

$$Q_A := Q$$

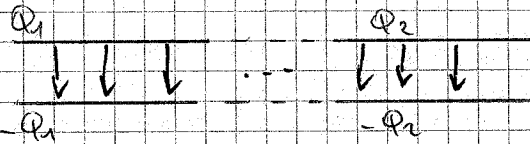
$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{V_A - V_B}{Q} + \frac{V_B - V_C}{Q}$$

$$= \frac{V_A - V_C}{Q} = \frac{1}{C_{TOTALE}}$$

Due condensatori si dicono in parallelo se sono disposti così:



È come se fossero collegate le lastre dei due condensatori piani

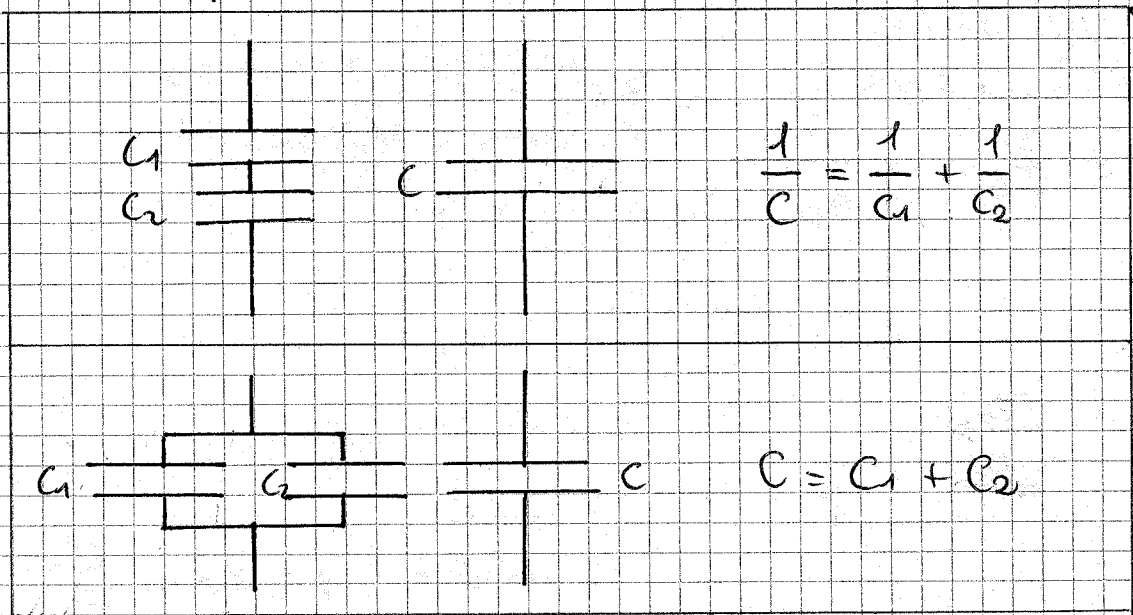


$$C_1 = \frac{Q_1}{V_A - V_B}$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{V_A - V_B}$$

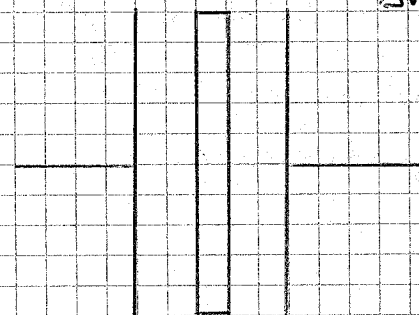
$$C_1 + C_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{V_A - V_B} = C_{TOT}$$

Collegando in parallelo due condensatori di capacità C_1 e C_2 si ottiene un condensatore di capacità C tale che $C = C_1 + C_2$



$$\Delta V_0 = Q/C$$

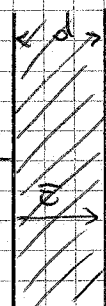
Se la sbarra è così lunga da toccare le armature, il condensatore si scarica.



Se introduco tra le armature del materiale dielettrico,

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\epsilon_r} \quad \epsilon_r > 1 \text{ sempre}$$

$\epsilon_r =$ costante dielettrica relativa (al vuoto)



ϵ_r dipende esclusivamente dal materiale dielettrico che è stato posto nel condensatore

Vetro: 4,7

Porcellana: 6,5

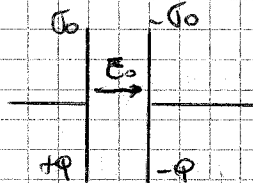
$$\Delta V_0 = \frac{Q}{C} = \epsilon_0 \cdot d$$

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\epsilon_r} = E \cdot d$$

$$\Rightarrow \bar{C} = \frac{\bar{C}_0}{\epsilon_r}$$

Se il materiale isolante (dielettrico) è uniformemente distribuito, il campo elettrico colà ma rimane uniforme.

$$\bar{C}_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$



$$E = \bar{C}_0 + \bar{C}_p$$

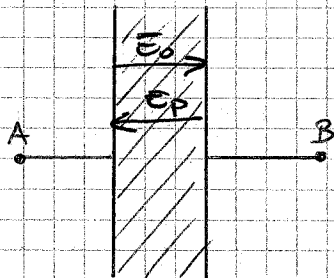
\bar{C}_p rappresenta il campo elettrico generato dal dielettrico.

$$\bar{C} = \bar{C}_0 + \bar{C}_p = \frac{\bar{C}_0}{\epsilon_r} \Rightarrow \bar{C}_p = \bar{C}_0 \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right)$$

$$\bar{C}_p < \bar{C}_0$$

$$\bar{C}_p = \bar{C}_0 \left(\frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \right)$$

$$\bar{C}_p < 0$$



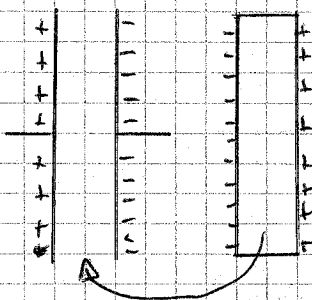
$$\bar{C}_0 + \bar{C}_p = \frac{\bar{C}_0}{\epsilon_r}$$

$$\sigma_0 \rightarrow \bar{C}_0$$

$$\sigma_p \rightarrow \bar{C}_p = \epsilon_0 \left(\frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \right)$$

$$\Rightarrow \sigma_p = \sigma_0 \left(\frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \right)$$

Il campo elettrico \bar{C}_p è uguale al campo generato da una distribuzione negativa di carica σ_p .



Cosa si osserva da un punto di vista microscopico?

Nel materiale dielettrico avviene una polarizzazione.

Polarizzazione $\left\{ \begin{array}{l} \text{Deformazione} \\ \text{Orientamento} \end{array} \right.$

Nei dielettrici, gli elettroni sono fortemente legati ai loro atomi.

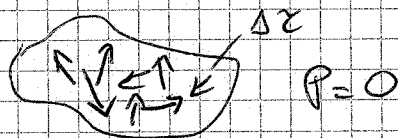
Prendiamo un elemento macroscopico di volume $\Delta\tau$ e consideriamo i momenti di dipolo d_i delle molecole polari:

\underline{P} = vettore di polarizzazione macroscopico

$$\underline{P} = \frac{\sum_i d_i}{\Delta\tau}$$

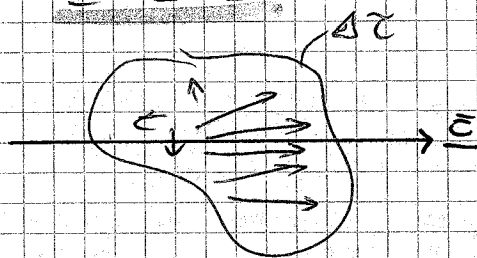
$P = 0$ in un materiale non polarizzato (dove le molecole hanno orientamenti casuali)

$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \underline{P}$ = vettore di polarizzazione locale



Immergiamo $\Delta\tau$ in un campo elettrico \underline{E}

$$\underline{M} = \underline{d} \times \underline{E}$$



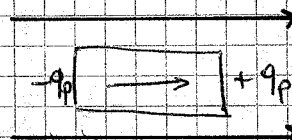
$$\underline{P} \propto \underline{E}$$

$$\underline{P} = \epsilon_0 \chi \underline{E}$$

"chi"

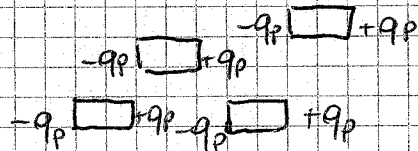
$$\underline{P} \parallel \underline{E}$$

$$\underline{d} = \sum_i d_i = \underline{P} \cdot \Delta\tau$$

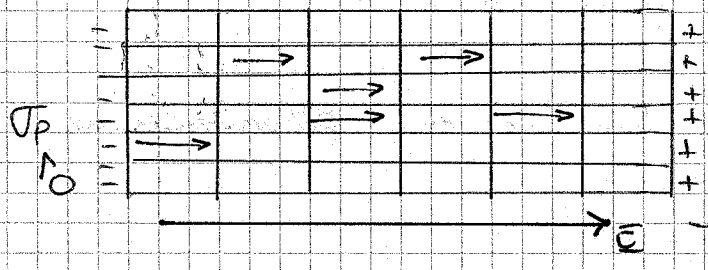


è sempre un momento di dipolo

$$\frac{[C]}{[m]^2} = \frac{[C][m]}{[m]^3}$$



dielettrico



All'interno, $q = 0$
 Sulle due facce esterne
 si ha $-\sigma_p$ e $+\sigma_p$

(POLARIZZAZIONE PER ORIENTAMENTO)

Le molecole non sono perfettamente orientate perché agisce sempre l'agitazione termica

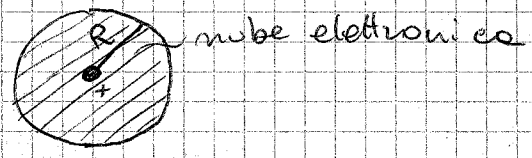
$U_{int} = -\underline{P} \cdot \underline{E} = -PE \cos \theta$ $kT \approx \frac{1}{40} eV$

$e^{-\frac{U_{int}}{kT}}$ = probab. che l' U_{int} abbia questo valore

$\bar{x} = \int x \cdot p(x) \cdot dx$ $\bar{x} = \langle x \rangle = \int x p(E) dE$ $\langle p \rangle = p \langle \cos \theta \rangle$
 ↑ probabilita' che copri quella x $\langle \cos \theta \rangle = \int \cos \theta e^{-\frac{PE \cos \theta}{kT}} d\theta$

Si può applicare un modello "a pannello" per l'atomo:

Modello di Rutherford



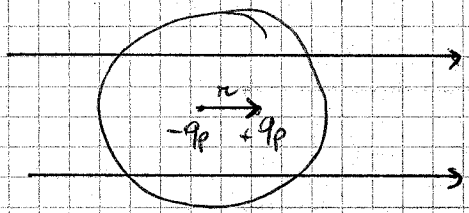
"Le cose sferiche si gestiscono meglio"
 gallina sferica

carica del protone

$q_p = z |e|$ — carica elettronica

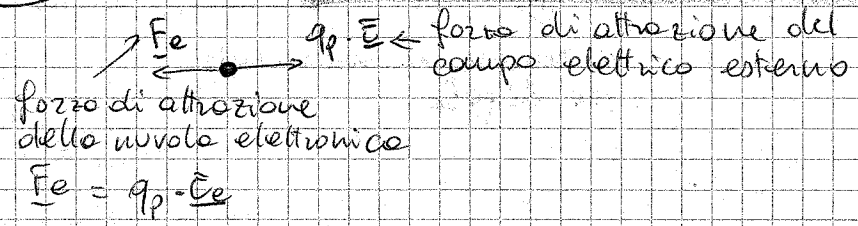
$R \approx 1 \text{ \AA}$

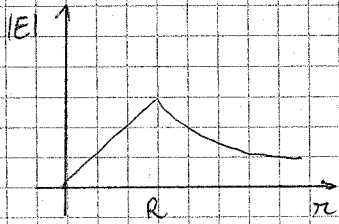
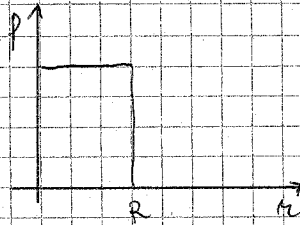
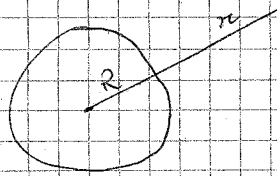
Cosa succede se l'atomo si trova immerso in un campo \underline{E} ?



Il protone si sposta rispetto al baricentro delle cariche negative, che si trova nel centro di massa

$d = r \cdot z |e|$





$$\vec{E}_e(r) = \frac{2|e|rc}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{r} \quad \text{--- momento di dipolo indotto}$$

$$\vec{C}_e = \vec{C}$$

$$\frac{2|e|rc}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \vec{E}$$

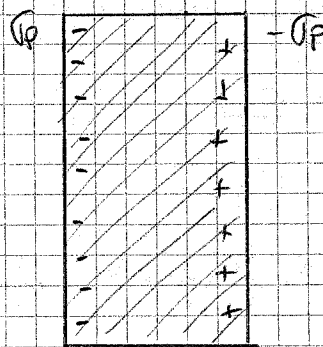
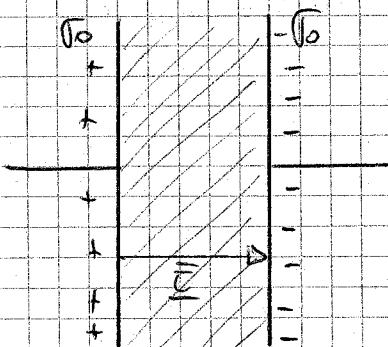
$$\vec{P} = \alpha \cdot \vec{E} \quad \text{Momento del dipolo indotto per deformazione}$$

$$\alpha = \text{POLARIZZABILITA'}$$

\vec{P} momento del dipolo atomico

\vec{P}_i, \vec{d} (stessa cosa)

$$\vec{d} = \sum_i \vec{d}_i = \vec{P} \cdot \Delta\tau$$



$$\epsilon_r > 1$$

$$\vec{P} = \left(\frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \right) \vec{\sigma}_0$$

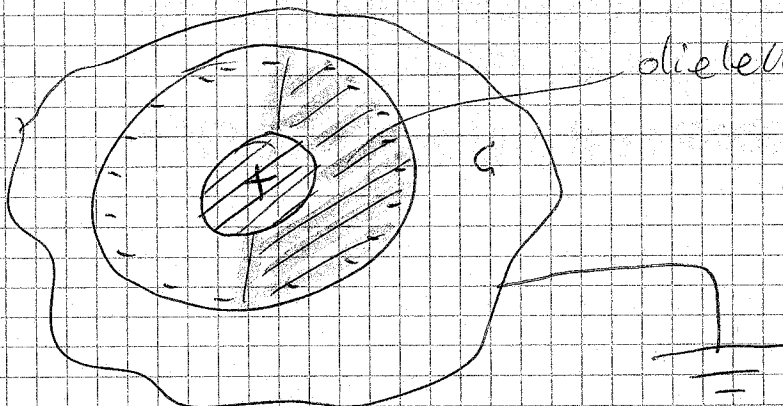
$$\frac{\vec{\sigma}_0}{\epsilon_0} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} = \vec{C}$$

$$\frac{\vec{\sigma}_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \vec{C}$$

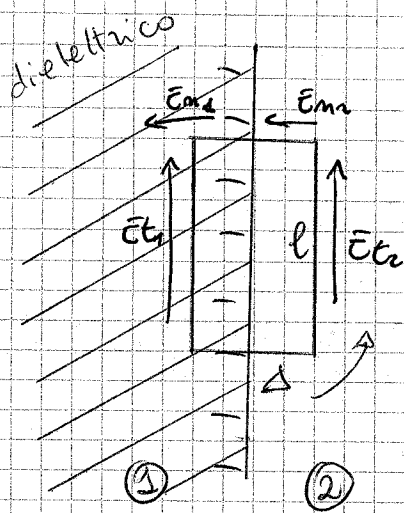
$\epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon = \text{costante dielettrica assoluta}$

$$\vec{C} = \frac{\vec{\sigma}_0}{\epsilon}$$

Tutte le volte che il dielettrico occupa tutto lo spazio in cui è presente il campo elettrico posso usare le formule precedentemente trovate sostituendo ϵ ad ϵ_0 .



Con questa configurazione NON posso utilizzare le vecchie formule.



Lungo la linea rettangolare, quanto vale la circolazione del campo elettrico?

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\vec{E} \text{ conservativo})$$

Scompongo \vec{E} in componenti normali e tangenziali alla superficie di separazione

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{n1} + \vec{E}_{t1}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{n2} + \vec{E}_{t2}$$

Ricalcoliamo l'integrale di linea

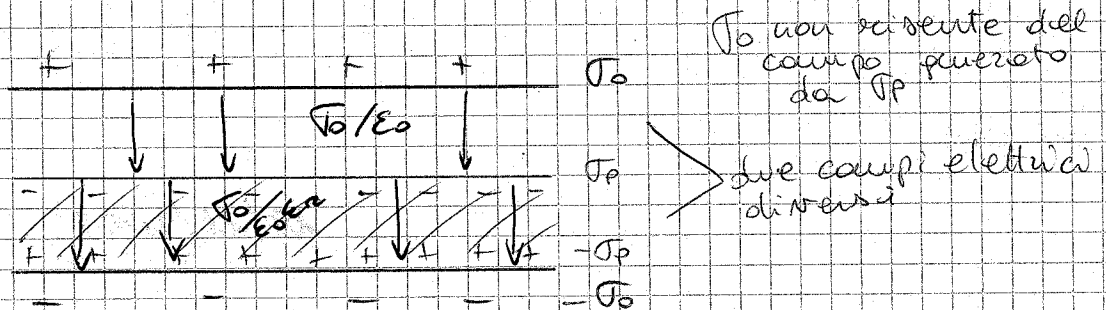
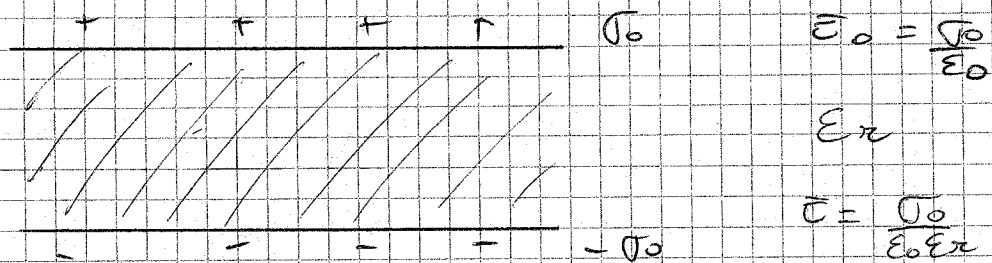
$$\vec{E}_{t2} \cdot l + \frac{\Delta}{2} (\vec{E}_{n1} + \vec{E}_{n2}) - \vec{E}_{t1} \cdot l - \frac{\Delta}{2} (\vec{E}_{n1} + \vec{E}_{n2}) = 0$$

Facciamo il limite per $\Delta \rightarrow 0$ di questa espressione (non sappiamo se lungo i due Δ il campo è lo stesso)

$$\vec{E}_{t2} \cdot l - \vec{E}_{t1} \cdot l = 0$$

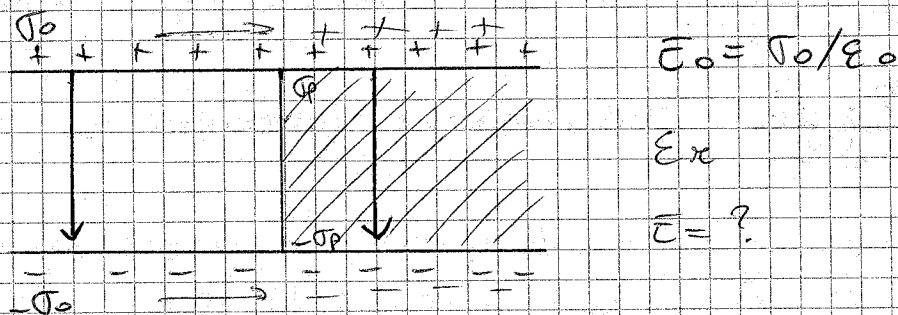
La componente tangenziale di \vec{E} alla superficie di separazione di due mezzi diversi si deve conservare: $\vec{E}_{t2} = \vec{E}_{t1}$

Questo vale qualunque siano i mezzi.



La componente tangenziale si conserva = 0 sia nel vuoto che nel dielettrico.

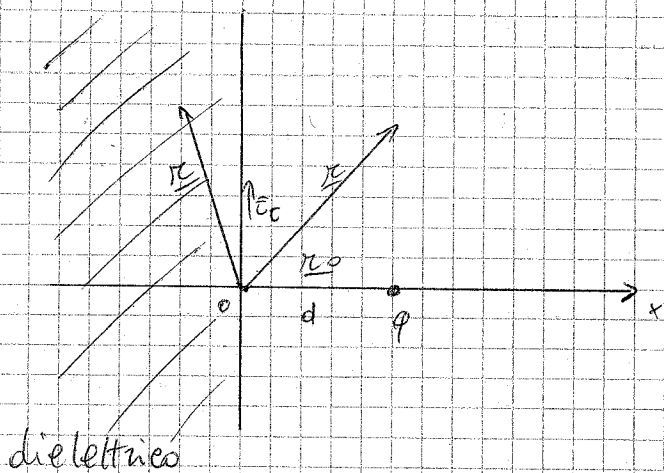
(All'esterno del doppio strato i contributi del campo elettrico generati dal doppio strato si annullano, mentre all'interno di esso si sommano.)



In questo caso applicando le solite formule la comp. tangenziale non si conserva \Rightarrow il campo elettrico nel vuoto e quello nel dielettrico devono essere uguali

C'è un "richiamo" di σ_0 verso il dielettrico di modo che $\sigma_0 + \sigma_p$ sia uniforme su tutta la superficie.

(accumolo di cariche vere)



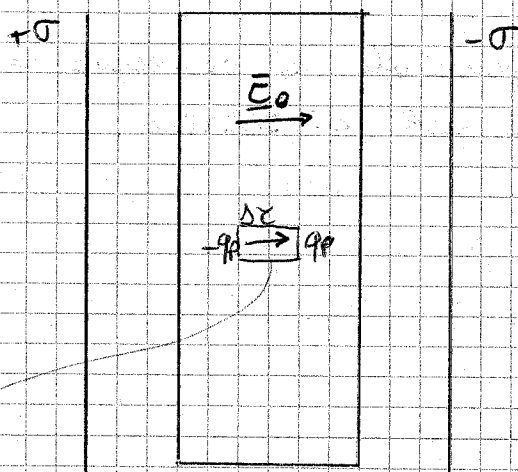
Sup. di sep. \equiv piano $x=0$

Dimostrare che NOM \vec{e} vero che:

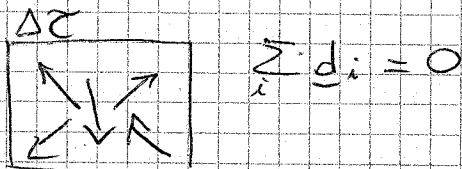
$$\vec{C}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\underline{r} - \underline{r}_0|^3} (\underline{r} - \underline{r}_0)$$

$$\vec{C} = \frac{q (\underline{r} - \underline{r}_0)}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r |\underline{r} - \underline{r}_0|^3}$$

18/11/2009



campo elettrico uniforme
 \Rightarrow polarizzazione del dielettrico



$$\sum_i \underline{d}_i = 0$$

$\underline{M}_i = \underline{d}_i \times \underline{E}$ momento di forza su ogni singolo dipolo

$$\underline{P} = \frac{\sum_i \underline{d}_i}{\Delta z} \quad \text{polarizzazione macroscopica}$$

cilindretto cilindrico di base S e lunghezza l

$$d = q_p \cdot l \quad (q_p \text{ carica sulla base})$$

$$= P \cdot \Delta z = P \cdot S \cdot l \quad P = \frac{q_p}{S} = \sigma_p$$

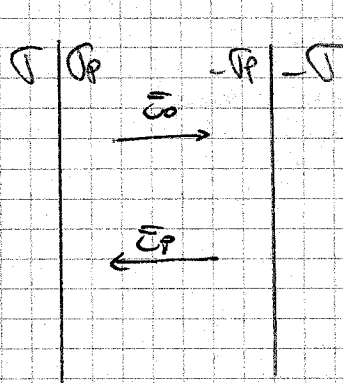
Sulle superfici di questi cilindretti c'è una densità di carica σ_p .

Vediamo il dielettrico come se fosse formato da tanti di questi cilindretti: le cariche positive di polarizzazione all'interno si annullano tra loro

$$- [\dots - + + - \dots] +$$

Solo sulle facce esterne si osserva una densità di carica $\sigma_p = P$.

Se il dielettrico occupa tutto lo spazio interno al condensatore:



$$\sigma_p = \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \sigma \quad \epsilon_r > 1$$

$$\sigma + \sigma_p = \sigma / \epsilon_r$$

Da un campo \underline{E}_0 si passa ad un campo \underline{E}

$$\underline{E}_0 = \sigma / \epsilon_0$$

$$\underline{E} = \sigma / \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$\underline{E} = \underline{E}_0 + \underline{E}_p$$

$$\underline{P} = \chi \cdot \epsilon_0 \cdot \underline{E}$$

$$\underline{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

$$\sigma = \frac{\epsilon_r \sigma_p}{1 - \epsilon_r}$$

$$\Rightarrow \underline{E} = \frac{\epsilon_r \sigma_p}{\epsilon_0 \epsilon_r (1 - \epsilon_r)} = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \frac{1}{1 - \epsilon_r}$$

$$\frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \frac{1}{1 - \epsilon_r} \cdot \epsilon_0 \cdot \chi = \underline{P} = \sigma_p$$

$$\Rightarrow \chi = 1 - \epsilon_r$$

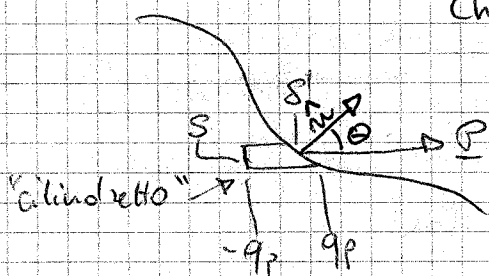
$$\epsilon_r = 1 + \chi$$

$$\chi > 0$$

Se $\chi = 0$ non c'è polarizzazione

Se non c'è polarizzazione, $\epsilon_r = 1$

Che succede se la superficie del dielettrico non è piana?



Che legame c'è tra S' ed S ?

$$S = S' \cos \theta$$

$$\theta = 0 \Rightarrow S' = S$$

$$q_p / S = \sigma_p$$

$$\sigma'_p = q_p / S'$$

densità di carica diversa

$$\sigma_p = \underline{P}$$

$$\sigma'_p = \frac{q_p}{S} \cos \theta = \underline{P} \cos \theta = \underline{P} \cdot \hat{n}$$

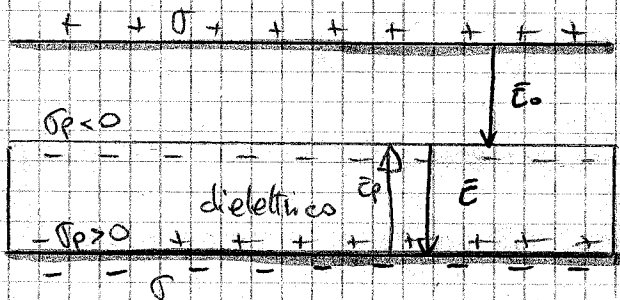
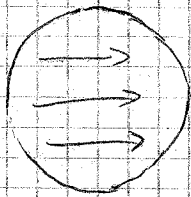
$$\theta = 0 \Leftrightarrow \sigma'_p = \sigma_p = \underline{P}$$

$$\sigma'_p = \underline{P} \cdot \hat{n}$$

dielettrico sferico

⇒ \underline{P} omogeneo

⇒ σ_p non omogeneo



$$\epsilon_0 = \frac{D}{E_0}$$

$$\epsilon = \frac{D}{E} = \frac{D}{E_0 + E_p} = \frac{D}{E_0 + \frac{D}{\epsilon_0} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right)}$$

$$D + \sigma_p = \frac{D}{\epsilon_r}$$

$$P = \sigma_p$$

$$\sigma_p = \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \sigma \Rightarrow \sigma + \sigma_p = \frac{D}{\epsilon_r}$$

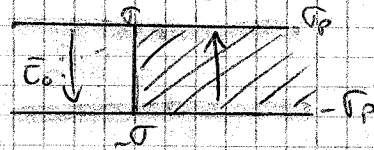
\underline{P} ha la direzione del campo elettrico totale \underline{E}

$$\underline{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \cdot \underline{E}$$

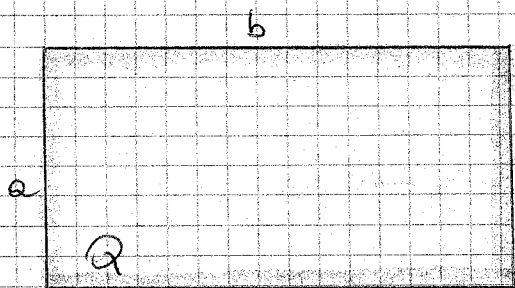
Si conserva la componente tangenziale: $E_{t1} = E_{t2}$

Non si conserva quando il dielettrico è disposto in questo modo:

(la superficie di separazione non è perpendicolare alle linee di campo)

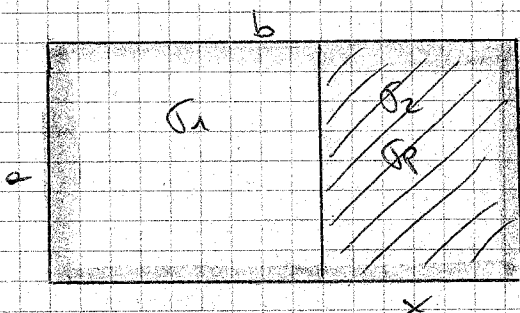


Quelle evidenziate sono comunque superfici equipotenziali: c'è uno spostamento delle coriche del conduttore in modo da compensare l'inserimento di σ_p . Questo accade perché in un conduttore le cariche sono libere di muoversi.



Armatura di un cond. vuoto visto dall'alto

$$\bar{\epsilon}_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \quad \sigma_0 = \frac{Q}{ab}$$



$$\sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_p$$

$$\sigma_1 a(b-x) + \sigma_2 ax = Q = \sigma_0 ab$$

C'è un trasferimento di carica da una parte all'altra che mantiene omogenea la densità di carica.

Conosciamo il legame tra σ_1 e σ_2 , ci manca il valore di σ_p .

Conosciamo il legame

tra σ_1 e σ_2 , ci manca il valore di σ_p .

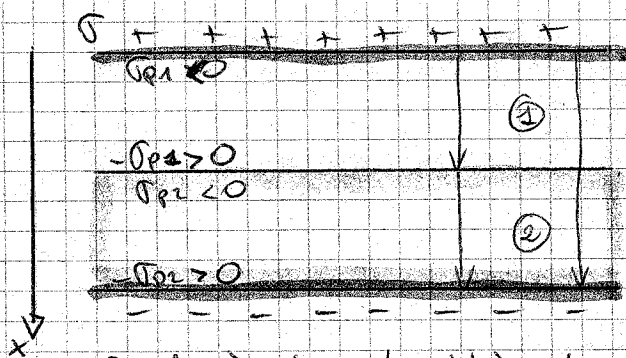
$$P = \sigma_p = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E$$

\Rightarrow legame tra σ_p e σ_2

$$E = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2 + \sigma_p}{\epsilon_0}$$

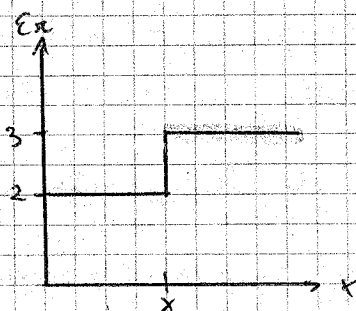
(σ_0 è conosciuto) completare l'esercizio

Se il dielettrico non è omogeneo, ci si aspetta che la sua densità di carica sia di volume (non di superficie)



$$\epsilon_{r1} = 2$$

$$\epsilon_{r2} = 3$$



Qual è la densità di carica sulla superficie di separazione?

$$E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}$$

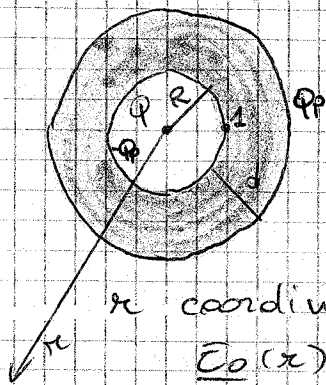
$$\sigma_{p1} = \frac{1 - \epsilon_{r1}}{\epsilon_{r1}} \sigma = -\frac{1}{2} \sigma \quad (\sigma \text{ è conosciuto})$$

$$\sigma_{p2} = \frac{1 - \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r2}} \sigma = -\frac{2}{3} \sigma$$

Sulla sup. di separazione si ha $\frac{\sigma}{2} - \frac{2}{3} \sigma < 0$ ($-\sigma_{p1} + \sigma_{p2}$)

$$-\sigma_{p1} + \sigma_{p2} = -\frac{1}{6} \sigma$$

esercizio da esame:



guscio dielettrico

$$R = 2 \text{ cm}$$

$$d = 1 \text{ cm}$$

$$\epsilon_r = 3$$

$$Q = 1 \text{ mC}$$

r coordinata radiale

$$\underline{E}_0(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \underline{x}$$

$$\underline{E}(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^3} \underline{x} \quad \leftarrow \text{solo se } \underline{E} \text{ e' conservativo}$$

σ_{p1} densità sulla sup. di raggio R

$$\sigma_{p1} = -\frac{Q_p}{4\pi R^2} \quad (Q_p > 0, -Q_p < 0)$$

σ_{p2} densità sulla sup. di raggio $R+d$

$$\sigma_{p2} = \frac{Q_p}{4\pi (R+d)^2}$$

Il campo elettrico è radiale \Rightarrow la componente tangenziale alla sup. è sempre $= 0 \Rightarrow$ si conserva

$$E(x) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2} & R < r < R+d \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R+d \end{cases}$$

All'interno e all'esterno del guscio il campo elettrico ha la stessa espressione

Per il teor. di Gauss: $\underline{E}(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ ($Q_{int} = Q$)

Se la superficie gaussiana è contenuta nel guscio sferico, $Q_{int} = Q - Q_p$

$$\underline{E}(r) = \frac{Q - Q_p}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

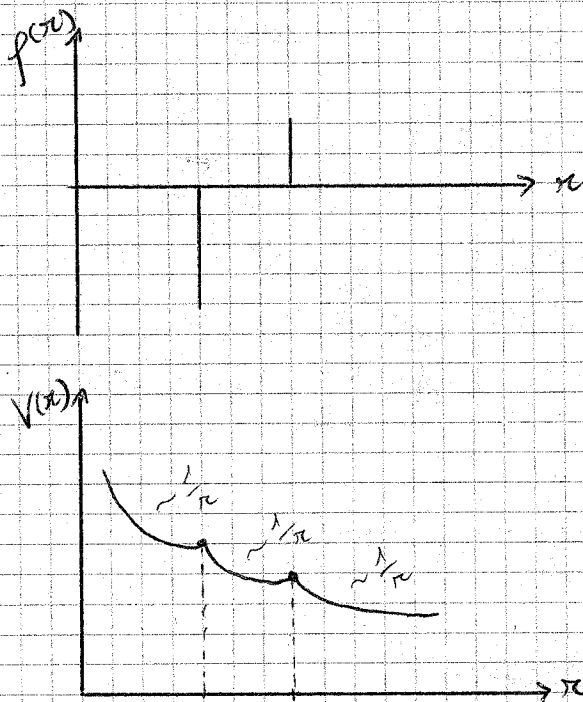
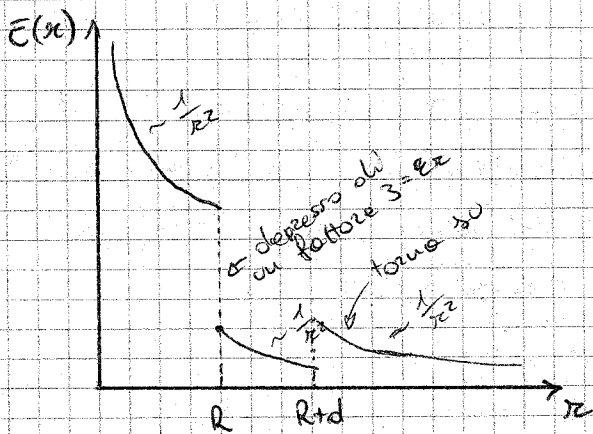
|||

$$\underline{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2}$$

$$\frac{Q - Q_p}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2} \Rightarrow Q - Q_p = \frac{Q}{\epsilon_r} \Rightarrow Q_p = Q \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)$$

$$\Rightarrow Q_p = Q \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \quad (\text{Abbiamo scelto } Q_p > 0 \text{ ed } \epsilon < \infty)$$

Come va il grafico di $E(x)$?



Per convenzione, il potenziale all'infinito è uguale a 0

$$V(\infty) = 0$$

$$V(x) = \int_x^{+\infty} E(x') dx'$$

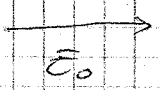
$$V(x) = \begin{cases} \int_x^{+\infty} E(x') dx' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right) + V(R) \\ \int_x^{R+td} E(x') dx' + \int_{R+td}^{+\infty} E(x') dx' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R+td} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \end{cases}$$

sostituendo R a x

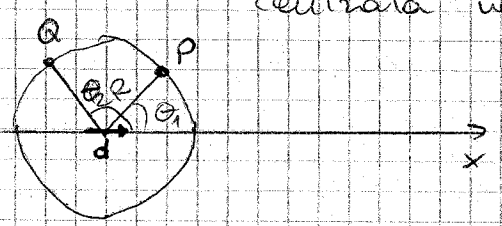
$$\Rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} + \frac{Q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_0 (R+td)\epsilon_r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R+td)} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} +$$

$$+ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r}$$



dimostrare che una sup di raggio R
centrata nel dipolo è equipot.
asse x // \underline{E}_0



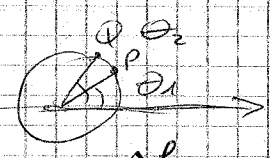
Come si scrive la diff.
di potenziale tra due punti
P e Q sulla sup. sferica?

$$\underline{E} = \underline{E}_0 + \underline{E}_d$$

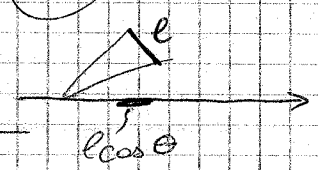
$$V(P) - V(Q) = \int_P^Q \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

$$= \int_P^Q \underline{E}_0 \cdot d\underline{l} + \int_P^Q \underline{E}_d \cdot d\underline{l}$$

Supponiamo positivi θ_1 e θ_2

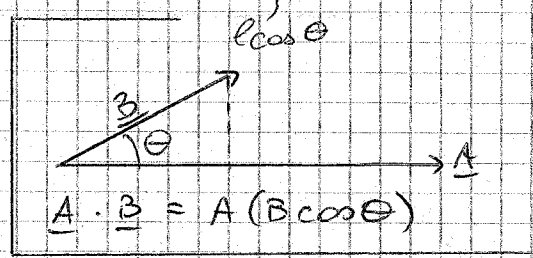


$$\int_P^Q \underline{E}_0 \cdot d\underline{l} = \underline{E}_0 \int_P^Q dl = E_0 (l \cos \theta)$$

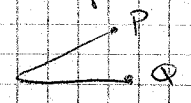


$$= E_0 R (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) = V(P) - V(Q)$$

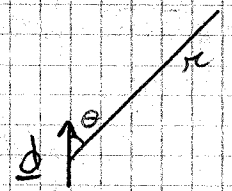
$$E_0 R (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = V(Q) - V(P)$$



Invertiamo i punti perché si



$$\Rightarrow V(P) - V(Q) = E_0 R (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$



$$V_d(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

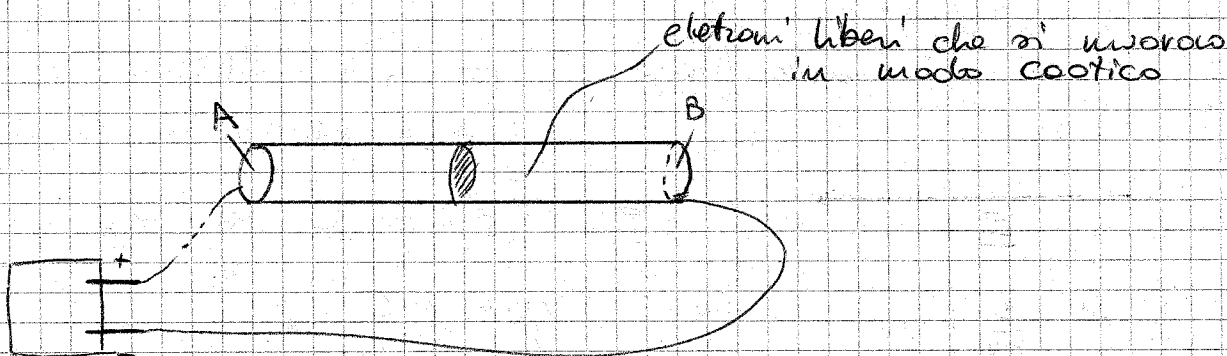
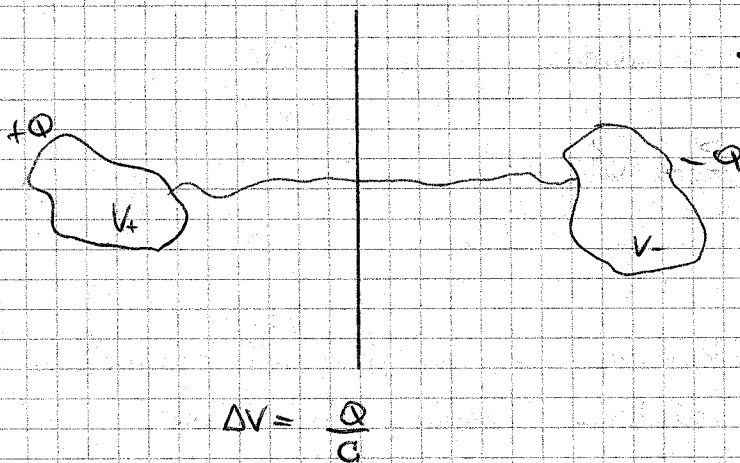
$$\Rightarrow V_d(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta_2}{R^2}$$

$$V_d(Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta_1}{R^2}$$

$$E_0 R (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{R^2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) = 0 \quad \forall \theta_{1,2}$$

$$\Leftrightarrow E_0 R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{R^2} \Rightarrow d = 4\pi\epsilon_0 E_0 R^3$$

21/11/2008

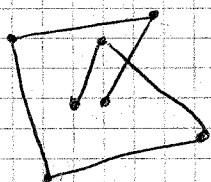


$$\int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = V_A - V_B = \Delta V$$

[Teor. cinetica dei gas]

$$\frac{1}{2} m \overline{v_T^2} = \frac{3}{2} k_B T$$

rel. termica
Coef. di Boltzmann



Quanti elettroni passano attraverso la sezione?

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = i = 0$$

$$v_T = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

millielectronvolt

A temperatura ambiente ($\sim 300 \text{ K}$) $k_B T = 25 \text{ meV}$

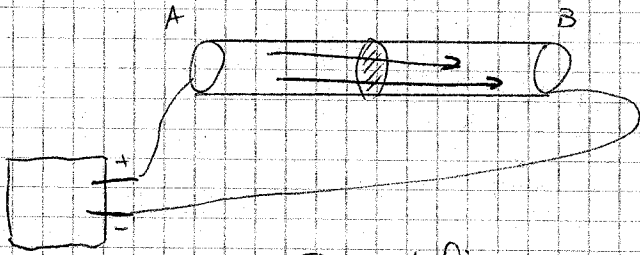
$$\Delta eV = q_e \cdot 1V = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1V$$

$$1 \text{ C} \cdot 1V = 1 \text{ J} \Rightarrow 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

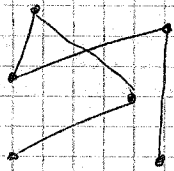
$$25 \text{ meV} = 25 \cdot 1,6 \cdot 10^{-22} \text{ J} = 4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

$$v_T = \sqrt{\frac{12 \cdot 10^{-21}}{0,9 \cdot 10^{-30}}} = \sqrt{1,3 \cdot 10^{10}} \sim 10^5 \text{ m/s}$$

Collegiamo il tubo conduttore ad una ΔV :

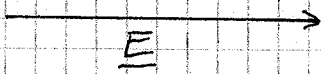


Si definisce un ^{libero} cammino medio ℓ che fanno gli elettroni prima di urtare



moto libero

poniamo l'elettrone in un campo elettrico \underline{E} :



$$\underline{F} = e \cdot \underline{E} = m \cdot \underline{a} \quad \underline{a} = \frac{e \underline{E}}{m}$$

se $\frac{\ell}{v_d} = \tau$

si ha:

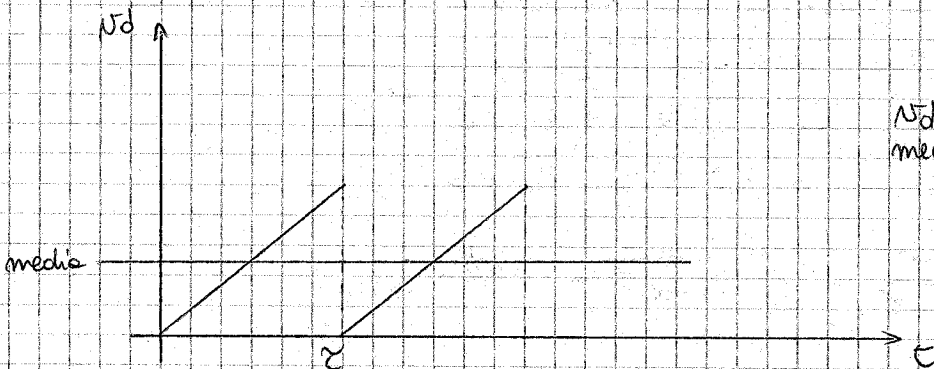
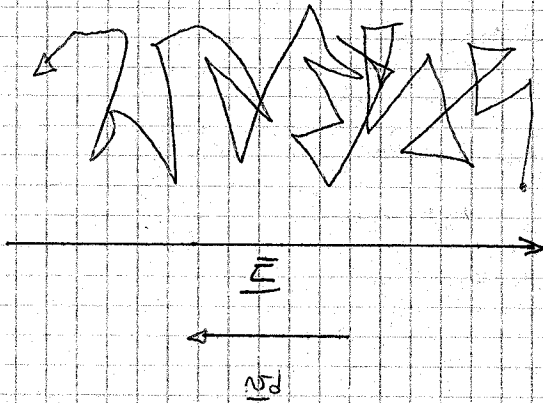
$$v_d = \frac{e \tau}{2m} \cdot \underline{E}$$

tempo tra due urti

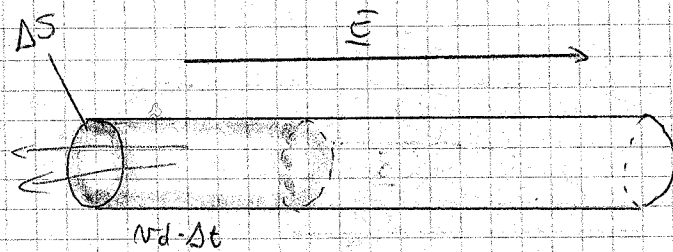
velocità di deriva media che ha acquistato l'elettrone tra due urti successivi

$$v_d \ll v_T$$

Mentre si muove di moto caotico, l'elettrone si sposta nella direzione opposta al campo elettrico (questo è l'effetto della vel. di deriva)



$$v_{d \text{ media}} = \frac{1}{2} v_d(E)$$



$(\Delta S)(v_d \Delta t) = V$ densità di elettroni:

$n = \frac{dN}{dV}$ num. di atomi per unità di volume:

$\Delta N = n \Delta S v_d \Delta t$ num. di elettroni nel nostro volume

Quanto carica libera c'è?

$$\Delta q = n \Delta S v_d \Delta t \cdot e$$

$\frac{\Delta q}{\Delta t}$ quantità di carica che attraversa la superficie ΔS in un tempo Δt

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{n \Delta S v_d \Delta t \cdot e}{\Delta t} = i \text{ corrente elettrica attraverso } \Delta S$$

tutti gli e si muovono a vel. v_d

$$i = n e N v_d \Delta S$$

$$i = \frac{n e^2 \tau}{2m} E \Delta S$$

$$j = \frac{i}{\Delta S} = \frac{n e^2 \tau}{2m} E \text{ DENSITA' DI CORRENTE} = \sigma \cdot E$$

i grandezza estensiva

σ grandezza intensiva

$\sigma = \text{CONDUCEBILITA' ELETTRICA}$

e compare al quadrato \Rightarrow "scompare" il fatto che gli elettroni abbiano carica negativa.

$$\underline{j} = \sigma \cdot \underline{E}$$

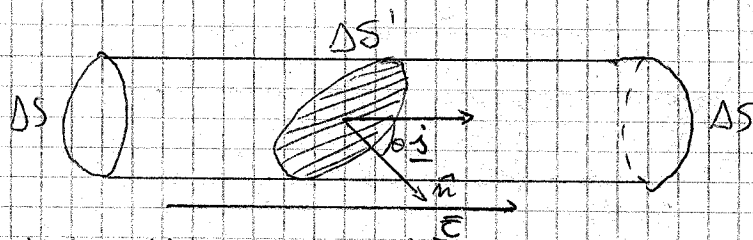
$$\underline{j} \parallel \underline{E}$$

$$i = j \cdot \Delta S$$

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} \text{ (scalare)}$$

$$\leftarrow q < 0 \quad \equiv \quad -q > 0 \rightarrow$$

è come se ci fossero elettroni di carica positiva che si muovono nel verso del campo elettrico.



La quantità di carica che passa attraverso alla sup. ΔS è uguale alla q. di carica che passa attraverso $\Delta S'$.

$$i(\Delta S) = i(\Delta S')$$

$$\Delta S = \Delta S' \cos \theta$$

$$j \Delta S = j \Delta S' \cos \theta$$

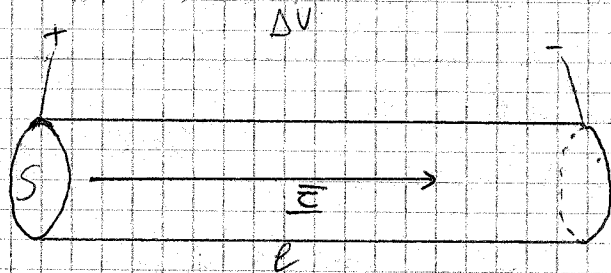
si applica la definizione di flusso:

$$\underline{j} \cdot \hat{n} \cdot \Delta S' \quad \text{flusso della densità di corrente attraverso } S'$$

$$i_{\Sigma} = \oint_{\Sigma} (\underline{j})$$

La corrente elettrica che scorre attraverso una sup. Σ è uguale al flusso del vettore densità di corrente attraverso la stessa superficie.

Nel migliore dei casi, $i = jS$



$$i = jS = \sigma S E$$

$$e l = \sigma S E l$$

$$\frac{l}{\sigma S} i = E \cdot l = \Delta V$$

dipende da sezione, lunghezza e caratteristiche del conduttore

$$\frac{1}{\sigma} = \rho = \text{RESISTIVITA'} \quad (\text{intensiva})$$

$$\Delta V = R \cdot i$$

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S} = \text{RESISTENZA} \quad (\text{estensiva})$$

LEGGE DI OHM

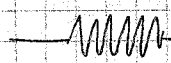
$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad \rho = \frac{1}{\sigma}$$

$$R = \frac{\rho l}{S}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{[C]}{[s]} = [A] \text{ ampère}$$

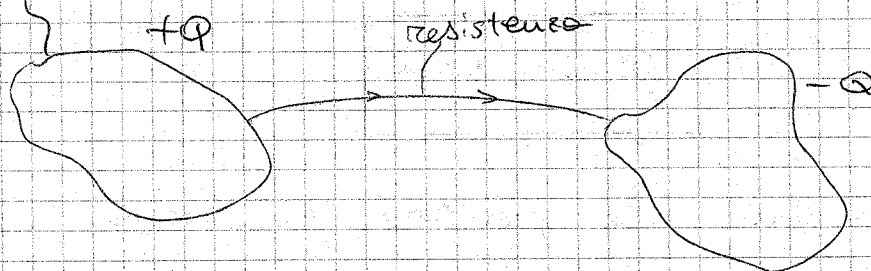
Un Coulomb è la quantità di corrente che passa quando scorre 1 ampère in 1 secondo

$$R = \frac{1V}{1A} = 1 \Omega \text{ (ohm)}$$

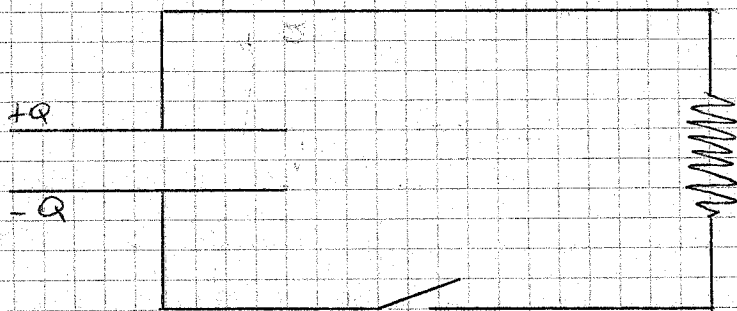


simbolo
circuitale per
la resistenza

condensatore



$$i = \frac{V}{R} = \frac{dq}{dt}$$



$$Q(0) = Q_0$$

chiudo l'interruttore.

comincerò a scorrere una corrente i che porta elettroni dall'armatura positiva a quella negativa. La ΔV ai capi della resistenza è = alla ΔV tra le armature.

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = iR, \text{ o meglio: } \Delta V(t) = \frac{Q(t)}{C} = i(t) \cdot R$$

$$i = \frac{dq}{dt} \text{ (intesa come carica positiva)}$$

$dq = i dt$ quantità di carica che al tempo dt ha lasciato l'armatura positiva.

$Q(dt)$ è la quantità di carica che al tempo dt è rimasta sull'armatura positiva.

\Rightarrow dQ VARIAZIONE di carica sull'armatura del condensatore

$$dQ = -dq$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{Q}{C} = -\frac{dQ}{dt} \cdot R$$

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$$

$$\boxed{\frac{Q}{C} = -\dot{Q} R}$$

Si introduce un parametro τ (tempo):

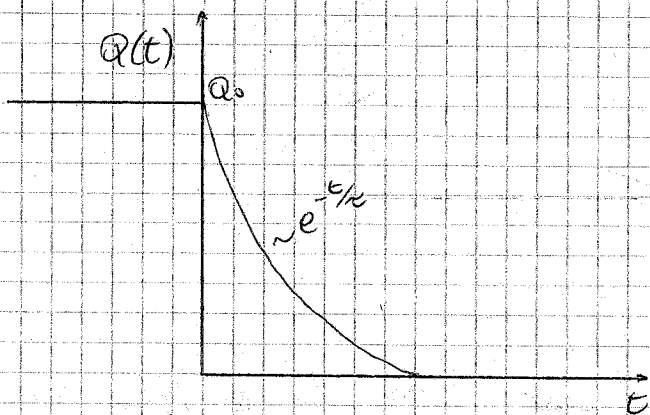
$$\tau = RC$$

(verificare le dimensioni)

$$\dot{Q} = -\frac{Q}{RC} = -\frac{Q}{\tau}$$

La soluzione di questa eq. diff. è un'esponenziale

$$Q(t) = A \cdot e^{-t/\tau} = Q_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

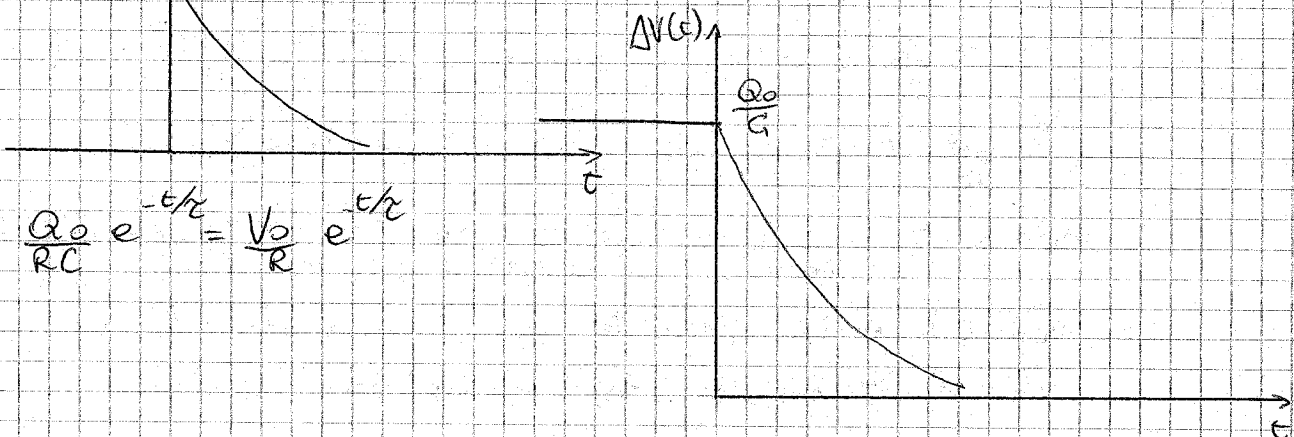


Contro il modello matematico, si riesce a misurare che se $t \gg \tau$, $Q(t) = 0$

$$\dot{Q} = -\frac{Q_0}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/\tau}$$

$i(t)$

stesso andamento, come anche ΔV



Qual è l'energia potenziale immagazzinata nel condensatore al tempo 0?

$$U(0) = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$$

A condensatore scarico?

$$U(+\infty) = 0$$

Da' è finita l'energia potenziale?

$$\int_0^{+\infty} i^2 R dt$$

DISSIPAZIONE PER EFFETTO
JOULE NELLA RESISTENZA

$$i^2 = \left(\frac{Q_0}{RC}\right)^2 e^{-2t/\tau}$$

$$\int_0^{\infty} R i^2 = \int_0^{\infty} \frac{1}{R} \left(\frac{Q_0}{C}\right)^2 e^{-2t/\tau}$$

$$\frac{1}{R} \left(\frac{Q_0}{C}\right)^2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{1}{R} \left(\frac{Q_0}{C}\right)^2 \left[\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \right]_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{Q_0^2}{RC^2} \frac{RC}{2} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} = U(0)$$

$$U(t) = \frac{1}{2} \frac{Q^2(t)}{C}$$

Calcoliamo la variazione di energia in un intervallo di tempo. Deve venire negativo perché sta diminuendo

$$dU = \dot{U} dt$$

$$\dot{U} = \frac{Q(t) \dot{Q}(t)}{C} = -V(t) i(t) \quad (Q = -u)$$

↑
diff. di potenziale

$$dU = -V i dt$$

$$-\frac{dU}{dt} = V \cdot i$$

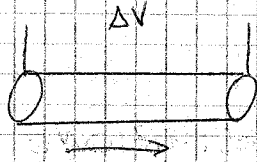
Potenza persa nel circuito

$-\frac{dU}{dt}$ è una quantità positiva ($dU < 0$)

Si può utilizzare la legge di Ohm:

$$W_J = V \cdot i = i^2 R = \frac{V^2}{R} = - \frac{dU}{dt}$$

Provare a ricavare W_J dal punto di vista
microscopico:



$$i = \frac{dq}{dt} \quad dq = i dt$$

$$dL = dq V = \int dF \cdot \underline{dl} = dq \int \underline{E} \cdot \underline{dl}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dq}{dt} V = W$$

potenza

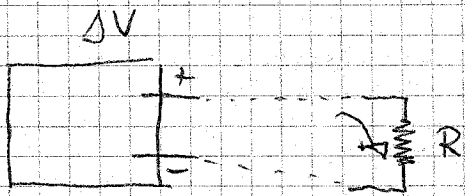
lavoro
compiuto da \underline{E}
sulle cariche elettriche

Le forze del campo
elettrostatico devono produrre
un aumento di en. cinetica
delle particelle

⇒ aumento di temperatura
nella resistenza

$$T = \frac{1}{2} m v_r^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

25/11/2008



$$\Delta V = i \cdot R$$

$$\underline{F} = e \cdot \underline{E}$$

$$\underline{j} = \sigma \cdot \underline{E}$$

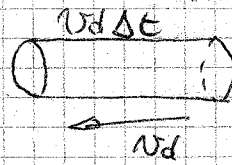
$$\underline{j} = n \cdot e \cdot v_d$$

$$i = j \cdot S$$

$$j \cdot S = \frac{\sigma S E \cdot e}{e}$$

$$i = \frac{\Delta V}{R} \quad \sigma = \frac{1}{\rho}$$

$$R = \frac{\rho}{S} = \frac{\rho \cdot l}{S}$$



$$v_d \propto E$$

Lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche sulla singola carica elettrica del conduttore:

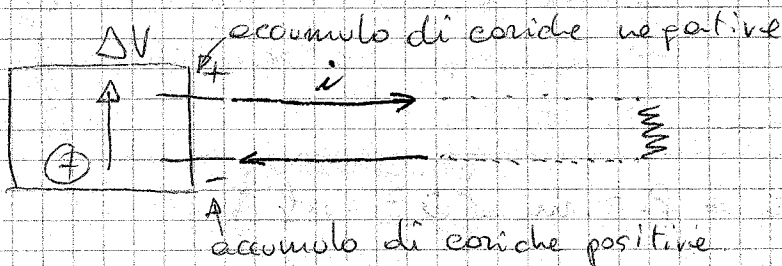
$$dL = dq \cdot \Delta V$$

Potenza: $W = \frac{dL}{dt} = \frac{dq}{dt} \Delta V = i \Delta V$

C'è un aumento di temperatura dovuto solo alla velocità termica ~~v_t~~ v_t :

$$\frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} m v_t^2 \quad (\text{effetto Joule})$$

$$W = \Delta V \cdot i = \begin{cases} \frac{(\Delta V)^2}{R} \\ i^2 \cdot R \end{cases}$$



Le cariche positive che si accumulano sul polo negativo all'interno del generatore vengono portate al polo positivo con una forza $\underline{F} = |e| E_{ee}$

\underline{E}_{ee} CAMPO ELETTROMOTORE \leftarrow non è un campo elettrostatico

Le proprietà del campo elettrostatico non funzionano sul campo elettromotore.

$$\underline{E}_{el} = -\underline{\bar{c}} \quad \text{ALL'INTERNO del generatore}$$

All'interno del generatore le correnti non risentono di alcun campo.

Per portare una carica da \ominus a \oplus il generatore compie un lavoro $d\mathcal{L} = dq \Delta V$
 \Rightarrow La potenza dissipata è $\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{dq}{dt} \Delta V = \Delta V \cdot i$



$$\oint_e \underline{E} \cdot d\underline{e} = 0 \quad \int \underline{E}_T = \int \underline{E}_{el} + \int \underline{E}$$

$$\oint_e \underline{E}_T \cdot d\underline{e} = \oint_e \underline{E}_{el} \cdot d\underline{e} - \int_{\oplus}^{\ominus} \underline{E}_{el} \cdot d\underline{e} = \int_{\oplus}^{\ominus} \underline{E} \cdot d\underline{e} = \Delta V$$

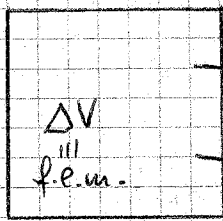
La circolazione del campo elettrico totale lungo la linea di corrente è = alla diff. di potenziale ai capi del generatore.

In un circuito può circolare i anche se manca il generatore \Rightarrow c'è un campo elettromotore distribuito su tutto il circuito.

$$\text{Forza elettromotrice} = f.e.m. = \int \underline{E} \cdot d\underline{e}$$

(ha le dimensioni di una tensione)

generatore ideale di tensione

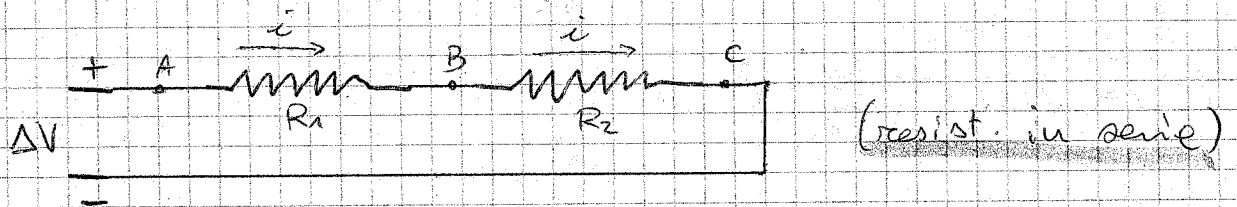


$$\Delta V = i \cdot R$$

$$W = \Delta V \cdot i \begin{cases} i^2 R \\ \frac{\Delta V^2}{R} \end{cases}$$

generatore ideale \equiv capace di fornire qualsiasi potenza.

Ma se diminuisce la resistenza il generatore fornisce sempre meno ΔV



$$V_A - V_B = i \cdot R_1$$

$$V_B - V_C = i \cdot R_2$$

Somma:

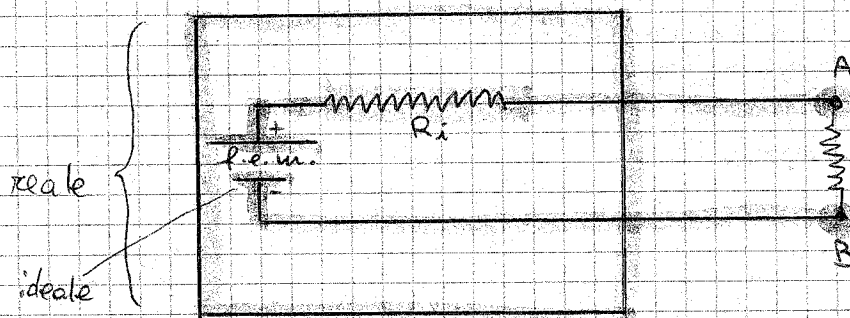
$$V_A - V_C = i (R_1 + R_2)$$

Si comportano come un'unica resistenza R il cui valore è $R_1 + R_2$

$$V_B - V_C = i \cdot R_2 = \frac{\Delta V \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Se R_2 è variabile può modulare la tensione: si dice partitore di tensione.

Simbolo circuitale di un generatore reale:



Se il circuito è aperto, $V_A - V_B = \text{f.e.m.}$

Se collego A e B con una resistenza R:

$$V_A - V_B = R \cdot i = \frac{\text{f.e.m.}}{R + R_i} \cdot R$$

$$V_A - V_B = \text{f.e.m.} \cdot \frac{R}{R + R_i} = \text{f.e.m.} \cdot \frac{1}{1 + (R_i/R)}$$

$$\frac{R_i}{R} \ll 1 \Rightarrow \text{generatore ideale}$$

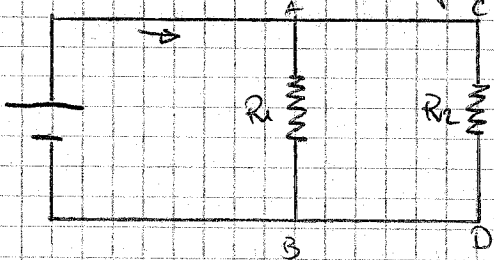
Se $R \ll R_i$ $\Delta V = \text{f.e.m.} \cdot \frac{R}{R_i}$

$$\Rightarrow i = \frac{\text{f.e.m.}}{R_i} \quad (\forall R) \rightarrow \text{generatore di CORRENTE}$$

$$W = i \Delta V = \left(\frac{\text{f.e.m.}}{R_i} \right)^2 \cdot R$$

Se $R \gg R_i$ \rightarrow generatore di TENSIONE
(ΔV cost.)

Resistenze in parallelo



$$V_A - V_B = i_1 R_1 = \Delta V$$

$$V_C - V_D = i_2 R_2 = \Delta V$$

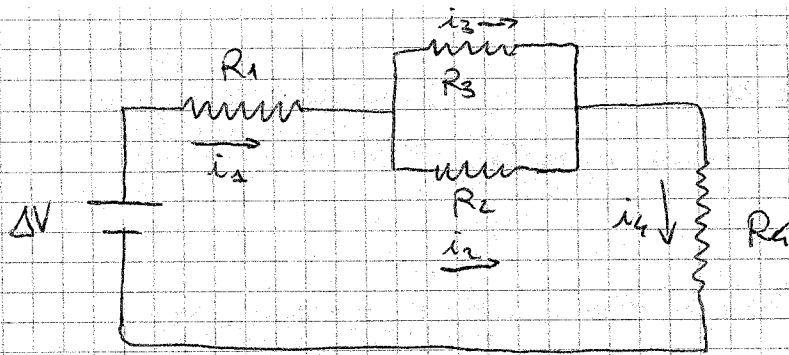
$$i_1 = \Delta V / R_1$$

$$i_2 = \Delta V / R_2$$

$$i = i_1 + i_2 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \Delta V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

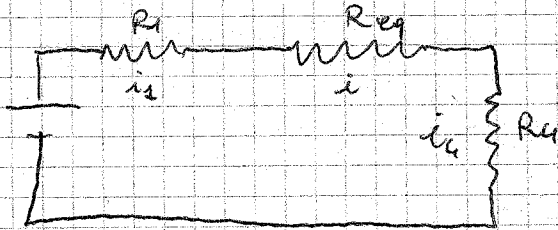
$R_1 + R_2$ equivalento ad un' unica resistenza R

tale che $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$



Risolvere il circuito
= calcolare $i_1, i_2,$
 i_3, i_4

$$i_1 = i_2 + i_3 = i_4$$



$$i = \frac{\Delta V}{R_1 + R_{eq} + R_4}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3}$$

$$R_{eq} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$i = \frac{\Delta V}{R_1 + R_4 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}$$

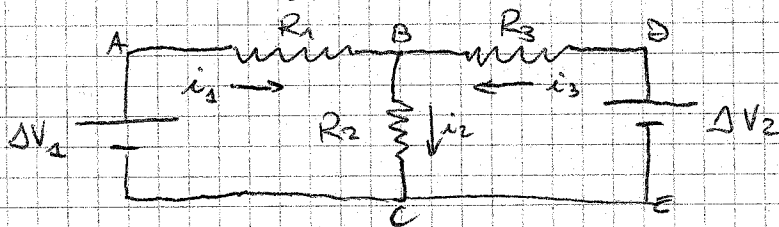
$$i_3 R_3 = i_2 R_2 \quad i_2 + i_3 = i \Rightarrow i_2 = i - i_3$$

$$\Rightarrow i_3 R_3 = (i - i_3) R_2 \Rightarrow i_3 (R_2 + R_3) = i R_2$$

$$\Rightarrow i_3 = \frac{i R_2}{R_2 + R_3} \quad i_2 = i - \frac{i R_2}{R_2 + R_3} = i \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

Metodi di risoluzione $\left\{ \begin{array}{l} \text{metodo dei rami} \\ \text{metodo delle maglie} \end{array} \right.$

Metodo dei rami!



Legge dei nodi:
non si può avere
un accumulo di carica
nei nodi

$$i_1 + i_3 = i_2$$

Si scrive la legge di Ohm per

ogni ramo:

$$\Delta V_1 R_1 = V_A - V_B \quad V_B - V_C = i_2 R_2$$

$$V_A - V_C = \Delta V_1$$

Conservazione i

circuiti stazionari

$$\Rightarrow V_A - V_C = i_1 R_1 + i_2 R_2 = \Delta V_1$$

eq. della prima maglia



$$i_3 R_3 = V_D - V_B$$

$$i_2 R_2 = V_B - V_C$$

$$\Delta V_2 = V_D - V_E$$

$$V_D - V_E = V_D - V_C = i_3 R_3 + i_2 R_2 = \Delta V_2$$

eq. 2^a maglia

$$\begin{cases} \text{eq. 1^a maglia} \\ \text{eq. 2^a maglia} \\ i_1 + i_3 = i_2 \end{cases}$$

3^a maglia:

$$V_A - V_B = i_1 R_1$$

$$V_D - V_B = i_3 R_3$$

$$V_A - V_C = \Delta V_1$$

$$V_D - V_E = \Delta V_2 = V_D - V_C$$

$$V_A - V_D = \Delta V_1 - \Delta V_2 = i_1 R_1 - i_3 R_3$$

eq. 3^a maglia

← ma non è lin. indep. dalle prime due

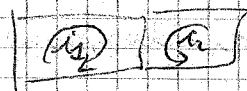
Se ci sono i nodi vanno usate le eq. dei nodi

Questo circuito ha 3 maglie e 2 nodi (non indipendenti)

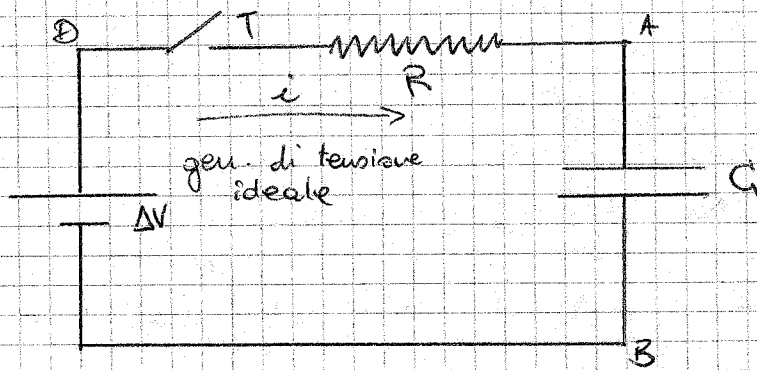
⇒ $\begin{cases} 2 \text{ maglie indep.} \\ 1 \text{ nodo indep.} \end{cases} \Rightarrow \text{soluzione}$

Metodo delle maglie

$$V_B - V_C = R_2 (i_1 + i_2)$$



CIRCUITO RC



$t=0 \Rightarrow$ interruttore chiuso

$$Q = C \cdot V_C$$

$$t=0 \Rightarrow V_D - V_A = \Delta V \quad V_A = V_B$$

$$i(t=0) = \frac{\Delta V}{R}$$

$$i \cdot dt = dq \quad i(t) = \dot{Q}(t) \rightarrow \dot{q}(t)$$

$$V_C = \frac{q}{C} \quad V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = V_A - V_B$$

$$V_D - V_A = i(t) \cdot R$$

$$V_D - V_B = \Delta V$$

$$\Rightarrow V_D - V_B = \frac{q}{C} + i R \quad \Delta V = \frac{q}{C} + \dot{q} R = \text{costante}$$

$$q(0) = 0$$

$$\frac{q}{C} + \dot{q} R = 0 \Rightarrow \text{soluzione omogenea} \quad \dot{q}_{om} = \frac{q_{om}}{RC}$$

$$\tau = RC \text{ (tempo)} \quad \dot{q} = \frac{q}{\tau} \quad q_{om} = A \cdot e^{-t/\tau}$$

A ha le dim. di una carica elettrica

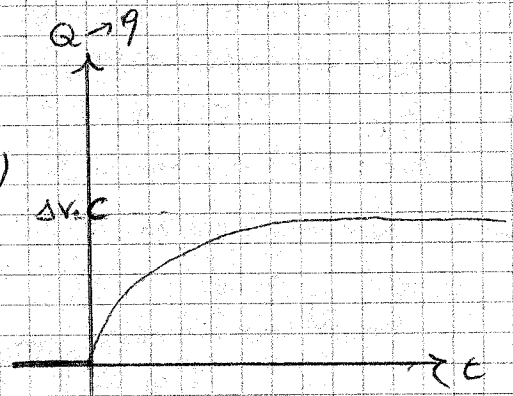
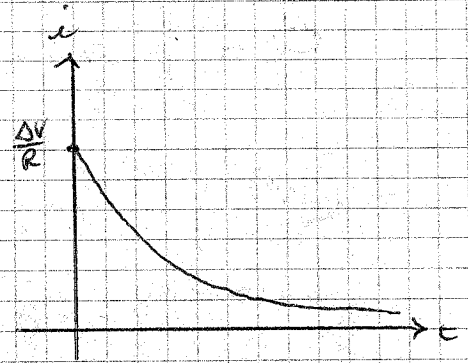
trovare soluzione particolare: $q_p = \Delta V \cdot C \quad \dot{q} = 0$

$$\Rightarrow q(t) = A e^{-t/\tau} + \Delta V \cdot C \quad (q = q_{om} + q_p)$$

$$q(0) = 0 \Rightarrow A = -\Delta V \cdot C \quad q(t) = \Delta V \cdot C (1 - e^{-t/\tau})$$

$$i = \dot{q} \quad \dot{q} = \Delta V \cdot C \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{\Delta V}{R} e^{-t/\tau}$$

$$t \gg \tau \Rightarrow i = 0$$



potenza fornita dal generatore?

$$W = i \Delta V$$

$$(dL = dq \Delta V) \quad W = \frac{dL}{dt}$$

Energia totale fornita dal generatore?

$$\begin{aligned} E_g &= \int_0^{+\infty} W \cdot dt = \int_0^{+\infty} \Delta V \cdot i \cdot dt = \Delta V \int_0^{+\infty} i(t) dt = \\ &= \frac{(\Delta V)^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{(\Delta V)^2}{R} \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{(\Delta V)^2}{R} \tau = \\ &= C \cdot (\Delta V)^2 = E_g \quad [\tau = RC] \end{aligned}$$

Energia immagazzinata nel condensatore?

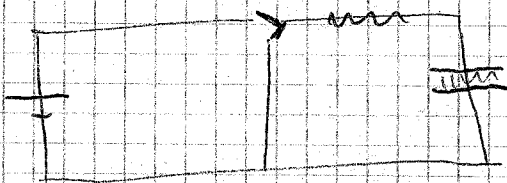
$$E_C = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

l'altra metà è andata dissipata per effetto Joule nella resistenza

$$\Rightarrow E_J = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \quad \text{NON dipende da } R$$

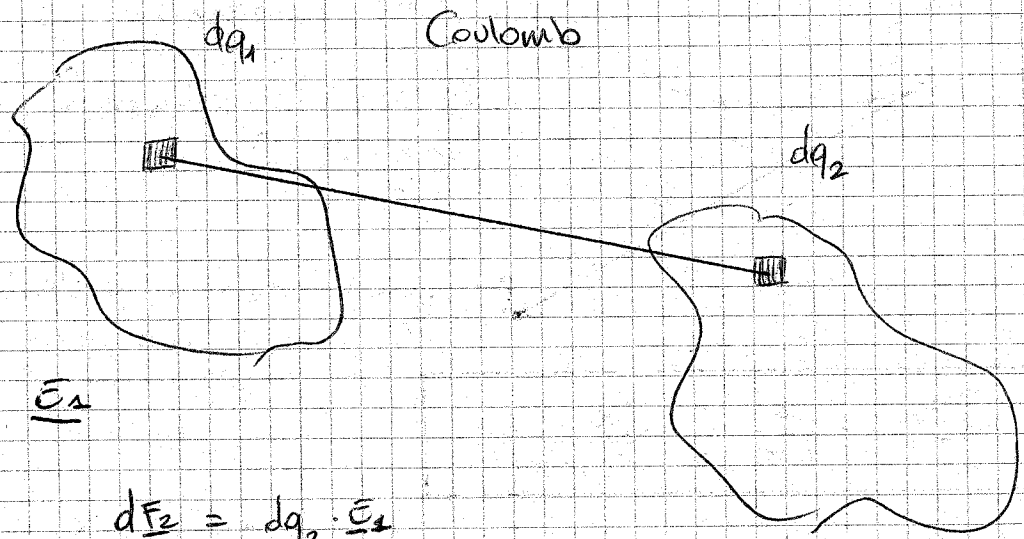
$$W_J = \begin{cases} \frac{(V_b - V_a)^2}{R} \\ (V_b - V_a) i \\ i^2 R \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_J &= \int_0^{+\infty} W_J dt = \frac{(\Delta V)^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \\ &= \frac{(\Delta V)^2}{R} \frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \end{aligned}$$

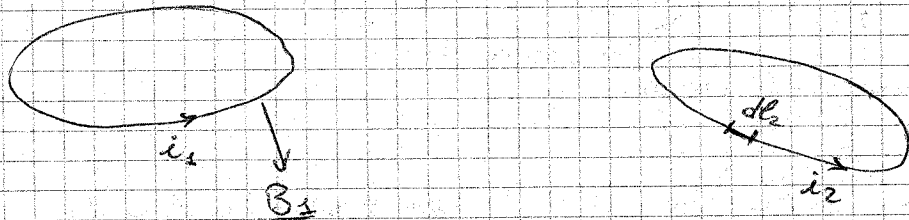


$$\begin{aligned} L &= Q \cdot \Delta V \\ W &= \dot{Q} \cdot \Delta V \end{aligned}$$

28/11/2008



Interazione tra circuiti percorsi da corrente elettrica (SPIRE)

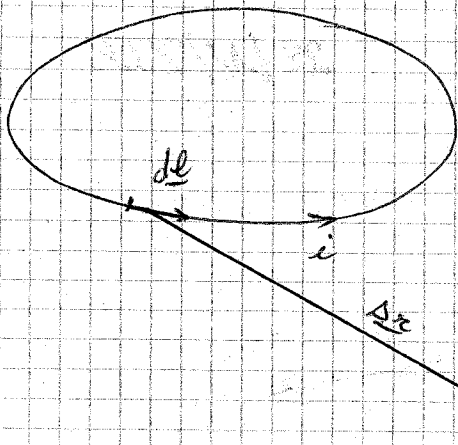


L'origine della forza di Laplace deriva dal fatto che le cariche sono in movimento
 \Rightarrow si crea un CAMPO MAGNETICO (\underline{B})

Anche il campo magnetico è un campo vettoriale.

$$d\underline{F} = i d\underline{l}_2 \times \underline{B}_1$$

Ogni tratto di circuito è neutro: ci sono cariche positive fisse e cariche negative in movimento.



Linea chiusa percorsa da corrente i

$d\vec{l}$ ha la direzione e il verso di i

$P =$ punto dove si calcola il campo magnetico

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \text{ (vel. luce nel vuoto)}$$

$[B] = \text{Tesla}$

\underline{B} si chiama CAMPO D'INDUZIONE MAGNETICA

\underline{H} si chiama CAMPO MAGNETICO

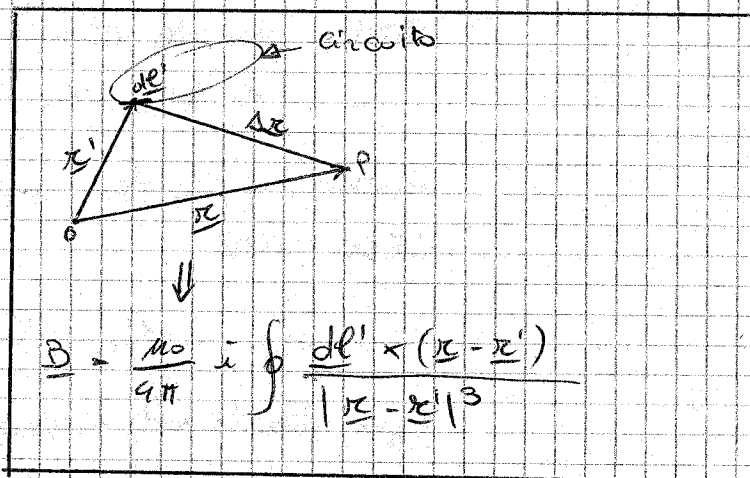
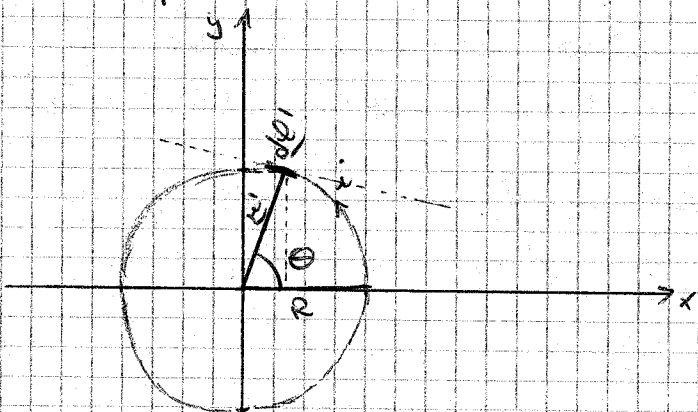
(per ora chiamiamo campo magnetico \underline{B})

$$\underline{B}_{\text{TOT}} = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

CIRCOLAZIONE DEL CAMPO MAGNETICO

il circuito è chiuso \rightarrow costante

Esercizio: calcolare il \underline{B} generato sull'asse da una spira circolare di raggio R



$$\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$\vec{r} = z \cdot \hat{z}$ Integrando, l'unica variabile è θ

$$\vec{r}' = R(\cos\theta \hat{x} + \sin\theta \hat{y})$$

$$d\vec{l} = dl(\cos\theta \hat{y} - \sin\theta \hat{x}) \leftarrow \begin{matrix} \theta = 0 \Rightarrow \frac{dl}{dl} \text{ lungo } \hat{y} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{dl}{dl} \text{ lungo } \hat{x} \end{matrix}$$

dl è la lunghezza infinitesima di un arco

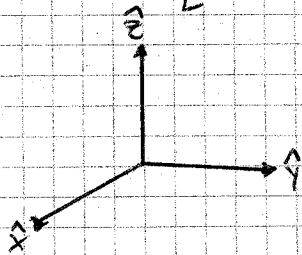
$$\Rightarrow dl = R (\cos \theta \hat{y} - \sin \theta \hat{x}) d\theta$$

dobbiamo calcolare $|\underline{r} - \underline{r}'|^3$ e $dl \times (\underline{r} - \underline{r}')$

$$|\underline{r} - \underline{r}'|^3 = (\sqrt{R^2 + z^2})^3 \quad |\underline{r} - \underline{r}'| = \sqrt{(\underline{r} - \underline{r}') \cdot (\underline{r} - \underline{r}')} \quad \uparrow \text{scalare}$$

$$dl \times (\underline{r} - \underline{r}') = d\theta R (\cos \theta \hat{y} - \sin \theta \hat{x}) \times (z \hat{z} - R (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y})) =$$

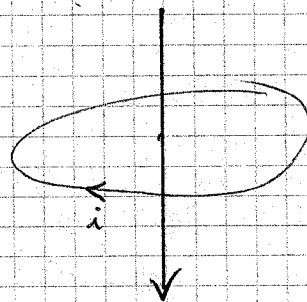
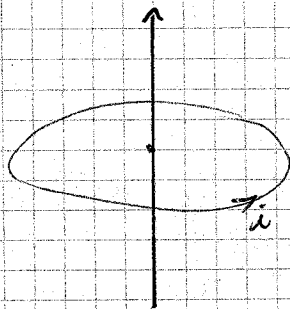
$$= R \cdot d\theta \cdot [\cos \theta \cdot z \hat{x} + R \cos^2 \theta \hat{z} + \sin \theta \cdot z \hat{y} + \sin^2 \theta R \hat{z}]$$



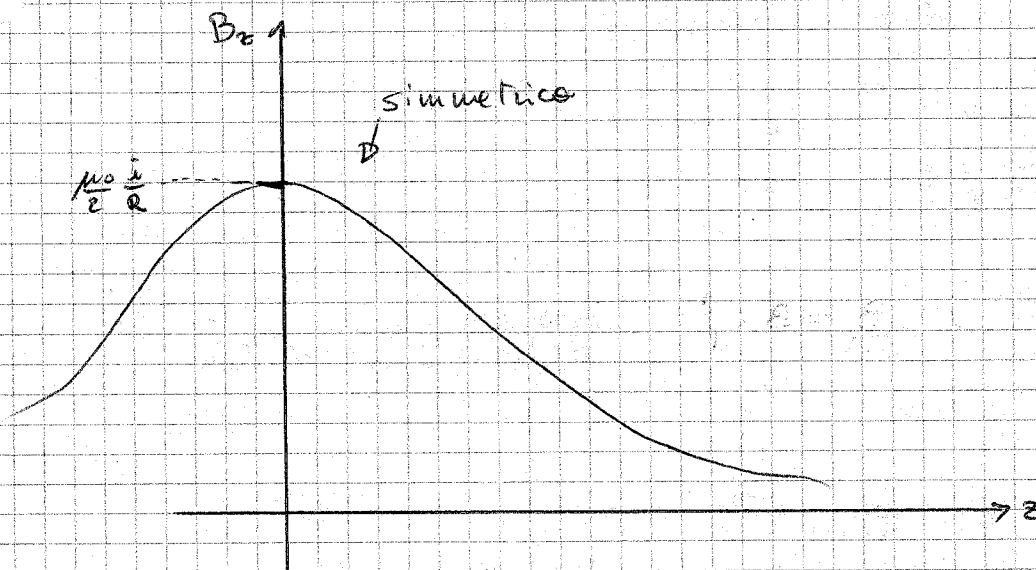
$$\underline{B} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (\cos \theta \cdot z \hat{x} + R \cos^2 \theta \hat{z} + \sin \theta \cdot z \hat{y} + R \sin^2 \theta \hat{z}) d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} 2\pi R^2 \hat{z} = \boxed{\frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}}$$

Vale la regola della mano destra tra il verso di i e la direzione di \underline{B} :

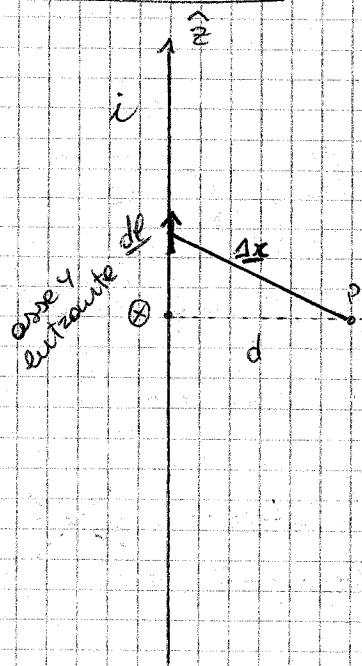


Il valore di B in questo caso non dipende dal segno di z



$$B(0) = \frac{\mu_0 i}{2 R}$$

Altro esempio:



filo rettilineo percorso da una corrente i
 infinito \Rightarrow geometria cilindrica

$$\underline{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\mathbf{l} \times \underline{r}}{|\underline{r}|^3}$$

$$\underline{r} = d \hat{x} - z \hat{z}$$

$$d\mathbf{l} = dz \hat{z}$$

$$|\underline{r}|^3 = (d^2 + z^2)^{3/2}$$

$$d\mathbf{l} \times \underline{r} = dz \hat{z} \times (d \hat{x} - z \hat{z}) = d \cdot dz \cdot \hat{y}$$

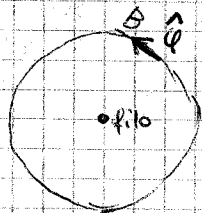
$$|\underline{r}|^3 = (d^2 + z^2)^{3/2}$$

$$d\mathbf{l} \times \underline{r} = dz \hat{z} \times (d \hat{x} - z \hat{z}) = d \cdot dz \cdot \hat{y}$$

Il campo magnetico è entrante nel piano xz (in P)

$$\underline{B} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{(d^2 + z^2)^{3/2}} \cdot dz \right] \cdot \hat{y}$$

Sistema visto dall'alto:



linee di forza chiuse: caratteristica del campo magnetico
 (dimostrabile col teorema della divergenza)

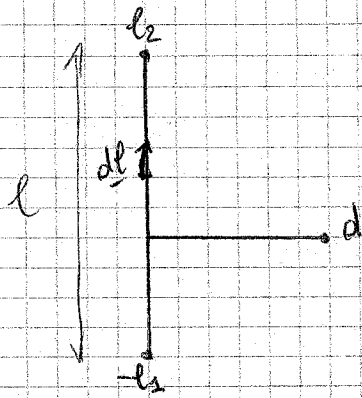
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(d^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{z}{d^2 \sqrt{d^2 + z^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{d^2}$$

$$\Rightarrow \underline{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{d}$$

$$\underline{B} = B \cdot \hat{\phi}$$

Vale sempre la regola della mano destra

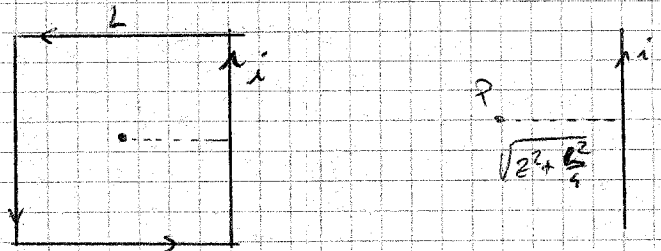
Ma se il filo è finito?



basta integrare tra $-l_1$ e l_2 .

length. filo $\gg d$
 \Rightarrow il filo può essere considerato in finito.

Calcolare \times cosa il campo \underline{B} generato sull'asse da una spira quadrata $\times \hat{z}$



le componenti \hat{x} e \hat{y} del campo si annullano a coppie, reste solo B_z , alla quale i 4 lati danno lo stesso contributo. Poi provare \times una spira circolare inscritta o circoscritta.

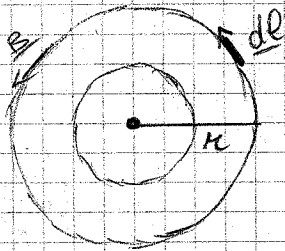
\underline{E} conservativo



(teorema di Stokes)

$$\oint \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = 0$$

CIRCUITAZIONE DI \underline{B} LUNGO UNA LINEA DI FORZA:



$$\begin{aligned} \oint \underline{B} \cdot d\underline{\ell} &= \int B \, dl = B \oint dl = B \cdot 2\pi r \\ &= \mu_0 \cdot i = \oint \underline{B} \cdot d\underline{\ell} \end{aligned}$$

\Rightarrow in generale $\oint \underline{B} \cdot d\underline{\ell} \neq 0$

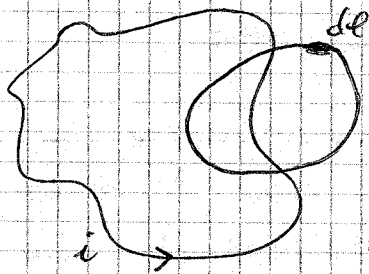
\Rightarrow \underline{B} NON è conservativo

$$\oint \underline{B} \cdot d\underline{\ell} = \mu_0 \cdot n \cdot i$$

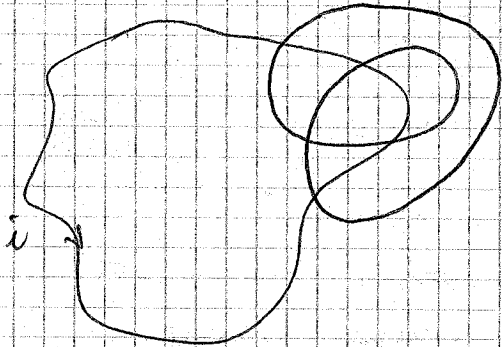
TEOREMA DELLA CIRCUITAZIONE DI AMPÈRE

(n è il n° di volte che la linea viene percorsa = numero di volte che la linea è concatenata alle correnti)

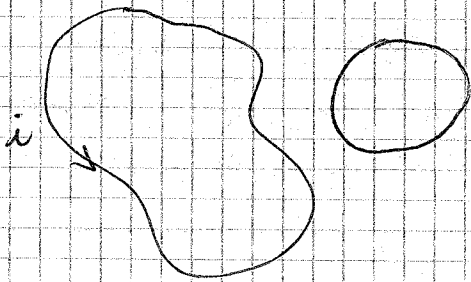
$$n = 0 \Rightarrow \oint = 0$$



$$\oint \underline{B} \cdot d\underline{l} = \mu_0 i$$



$$\oint \underline{B} \cdot d\underline{l} = 2\mu_0 i$$



$$\oint \underline{B} \cdot d\underline{l} = 0$$

Come il teorema di Gauss $\left(\oint_{\Sigma} (\underline{E}) = \frac{\sigma_{\Sigma}}{\epsilon_0} \right)$,

il teorema della circolazione di Ampère
 tra è una relazione integrale tra il
 campo e le sue sorgenti, ed in particolari
 condizioni di simmetria permette di
 calcolare \underline{B} .

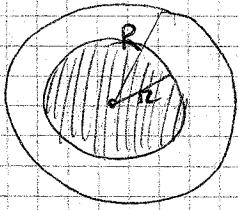
$$\underline{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \quad \text{formula di Biot-Savart}$$

filo percorso da i

Sezione del filo:

$$i = j \cdot S$$

$$j = \frac{i}{\pi R^2}$$



$$r < R$$

$$j = \frac{i}{\pi R^2}$$

$$\oint \underline{B} \cdot \underline{dl} = \oint \underline{B} \cdot \underline{dl}$$

(B e dl paralleli)

||

$$\mu_0 i_m = \mu_0 i(r) = B \cdot 2\pi r$$

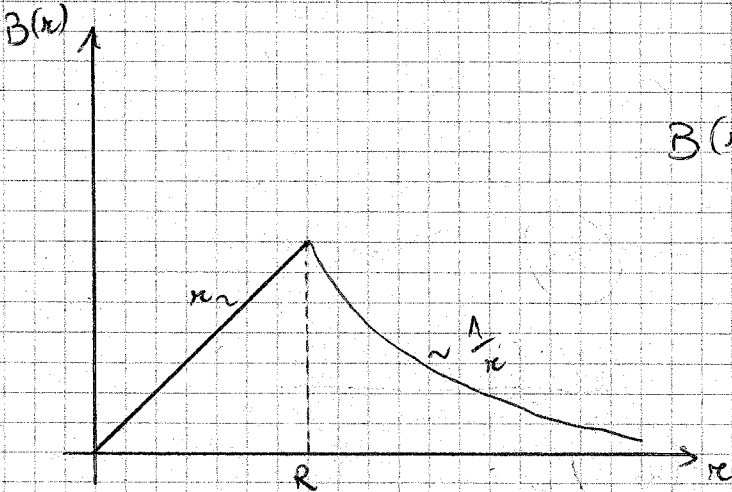
||

$$\mu_0 i \frac{r^2}{R^2}$$

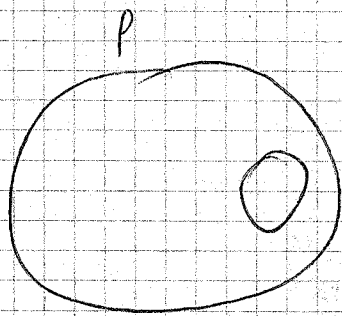
~~...~~

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{r}{R^2}$$

L'andamento è lineare in r per $r \leq R$

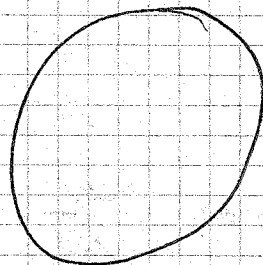


$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{r}{R^2} & r \leq R \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{1}{r} & r \geq R \end{cases}$$



simmetrica
sferica

=



sovrapposizione di 2
distrib. di carica a
simmetria sferica

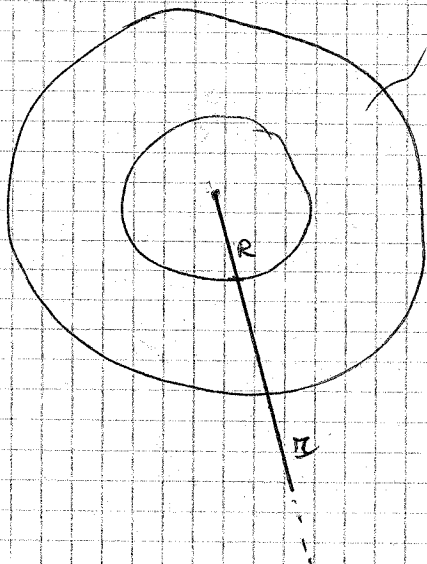
+

$$|P-| = P+$$



ESERCIZIO

SEZIONE DI FILO ELETTRICO

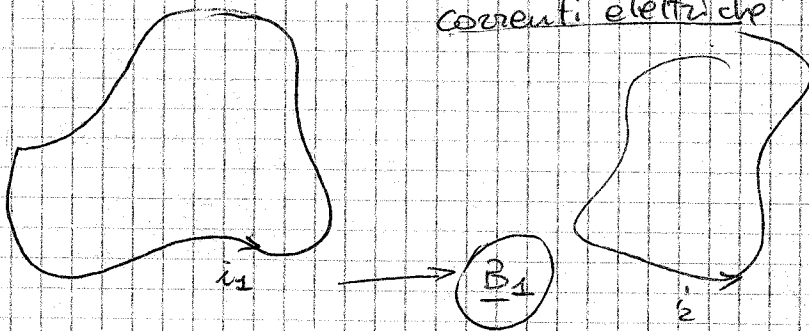


"calzo" esterna percorso da corrente entrante

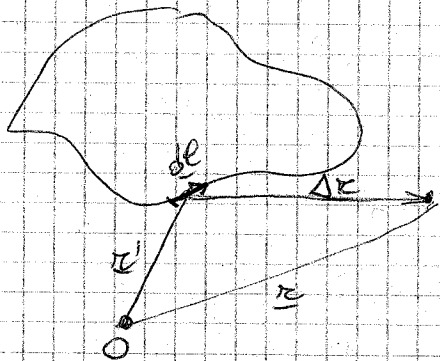
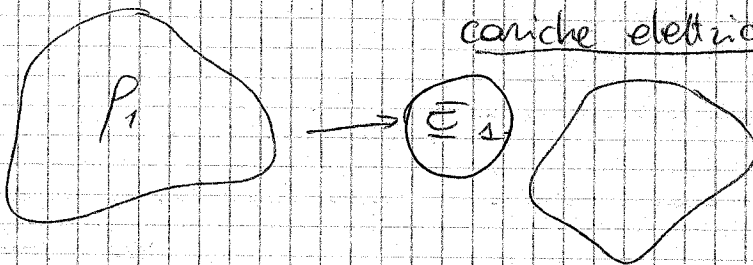
calcolo B lungo r

02/12/2008

correnti elettriche



cariche elettriche

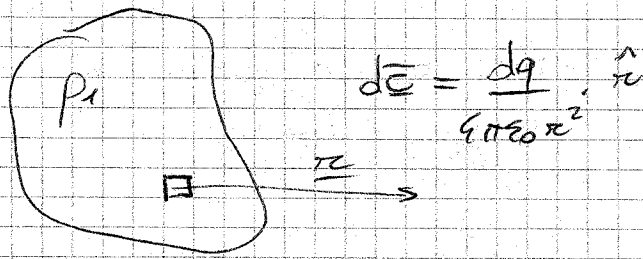


$$\underline{dB} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\underline{l} \times \underline{\Delta r}}{|\underline{\Delta r}|^3}$$

$$\underline{\Delta r} = (\underline{r} - \underline{r}')$$

$$\oint d\underline{B} = \underline{B}$$

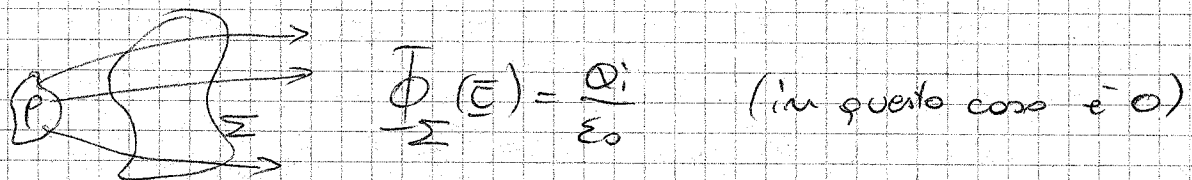
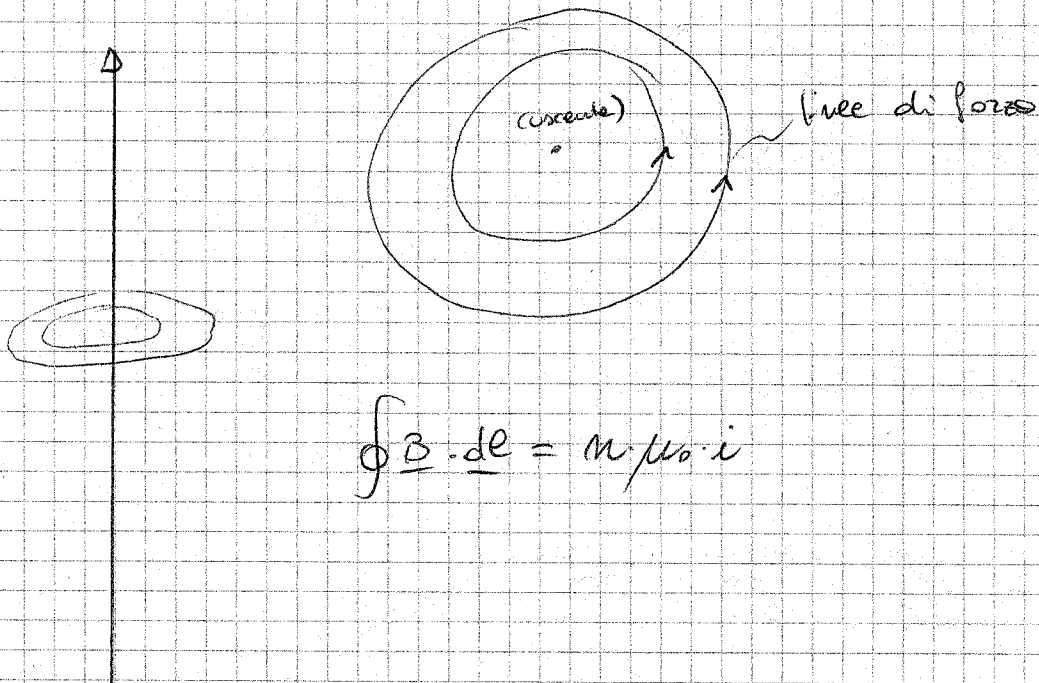
equivalentemente:



In laboratorio non c'è possibilità di verificare

che
$$\underline{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{e} \times \underline{e}}{|\Delta \underline{e}|^3}$$

Questa espressione va presa come un postulato



Nel campo magnetico le linee di forza sono chiuse
 \Rightarrow il n. di linee che entrano in una superficie
chiusa è necessariamente uguale al n. di linee che
escono

$$\oint_{\Sigma} (\underline{B}) = 0 \quad \forall \Sigma \text{ chiusa}$$

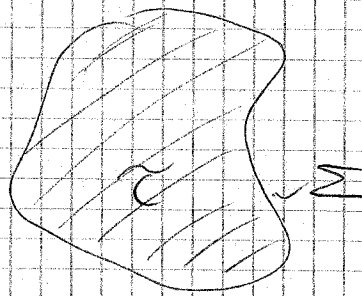
$$\left\{ \begin{array}{l} \oint \underline{B} \cdot d\underline{\ell} = n \mu_0 i \\ \Phi_{\Sigma}(\underline{B}) = 0 \end{array} \right. \leftarrow \text{diretta conseguenza di: } \underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\underline{\ell} \times \underline{\Delta z}}{|\underline{\Delta z}|^3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = 0 \\ \Phi_{\Sigma}(\underline{E}) = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \end{array} \right. \leftarrow \text{diretta conseguenza della legge di Coulomb}$$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

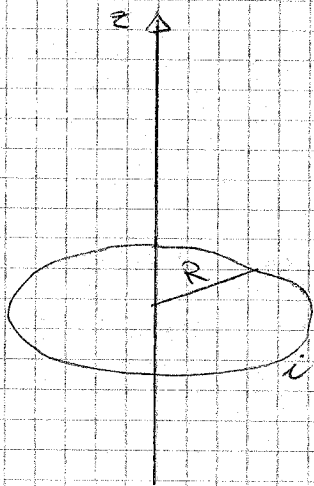
$$\Phi_{\Sigma}(\underline{B}) = \int_{\tau} (\nabla \cdot \underline{B}) \cdot d\tau$$

$$\Phi_{\Sigma}(\underline{B}) = 0 \iff \nabla \cdot \underline{B} = 0$$

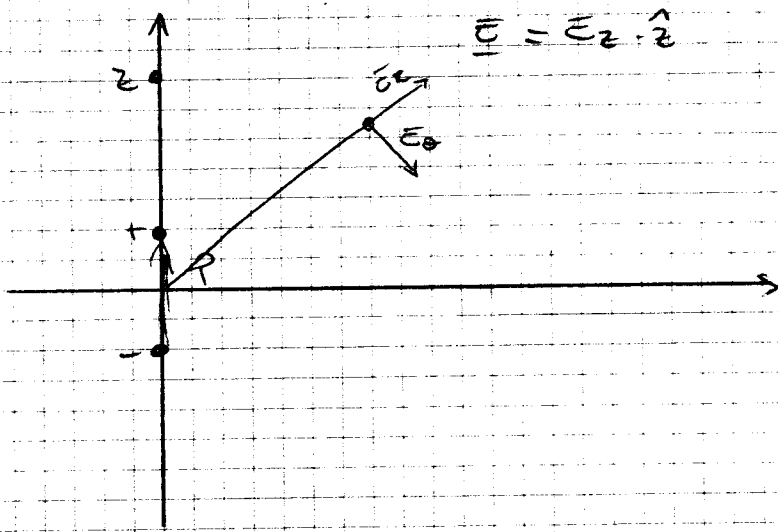


$$\nabla \cdot \underline{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

provare a scrivere $\nabla \cdot \underline{B}$ con $\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \dots$



$$\underline{B} = B_z \cdot \hat{z} \quad B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$



$$E_z = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3}$$

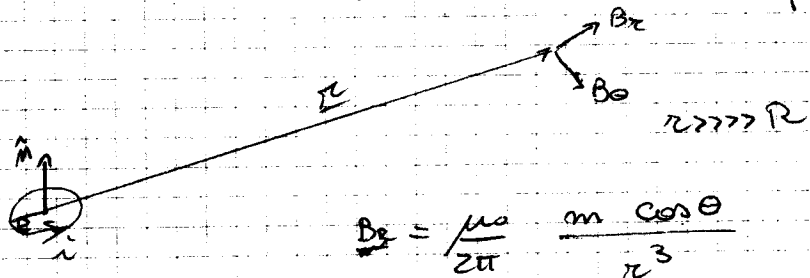
$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot i \cdot \frac{\pi R^2}{z^3}$$

$$\mu_0 \sim \frac{1}{\epsilon_0}$$

$$i(\pi R^2) \sim p$$

manifestazione del teorema di
equivalenza di Ampere

Un circuito piano di forma qualsiasi percorso da corrente i si comporta, a grande distanza, come un dipolo di momento magnetico $\underline{dm} = dS \cdot i \cdot \hat{n}$ se la corrente circola in senso antiorario la normale è quella uscente dal piano



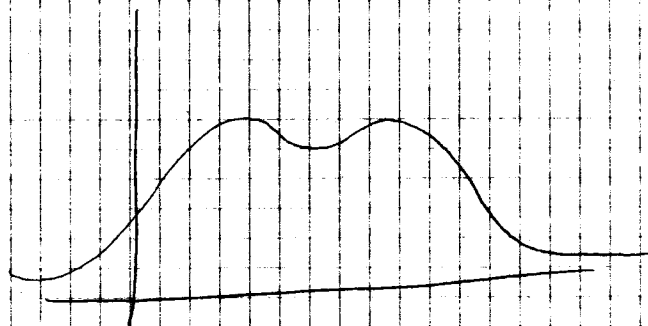
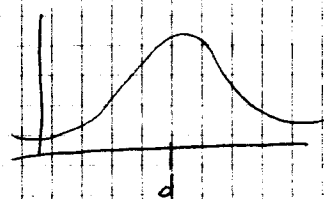
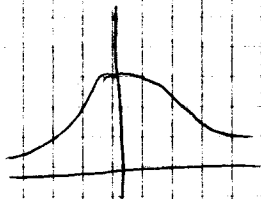
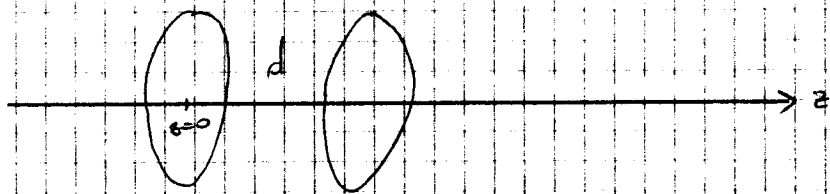
$$B_r = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m \cos\theta}{r^3}$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin\theta}{r^3}$$

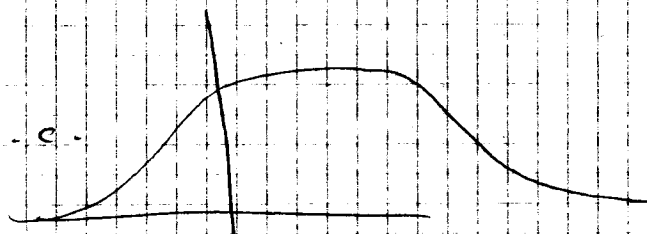
$$V = -\underline{m} \cdot \underline{B}$$

$$\underline{M}^{(e)} = \underline{p} \times \underline{E} \quad \underline{M}^{(m)} = \underline{m} \times \underline{B}$$

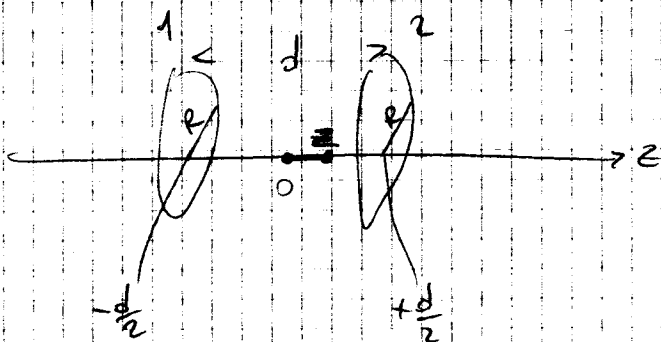
$$\underline{F} = \nabla(\underline{m} \times \underline{B})$$



Il d ottimale t.c.



(due spire generano un campo regolare in una regione)



$$B_{z1} = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{\left[r^2 + \left(z + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

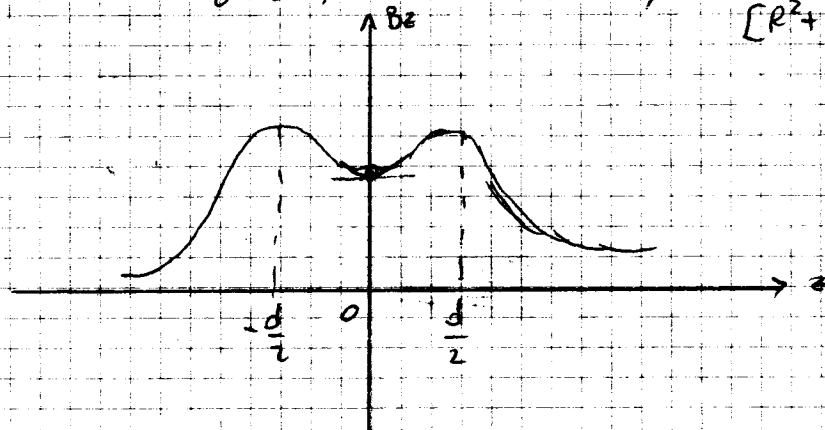
(B generata dalla 1^a spira)

$$B_{z2} = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{\left[r^2 + \left(z - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

(seconda spira)

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} i R^2 \left(\frac{1}{[R^2 + (z + \frac{d}{2})^2]^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (z - \frac{d}{2})^2]^{3/2}} \right)$$

in $z=0$ ~~il campo~~ $B(0) = \mu_0 i \frac{R^2}{[R^2 + \frac{d^2}{4}]^{3/2}}$



$$B'(z) = \frac{\mu_0}{2} i R^2 \left(-\frac{3}{2} \right) \left(\frac{2(z + \frac{d}{2})}{[R^2 + (z + \frac{d}{2})^2]^{5/2}} + \frac{2(z - \frac{d}{2})}{[R^2 + (z - \frac{d}{2})^2]^{5/2}} \right)$$

$$B'(0) = -\frac{\mu_0}{2} i R^2 \frac{3}{2} \frac{d - d}{[R^2 + \frac{d^2}{4}]^{5/2}} = 0$$

$B''(0) =$ (condizionale d.c.c. $B''(0) = 0$:)

$$= -\frac{3}{2} \mu_0 i R^2 \left\{ \frac{2(z + \frac{d}{2})^2}{[R^2 + (z + \frac{d}{2})^2]^{5/2}} - \frac{2(z - \frac{d}{2})^2}{[R^2 + (z - \frac{d}{2})^2]^{5/2}} \right\} \cdot z \left(z + \frac{d}{2} \right)^2$$

$$+ \left\{ \frac{2(z - \frac{d}{2})^2}{[R^2 + (z - \frac{d}{2})^2]^{5/2}} + \frac{2(z + \frac{d}{2})^2}{[R^2 + (z + \frac{d}{2})^2]^{5/2}} \right\} \cdot z \left(z - \frac{d}{2} \right)^2$$

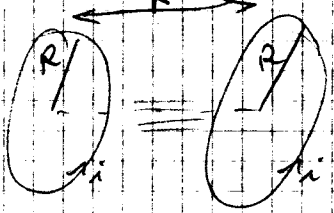
Vogliamo che sia $= 0$.

$$2 \left(R^2 + \frac{d^2}{4} \right)^{5/2} = 10 \left(R^2 + \frac{d^2}{4} \right)^{3/2} \cdot \frac{d^2}{4}$$

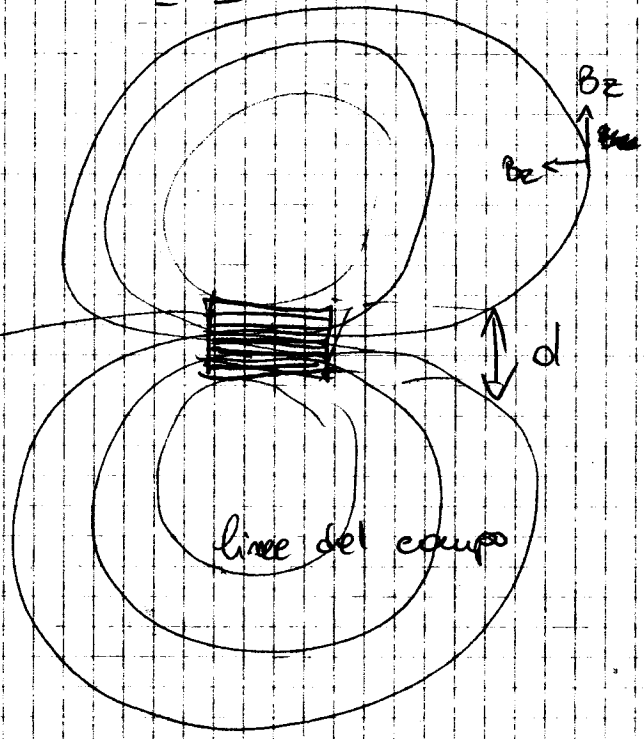
$$2R^2 = \frac{5}{2} \frac{d^2}{4} \quad d^2 = R^2 \quad \boxed{d = R \Leftrightarrow B''(0) = 0}$$

$B''' = 0$ perché è una f.e. simm.

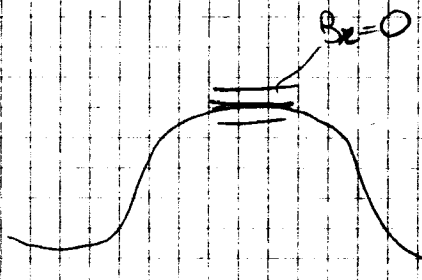
Bobine di Helmholtz



$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$



uniforme

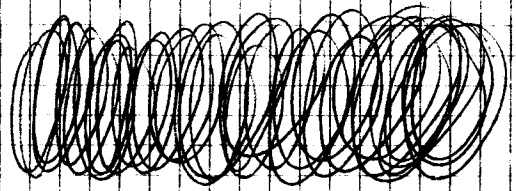


si realizza un campo magnetico uniforme in una piccola regione di spazio.

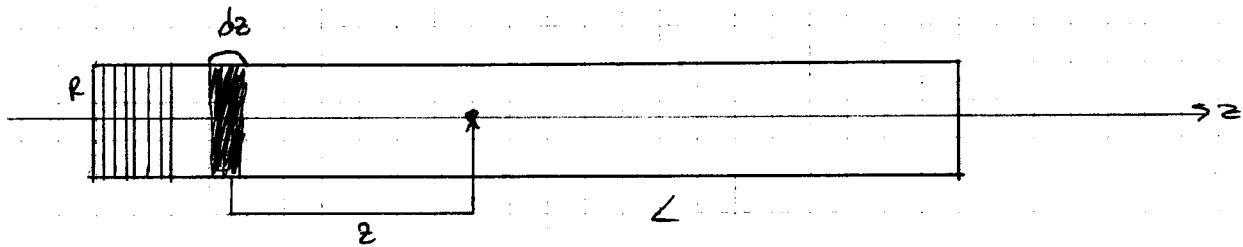
Vogliamo "allungare" la regione di omogeneità del campo magnetico.

S: aggiungiamo molte spire molto fitte \Rightarrow

SOLENOIDE



Solenoide visto di lato



(immaginarciamolo infinito)

n spire per unità di lunghezza

N spire per una lunghezza L

(ra) $n = \frac{N}{L}$

"densità" di spire

consideriamo un tratto dz di solenoide

$$dN = n \cdot dz \quad \frac{dN}{dz} = \frac{N}{L}$$

Campo generato da una singola spira:

$$\frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

camp totale sull'asse di un solenoide infinito:

$$B = \frac{\mu_0}{2} i \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right) n dz =$$

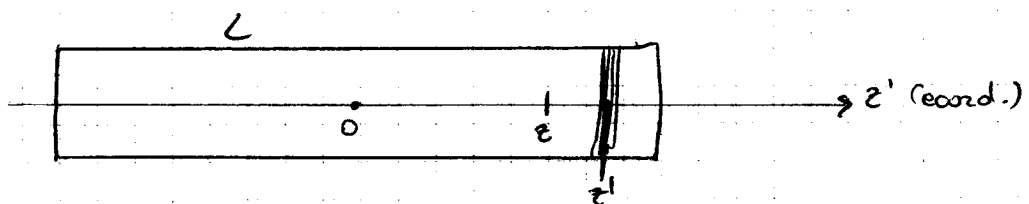
$$= \frac{\mu_0 i n R^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dz =$$

(avvolgimento fitto)

$$= \frac{\mu_0 i n}{2} \left[\frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \boxed{\mu_0 \cdot i \cdot n = B}$$

NON dipende dal raggio R del solenoide.

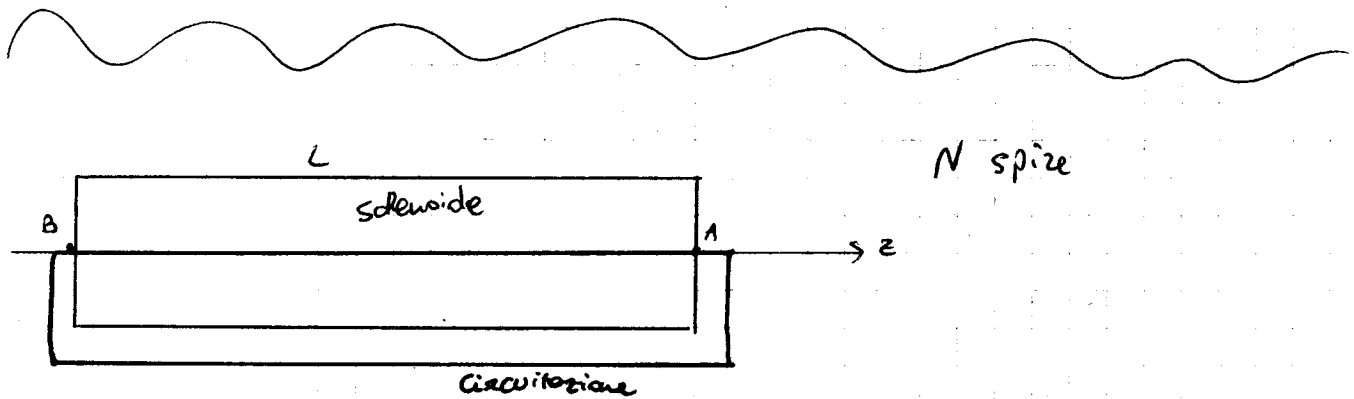
Prendiamo un solenoide finito:



$$B = \frac{\mu_0}{2} i \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{R^2 m dz'}{[R^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} = f(z, R, L)$$

fare questo integrale a cosa

$$L \gg R \Rightarrow B = f(z) = \mu_0 m i$$



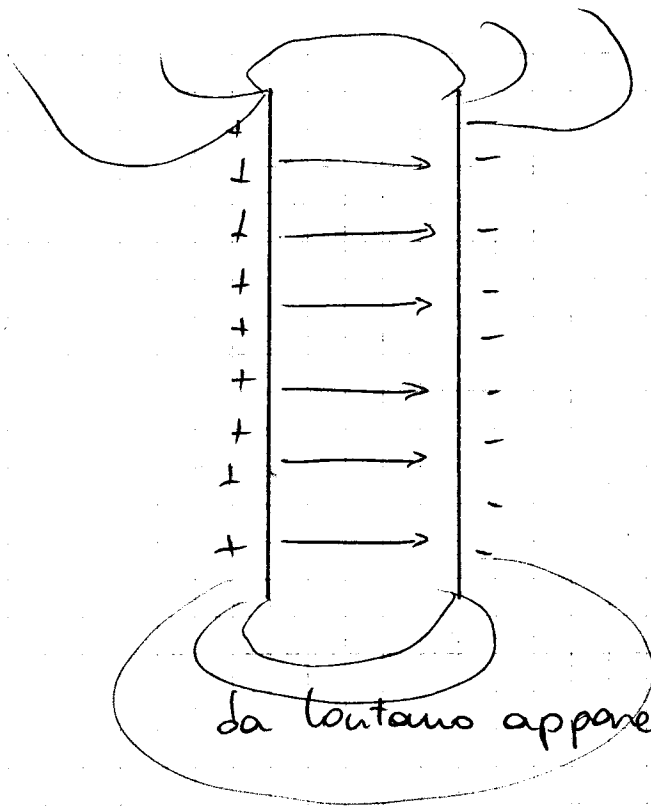
$$\oint \underline{B} \cdot \underline{dl} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} B(z) dz + \int_A^B \underline{B}^{(e)} \cdot \underline{dl} = \mu_0 m i$$

$$L \gg R \rightarrow \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mu_0 m i = \mu_0 L m i$$

$$\Rightarrow \int_A^B \underline{B}^{(e)} \cdot \underline{dl} = 0$$

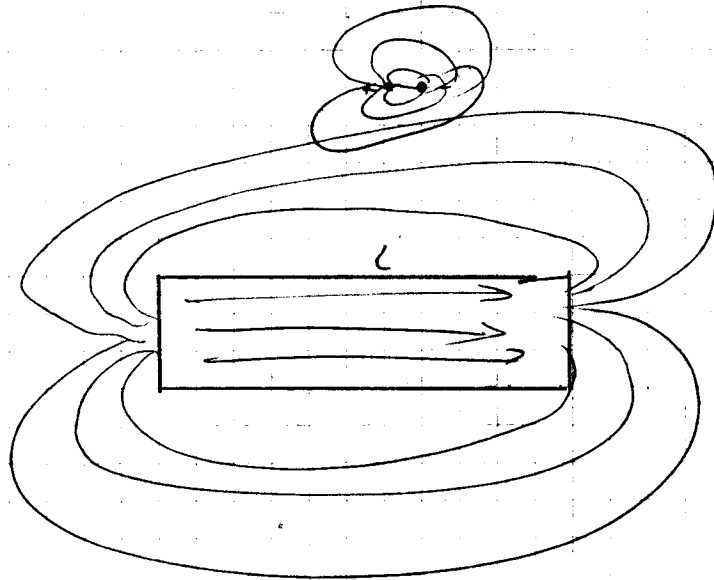
IL CAMPO MAGNETICO PER UN SOLENOIDE
 INFINITO ESISTE SOLO ALL' ~~ESTERNO~~
 INTERNO DEL SOLENOIDE.

(equivalente del condensatore a forze
 piane parallele)



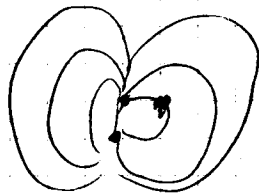
(condensatore)

da lontano appare come un dipolo:

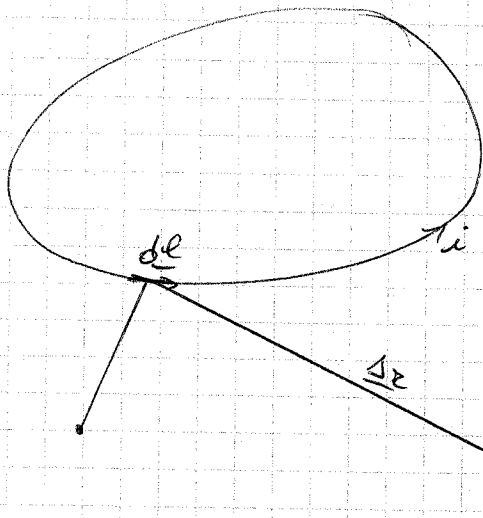


(solenoid)

visto da lontano appare come un
dipolo magnetico.



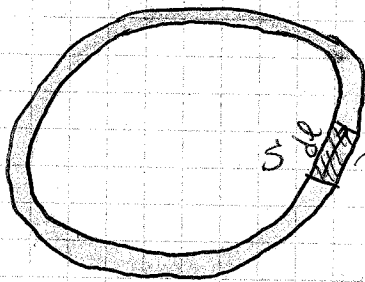
Circolo



$$\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\vec{l} \times \underline{\Delta r}}{|\underline{\Delta r}|^3}$$

Vale solo per circuiti filiformi.

Circolo spesso con sezione S



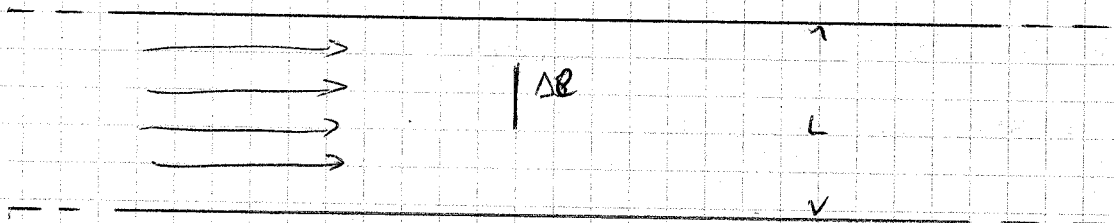
$S dl$ è il volume di questo elemento di circuito

$$i dl = j S dl = (S dl) j$$

$$i \cdot dl = j \cdot d\tau$$

$$\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j \times \underline{\Delta r}}{|\underline{\Delta r}|^3} d\tau$$

Valore per tutti i circuiti.

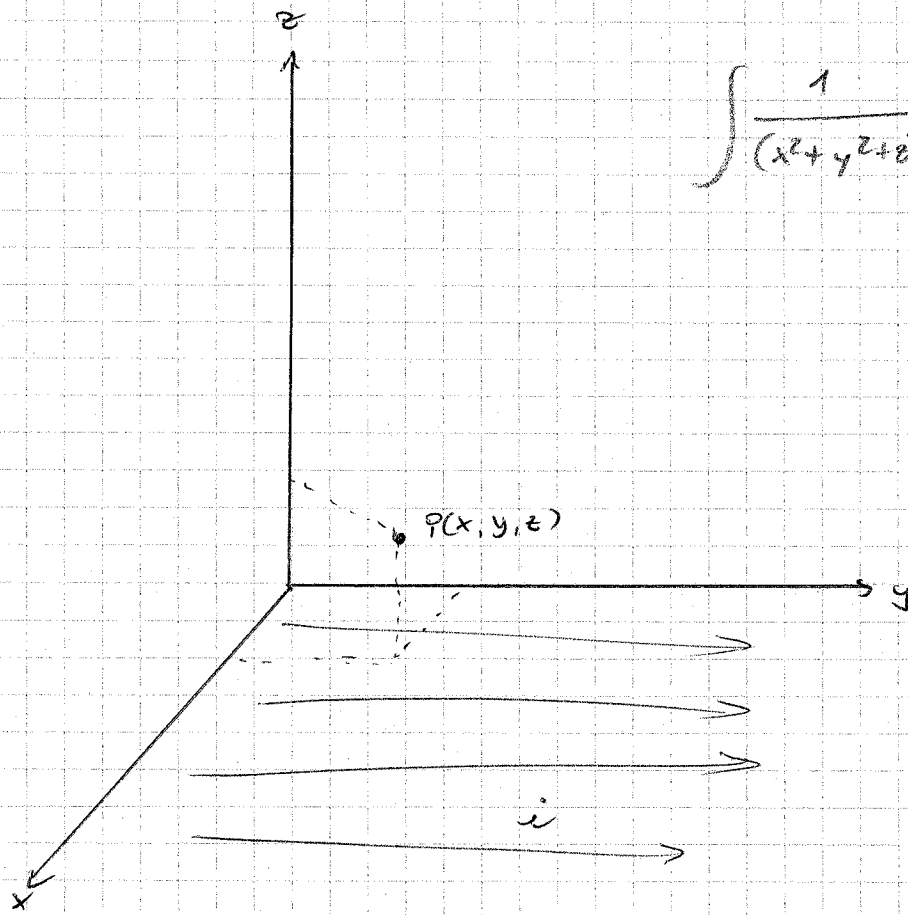


striscia infinita percorsa da i uniformemente

$$j \Delta r = si \text{ che circola in un elemento } S dl$$

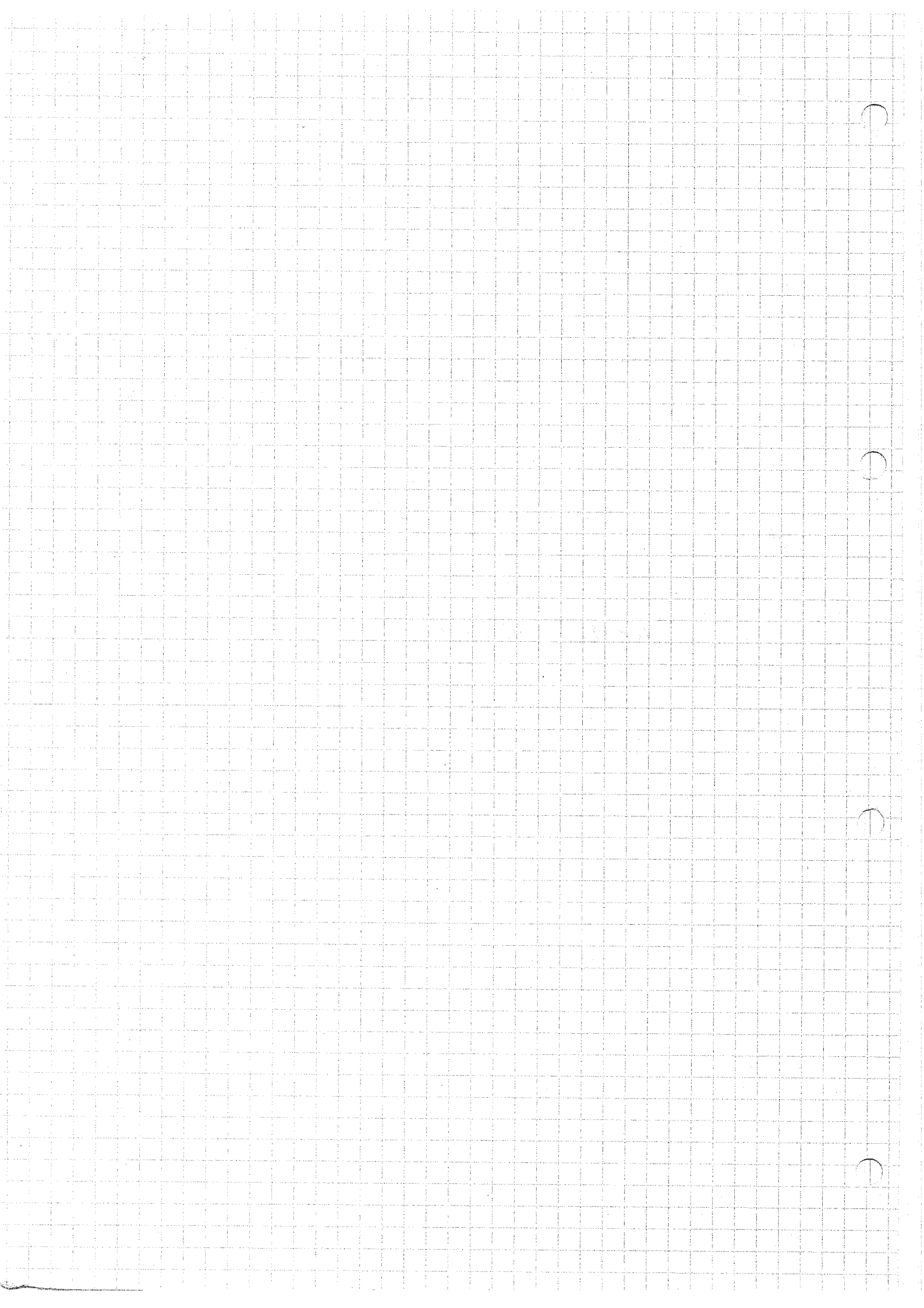
$$i : L = \Delta i : \Delta r$$

$$\int \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dy = \frac{y}{(x^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \text{const}$$

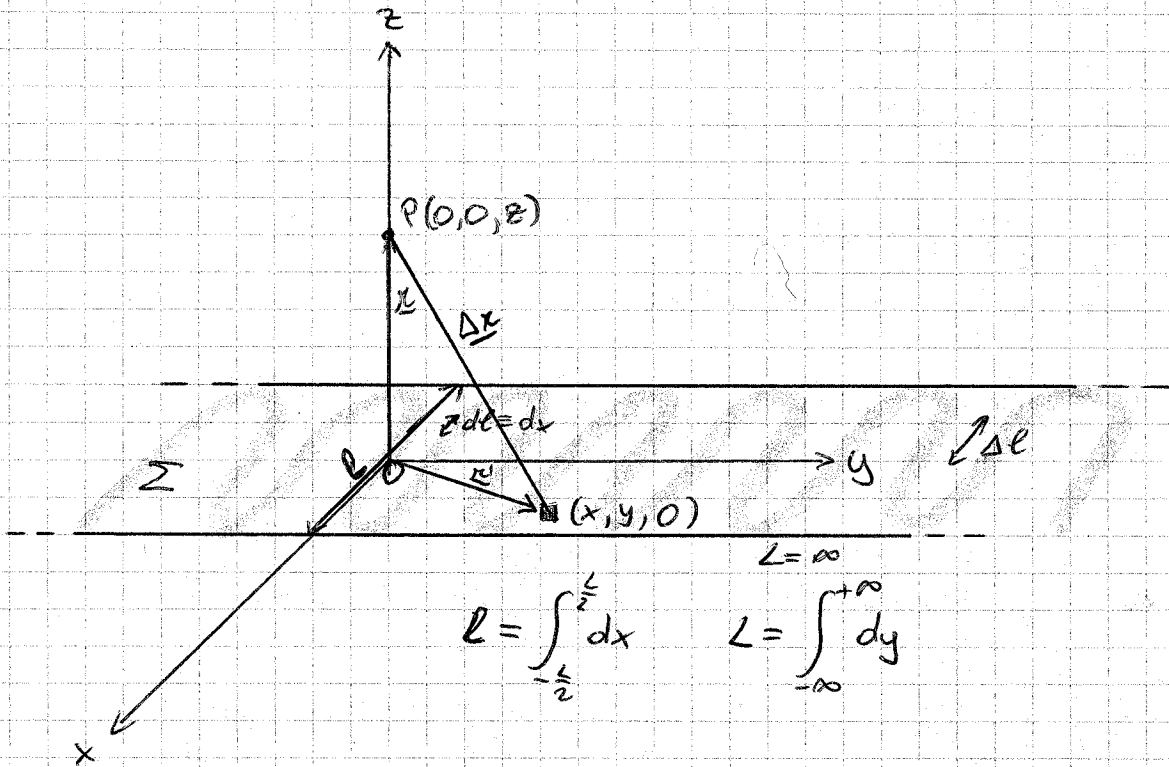


+ const

$$|a \times b| = |a||b| \sin \theta$$



Esercizio del 02/12/2008
(striscia infinita percorsa da corrente i)



i scorre nel verso dell'asse y

$j \, dl = \Delta i$ (corrente che circola in un elemento dl)

$$i \cdot L = \Delta i \cdot \Delta l$$

$$i \, dl = i \, dy = j \, dx \, dy$$

z = altezza del punto dove si valuta il campo magnetico

~~$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j \times \underline{r}}{r^3} \, d\ell$$

$$\vec{B} = \int \frac{j \times (\underline{z} - \underline{r}')}{|\underline{z} - \underline{r}'|^3} \, d\ell$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j \times (\underline{z} - x\hat{x} - y\hat{y})}{(z^2 - x^2 - y^2)^{3/2}} \, dx \, dy$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi z^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y\hat{x} - x\hat{y}) \, dx \, dy$$~~

$$\underline{\Delta r} = \underline{r} - \underline{r}' \quad \underline{r} = z\hat{z} \quad \underline{r}' = x\hat{x} + y\hat{y}$$

$$\underline{\Delta r} = z\hat{z} - x\hat{x} - y\hat{y}$$

$$\underline{j} = \frac{i}{L} \hat{y}$$

$$|\underline{\Delta r}| = \|\underline{r} - \underline{r}'\| = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2}$$

$$\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\underline{j} \times \underline{\Delta r}}{|\underline{\Delta r}|^3} d\Sigma \Rightarrow$$

$$\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\frac{i}{L} \hat{y} \times (z\hat{z} - x\hat{x} - y\hat{y})}{(z^2 + x^2 + y^2) \sqrt{z^2 + x^2 + y^2}} dx dy =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{\Sigma} \frac{\frac{i}{L} z (\hat{y} \times \hat{z})}{|\underline{\Delta r}|^3} dx dy - \int_{\Sigma} \frac{\frac{i}{L} x (\hat{y} \times \hat{x})}{|\underline{\Delta r}|^3} dx dy \right] =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{i z \hat{x}}{L} \int_{\Sigma} \frac{1}{(z^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy - \frac{i z \hat{z}}{L} \int_{\Sigma} \frac{dx dy}{(z^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{i z \hat{x}}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} dy \right) dx - \frac{i z \hat{z}}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} dy \right) dx \right] =$$

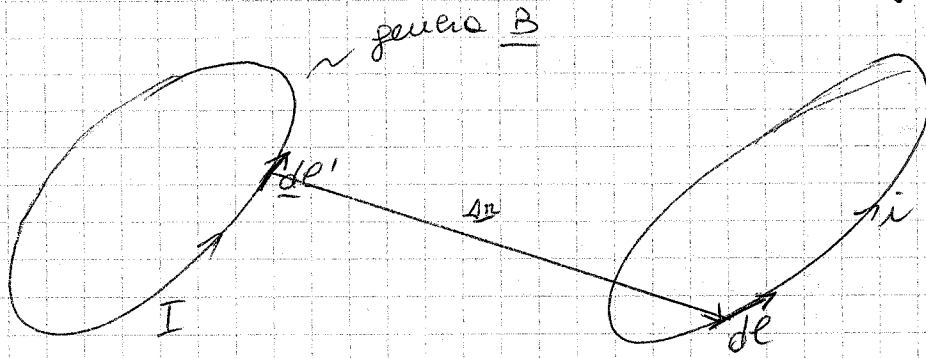
$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi L} \left[z \hat{x} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx - z \hat{z} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x dx \right] = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} dy = \frac{y}{(x^2 + z^2) \sqrt{x^2 + z^2 + y^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi L} [2zL\hat{x} - z\hat{z} \cdot 0] = \frac{\mu_0 i k z \hat{x}}{2\pi k} = \frac{\mu_0 i \epsilon \hat{x}}{2\pi}$$

ERRORE

$$\frac{y}{(x^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{z}{x^2 + z^2}, \text{ NON 2!}$$

05/12/2008



dl e i hanno lo stesso verso

forza agente su dl .

$$d\underline{F} = i \underline{dl} \times \underline{B}$$

$$\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\underline{l}' \times \underline{\Delta r}}{|\Delta r|^3}$$

EQUAZIONI
DI
LAPLACE

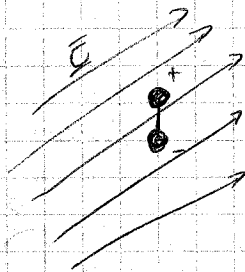
$$\Rightarrow \underline{F} = i \oint \underline{dl} \times \underline{B}$$

Principio di eq. di Ampère:



$$\underline{m} = S \cdot i \cdot \hat{n}$$

dipolo elettrico immerso in un \underline{E} uniforme:



$$\underline{F}_+ = q \underline{E}$$

$$\underline{F}_- = -q \underline{E}$$

$$\underline{F} = q \underline{E} - q \underline{E} = 0$$

la risultante è 0.

momento di forza agente sul dipolo (- = polo)

$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}_+ = \underline{r} \times q \underline{E}$$

$$q \underline{r} = \underline{p}$$

$$\underline{M} = \underline{p} \times \underline{E}$$

\underline{p} momento del dipolo elettrico.

Il circuito immerso nel campo magnetico si comporta come il dipolo immerso nel campo elettrico:

$$\underline{F} = i \oint d\underline{l} \times \underline{B} = 0!$$


$$\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B}$$

verifichiamo:

\underline{F} è una fitta sommatoria di prodotti vettoriali
 ma \underline{B} è uniforme.

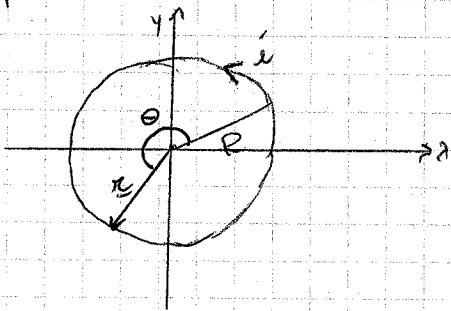
$$(\underline{a} \times \underline{b}) + (\underline{c} \times \underline{b}) = (\underline{a} + \underline{c}) \times \underline{b}$$

$$\Rightarrow \underline{F} = i(\oint d\underline{l}) \times \underline{B}$$

$$\oint d\underline{l} = \underline{l} \neq \oint d\underline{l} = 0$$


$\Rightarrow F = 0!$ coerentemente con il princ.
 di equivalenza di Ampère.

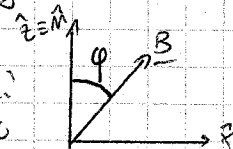
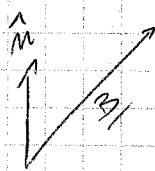
Spira circolare



$$\hat{n} = \hat{z}$$

Spira immersa in un campo magnetico uniforme \underline{B}

Scelgo il s. di rif. in modo che \underline{B} giaccia nel piano xz



circuito infinitesimo \Leftrightarrow le sue dimensioni sono piccole rispetto alle dimensioni su cui varia $\underline{B} \Rightarrow$ il \underline{B} dove è immerso il circuitino è SEMPRE uniforme.

Scegliamo il centro come polo per il momento dello \underline{F} .

$$d\underline{F} = i d\underline{l} \times \underline{B}$$

$$d\underline{M} = \underline{r} \times d\underline{F} \quad \underline{r} = R \hat{r} \quad (\text{vettore posizione})$$

$$\Rightarrow \underline{M} = \oint \underline{r} \times d\underline{F} = i \oint \underline{r} (d\underline{\ell} \times \underline{B})$$

\underline{B} è conosciuto

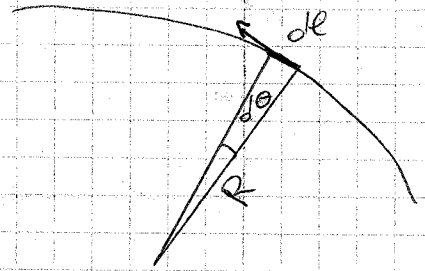
$$\underline{B} = B(\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{z})$$

$$\underline{r} = R(\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y})$$

$$d\underline{\ell} = R d\theta (\cos \theta \hat{y} - \sin \theta \hat{x})$$

\Rightarrow l'integrale è in $d\theta$

$$\left. \begin{array}{l} (a \times b) \times c \\ \neq \\ a \times (b \times c) \end{array} \right\}$$



$$d\underline{\ell} \times \underline{B} = BR(\cos \theta \hat{y} - \sin \theta \hat{x}) \times (\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{z}) =$$

elemento di forza che agisce su $d\underline{\ell}$ (moltiplicato per i)

$$= B \cdot R \cdot (-\cos \theta \sin \varphi \hat{z} + \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \cos \varphi \hat{y}) \cdot d\theta$$

$$i \cdot \underline{r} \times (d\underline{\ell} \times \underline{B}) = d\underline{M} = i B R^2 \left(+\cos^2 \theta \sin \varphi \hat{y} + \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \cdot \hat{z} - \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \hat{x} \right) d\theta$$

l'elemento di forza ha componenti x e y (perpendicolare ad \underline{r} e a $d\underline{\ell}$)

$$\underline{M} = \int_0^{2\pi} d\underline{M} = \int_0^{2\pi} i B R^2 \left(\cos^2 \theta d\theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \cos \theta d\theta \sin \varphi \hat{x} \right)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi \Rightarrow$$

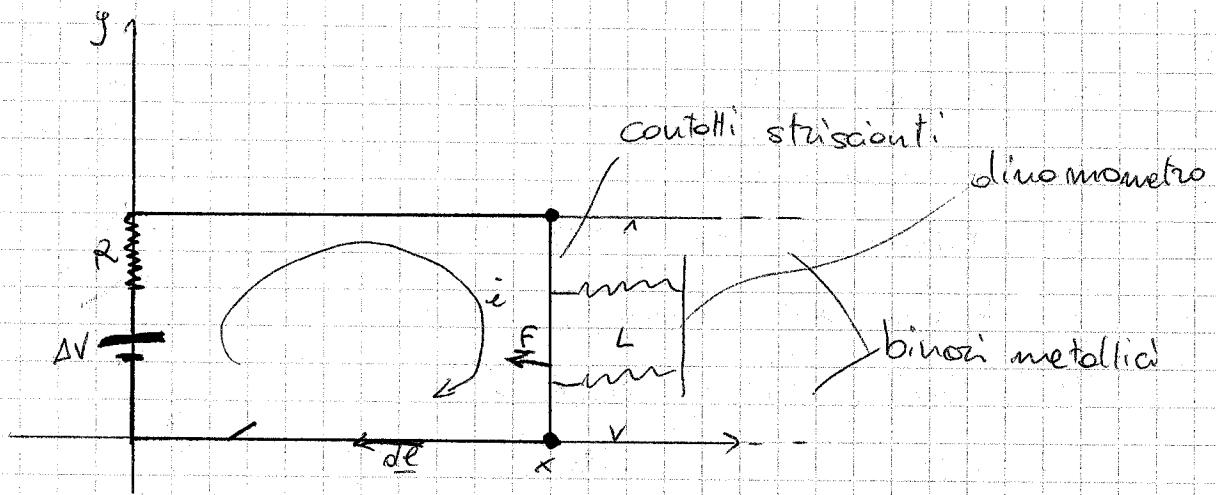
$$\underline{M} = i \cdot (\pi R^2) \cdot B \cdot \sin \varphi \cdot \hat{y}$$

Se avessimo applicato subito il princ. di eq. d'Ampère:

$$\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B} \quad \underline{m} = S \cdot i \cdot \hat{n} = i \pi R^2 \cdot \hat{n}$$

$$\Rightarrow \underline{M} = i \pi R^2 B \sin \varphi \hat{y} \quad (\varphi \text{ angolo compreso tra } \hat{n} \text{ e } \underline{B})$$

(\hat{y} è il vettore perpendicolare ad entrambi nel verso della mano destra).



$\frac{\Delta V}{R} = i$ $\odot \underline{B}$ $d\underline{F} = i \underline{dl} \times \underline{B}$ (direzione = ~~verso l'esterno~~ verso l'interno)

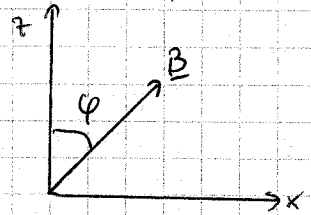
Il circuito fisso è sottoposto a forze che tendono a comprimerlo

$\int d\underline{F} = \int i \underline{dl} \times \underline{B} = i L B \sin \alpha$ Forza agente sul braccio scorrevole

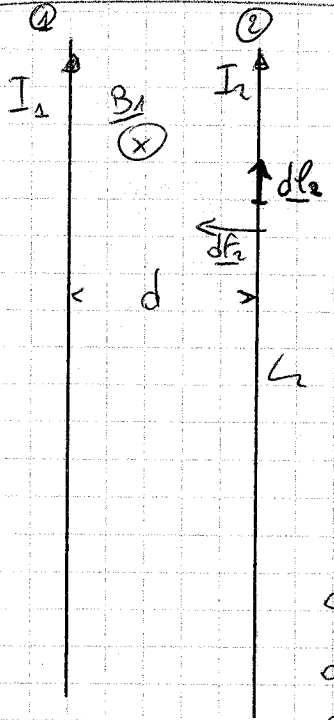
Ruotando \underline{B} nel piano xz , l'unica componente che permette al braccio di muoversi è quella lungo x .

$\underline{L} = -L \hat{y}$

$\underline{B} = (\cos \varphi \hat{z} + \sin \varphi \hat{x}) B$



$i \underline{L} \times \underline{B} = \underline{F}$



filii infiniti paralleli

$d\underline{F}_2 = I_2 \underline{dl}_2 \times \underline{B}_1$ $\rightarrow \underline{B}$ generato da ①

$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d}$

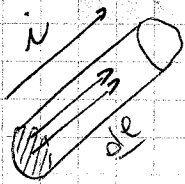
$F_2 = I_2 L_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{I_1 I_2}{d} \right] L_2$

(forza attrattiva)

Si dice che questi 2 filii sono percorsi da $I_1 = I_2 = 1$ ampère se risentono di una forza di ~~2.10^-7~~ $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ (sono a $d = 1$ metro) ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$)

Se I_1 e I_2 sono discordi, la forza è repulsiva.

tratto di circuito visto in sezione



q, v_d

Che legame c'è tra i e le grandezze microscopiche q e v_d ?

$$i = j \cdot S \quad j = n \cdot q \cdot v_d$$

n = densità dei portatori di carica

$$\Rightarrow i = (n q S) v_d$$

Riscriviamo la formula di Laplace:

$$dF = i \underline{dl} \times \underline{B} = (n \cdot q \cdot S \cdot v_d) \cdot \underline{dl} \times \underline{B}$$

$$\boxed{\underline{dl} \parallel \underline{v_d}} \Rightarrow \int d\ell$$

$$dF = (n q S d\ell) \underline{v_d} \times \underline{B} =$$

$$= dN \cdot q \underline{v_d} \times \underline{B}$$

dN = numero dei portatori di carica nel volumetto

Si conclude che una carica che si muove in un conduttore ^(circuito) con vel. \underline{v} risente di una forza:

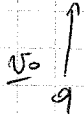
$$\underline{F_c} = q \underline{v} \times \underline{B}$$

\Rightarrow una particella FERMA in un campo \underline{B} non risente di nessuna forza

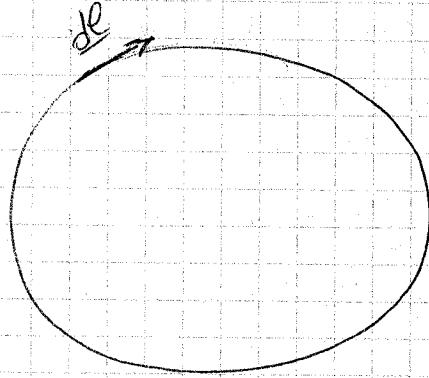
Campo di Lorentz: $\underline{E_c} = \underline{v} \times \underline{B}$

(campo di cui risente una particella q)

⊙ B

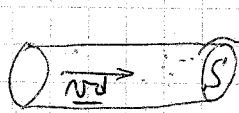


12/12/2008



$$d\underline{F} = i \underline{dl} \times \underline{B}$$

$$\underline{F}_L = q \underline{v} \times \underline{B}$$



dN particelle

$$dN = m \cdot (S \cdot dl)$$

$$d\underline{F} = dN (q \cdot \underline{v} \times \underline{B}) =$$

$$= m S dl q \underline{v} \times \underline{B}$$

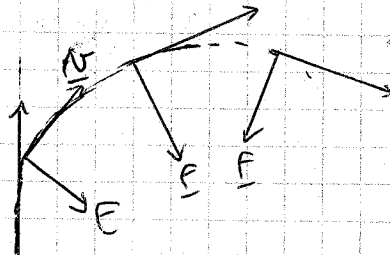
$$i = j S = (m \cdot q v) \cdot S$$

$$dl \parallel v$$

$$\Rightarrow d\underline{F} = m S v q dl \times \underline{B} = \boxed{i \underline{dl} \times \underline{B}}$$

elemento di forza di Laplace

⊙ B



qui c'è campo magnetico

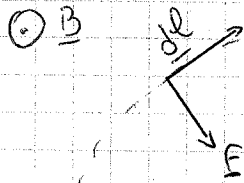
qui non c'è campo magnetico

v_0

q, m

La forza è centripeta perché è sempre \perp alla velocità

Qual è il lavoro che la forza di Lorentz compie sulla particella?



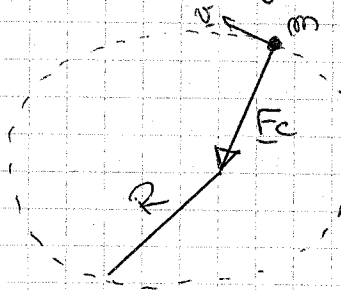
$$dL = \underline{F} \cdot d\underline{l} =$$

$$= q[(\underline{v} \times \underline{B}) \cdot \underline{v}] dt = 0!$$

La forza di Lorentz non fa lavoro se la particella si muove solo sotto il suo effetto.

\Rightarrow la variazione di energia cinetica è nulla
 $\Rightarrow T = \frac{1}{2} m v^2 = \text{costante} \Rightarrow$ il modulo della velocità resta costante.

Si tratta di MOTO CIRCOLARE UNIFORME e quindi agisce una forza centripeta \underline{F}_c .

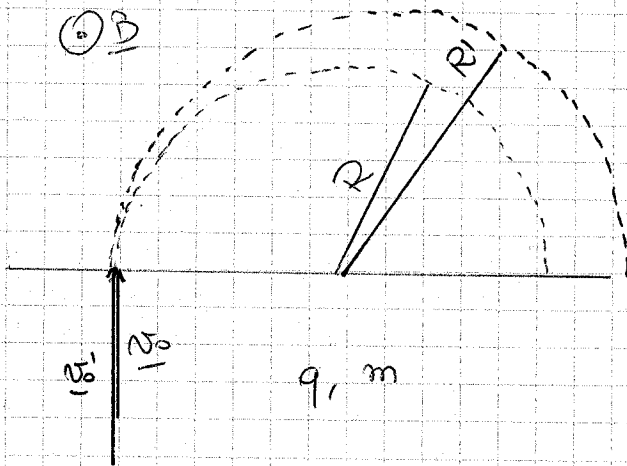


$$F_c = \frac{m v^2}{R} = q v B$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}$$

ω non dipende da v , ma solo dalla carica e dal campo magnetico.

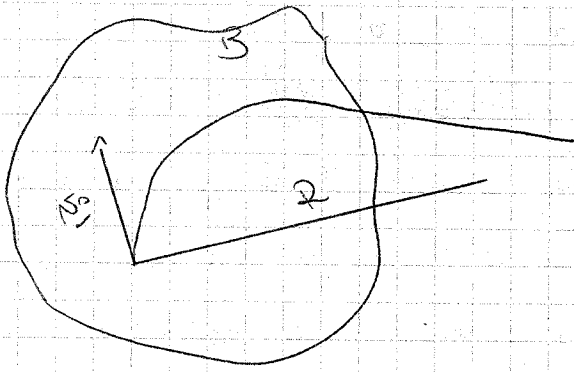
$$R = \frac{m v}{q B}$$



$$R = \frac{m v_0}{q B}$$

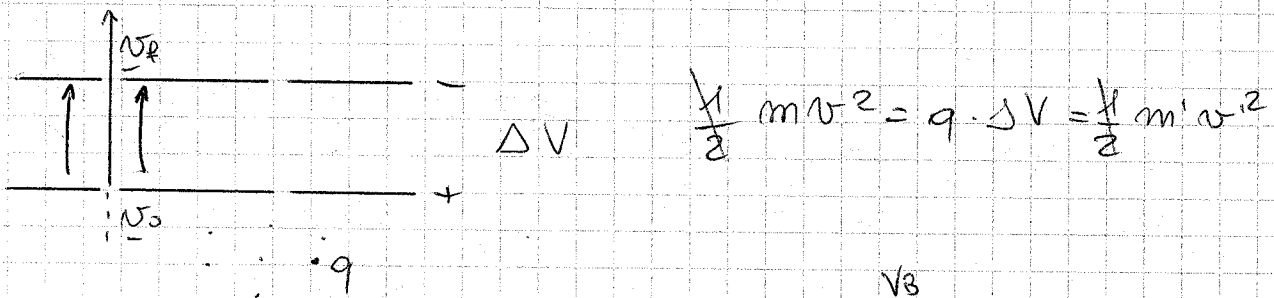
$$v_0' > v_0$$

$$R' > R$$

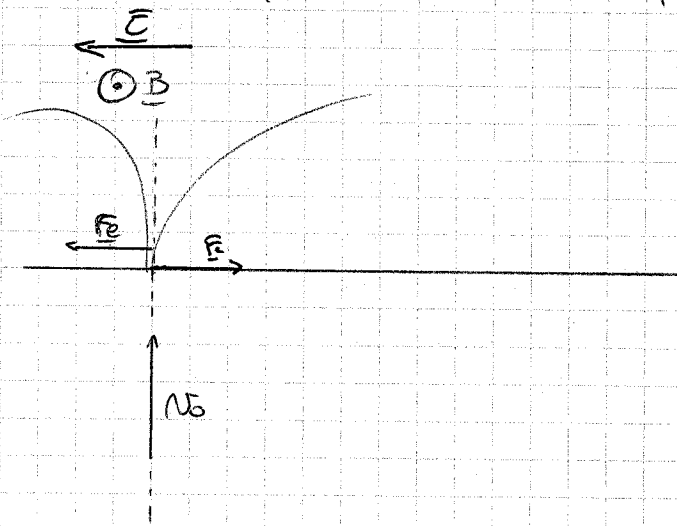


Su questo si basano molti strumenti,
ad esempio lo spettrometro di massa.

Se introduco due particelle con la stessa v in un campo B , il raggio della curva dipende solo dalla loro massa, e tramite esso si riescono a distinguere particelle di massa diverse (es.: isotopi)



$$v' = v \sqrt{\frac{m}{m'}}$$



$$\underline{F}_c = q \underline{v} \times \underline{B}$$

$$F_c = q v B \quad (\text{non dipende dalla massa})$$

$$F_e = q E$$

Le particelle per cui
 $q E = q v B$ continueranno
a velocità v_0 .

che non c'è campo elettrico,
sopra si.

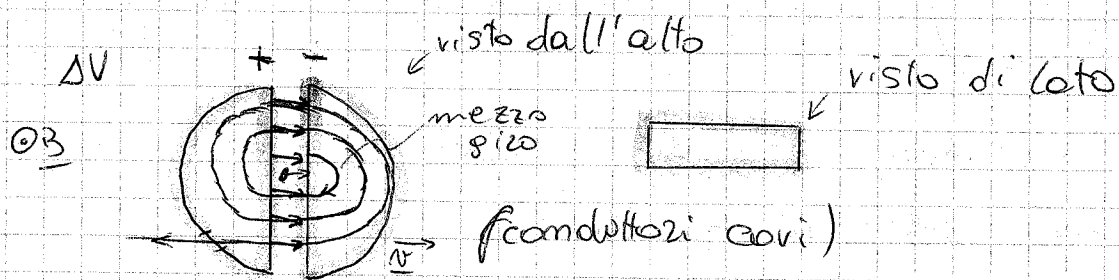
Questo meccanismo crea fasci di particelle che hanno la stessa velocità (selettore di velocità).

$$v_0 = \frac{E}{B} \quad (\text{se } qE = qvB)$$

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

$$\omega R = v$$

queste relazioni sono alla base di un acceleratore di particelle chiamato Sincrotrone.



Al centro vengono iniettati protoni.

Il tutto è immerso in un campo B uniforme (uscite).

Il campo E è presente solo tra le due D. per fare "mezzo giro" la particella

impiega $T = \frac{\pi}{\omega}$

Durante T è stato invertita la diff.

di potenziale \Rightarrow il campo E inverte direzione (+ - \rightarrow - +)

$F_e \gg F_L$ tra le D.

La variazione di en. cinetica ΔT è

$$= q \Delta V$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = q \Delta V + \frac{1}{2} m v_1^2$$

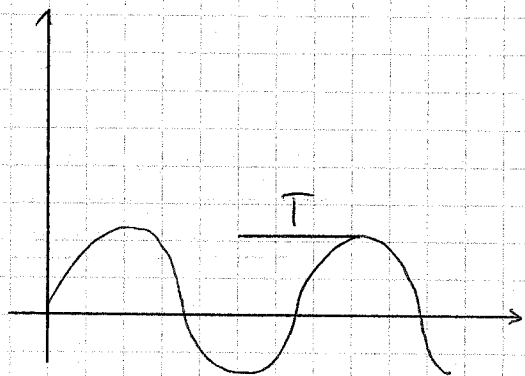
Aumenta il raggio di curvatura ma il periodo è lo stesso. e così via.

$$\frac{1}{2} m v_3^2 = \frac{1}{2} q v_i^2 + 2q \Delta V$$

$$\Delta V = \Delta V_0 \cdot \sin(\omega t)$$

$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}$ Ogni semiperiodo T , ΔV s'inverte di segno. $T = \frac{\pi}{\omega}$

Differenza di potenziale alternata



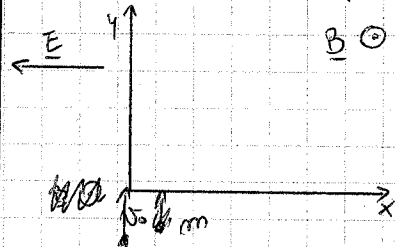
All'ultimo giro la particella esce con energia cinetica

$$\Delta T = m \cdot q \cdot \Delta V \quad (\text{dopo } n \text{ giri})$$

Quanto deve essere grande il coso se vuoi avere una certa velocità finale?

$$B = 10 \text{ T} \quad \Delta V_0 = 1 \text{ kV}$$

Sist. di rif.



$$\underline{B} = B \hat{k}$$

$$\underline{F}_e, \underline{F}_l$$

$$\underline{v}_0 = v_0 \hat{j}$$

$$\underline{F}_l = q \underline{v} \times \underline{B}$$

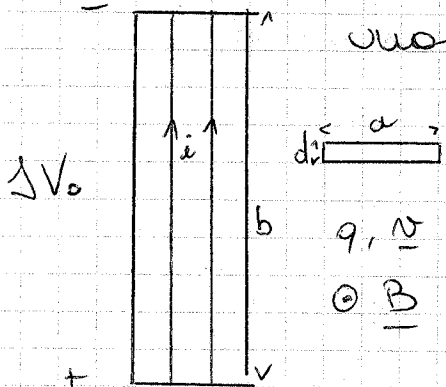
$$\underline{E} = -E \hat{i}$$

$$\underline{F}_e = q \underline{E}$$

Determinare la traiettoria della particella (genericamente) $\underline{F} = m \underline{a}$

Altra applicazione della forza di Lorentz:

strisciolina conduttrice ai cui capi è applicata



$$i = j \cdot S = j \cdot (a \cdot d) = (nqAv)(ad)$$

Per la mano destra, \underline{F}_l è diretta così \rightarrow

$$\text{Campo di Lorentz: } \underline{E}_L = \frac{\underline{F}_L}{q} = \underline{v} \times \underline{B}$$

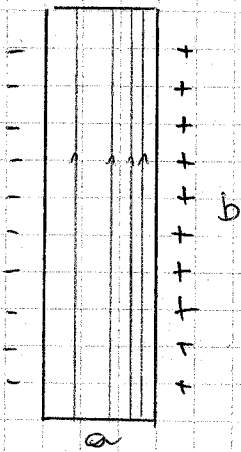
Le cariche elettriche si spostano verso destra:
accumulo di cariche positive a destra

⇒ si crea un \underline{E} nella dir. opposta: ←

Si ha equilibrio ($\underline{F}_{\text{Tot}} = 0$) quando
 $\underline{E} = -\underline{E}_L$ (le cariche smettono di traslare)

$$\underline{F} = q(\underline{E}_L + \underline{E}) = 0 \text{ condizione d'equilibrio}$$

Si crea una ΔV ai lati dello
striscia:



$$\Delta V = E \cdot a \quad E = E_L = vB$$

$$\Delta V = E \cdot a = v \cdot B \cdot a$$

$$va = \frac{i}{mqd}$$

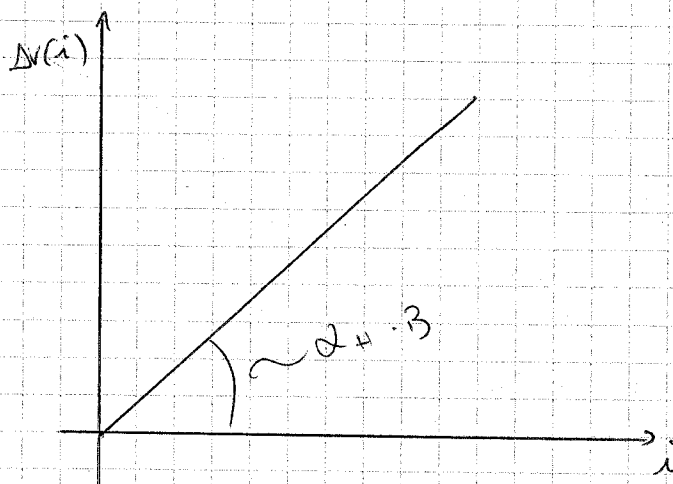
$$\Delta V = \frac{i}{mqd} \cdot B \quad \text{EFFETTO HALL}$$

m, q, d caratteristiche dell'oggetto.

SONDA DI HALL

$$\Delta V = \alpha_H \cdot i \cdot B \quad \alpha_H \text{ costante}$$

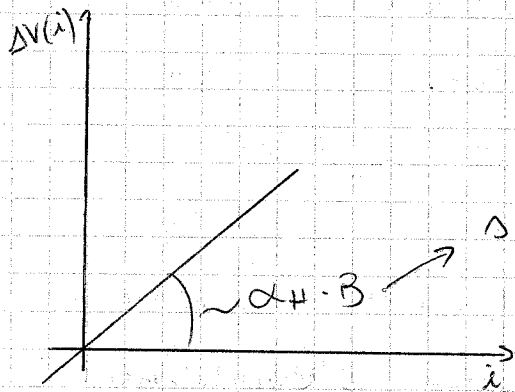
Se B è conosciuto e costante:



trovando α_H abbiamo
tarato la sonda

fissata α_H , si può misurare un B

non noto:



si trova B

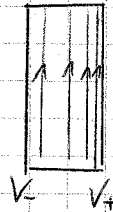
Questa banda è uno dei mezzi più precisi per misurare i campi magnetici.

Trovato B è possibile misurare la densità dei

portatori di carica (n)

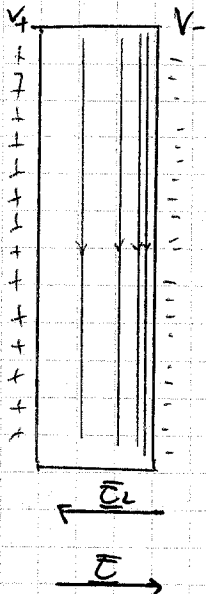
d'effetto Hall permette anche di stabilire se i portatori di carica sono positivi o negativi.

Se sono positivi si ha:



$$V_+ > V_-$$

Se fossero cariche negative che viaggiano in direzione opposta:



$$i \quad \underline{B} \odot$$

$$\underline{E}_L = \underline{v} \times \underline{B}$$

$$\underline{F}_L = q \cdot \underline{E}_L$$

$$V_+ > V_-$$

$$\underline{F}_L \rightarrow$$

[fine magnetostatica]

campo:

sorgenti:

16/12/2008

\underline{B} →

i

j

j_m

correnti microscopiche

$\mu_0 \rightarrow \mu_0 \mu_r$

\underline{E} →

q

p

P_i

$E_0 \rightarrow E_0 E_r$

dielettrica

prini di dimensioni

campi \underline{B} :

paramagnetici

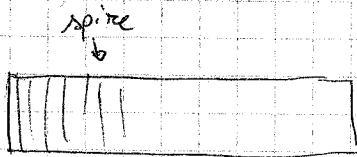
ferromagnetici

diamagnetici

$$\mu_r \begin{cases} > 0 & \approx 10^{-6} \\ \gg 1 & \approx 10^5 \\ < 0 & \approx 10^{-4} \end{cases}$$

$$B_{fm} \approx \mu_r \cdot B_{\text{vac}} \cdot \frac{1}{\mu_r}$$

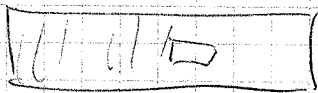
campo magnetico in assenza di materiale ferromagnetico



$$B = \mu_0 i n$$

$$n = \frac{N}{L}$$

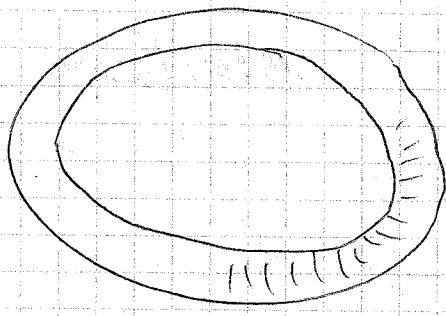
$$B = \mu_0 \mu_r n i$$



$$E_{t0} = \underline{E}_{t2}$$

$$\oint \underline{E} \cdot d\underline{e} = 0$$

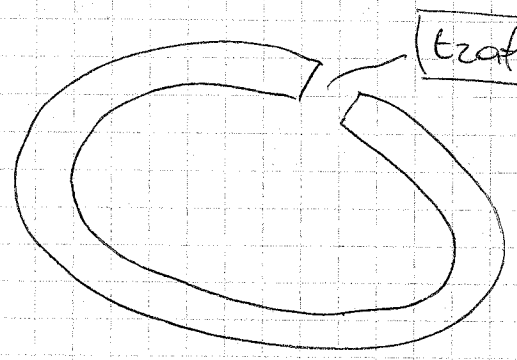
$$\oint (\underline{B}) = 0$$



solenoido che si richiude a toro

$$B = \mu_0 n i$$

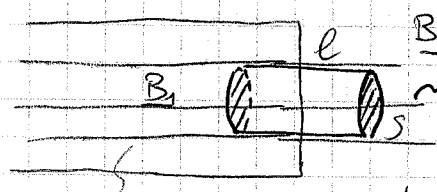
$$B_{fm} = \mu_r \mu_0 n i$$



traferro = spazio vuoto tra due poli di un solenoide

(solenoido avvolto su un ferromagnetico)

Cosa succede sulla sup. di separazione?



B_z immaginiamo un cilindretto le cui basi sono // alla sup. di sep.

linee di forza

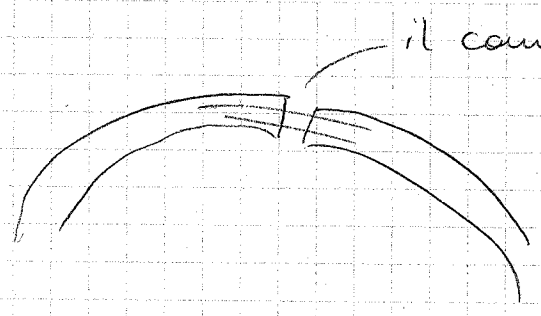
divergenza di B

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \Rightarrow \oint_{\Sigma} (\underline{B}) = 0$$

$$\Delta = -B_{1n} \cdot S + B_{2n} \cdot S = 0$$

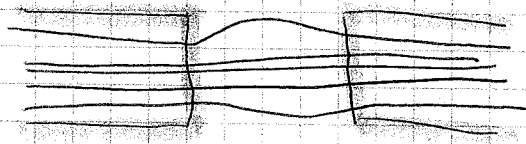
↑
componente normale

$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow$ SI CONSERVA LA COMPONENTE NORMALE alle superficie.

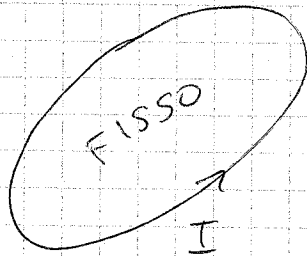


il campo B vale anche qui

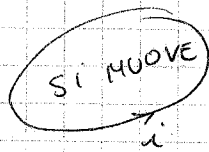
le linee di forza di B non si possono interrompere e sono tutte chiuse.



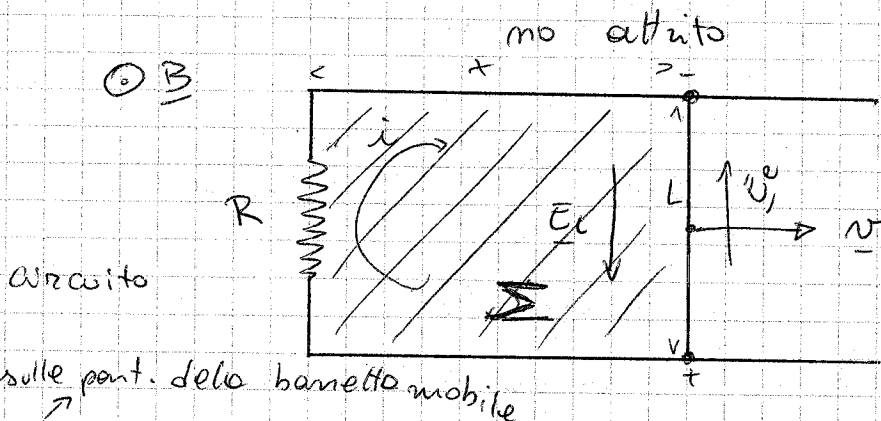
(ovviamente solo se il traferro è breve rispetto alla lunghezza del solenoide.)



fenomeno di induzione elettromagnetica



Anche nel secondo circuito si crea una corrente.



sulle part. della lametta mobile

$$\underline{F} = q \underline{v} \times \underline{B}$$

$$\underline{E}_L = \frac{F}{q}$$

\underline{E}_L fa circolare le cariche elettriche positive da - a +

Si crea una $\Delta V \Rightarrow$ la corrente continua a circolare (per effetto del campo elettrostatico)

[come il campo elettromotore già visto]

IL \underline{E}_L è il c. elettromotore che determina questa separazione delle cariche.

ai capi della bobina

$$\Delta V = \vec{E} \cdot \underline{L} = E_L \cdot L$$

↑
lungh. bobina

$$\underline{E}_L = \underline{v} \cdot \underline{B} \quad \text{perpendicolari} \Rightarrow E_L = vB$$

$$\Rightarrow \Delta V = (v \cdot L) \cdot B$$

$$f.e.m. = \oint \underline{E}_{el} \cdot d\underline{\ell} = \frac{v \cdot L \cdot B}{E_L \cdot L}$$

↑
elettromotore

perché al di fuori della bobina non c'è il campo di Lorentz

$$\left[\oint \underline{E}_T = \oint \underline{E}_{el} + \oint \underline{E}_e = \oint \underline{E}_{el} + 0 \right]$$

$$\phi(\underline{B}) = \int_{\Sigma} \underline{B} \cdot \hat{n} d\Sigma = B \Sigma \quad (\text{uniforme})$$

B x L

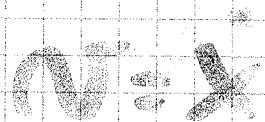
$x = x(t)$ perché la bobina si muove

$$\underline{B} \cdot \underline{L} \cdot x(t)$$

↓
costanti

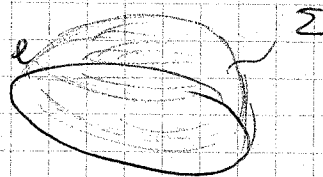
$$v \cdot L \cdot B$$

che legame c'è tra queste espressioni?



In questo caso, $f.e.m. = \left| \frac{d}{dt} \phi_{\Sigma}(\underline{B}) \right|$

$$f.e.m. = \left| \frac{d}{dt} \phi_{\Sigma}(\underline{B}) \right| = \left| \oint \underline{E} \cdot d\underline{\ell} \right|$$

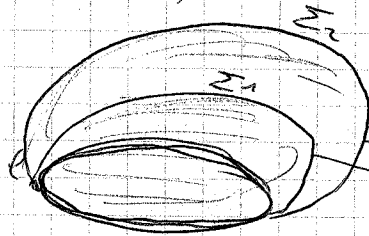


Σ = superficie aperta staccata dalla linea del circuito.

Il stacco infinitesimo Σ

Il flusso attraverso due Σ staccate dalla stessa ℓ è lo stesso

(deriva dal fatto che il flusso attr. una sup. chiusa è 0)

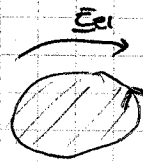
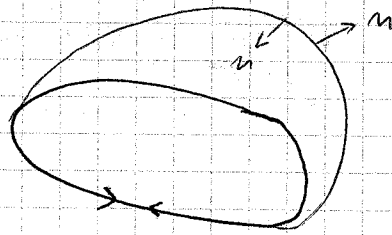


la loro unione
fa una sup.
chiusa

$$\phi_{\Sigma_1}(\underline{B}) = -\phi_{\Sigma_2}(\underline{B})$$

$$\oint_{\ell} \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = -\frac{d}{dt} \phi_{\Sigma}(\underline{B})$$

Il senso della circolazione è determinato dalla mano destra:

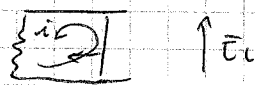


$$\odot \hat{n} \quad \underline{E} \cdot d\underline{\ell} < 0$$



$$\otimes \hat{n}$$

torniamo all'esempio precedente

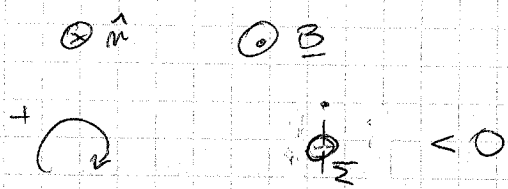


$$\hat{n} \text{ concorde con } \underline{B} \Rightarrow |\dot{\phi}_{\Sigma}| = vBL$$

$$\odot \hat{n} \quad \odot \underline{B}$$



la derivata
del flusso
cresce

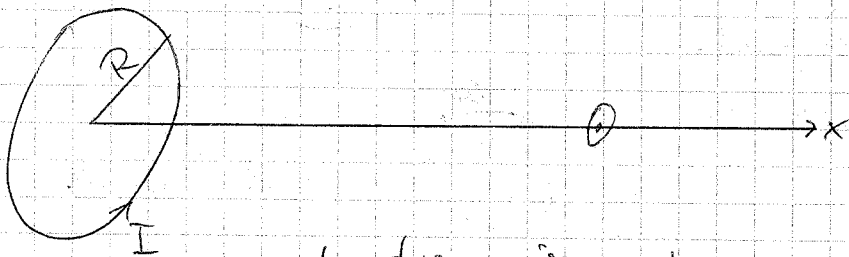


$$\int_{\Sigma} \underline{B} \cdot \underline{\hat{n}} d\Sigma$$

la corrente tende ad opporsi alle cause
che aumentano il flusso
(qui con la forza di Laplace sulla sbarretta)

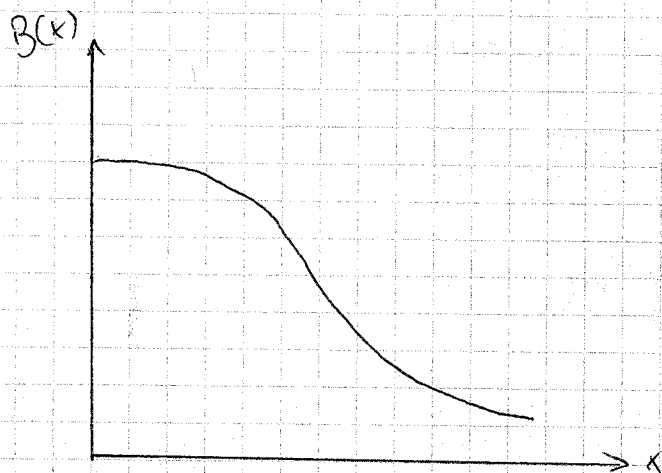
$$\underline{F}_{La} = i \underline{L} \times \underline{B} = \int i d\underline{l} \times \underline{B}$$

← \underline{F}_{La} (opposta a \underline{v})



le due spire restano parallele
la seconda si muove con vel. \underline{v}

Campo \underline{B} lungo l'asse:



Il flusso attraverso una superficie appoggiata ad una linea si chiama FUSCO CONCATENATO

supponiamo $\underline{v} : \longrightarrow$

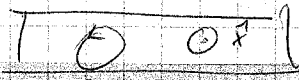
se $\hat{n} : \longrightarrow$ il flusso è positivo

$$\int \underline{B} \cdot \hat{n} d\Sigma = B(x) \cdot \Sigma > 0$$

se lo spiro si muove verso dx il flusso diminuisce nel tempo

$$\dot{\phi}_{\Sigma}(B) = \sum \frac{\partial B}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \sum \frac{\partial B}{\partial x} v < 0$$

sensu di circolazione antiorario



$$\oint \underline{\varepsilon} \cdot d\underline{\ell} = - \dot{\phi}_{\Sigma} \Rightarrow \text{la circolazione}$$

è positiva \Rightarrow i va in senso antiorario

lo spiro si allontana \Rightarrow i e I concordi antiorarie

forza di Laplace diretta verso $-\hat{x}$.

Energia potenziale magnetico $U_m = - \underline{m} \cdot \underline{B}$

$$F_x = - \frac{\partial U_m}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \underline{m} \cdot \underline{B}$$

(principio di eq. di Ampère)

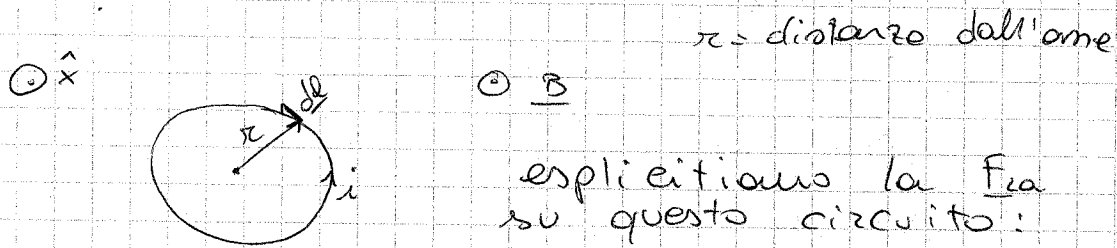
$$\underline{m} = \Sigma \cdot i \cdot \hat{n}$$

$$\Rightarrow \underline{m} \cdot \underline{B} = \Sigma \cdot i \cdot B \Rightarrow F_x = \Sigma \cdot i \cdot \frac{\partial B}{\partial x}$$

effettivamente la forza è così: \longleftarrow

(LEGGE DI LENZ) $\mathcal{E}_i = - \frac{\partial \Phi_{\mathcal{E}}(B)}{\partial t}$

Determiniamo la comp. radiale del campo magnetico



$F_c = \int i \underline{dl} \times \underline{B}$ dove \underline{B} è il campo agente su \underline{dl}

$\underline{B} = \underline{B}(0)$ (lo spiro è piccolo \Rightarrow prendo il \underline{B} agente sull'asse)
 \Rightarrow campo uniforme su tutti i \underline{dl}

\Rightarrow con questa approssimazione

$F_c = \left(\int i \cdot \underline{dl} \right) \times \underline{B} = 0 \times \underline{B} = 0$

ma fuori dall'asse \underline{B} ha anche componenti radiali

$\underline{B} = \underline{B}(r) = B_x(r) \cdot \hat{x} + B_r(r) \cdot \hat{r}$

$\Rightarrow F_c = i \int \underline{dl} \times B_x \cdot \hat{x} + i \int \underline{dl} \times B_r \cdot \hat{r}$

la componente assiale \hat{x} è per tutti i punti

\Rightarrow il primo integrale fa 0 (simmetria assiale)

$\Rightarrow F_c = i \int \underline{dl} \times B_r \cdot \hat{r}$

B_r è lo stesso, varia \hat{r}

$\underline{dl} \times \hat{r} = -dl \cdot \hat{x}$

$F_c = -i \left(\int dl \right) B_r \cdot \hat{x} = -i \cdot 2\pi r \cdot B_r \cdot \hat{x}$

$$-\cancel{\mu} (2\cancel{\pi}) B_{\cancel{r}} \cdot \cancel{\hat{r}} = m \cdot \frac{\partial B(t)}{\partial x} \cdot \cancel{\hat{r}}$$

$$m = \cancel{\pi} r^2 \cdot \cancel{\hat{r}}$$

$$B_r = -\frac{\mu}{2} \frac{\partial B(t)}{\partial x}$$

↓
vale solo in
geometria cilindrica

(conseguenza di

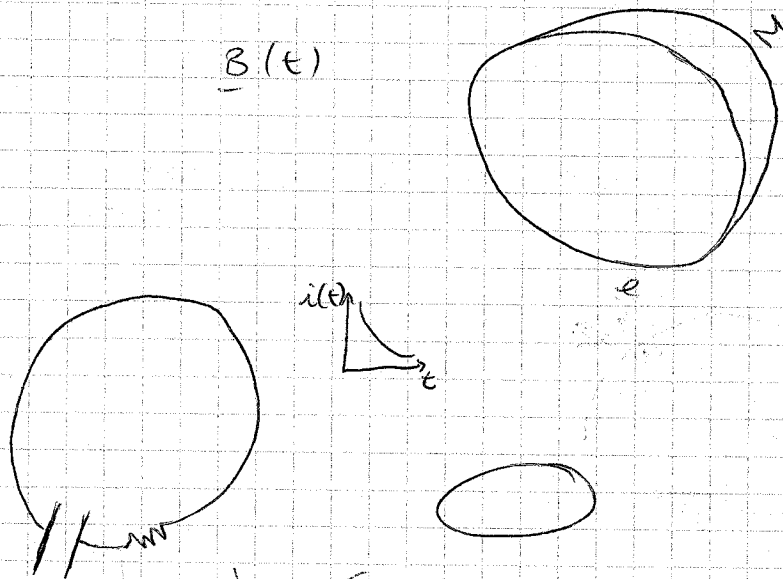
$$\nabla \cdot \underline{B} = 0)$$

in coordinate cilindriche

$$\oint \underline{E} \cdot d\underline{e} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \underline{B} \cdot \hat{n} d\underline{\Sigma}$$

LEGGÈ DELLA
INDUZIONE
ELETTROMAGNETICA

(ha validità assolutamente generale)



fissi \Rightarrow no \underline{F}_{ct} , no \underline{F}_z

quò è la variazione di \underline{B} nel tempo che
causa l'induzione.

Equazioni di Maxwell (caso stazionario):

$$\oint_{\Sigma} \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

$$\oint \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = 0 \quad \leftarrow \text{la legge di induzione ne è una generalizzazione}$$

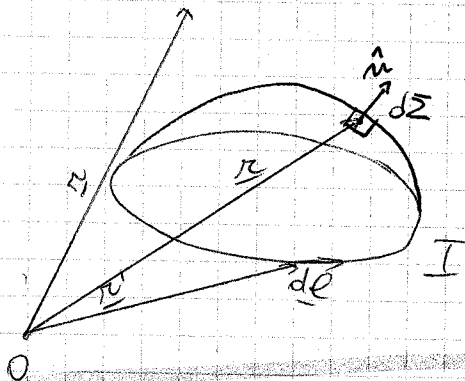
$$\oint_{\Sigma} \underline{B} \cdot d\underline{\ell} = 0$$

$$\oint \underline{B} \cdot d\underline{\ell} = \mu_0 \cdot I$$

Applicando il teor. di Stokes la legge diventa:

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

campo magnetico statico \Rightarrow campo elettrico rotazionale



$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\underline{\ell} \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

Posso calcolare il flusso autoindotto (concatenato alla spira stessa):

$$d\phi = \underline{B} \cdot \underline{n} \cdot d\Sigma$$

$$\Phi_{\Sigma}(\underline{B}) = \iint_{\Sigma} \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\oint \frac{d\ell \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \right) \cdot \hat{n} d\Sigma \quad \begin{array}{l} \text{FLUSSO} \\ \text{AUTOCONCATENATO} \end{array}$$

Rappresenta il num. di linee di forza che attraversano Σ (ovvero il num. di linee concatenate al circuito).

Ma tutte le linee di forza sono concatenate al circuito.

$$\Phi_{\Sigma}(\underline{B}) = L \cdot I \quad L = \text{coefficiente di autoinduzione}$$

L dipende solo dal circuito

l'unità di misura di L è l'Henry (H)

$$\begin{aligned} \frac{[B] \cdot m^2}{\frac{m}{s}} &= \frac{[E] \cdot m^2}{\frac{m}{s}} = [E] \cdot m \cdot s = [F] = [L] \cdot \frac{C}{s} \\ &= [L] \cdot A \end{aligned}$$

↑
Coulomb
secondi

$$\Rightarrow \frac{[F]}{\left(\frac{C}{s}\right)} \cdot m = [L] \cdot 1A$$

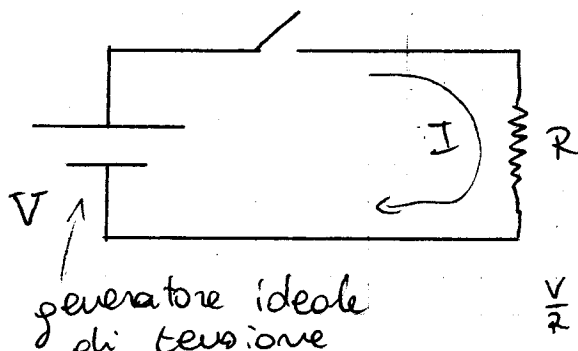
$$\Rightarrow \frac{[F] \cdot m}{I^2} = 1H$$

$$H = \frac{kg \cdot m^2}{s^2 A^2}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} d\Sigma = -L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E}_i$$

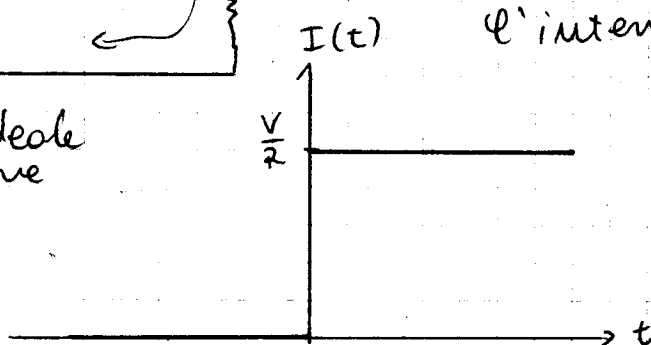
forza elettromotrice indotta

(circuito indeformabile)



a $t=0$ chiudo
l'interruttore

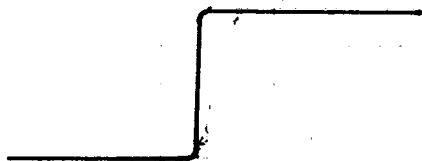
generatore ideale
di tensione



$\frac{dI}{dt}$ non è trascuroabile in $t=0$

(quello non è una discontinuità)

\Rightarrow non è una derivata infinita



(ragionamento
euristico: poco
rigoroso ma
intuitivo)

$$(V + \mathcal{E}_i) = R \cdot I \quad (\text{legge di Ohm})$$

$$\left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{f.e.m.}}}{V} - L \frac{dI}{dt} \right) = R \cdot I$$

$$V - L \frac{dI}{dt} = R I \quad \text{legge di Ohm}$$

eq. diff. 1° ordine non omogenea

$$I = I_{om} + I_p$$

$$I_p = \frac{V}{R}$$

troviamo I_{om} :

~~WAAAAAAAA~~

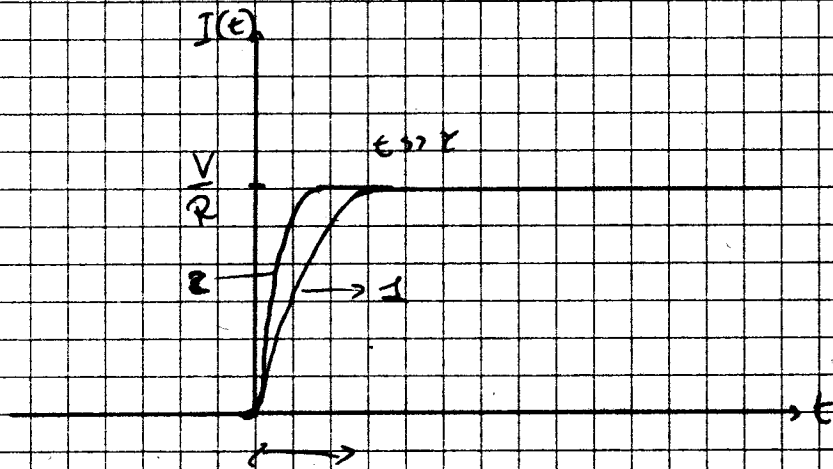
$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I = -\frac{I}{\tau} \quad \left[\tau = \frac{L}{R} \right]$$

$$I_{\text{com}} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$I = \frac{V}{R} + A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

cond iniz.: $I(0) = 0$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V}{R} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

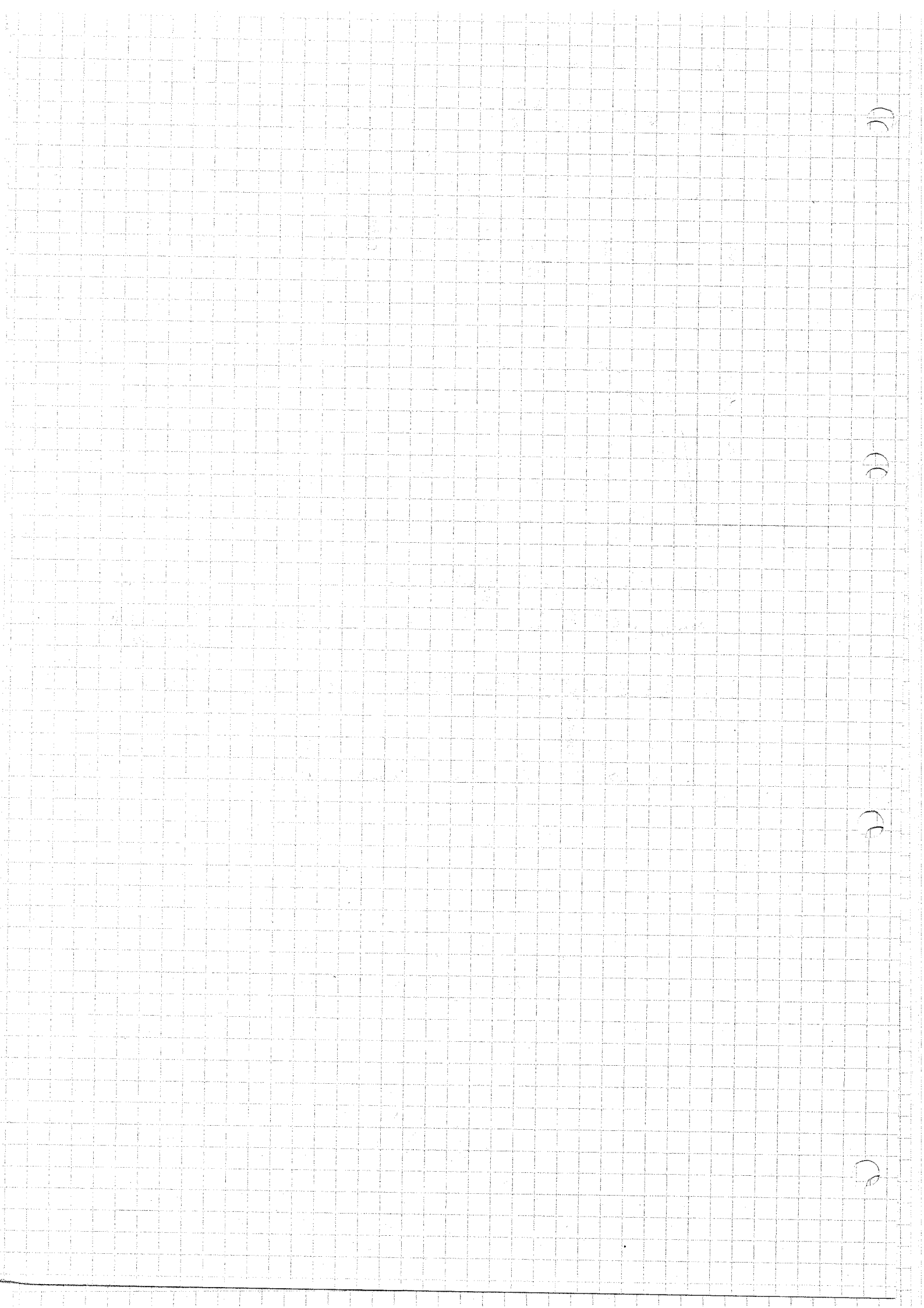


tempo di salita \approx qualche τ

è maggiore τ_1 o τ_2 ? $\tau_1 > \tau_2$ (tempo di salita più grande)

$\lim_{\tau \rightarrow 0} \Rightarrow L \rightarrow 0 \Rightarrow$ tempo di salita infinitesimo

$\frac{t}{\tau} \gg 1 \Rightarrow$ condizione stazionaria



09/01/2009

Possibili scritti:

Possibili orali:

{

 Mar 03

 Mer 04

 Gio 05 14:00
 }

Ven 13

{

 Gio 19 14:00

 Ven 20
 }

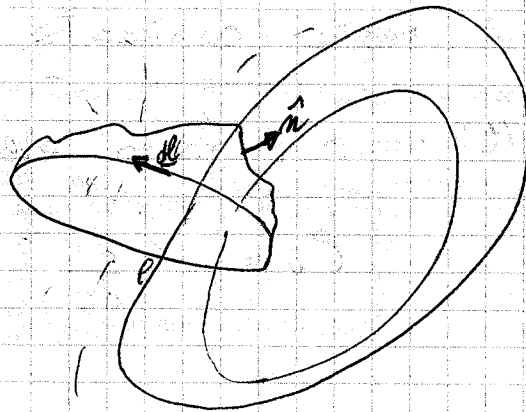
{

 Mar 24

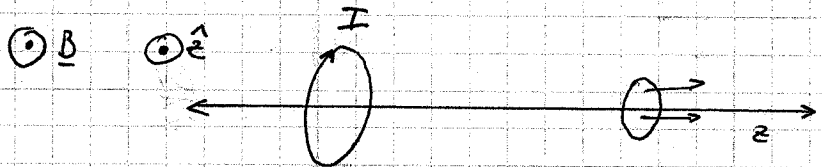
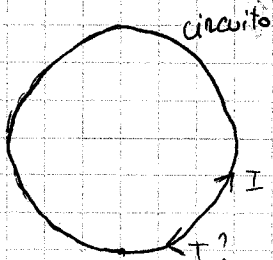
 Ven 27
 }

SC14

$$\oint \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = - \frac{d}{dt} \oint \underline{B} = \mathcal{E}_i \quad \text{legge di Lenz}$$

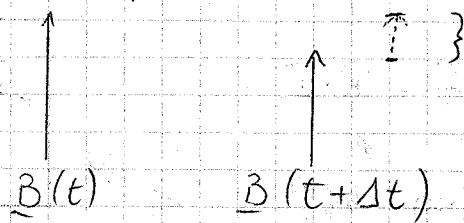


ESEMPIO



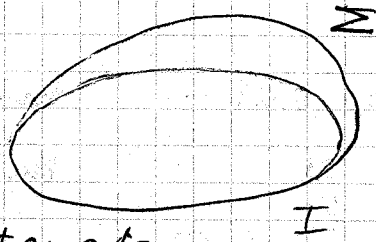
Il campo magnetico sta variando nel tempo (diminuisce)

La corrente circola in modo da compensare il decremento di \underline{B} \Rightarrow circolo in senso



antiorario creando un campo che esce dal foglio. Viceversa, se la spira si avvicina, la corrente circola in modo da "obblanare" il campo magnetico (va in senso orario).

I genera un campo B di cui si può calcolare il flusso concatenato

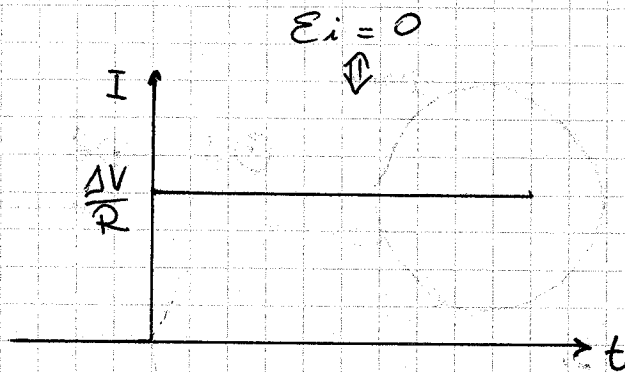
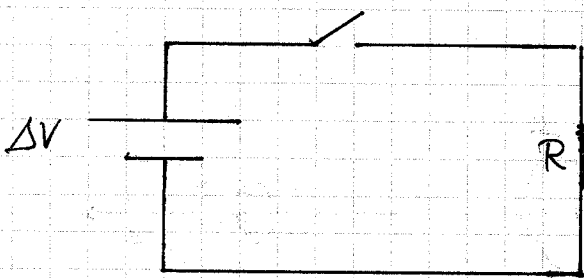


$$\oint_{\Sigma} (\mathbf{B}) = L \cdot I$$

Se I varia nel tempo, anche il flusso varia nel tempo. Se lo spiro è indotto mobile, L resta costante

$\phi \rightarrow \phi(t) \Rightarrow \mathcal{E}$ forza elettromotrice indotta

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt}$$



$$\Delta V + \mathcal{E}_i = I \cdot R$$

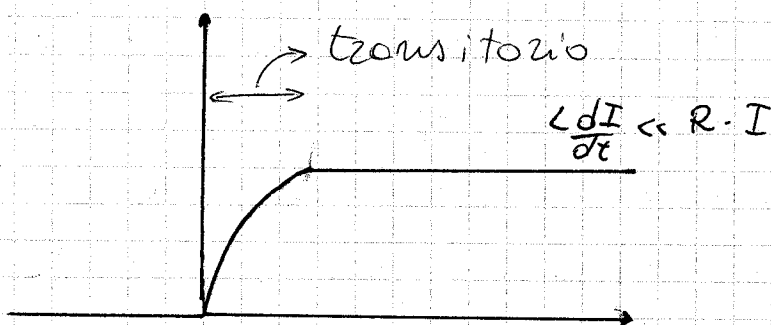
$$\Delta V = L \frac{dI}{dt} + R \cdot I$$

↑
eq. diff.

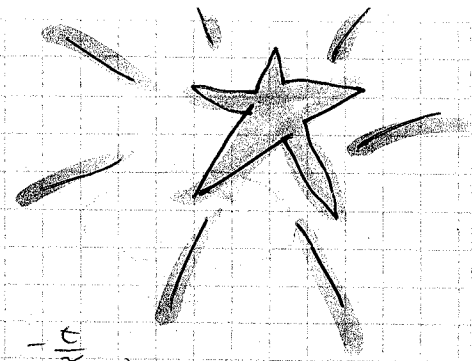
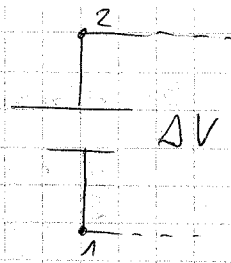
sol. →

$$I(t) = \frac{\Delta V}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\tau = L/R$$



$q \Delta V$ è il lavoro impiegato dal generatore a portare q da 1 a 2



$$W_G = I \cdot \Delta V = \Delta V \cdot \frac{\Delta V}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) =$$

$$= \frac{(\Delta V)^2}{R} - \frac{(\Delta V)^2}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

↑
potenza in situazione stazionaria

↑
termine di estropotenza

Esplicitiamo ΔV al posto di I

$$W_G = I \cdot \left[L \frac{dI}{dt} + RI \right] = RI^2 + LI \frac{dI}{dt}$$

↑
potenza dissipata
+ effetto joule
sullo resistenza
(W_J)

↑
extra-termini
forniti solo
nel transitorio

$$I_{\text{stazionario}} = \frac{\Delta V}{R}$$

$$LI \frac{dI}{dt} = \frac{1}{2} L \frac{d}{dt} [I^2]$$

Energia fornita dal generatore fino all'istante t :

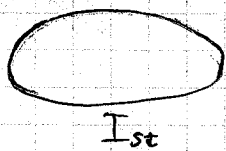
$$E_G = \int_0^t W_G dt = \int_0^t W_J dt + \frac{1}{2} L \int_0^t \frac{d}{dt} [I^2] dt =$$

$$= E_J + \frac{1}{2} L \cdot I^2(t)$$

↑
en. dissip.
per eff. joule

Per $t \rightarrow \infty$: $E_G \rightarrow E_J + \frac{1}{2} L \left(\frac{\Delta V}{R}\right)^2$
(sol. stazionario)

Si dimostra che:



$$\frac{1}{2} L I^2 = \int_{\infty} \frac{B^2}{2\mu} d\tau = U_B \quad (\text{en. magnetico})$$

(integrale di volume su tutto lo spazio)

È l'equivalente magnetico di:

$$\frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \int_{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dt = U_E \quad (\text{energia elettrostatica})$$

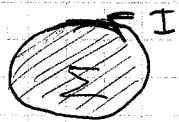
U_B = energia spesa per costruire una corrente I / densità di en. magnetica:

$$\frac{dU_B}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

densità elettrostatica:

$$\frac{dU_E}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

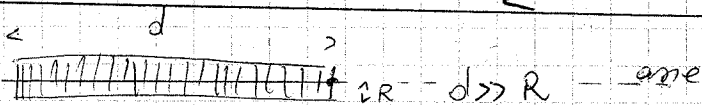
L = coefficiente di autoinduzione



$$\oint_{\Sigma} \underline{B} \cdot \hat{n} d\Sigma = L \cdot I$$

conoscendo I si ricava L

$$\oint_{\Sigma} \underline{B} \cdot \hat{n} d\Sigma$$



solenoido molto lungo

se \underline{B} è omogeneo sull'asse lo è su tutta la spira

$$B = \mu_0 n I \quad (n = \frac{N}{d})$$

torcendo ad una singola spira:

$$\oint_{\Sigma} \underline{B} = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot \pi R^2$$

flusso concatenato all'interno solenoide:

$$\oint_{\Sigma} \underline{B} = \mu_0 n I \pi R^2 N = \mu_0 n^2 I (\pi R^2 d)$$

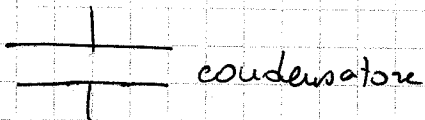
$$= \mu_0 n^2 I^2 V \Rightarrow L = \mu_0 n^2 V$$

(V = volume occupato dal solenoide)

$$L = \mu_0 \cdot \pi R^2 n^2 = \mu_0 \pi R^2 \frac{N^2}{d^2}$$

- In un condensatore il campo elettrico $\vec{E} \neq 0$ solo all'interno
- In un solenoide il campo magnetico $\vec{B} \neq 0$ solo all'interno

(questo vale per casi idealmente infiniti)



condensatore

MIN resistenza



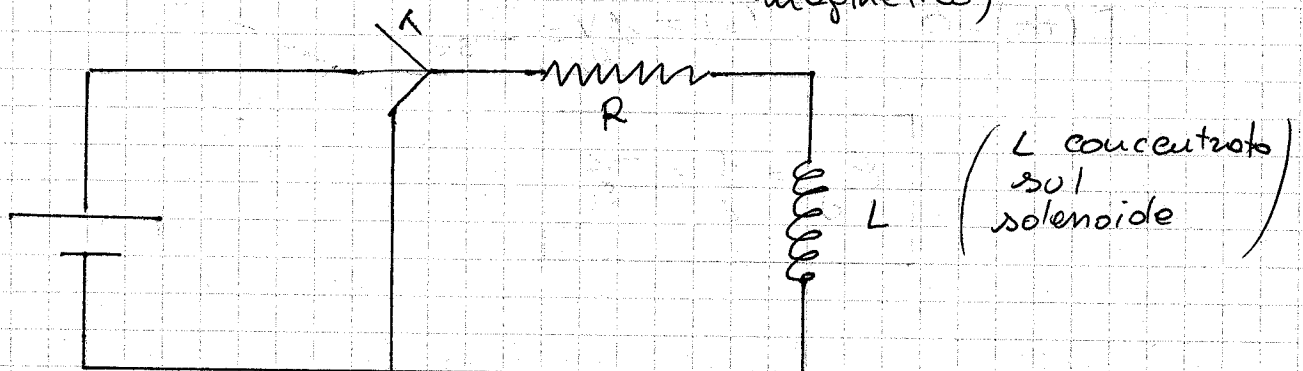
generatore

solenoide

$$\frac{B^2}{2\mu_0} \cdot V = \frac{\mu_0^2 n^2 I^2}{2\mu_0} \cdot V = \frac{1}{2} L I^2 \quad \text{c.v.d.}$$

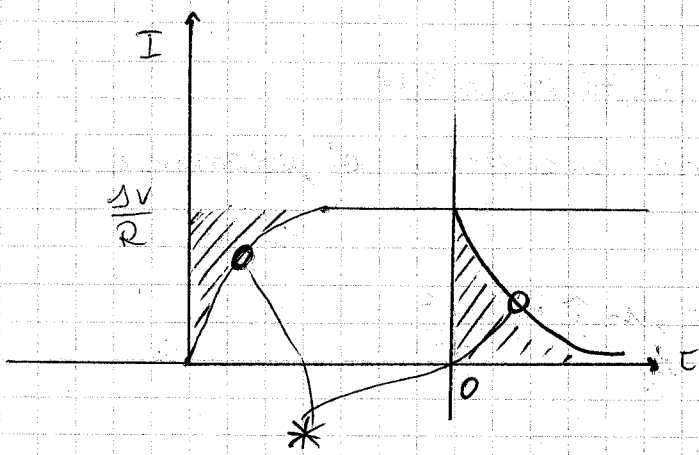
(energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico)

interr. a 3 vie



$t=0 \Rightarrow$ chiudo interruttore

$t=0 \Rightarrow$ generatore escluso dal circuito (circuito LR)



$$I(t) = \frac{\Delta V}{R} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

$$RI + L \frac{dI}{dt} = 0 \quad I(0) = I_{st} = \frac{\Delta V}{R}$$

(eq. omog. a coeff. costanti:
di 1° ordine)

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{I}{\tau} \Rightarrow I(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$A = I_{st} = \frac{\Delta V}{R}$$

$$I(t) = \frac{\Delta V}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$* = \frac{\Delta V}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A questo punto, l'eu. dissipata per effetto Joule sulla resistenza è:

$$\int_0^{+\infty} W_J dt = \int_0^{+\infty} I^2 R dt = E_J$$

$$RI + L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow E_J = \int_0^{+\infty} I \cdot \left(-L \frac{dI}{dt} \right) dt = -\frac{L}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (I^2) dt$$

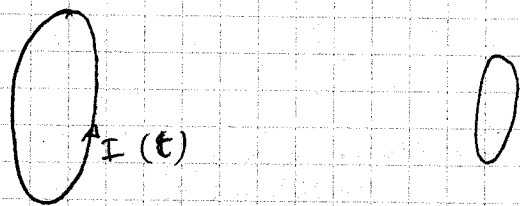
$$E_J = -\frac{1}{2} L I^2 \Big|_0^{+\infty} \quad I^2 = I^2(t)$$

$$I(+\infty) = 0 \quad I(0) = \frac{\Delta V}{R} = I_{st}$$

$$E_J = \frac{1}{2} L I_{st}^2$$

L = coeff. di autoinduzione = induttanza

$$\mathcal{E}_i = \oint \underline{E} \cdot d\underline{e} = -\frac{d}{dt} \oint_{\Sigma} (\underline{B})$$



$$\underline{E}_L = q \underline{v} \times \underline{B}$$

$$\underline{E}_L = \underline{v} \times \underline{B}$$

\underline{v} = velocità con cui si muovono gli elementi del secondo circuito

\underline{B} = generato dal primo

$$\underline{I} \rightarrow \underline{I}(t)$$

$$\underline{B} \rightarrow \underline{B}(t)$$

Se i due circuiti sono fermi viene a mancare il campo di Lorentz

→ si usa il teorema di Stokes

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

Terza equazione di Maxwell

$$\oint_{\Sigma} (\underline{E}) = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \rightarrow \underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1^\circ)$$

$$\oint \underline{E} \cdot d\underline{e} = -\frac{d}{dt} \oint_{\Sigma} (\underline{B}) \rightarrow \underline{\nabla} \cdot \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (3^\circ)$$

$$\oint_{\Sigma} (\underline{B}) = 0 \quad (\Sigma \text{ chiusa}) \rightarrow \underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 \quad (2^\circ)$$

legge di Ampère:

basto prendere l'espressione di Laplace

$$\oint \underline{B} \cdot d\underline{e} = \mu_0 N I + ?$$

13/1/2009

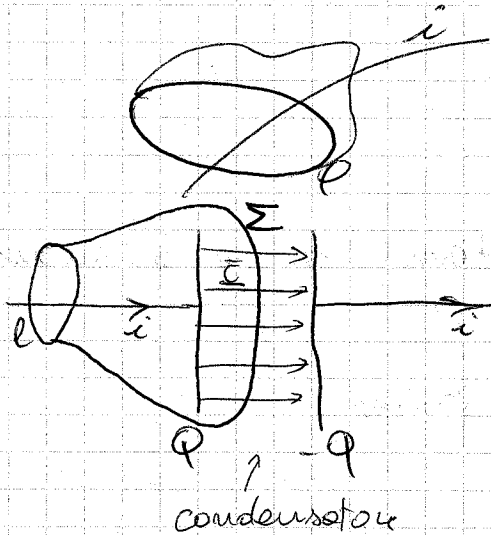
$$1) \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

$$2) \oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \phi_{\Sigma}(\vec{B}) \quad (\sigma = 0 \text{ in elettrostatica!!})$$

$$3) \phi_{\Sigma}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{non esiste il monopolo magnetico})$$

$$4) \oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot i \quad (i \text{ è la corrente concatenata ad } \ell)$$

(i passa attraverso qualsiasi superficie Σ che si appoggi al circuito ℓ)



la corrente attraverso QUESTA Σ è 0

In questo caso: $i = \frac{dQ}{dt}$

$$Q = \sigma \cdot S$$

$$\Rightarrow i = S \frac{d\sigma}{dt}$$

$$E = \sigma / \epsilon_0$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \Rightarrow i = \epsilon_0 S \frac{dE}{dt}$$

All'esterno del condensatore $E = 0$

$$\phi_{\Sigma}(\vec{E}) = E \cdot S \Rightarrow i = \epsilon_0 \cdot \frac{d}{dt} \phi_{\Sigma}(\vec{E})$$

$$i_T = i + i_d$$

↑ ↑
 cor. totale cor. di spostamento

$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot i_T$$

Se Σ non interseca ℓ , $i_T = i_d$

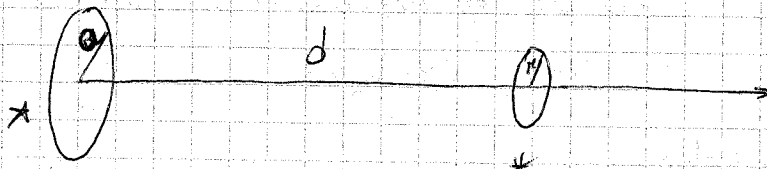
Se Σ non contiene il condensatore, $i_T = i$

$$\oint \underline{B} \cdot d\underline{\ell} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint \underline{E} \cdot d\underline{\ell}$$

$$\oint \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = - \frac{d}{dt} \oint \underline{B} \cdot d\underline{\ell}$$

Campi elettrici e magnetici che variano nel tempo si accoppiano.

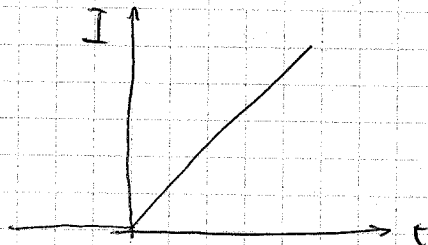
ESERCIZI TIPO ESAME



$$a \ll d \quad a > r$$

$$* R = 2 \Omega, L = 1 \text{ mH}, i$$

$$* I(t) \quad I \uparrow \quad I(t) = \alpha t$$



Le due spire sono fissate. Riportare in un grafico la forza che viene esercitata sulla spira piccola.

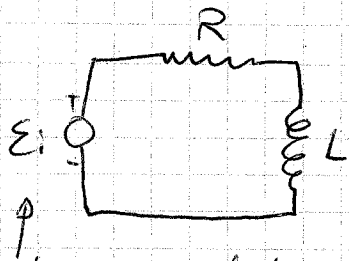
$$|\underline{m}| = i \cdot S$$

$$U_{\text{int}} = - \underline{m} \cdot \underline{B} = - m B$$

$$F_z = - \frac{\partial U_{\text{int}}}{\partial z} = m \frac{\partial B}{\partial z} \Big|_{z=d}$$

$$B(z) = \frac{\mu_0}{z} \cdot I(t) \cdot \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} \Big|_{z=d} \approx \frac{B}{R} \cdot I(t)$$



↑ induzione elettromagnetica

Spira piccola \Rightarrow campo B assunto uniforme

$$\Downarrow$$

$$\text{flusso} = B \cdot S$$

$$\mathcal{E}_i = \frac{d}{dt} \phi = -S \frac{\partial B}{\partial t}, \quad B = \frac{\mu_0}{2} \frac{a^2}{(a^2 + d^2)^{3/2}} I(t)$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha$$

cost. nel tempo

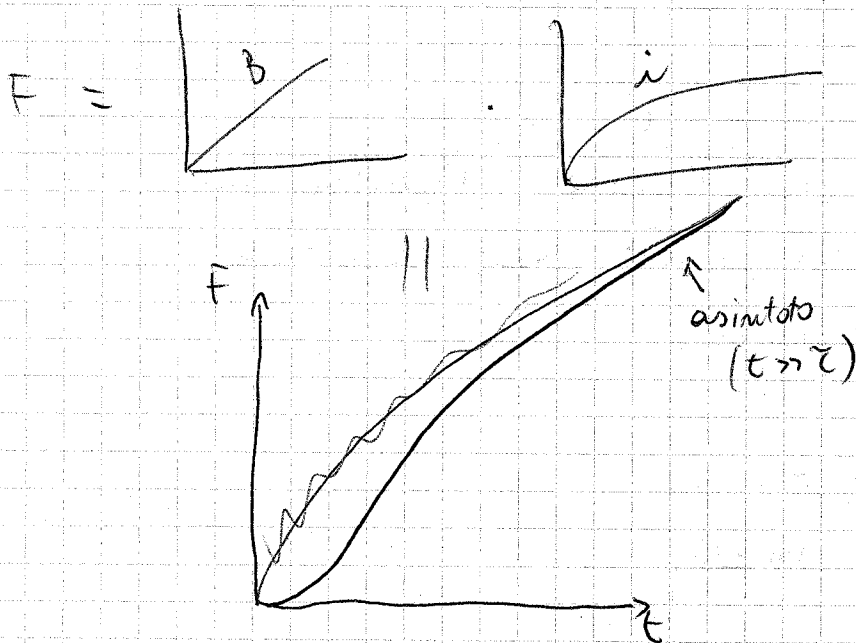
$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mu_0 a^2}{2 (a^2 + d^2)^{3/2}} \alpha$$

f.e.m. è costante
perché ϕ varia linearmente
nel tempo.

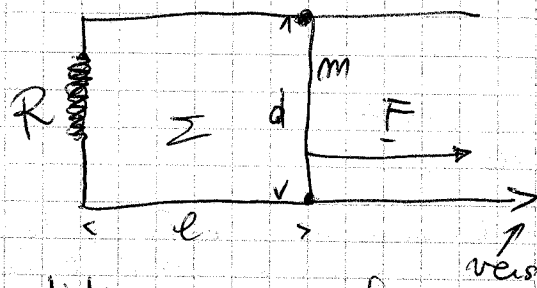
(Eq. per una maglia:)

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R i = \mathcal{E}_i$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_i}{R} \cdot (1 - e^{-t/\tau}), \quad \tau = L/R$$



se t è piccolo $i(t) \approx \frac{\mathcal{E}_i}{R} \frac{t}{\tau}$



$\odot B$

\Rightarrow senso di circolazione positivo

Applichiamo una forza costante F alla sbarretta
 Descrivere il moto della sbarretta e $i(t)$.

Sbarretta si muove $\Rightarrow \Sigma$ cambia $\Rightarrow \phi_z(B)$ varia nel tempo
 Inizia a circolare corrente \Rightarrow forza di Laplace sulla sbarretta

$$\phi_z(B) = B \cdot l(t) \cdot d$$

Formula induzione elettromagnetica:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}(\phi(B)) = -\frac{d}{dt}(B \cdot l \cdot d) = -Bd \frac{dl}{dt}$$

$$\frac{dl}{dt} = v \quad (\text{della sbarretta})$$

$$\mathcal{E}_i = -vBd$$

$\mathcal{E}_i \Rightarrow$ aumento di corrente (legge di Ohm)

$$\Rightarrow \boxed{i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{vBd}{R}}$$

(se v è positivo la corrente scorre in senso orario)

Interpretazione fisica della legge di Lenz

\Rightarrow la corrente circola in modo da opporsi a F , infatti la forza di Laplace si oppone a F .

$$F_L = f_i \cdot dl \times B = i dB$$

limph. sterna.

$$\boxed{F_L = -\frac{v \cdot B^2 \cdot d^2}{R}}$$

$$(F + F_c) = m a$$

$$F - v \frac{B^2 d^2}{R} = m a = m \frac{dv}{dt} = m \ddot{v}$$

$$m \ddot{v} + \frac{B^2 d^2}{R} v = F \quad \text{eq. lineare a coeff. costanti non omogenea con termine forzante costante.}$$

Condizione iniziale: $v(0) = 0$

$$\ddot{v} + \frac{B^2 d^2}{mR} v = \frac{F}{m} \quad \tau := \frac{mR}{B^2 d^2} \quad \tau \text{ è un tempo}$$

$$\ddot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{F}{m} \quad \frac{F}{m} \text{ è un'accelerazione}$$

soluz = sol omog. + sol particolare

$$\text{sol particolare: } v \text{ costante} \Rightarrow v_p(t) = \frac{F\tau}{m}$$

$$\text{sol omogenea: } \frac{F}{m} = 0$$

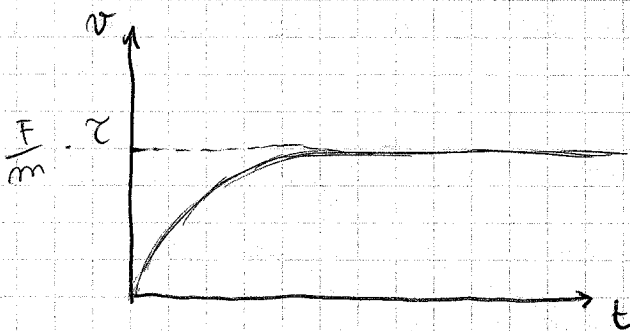
$$\dot{v} = -\frac{v}{\tau} \quad \left(\text{lu } v = -\frac{1}{\tau} \right) \quad v_{\text{om}} = e^{-t/\tau} \cdot A \quad (A \text{ è una vel.})$$

$$v(t) = v_p + v_{\text{om}} = \frac{F\tau}{m} + A e^{-t/\tau}$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow A = -\frac{F\tau}{m}$$

$$v(t) = \frac{F\tau}{m} (1 - e^{-t/\tau})$$

F_c si comporta come una forza d'attrito



Soluzione stazionaria: $t \gg \tau$

$$v_{\text{st}} = \frac{F}{m} \tau = \frac{F}{m} \cdot \frac{mR}{B^2 d^2} = \frac{FR}{B^2 d^2}$$

i ha lo stesso andamento di v

$$i_{\text{st}} = \frac{Bd}{R} \cdot \frac{FR}{B^2 d^2} = \frac{F}{Bd} = \frac{Bd}{R} v_{\text{st}}$$

$$\Rightarrow \text{nel caso stazionario } |F_c| = F = iBd$$

(e questo punto è meglio assumere positivo il senso orario di circolazione)

Il punto di applicazione di F si muove

\Rightarrow F compie lavoro. Dove finisce questo lavoro? \Rightarrow Variazione di energia cinetica data dal lavoro compiuto dalla risultante delle forze.

Ma il lavoro compiuto solo da F ?

In parte aumento l'eu. cinetica,

In parte viene dissipato come calore nella resistenza.

Potenza: $W = \frac{dL}{dt}$ $L = F \cdot \Delta x$

$\Rightarrow W = F \cdot v$

$T = E_k = \frac{1}{2} m v^2$, $\dot{T} = \frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m a v$

$F \cdot v = m v a + i^2 R$ (conservazione dell'energia)

$F \cdot v = F \cdot \frac{F}{m} \tau (1 - e^{-t/\tau})$

$a = \dot{v} = \frac{F}{m} \delta e^{-\frac{t}{\tau}}$

$m \frac{F}{m} \tau (1 - e^{-t/\tau}) \cdot \frac{F}{m} e^{-\frac{t}{\tau}} + i^2 R$

$= \frac{F^2}{m} \tau (e^{-t/\tau} - e^{-2t/\tau}) + \frac{B^2 d^2 F^2 \tau^2}{m} (1 - e^{-t/\tau})^2$

$\tau = \frac{m R}{B^2 d^2}$

$\left[\frac{F}{B d} (1 - e^{-t/\tau}) \right]^2 \cdot R$

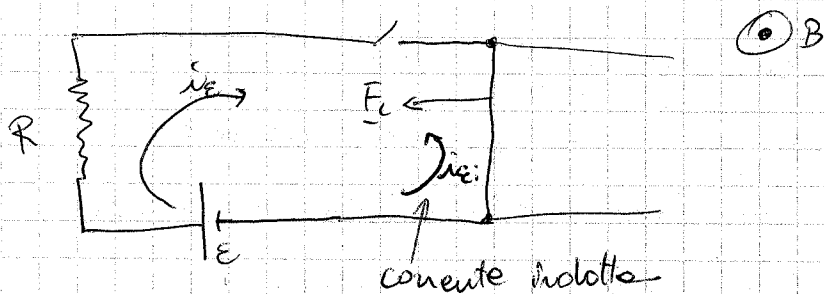
$\frac{F^2 R}{B^2 d^2} (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{F^2 R}{B^2 d^2} (e^{-t/\tau} - e^{-2t/\tau}) + \frac{F^2 R}{B^2 d^2} (1 - e^{-t/\tau})^2$

$(1 - e^{-t/\tau})^2 = 1 + e^{-2t/\tau} - 2e^{-t/\tau}$

$\Rightarrow 0 = 0$

Questa è la forma più semplice di generatore elettrico: il lavoro meccanico viene trasformato in energia elettrica.

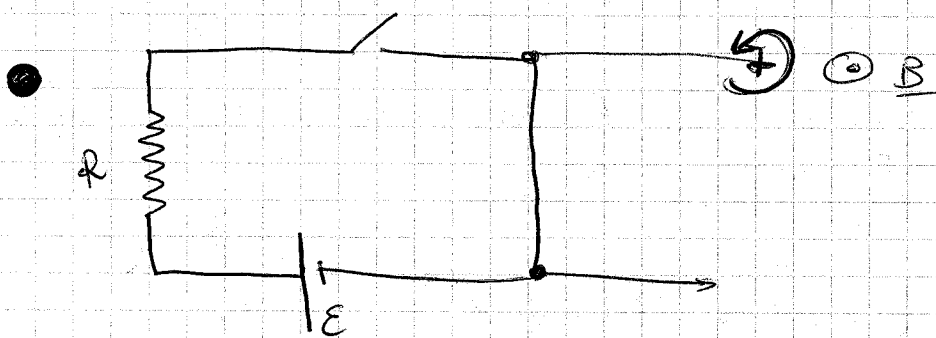
Il motore elettrico si fa il contrario.



Questo è un motore elettrico. La F_c determina lo spostamento della sbarretta (in questo caso verso sinistra). $\phi(B)$ diminuisce $\Rightarrow \mathcal{E}_i$ si deve opporre al generatore

$$E + \mathcal{E}_i = R i$$

$$i = i_e + i_{e_i} \quad i_e = \frac{E}{R} \quad i_{e_i} = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$$



$$\phi_z(B) = B \cdot S = B l d$$

$$\frac{d\phi_z(B)}{dt} = B d v = -\mathcal{E}_i$$

$$\mathcal{E}_i = -B d v \quad -E - B d v = R \cdot I$$

(legge che accoppia I a v)

$$F_c = ? \quad F_c = I d B$$

$$\text{In questo caso } F_{\text{tot}} = F_c = m a = m \frac{dv}{dt} = m v \dot{v}$$

$$\begin{cases} -E - B d v = R I \\ I d B = m v \dot{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -E - B d v = \frac{R m v \dot{v}}{d B} \\ I = m v \dot{v} / d B \end{cases}$$

Di nuovo una eq. diff.

$$\frac{R m}{d B} \dot{v} + B d v = E$$

$$\dot{v} + \frac{B^2 d^2}{R m} v = \frac{E d B}{R m}$$

$$\tau := \frac{mR}{B^2 d^2} \quad A := -\frac{\varepsilon B d}{mR}$$

$$\dot{v} = -\frac{v}{\tau} + A \quad \dot{v} - \frac{1}{\tau} v = A$$

$$v_p(t) = A \cdot \tau$$

$$v(t) = B e^{-t/\tau} + A \tau$$

$$v(0) = 0$$

$$\Rightarrow v(t) = A \tau (1 - e^{-t/\tau})$$

$$A \cdot \tau = \frac{mR}{B^2 d^2} \cdot \left(-\frac{\varepsilon B d}{mR} \right)$$

$$\Rightarrow v(t) = -\frac{\varepsilon}{B d} (1 - e^{-t/\tau})$$

Il segno - indica che lo stametto si muove verso sinistra (a velocità costante per $t \gg \tau$)

$$v \text{ costante} \Rightarrow F_e = 0 = I B d$$

$$v_{sc} \Rightarrow I = 0 \Leftrightarrow I_e = -I_i$$

$$\mathcal{E} = -\mathcal{E}_i$$

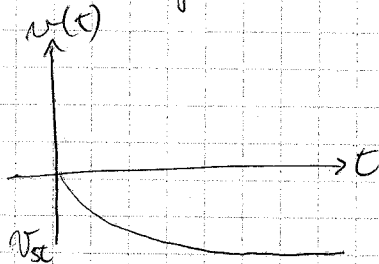
In condizioni stazionarie si ha infatti:

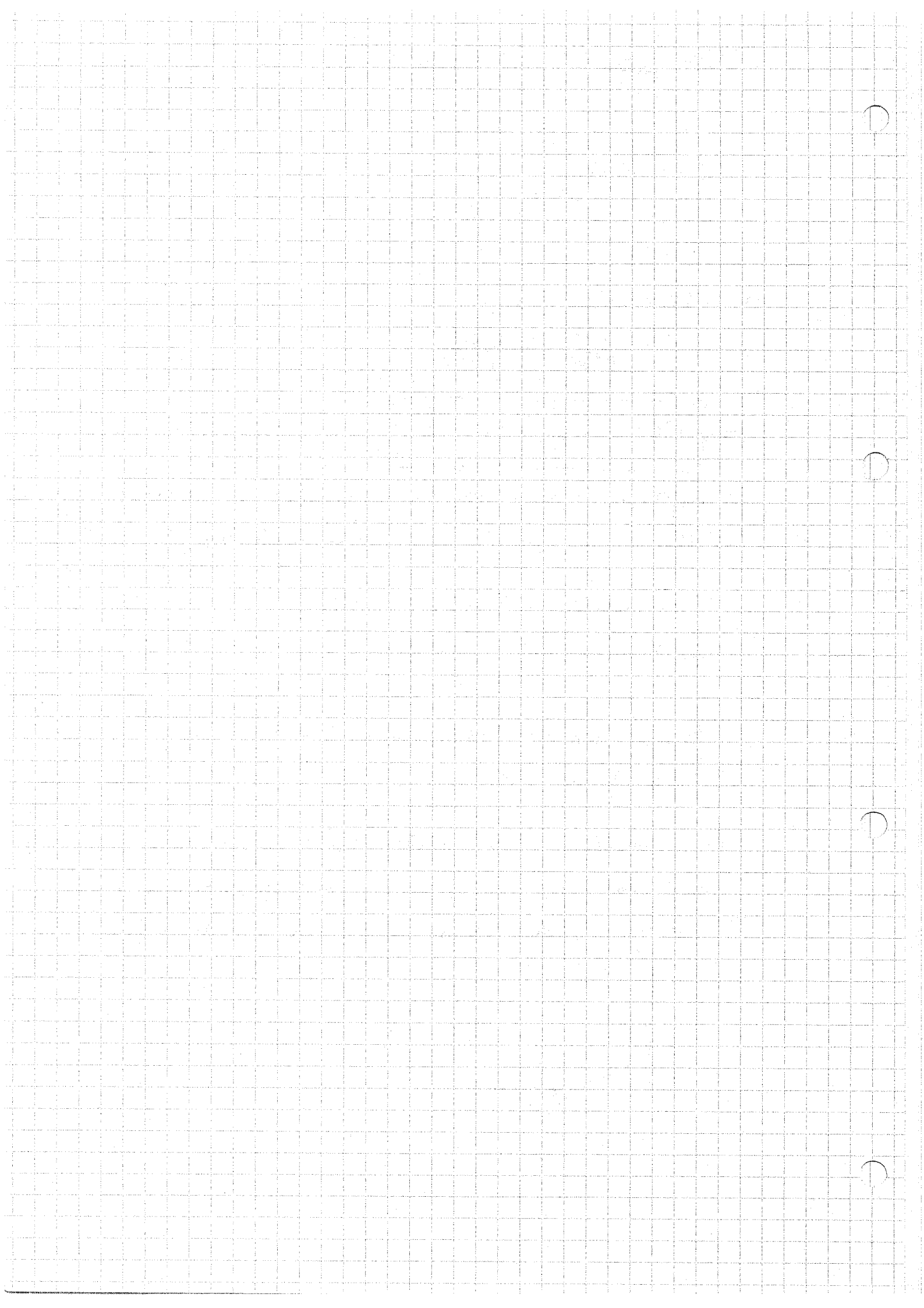
$$\mathcal{E}_i = B d v_{sc} = -\mathcal{E}$$

Lo stametto ha acquistato energia cinetica -

Parte del lavoro fornito dal generatore

si è dissipato sulla resistenza. Verifichiamo

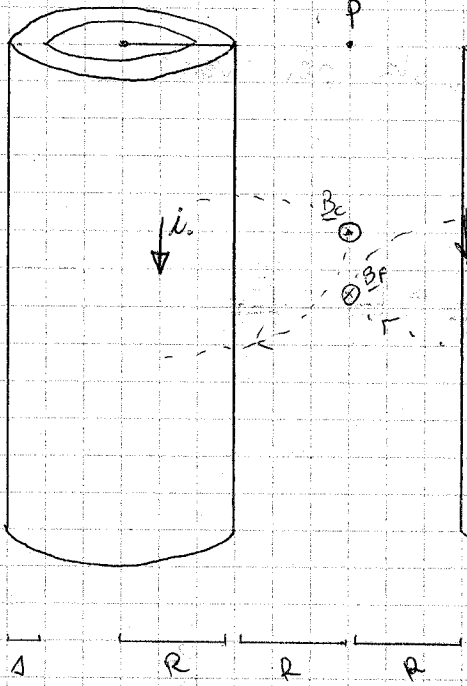




16/01/2009

Cilindro cavo

filo



$$\underline{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

$$B_c = \frac{\mu_0 i_c}{4\pi R}$$

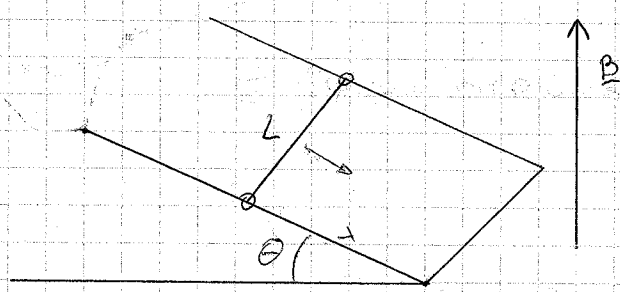
$$B_f = \frac{\mu_0 i_f}{2\pi R}$$

$$B_c + B_f = 0 \Leftrightarrow i = -\frac{i_0}{2}$$

(Si voleva trovare i : $B_{tot} = 0$ in P)

$$r < R - \Delta \Rightarrow \oint \underline{B} \cdot d\underline{\ell} = \mu_0 i = 0 \Rightarrow \underline{B} = 0$$

$$R - \Delta < r < R$$



m, L, R

$F_p = mg \sin \theta$ (componente della forza peso alla guida)

$$\underline{F}_L = i \int d\underline{\ell} \times \underline{B}$$

Ce ne interessa una sola componente:

$$F_c = iL B \cos \theta$$

(si muove a forza risultante nulla)

$$|\mathcal{E}| = + \frac{d\Phi(B)}{dt} = B \frac{dS}{dt} = \cancel{BL \frac{dx}{dt}}$$

$$\Phi(B) = \int \underline{B} \cdot \underline{\hat{n}} d\Sigma = (B \cdot \underline{\hat{n}}) \Sigma$$

$$= \frac{d}{dt} (B \cos \theta L x) = BL \cos \theta \frac{dx}{dt} = BL \cos \theta \dot{x} = \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow i = BL \dot{x} \cos \theta / R \quad \cancel{BL \dot{x} \cos \theta} - mg \sin \theta = 0$$

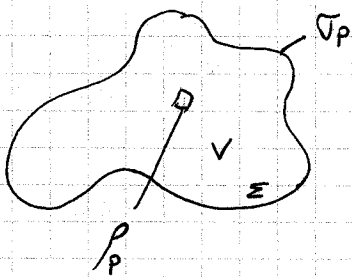
$$N = \frac{Rmg \sin \theta}{B^2 L^2 \cos^2 \theta}$$

$$\rho \longrightarrow \underline{E}$$

(le densità di carica provocano campo elettrico)

$$\rho_v \longrightarrow \underline{E}_0$$

v sta per "vera"



$$\underline{E} = \underline{E}_0 + \underline{E}_p$$

(dielettrico)

$$\rho_p, \nabla_p \longrightarrow \underline{E}_p$$

Polarizzazione macroscopica:



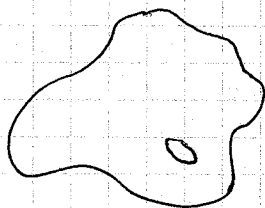
$$\underline{P} = \epsilon_0 \chi \underline{E}$$

$$\underline{P} = \frac{\sum_i P_i}{\Delta \tau}$$

Le molecole possono possedere \underline{P} proprio o \underline{P} indotto.

Le cariche in movimento generano correnti \underline{B}

$$i_v \longrightarrow \underline{B}_0$$



$$\underline{B} = \underline{B}_0 + \underline{B}_M$$

$$i_M \longrightarrow \underline{B}_M$$



correnti di magnetizzazione (atomiche)

In generale, se il dielettrico occupa tutta la regione dove c'è \underline{E} , si ha: $\underline{E} = \underline{E}_0 / \epsilon_r$

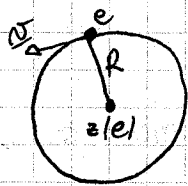
Analogamente: $\underline{B} = \mu_r \cdot \underline{B}_0$

Il contributo ai campi delle cariche di polarizzazione non è trascurabile.

Si osserva che μ_r può essere:

$$\mu_r \begin{cases} < 1, \approx 1 & \text{in materiali DIAMAGNETICI} \\ > 1, \approx 1 & \text{in materiali PARAMAGNETICI} \\ \gg 1 & \text{in materiali FERROMAGNETICI} \end{cases}$$

Ci sono anche materiali per i quali \underline{B}_M esiste anche in assenza di campo esterno (MAGNETI PERMANENTI).



elettrone su un'orbita circolare

Forza d'attrazione Coulombiana:

$$F = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad \text{è la } F \text{ centripeta}$$

che serve all'elettrone per ruotare in modo uniforme:

$$\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

tipicamente $R_n \approx n \cdot a_0$ $a_0 \approx 0.5 \text{ \AA}$

raggi delle orbite (quantizzate)

$$v^2 = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 mR}$$

$$v = \sqrt{\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 mR}} \cdot e$$

Momento angolare: $\underline{l} = \underline{r} \times m \underline{v} \Rightarrow \underline{l} \perp \underline{v}$,

$$l = m v R$$

$$i = \frac{|e|}{T}$$

T periodo di rotazione

$$T = \frac{2\pi R}{v} \Rightarrow i = \frac{|e| v}{2\pi R}$$

Momento magnetico $\underline{\mu} = S \cdot i \cdot \hat{n}$

[ω e v in senso antiorario, i è in senso orario]

$$\Rightarrow \underline{\mu} \otimes, \quad \mu = \pi R^2 i = \frac{\pi R}{2\pi} |e| v = \frac{R}{2} |e| v = \frac{|e| v R}{2}$$

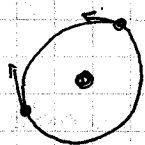
$$\Rightarrow \underline{\mu} = -\frac{|e|}{2m} \underline{l}$$

$$\underline{\mu} = \frac{e}{2m} \underline{l}$$

Il momento magnetico ed il momento angolare sono opposti. Questa relazione ha validità generale (anche in meccanica quantistica).

Atomo di elio:

(i due elettroni non si urtano)



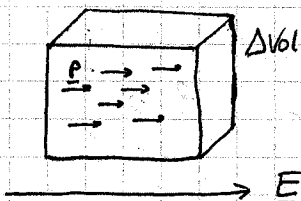
$$\underline{l}_{TOT} = \underline{m}_{TOT} = 0$$

(\underline{m} mom. magnetico)

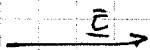
Ci sono molecole che hanno momenti magnetici propri e molecole che non lo hanno.

Un momento di dipolo el. immerso in un \underline{E} esterno riceve un momento di forza $\underline{\tau} = \underline{p} \times \underline{E}$

$$\Rightarrow \underline{p} \neq 0, \quad \underline{p} = \frac{\sum_i p_i}{\Delta V_{el}}$$



$$\underline{p} \propto \underline{E}$$



Per il principio di eq. di Ampère, un μ risente di un momento di forza $\underline{\tau} = \underline{\mu} \times \underline{B}$.

$$\underline{M} = \frac{\sum_i \mu_i}{\Delta Vol} \begin{cases} 0 & \text{se } \underline{B}^{(e)} = 0 \\ \neq 0 & \text{se } \underline{B}^{(e)} \neq 0 \end{cases}$$

\underline{M} vettore di magnetizzazione

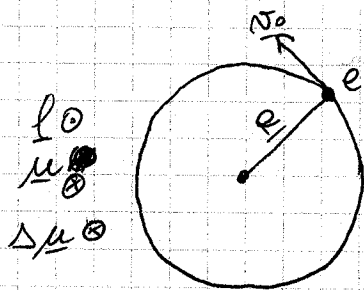
$$\underline{M} \propto \underline{B}$$

(magnetizzazione per orientamento)

\Rightarrow fenomeno del paramagnetismo:

$$\underline{\mu}_i \parallel \underline{B}$$

L'elio, che è diamagnetico, non risente dell'orientamento. Però si deforma l'orbita.



Assenza di campo \underline{B} .

$$\mu = \frac{|e|}{2m} \cdot e$$

$$\frac{z |e|^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{m v_0^2}{R}$$

Aggiungiamo un \underline{B} uscente dal foglio. $\underline{B} \odot$

Forza di Lorentz: $\underline{F}_L = e \underline{v} \times \underline{B}$

Anche questa è centripeta.

$$\Rightarrow \frac{m v^2}{R} = \frac{z |e|^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} + |e| v B$$

In realtà $R = R'$ per regioni quantistiche.

$$\frac{m v^2}{R} = \frac{m v_0^2}{R} + |e| v B$$

$$v = v_0 + \Delta v, \quad \Delta v \ll v_0$$

$$v^2 = v_0^2 + |e| (v_0 + \Delta v) B R / m$$

$$\cancel{v_0^2} + (\Delta v)^2 + 2v_0 \Delta v = \cancel{v_0^2} + |e| (v_0 + \Delta v) \frac{BR}{m}$$

$(\Delta v)^2$ trascurabile risp. a Δv e v_0 .

$$\Delta v = \frac{|e|}{2v_0} (v_0 + \Delta v) \frac{BR}{m} = \frac{|e|BR}{2mv_0} v_0 + \frac{|e|BR}{2v_0 m} \Delta v$$

$\frac{\Delta v}{v_0}$ trascurabile

$$\Rightarrow \Delta v = \frac{|e|BR}{2m}$$

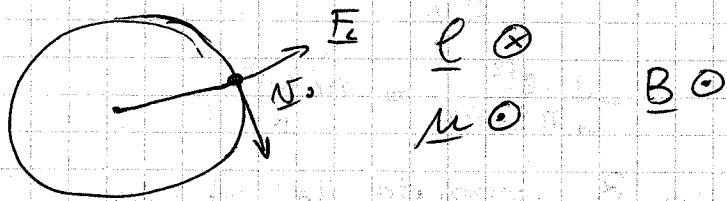
$$\Delta v > 0, \Delta v \propto B$$

Se aumenta \underline{v} , aumenta anche \underline{e}

$$\Delta v > 0 \Rightarrow \Delta e > 0 \Rightarrow \Delta \mu > 0 \quad (\text{in modulo})$$

$\underline{B} \odot \Rightarrow \underline{\mu} \otimes$ Il momento magnetico indotto ha verso opposto rispetto al campo magnetico. [fen. del diamagnetismo]

Che succede all'elettrome che ruota in direzione opposta?



$$\underline{F}_c = e \underline{v} \times \underline{B} \quad \text{centrifuga}$$

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{2|e|vB}{4\pi\epsilon_0 R^2} - |e|vB \Rightarrow \Delta v < 0 \quad v < v_0$$

$$\Rightarrow \Delta \underline{e} < 0, \Delta \underline{\mu} < 0 \quad \underline{\Delta \mu} \otimes \quad \text{come prima}$$

Entrambi gli elettroni producono una magnetizzazione che si oppone al campo magnetico.

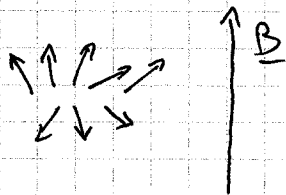
Paramagnetici \rightarrow M concorde B

Diamagnetici \rightarrow M discorde B

$$\underline{B} = \mu_r \cdot \underline{B}_0$$

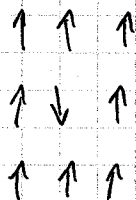
$$\mu_r \cdot \left. \begin{array}{l} > 1 \text{ paramagnetici} \\ < 1 \text{ diamagnetici} \end{array} \right\} \approx 1$$

I ferromagnetici hanno momento di dipolo proprio.

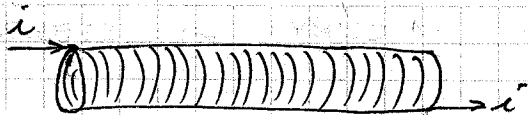


M concorde B

in realtà si ha:



$$B_M \gg B_0$$



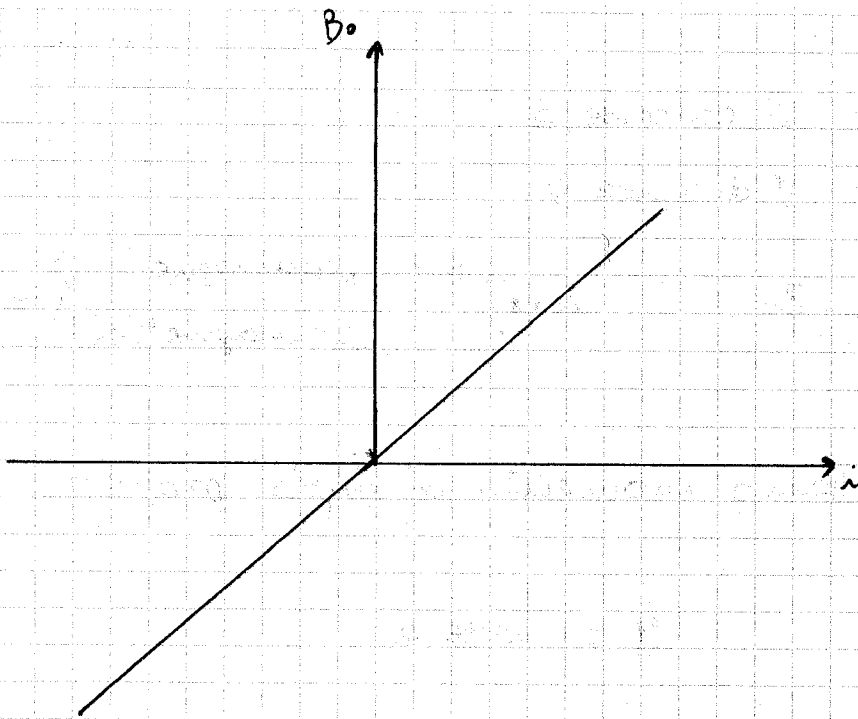
$$B_0 = \mu_0 \cdot n \cdot i$$

$$\underline{B} = \mu_r \underline{B}_0$$

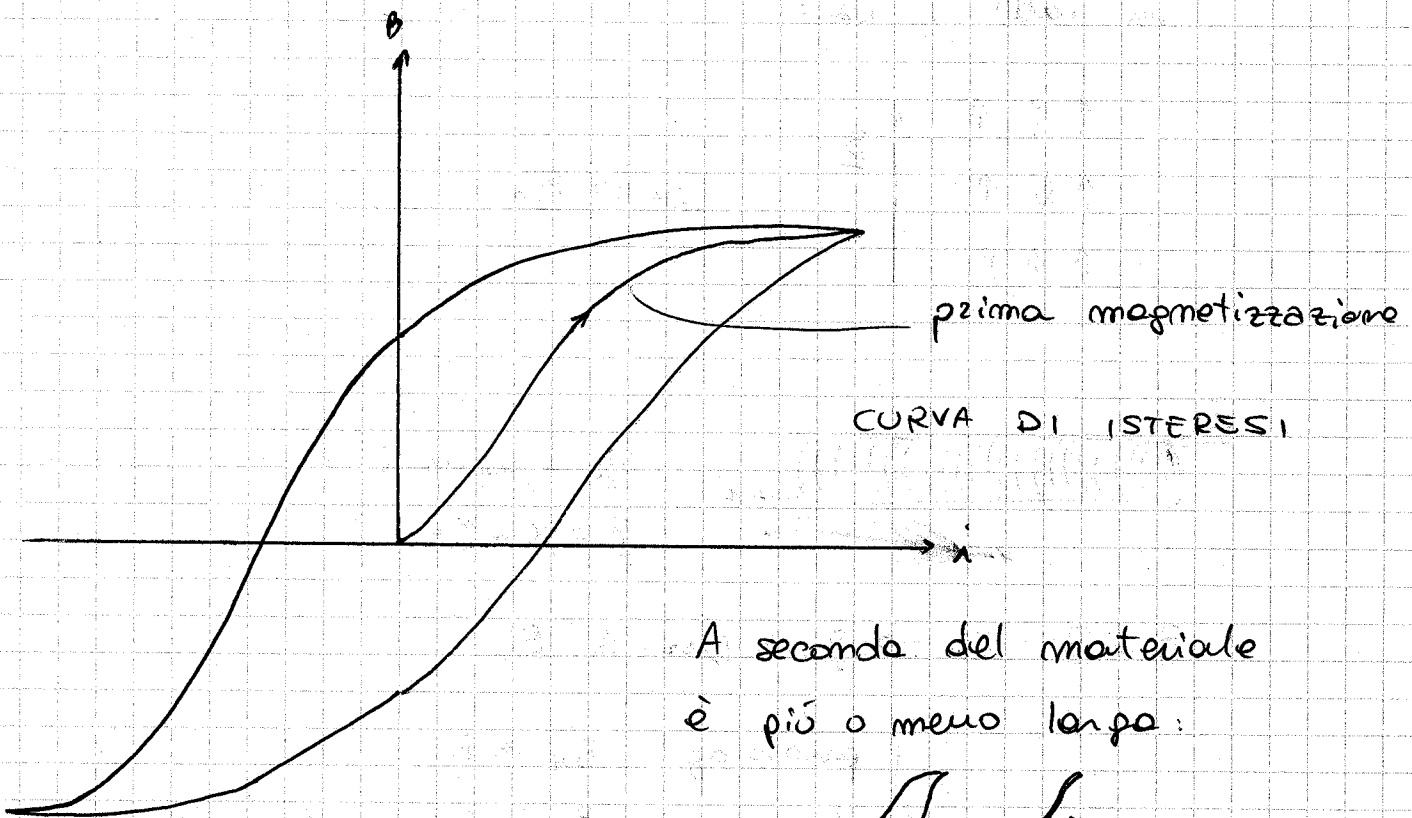
$$\underline{B} = \underline{B}_0 + B_M \Rightarrow \underline{B}_M = (\mu_r - 1) \underline{B}_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{para mag.} \quad B_M \ll B_0 \\ \text{diamo mag.} \quad B_M \ll B_0 \text{ e discorde} \\ \text{ferro mag.} \quad B_M \gg B_0 \\ \quad \quad \quad \sim 10^4 \end{array} \right.$$

I magneti permanenti mantengono B_M anche se si toglie i . Hanno una vita media



In realtà si osserva:



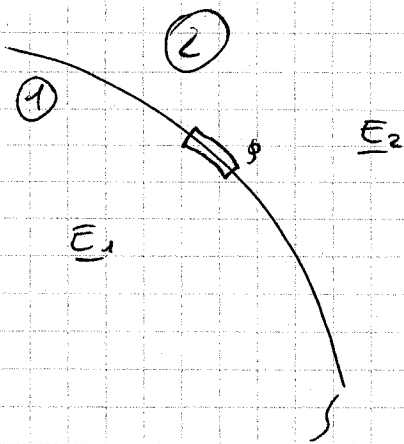
A seconda del materiale
è più o meno larga:



"ferro dolce"

$B = \mu_0 \mu_r m_i$ è una formula approssimata.

$$B = \mu_r(B) \mu_0 m_i$$

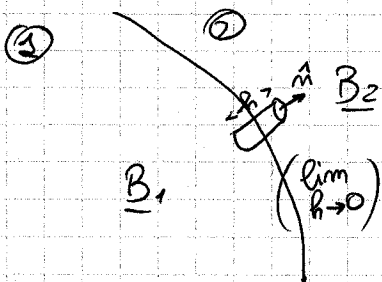


$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$\uparrow$$

$$\oint \underline{E} \cdot d\underline{l} = 0$$

sup. di separazione tra due dielettrici



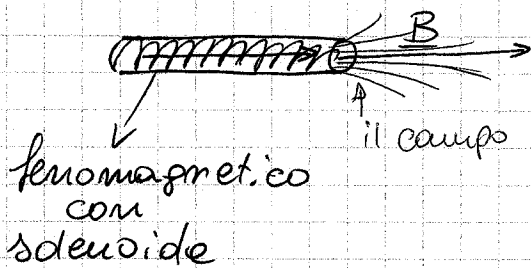
sup. sep. di 2 diamagnetici

Si conserva la componente NORMALE di \underline{B} .

$$\oint_{\Sigma} (\underline{B}) = 0 \implies B_{1n} = B_{2n}$$

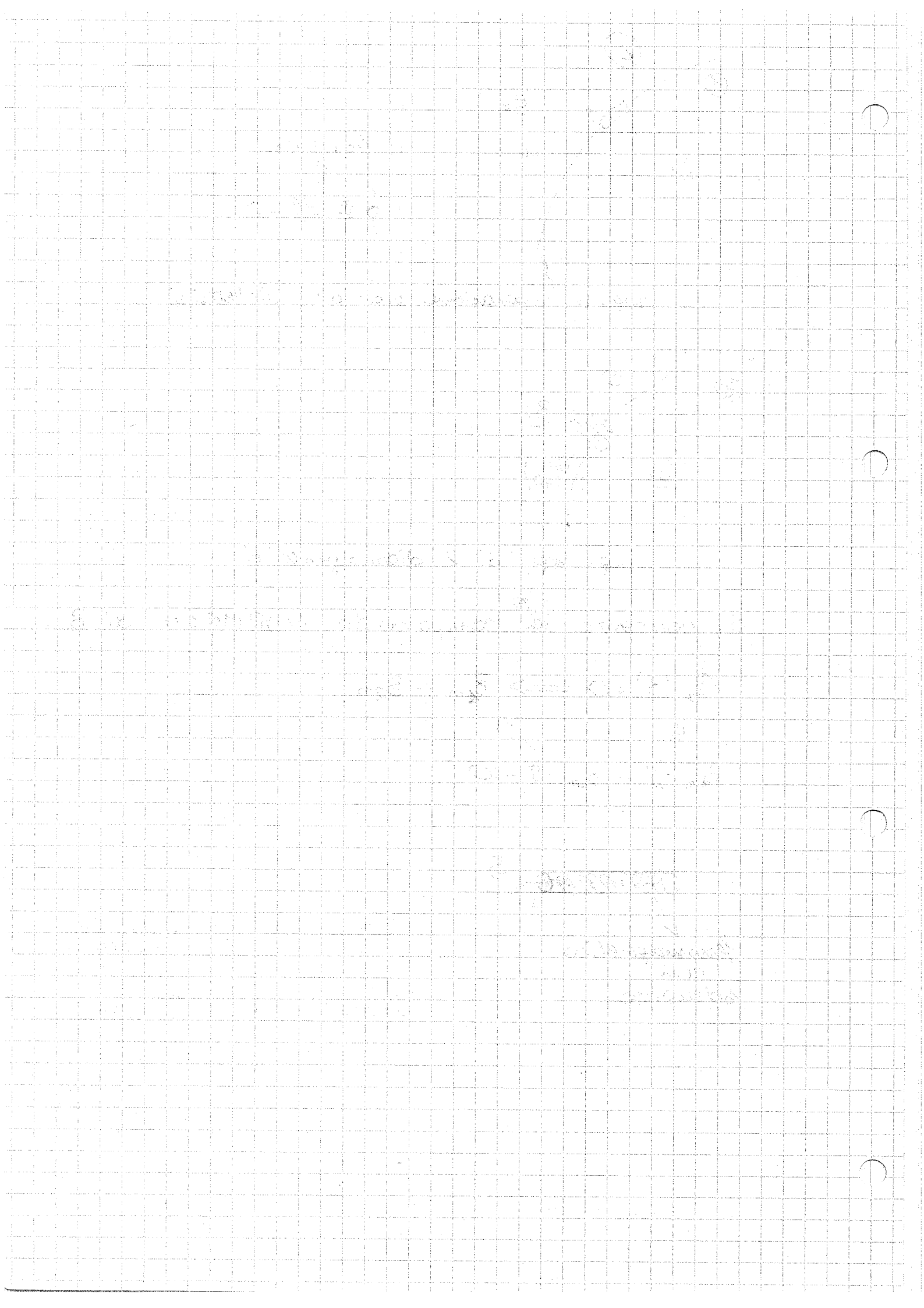
$$\parallel$$

$$B_{1n} \cdot S - B_{2n} \cdot S = 0$$



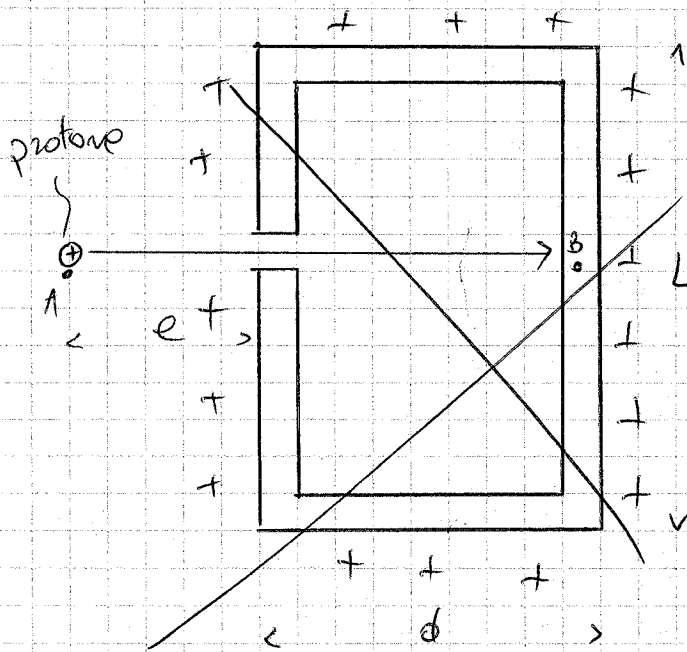
il campo all'esterno nelle vicinanze dell'oggetto è uguale a com'è all'interno.

↓
ELETROMAGNETI



20/01/2009

esercizio



lastra pioma conduttrice

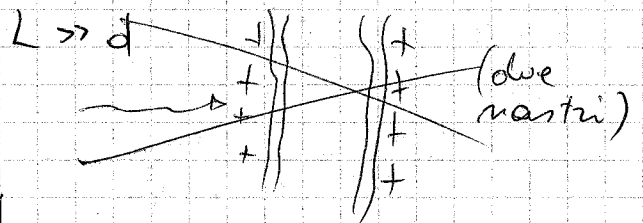
$$d = 0,5 \text{ m}$$

$$\sigma = 8,86 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}$$

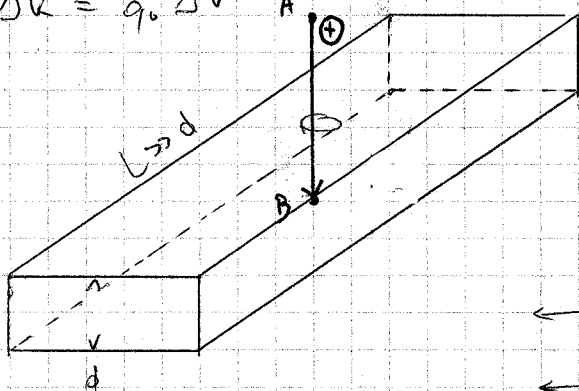
$$L = 0,2 \text{ m}$$

k min?

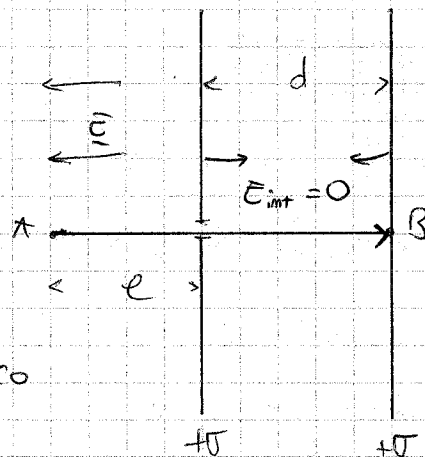
Il protone deve arrivare da A a B.



$$\Delta K = q \cdot \Delta V$$



è come avere due piomi carichi



ΔV tra A e B è
= al ΔV tra A e il buco

$$\text{All'esterno: } \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \ell \quad k = q \frac{\sigma}{\epsilon_0} \ell \quad [\text{eV}] \quad [\text{Joule}] \quad [\text{eV}]$$

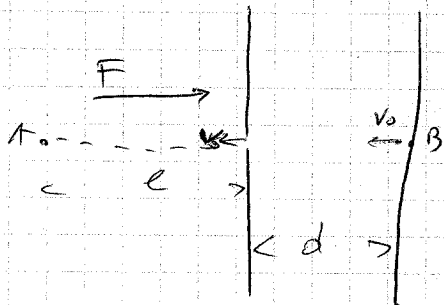
l'energia in eV è = alla ΔV : $E = |e| \cdot \Delta V$

$$E(\text{eV}) = \Delta V = \frac{8,86 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2 \cdot 0,2 \text{ m}}{8,86 \cdot 10^{-12}} = 2 \cdot 10^3 \text{ eV}$$

" 2 KeV

Quanto tempo ci mette ad arrivare da B ad A un elettrone con 2 keV?

Moto rettilineo uniforme dentro al conduttore, poi decelerato.



$$T_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2T}{m}}$$

$$\Delta t = \Delta t' + \Delta t'' = \frac{d}{v_0} + \Delta t''$$

$$l = v_0 \Delta t'' - \frac{1}{2} a (\Delta t'')^2 \quad a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{q\sigma}{m \epsilon_0}$$

$$l = v_0 \Delta t'' - \frac{1}{2} \frac{q\sigma}{m \epsilon_0} (\Delta t'')^2$$

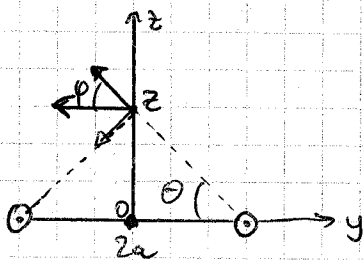
$$\frac{1}{2} a (\Delta t'')^2 - v_0 \Delta t'' + l = 0$$

$$\Delta t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2 \frac{q\sigma l}{m \epsilon_0}}}{\frac{q\sigma}{m \epsilon_0}}$$

$$a = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{l}$$

$$\Delta t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - v_0^2}}{\frac{q\sigma l}{m \epsilon_0}} = \frac{2l}{v_0}$$

due fili percorsi da corrente distanti $2a$.
calcolare \underline{B} sull'asse z .



$$\underline{B} = B_0 \cos \varphi \hat{j} \cdot 2 \cdot (-1)$$

$$= -2 B_0 \cos \varphi \hat{j}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\underline{B} = -2 B_0 \cos \theta \hat{j} \quad z = \sqrt{a^2 + z^2} \cos \theta \quad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

formula di B.S.: $B_0 = \frac{\mu_0 i}{2\pi \sqrt{a^2 + z^2}}$

$$\underline{B} = -\frac{\mu_0 i z}{\pi (a^2 + z^2)} \hat{j} \quad z=0 \Leftrightarrow \underline{B} = 0$$

Si mette un ago magnetico sull'asse z nella direzione del campo \underline{B}

Ago magnetico = dipolo magnetico

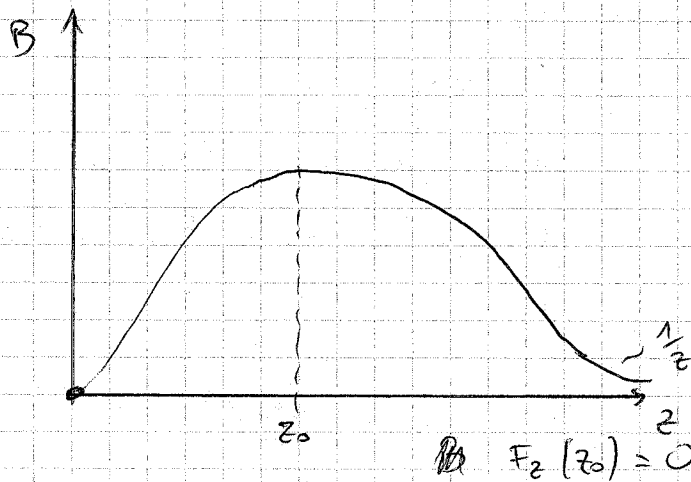
$$U_{int} = -\underline{m} \cdot \underline{B}$$

$$\underline{F} = -\underline{\nabla} U_{int} = \underline{\nabla} (\underline{m} \cdot \underline{B})$$

$$\underline{m} \parallel \underline{B} \Rightarrow \underline{m} \cdot \underline{B} = mB$$

$$F_z = \frac{\partial (mB)}{\partial z} \quad \text{Quando } F_z = 0?$$

$$\text{Quando } \frac{\partial B}{\partial z} = 0.$$

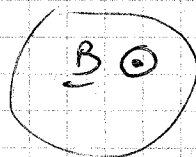
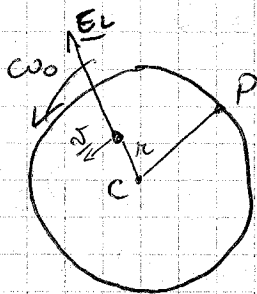


$$\underline{B} = \underline{B}_y = \underline{B}_y(z) = B_y(z) \hat{y}$$

teor. Rolle: $F_z \text{ max}$

$$m \frac{\partial B}{\partial z} \propto \frac{a^2 + z^2 - z^2}{(a^2 + z^2)} = 0 \Leftrightarrow z = \pm a$$

scoria
Disco conduttore \checkmark rotante in senso antiorario



$$\Delta V_{CP} = ? = V_p - V_c$$

$\underline{v} \times \underline{B}$ è radiale uscente

$$|\underline{E}_L| = vB$$

$$\underline{E}_L = \text{campo di Lorentz} = vB \hat{r}$$

$$\underline{F}_L = q \underline{v} \times \underline{B}$$

$$v = \omega_0 r = v(r)$$

$$\underline{E}_L = \omega_0 B r \hat{r} = \omega_0 B \underline{r}$$

Si crea un campo elettrostatico nel conduttore.

cond. statica: $\underline{E}_e = -\underline{E}_L$

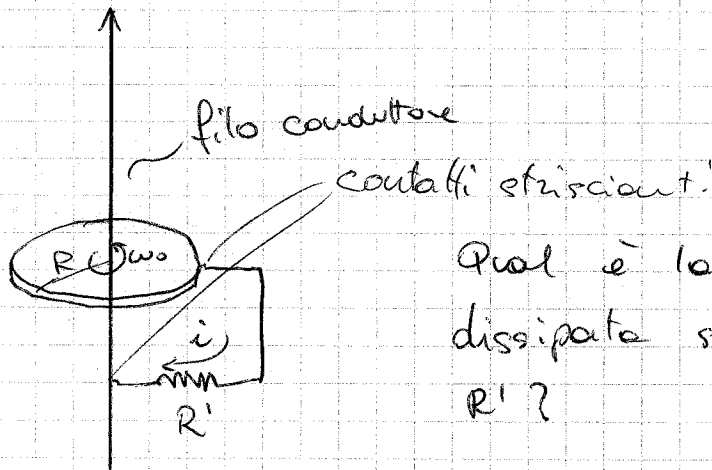
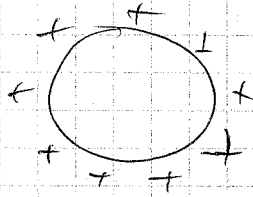
$$\underline{E}_e = -\omega_0 B \underline{r} \quad V_c - V_p = \int_C^P \underline{E}_e \cdot d\underline{e}$$

$$d\vec{l} = dr \cdot \hat{r}$$

$$\vec{E}_e \cdot d\vec{l} = -\omega_0 B r dr$$

$$\int_P^C \omega_0 B r dr = \omega_0 B \int_R^0 r dr = -\frac{\omega_0 B R^2}{2}$$

$$V(P) > V(C)$$



Qual è la potenza dissipata sulla resistenza R' ?

$$W = i^2 \cdot R'$$

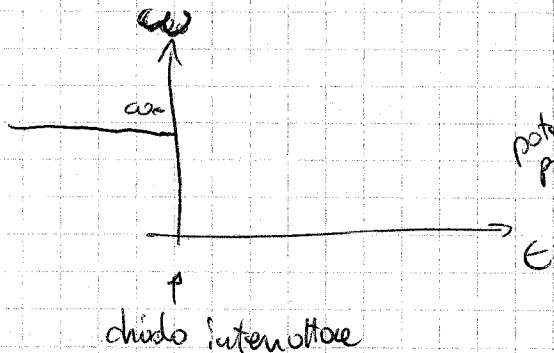
$$i = \frac{\omega_0 B R^2}{2R'}$$

$$i = \frac{\Delta V}{R'}$$

$$W = \frac{(\Delta V)^2}{R'}$$

$$T_0 = \frac{1}{2} I \omega_0^2 \leftarrow \text{si dissipa su } e'$$

frema magnetico. Se non metto il filo il disco continua a girare



$$T(t) = \frac{1}{2} I \omega^2(t)$$

$$i(t) = \omega(t) B R^2 / R'$$

potenza persa

$$\left| \frac{dT}{dt} \right| = |i^2 R'|$$

conservazione energia

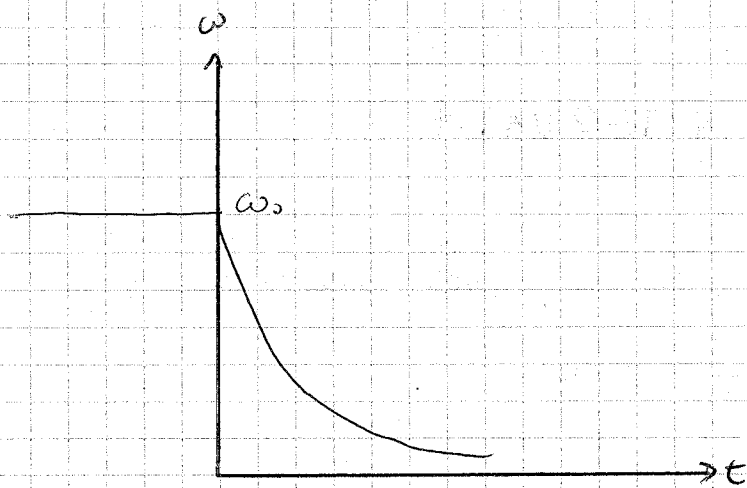
potenza dissipata

$$\frac{dT}{dt} = I \omega \dot{\omega} = -\omega^2 B^2 R^4 / 4R' \Rightarrow \dot{\omega} = -\alpha \omega$$

$$T(t) + E_J = \text{cost.}$$

$$\alpha = \frac{B^2 R^4}{4R' I}$$

$$\Rightarrow \omega(t) = \omega(0) e^{-\alpha t} = \omega_0 e^{-\alpha t}$$



$$L \propto B^2$$

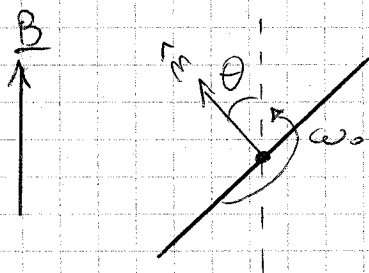
$$L \propto R^2$$



Spira rotante

ω_0, B costanti

θ angolo tra \hat{n} e \underline{B}



$$\Phi(B) = \int \underline{B} \cdot \hat{n}(t) d\Sigma = B \cdot |\hat{n}| \cdot \cos \theta \cdot \Sigma =$$

$$= B \Sigma \cos \theta$$

$$\theta(t) = \omega_0 t - \theta_0$$

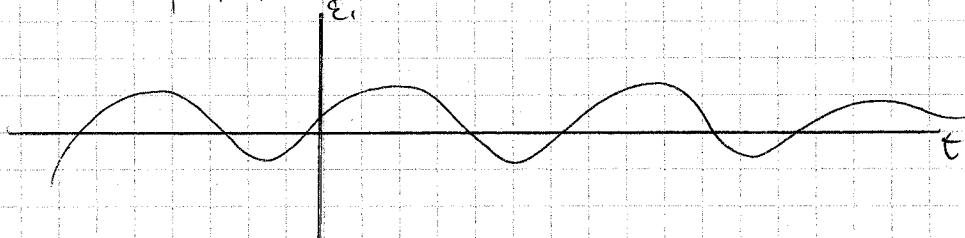
$$(\omega_0 = \dot{\theta})$$

↳ costante che si può togliere scegliendo il sis. di rif.

$$\Phi = \Phi_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$$

$$\Phi_0 = B \Sigma$$

$$\mathcal{E}_i = \left| \dot{\Phi} \right| = \omega_0 \Phi_0 \sin(\omega_0 t)$$



Se c'è una resistenza R_0 : $\boxed{\mathcal{E}i = iR}$

$$i = i_0 \sin(\omega_0 t) \quad i_0 = \frac{\omega_0 B \Sigma}{R_0}$$

\Rightarrow CORRENTE ALTERNATA

Cosa succede se c'è un coeff. di autoinduzione?

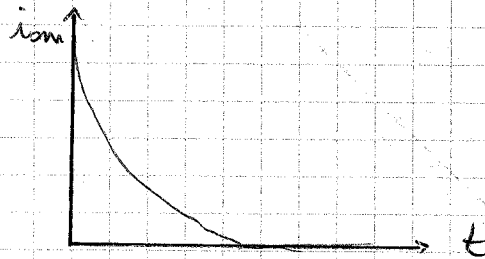
$$\sim \mathcal{L} \frac{di}{dt} + \mathcal{E}i = iR$$

(eq. diff. con termine forzante oscillante)

$$\mathcal{L} \frac{di}{dt} + Ri = \mathcal{E}_0 \sin(\omega_0 t) \quad \mathcal{E}_0 = \omega_0 B \Sigma$$

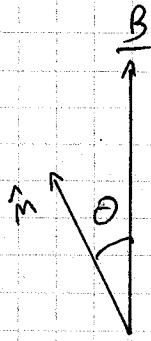
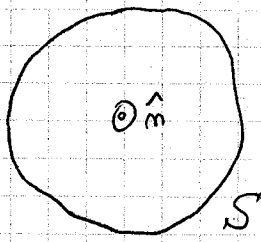
$$i = i_{\text{st}} + i_p$$

$$i \approx i_{\text{st}}$$



$$i + \frac{R}{\mathcal{L}} i = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{L}} \sin(\omega_0 t)$$

23/01/2009



$$\phi = \omega_0 B S \cos(\omega_0 t)$$

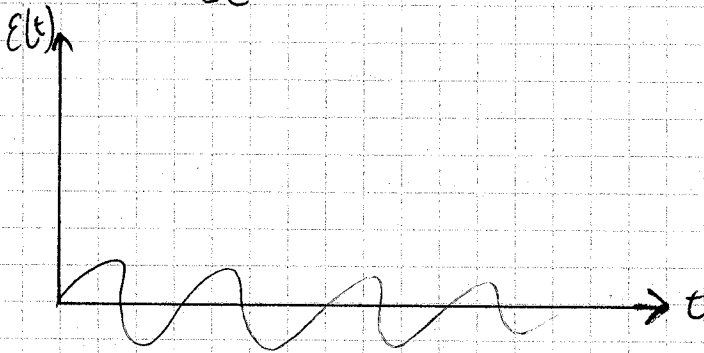
$$\mathcal{E}_0 = \omega_0 B S$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 B S \sin(\omega_0 t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega_0 t)$$

forza indotta dal movimento della spira in B

$$i = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sin(\omega_0 t) \quad \mathcal{E} = i R$$

$$\mathcal{E}'_i = -L \frac{di}{dt} \quad \phi = L \cdot i$$



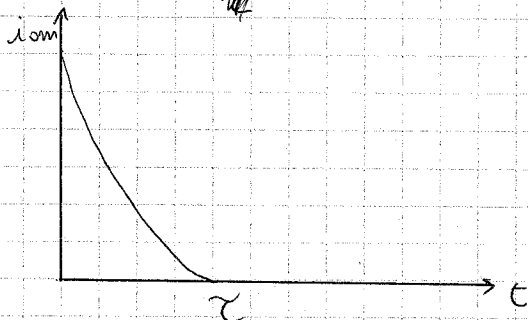
$$\mathcal{E}_i - L \frac{di}{dt} = Ri \quad (\mathcal{E} = \mathcal{E}_i + \mathcal{E}'_i)$$

$$\mathcal{E}_i = Ri + L \frac{di}{dt} \quad \mathcal{E}_0 \sin(\omega_0 t) = Ri + L \dot{i}$$

$$i(t) = i_p + i_{om}$$

$$Ri + Li = 0 \quad (\text{eq. om. associata})$$

$$i_{om}(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\tau = L/R)$$



Dopo τ , ci resta solo $i_p(t)$

i_p è una combinazione lineare di seni e coseni.

$$i_p(t) = C \operatorname{sen}(\omega_0 t) + D \cos(\omega_0 t)$$

$$E_0 \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t) = R [C \operatorname{sen}(\omega_0 t) + D \cos(\omega_0 t)] + L [\omega_0 C \cos(\omega_0 t) - \omega_0 D \operatorname{sen}(\omega_0 t)]$$

Devo avere che:
$$\begin{cases} E_0 = RC - L\omega_0 D \\ R \cdot D + L\omega_0 C = 0 \end{cases} \quad D, C \text{ incognite}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D = -\frac{L\omega_0 C}{R} \\ E_0 = RC + L\omega_0 \frac{L\omega_0 C}{R} \end{cases} \quad E_0 = \frac{R^2 C + L^2 \omega_0^2 C}{R}$$

$$C = \frac{E_0 R}{R^2 + \omega_0^2 L^2}$$

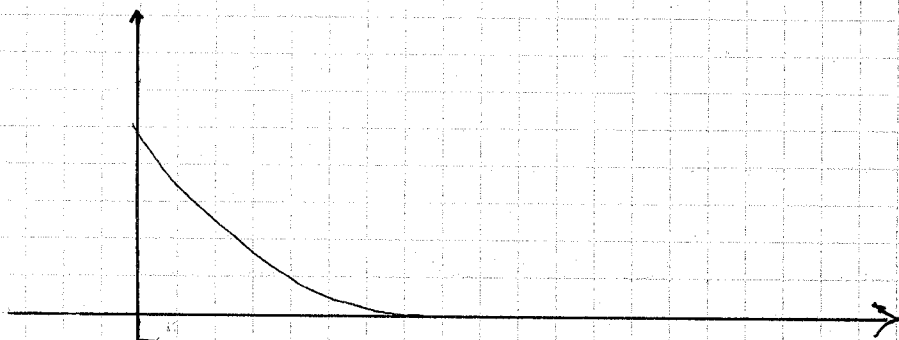
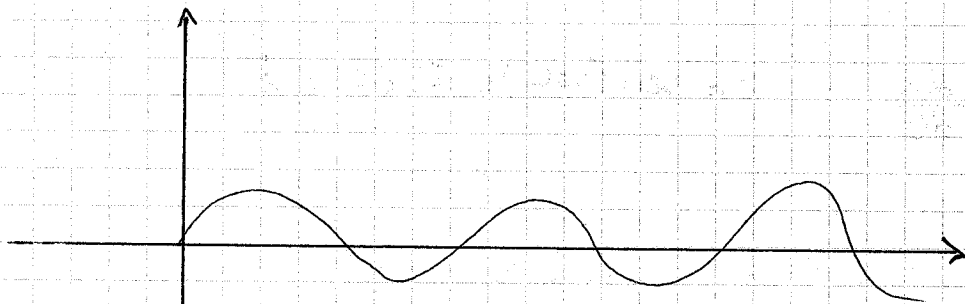
$$D = -\frac{L\omega_0 E_0 R}{(R^2 + \omega_0^2 L^2) R}$$

$$= -\frac{\omega_0 E_0 L}{R^2 + \omega_0^2 L^2}$$

$$i_p = E_0 \left[\frac{R}{R^2 + \omega_0^2 L^2} \operatorname{sen}(\omega_0 t) - \frac{\omega_0 L}{R^2 + \omega_0^2 L^2} \cos(\omega_0 t) \right]$$

$$i = i_p + i_{om}$$

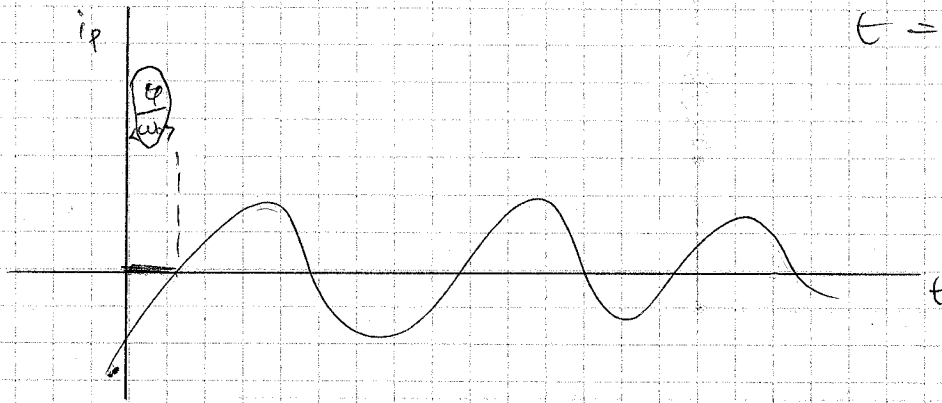
$$i_p(0) = -\frac{E_0 \omega_0 L}{R^2 + \omega_0^2 L^2} \Rightarrow A = \frac{E_0 \omega_0 L}{R^2 + \omega_0^2 L^2} \quad (i(0) = 0)$$



$$i_p = i_{p0} \operatorname{sen}(\omega_0 t - \varphi)$$

$$\omega_0 t - \varphi = 0$$

$$t = \varphi / \omega_0$$



(i_p sfasato rispetto a E_0)

$$i_p = i_{p0} [\operatorname{sen}(\omega_0 t) \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos(\omega_0 t)]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_{p0} \cos \varphi = \operatorname{coeff} [\operatorname{sen}(\omega_0 t)] = \frac{E_0 R}{R^2 + \omega_0^2 L^2} \\ i_{p0} \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{coeff} [\cos(\omega_0 t)] = \frac{E_0 \omega L}{R^2 + \omega_0^2 L^2} \end{cases}$$

facio il rapporto

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

elevo al quadrato le esp. precedenti e sommo:

$$\Rightarrow i_{p0}^2 = E_0^2 \frac{R^2 + \omega_0^2 L^2}{(R^2 + \omega_0^2 L^2)^2} \Rightarrow i_{p0} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega_0^2 L^2}}$$

ωL ha le stesse dim. di R ,

infatti: se $\frac{R}{L}$ è un tempo, ω è $\frac{1}{[t]}$

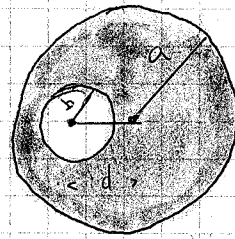
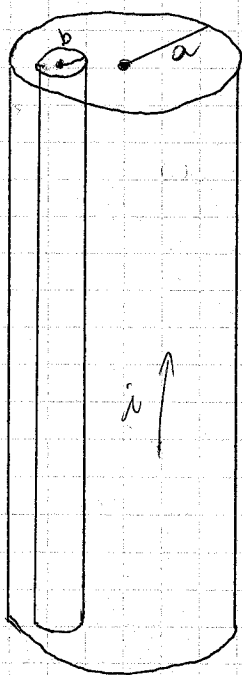
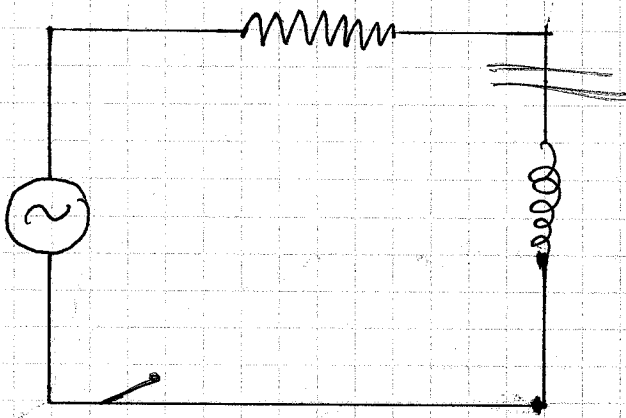
$\Rightarrow \omega L / R$ è un numero puro.

Quando è trascurabile il coeff. di autoinduzione?

$$\boxed{L \ll R \Rightarrow i_{p0} \approx \frac{E_0}{R}, \operatorname{tg} \varphi \approx 0}$$

(i circuiti oscillanti non sono programma d'esame)

(non al 1° appello almeno)



$$a = 10 \text{ cm}$$

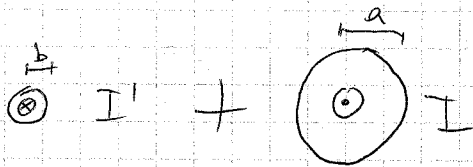
$$b = 2 \text{ cm}$$

$$d = 4 \text{ cm}$$

$l \gg a$

Si vuole calcolare il campo magnetico all'interno della cavità.

Possiamo vedere il sistema come un filo intero percorso da i sovrapposto a un filino dove scorre $-i$.



Si può usare la formula $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i$

$$I - I' = i \quad (\text{la corrente è uno scalare})$$

$I > i$ Le densità di corrente devono essere = in modulo e opposte in segno

$$I \rightarrow j = \frac{I}{\pi a^2}$$

$$I' \rightarrow j' = \frac{I'}{\pi b^2}$$

$$j = j'$$

$\frac{I}{\pi a^2}$

$$\begin{cases} I = I' + i \\ \frac{I}{\pi a^2} = \frac{I'}{\pi b^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{I' + i}{\pi a^2} = \frac{I'}{\pi b^2}$$

$$I' \left(\frac{1}{\pi b^2} - \frac{1}{\pi a^2} \right) = \frac{i}{\pi a^2}$$

$$I' \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \right) = \frac{i}{a^2}$$

$$\boxed{I' = \frac{b^2}{a^2 - b^2} i}$$

$$I = i + I' = i \left(1 + \frac{b^2}{a^2 - b^2} \right) = \boxed{\frac{a^2}{a^2 - b^2} i = I}$$

$$j = j' \quad \text{ok} \quad I - I' = i \quad \text{ok}$$

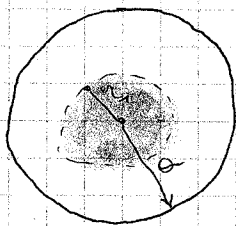
Si usa il teor. della circolazione di Ampère.

$$\underline{B} = \underline{B}_1 + \underline{B}_2$$

$$I' := I_2 \quad I := I_1$$

\underline{B}_1 e \underline{B}_2 hanno simmetria cilindrica.

campo generato da I_1 :



$$\oint \underline{B}_1 \cdot d\underline{s} = \mu_0 \underbrace{i}_{\substack{\text{corrente} \\ \text{che scorre in} \\ \text{questo}}} = B_1 \cdot 2\pi r_1$$

la corrente che scorre in i è la densità $\cdot 2\pi r_1$

$$= \mu_0 i \frac{r_1^2}{a^2 - b^2}$$

($a \rightarrow r_1$)
(è una semplice proporzione)

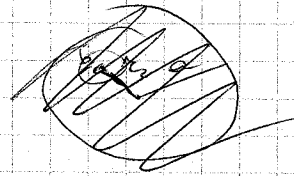
corrente concatenata alla linea tratteggiata

$$B_1 = \frac{\mu_0 i r_1^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r_1}{a^2 - b^2} i$$

= campo magnetico in un punto qualsiasi interno al conduttore. Per "cercare" dentro la cavità devo considerare $r + \text{un angolo}$.

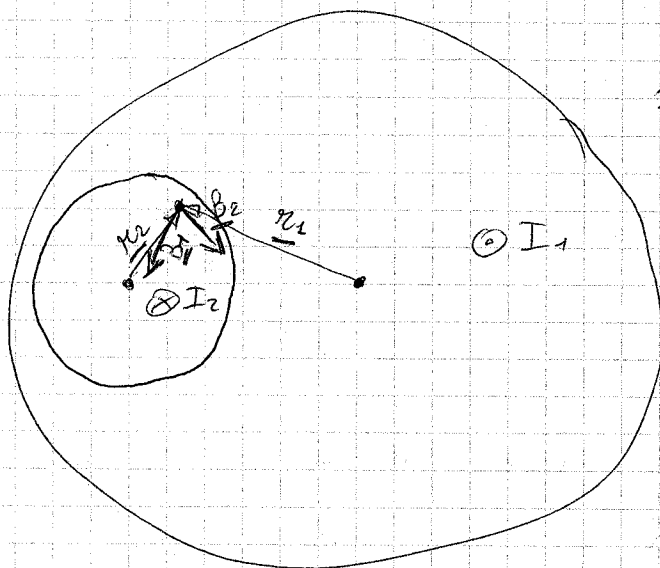
Vediamo il campo magnetico generato dalle correnti I_2 :

$$B_2 \cdot 2\pi r_2 = \mu_0 i \frac{r_2^2}{a^2 - b^2}$$



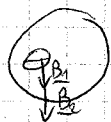
$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{r_1}{a^2 - b^2}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{r_2}{a^2 - b^2}$$

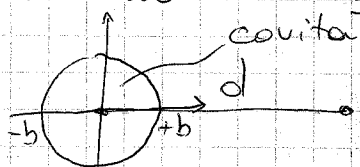


$r_1 - r_2 = d$

Supponiamo di voler calcolare B lungo l'asse orizzontale



si sommano



sist. di riferimento

$r_1 = r_2$

$$\Rightarrow r_1 = d - x$$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{d-x}{a^2 - b^2}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{x}{a^2 - b^2}$$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{d}{a^2 - b^2}$$

NON dipende da x ma dalla distanza tra i centri.

Se fossero stati concentrici, B sarebbe stato nullo.

Scrivendo in forma vettoriale:

$$\underline{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{r_1}{a^2 - b^2} \cdot \hat{t}_1 \quad \hat{t}_1 \perp \underline{r}_1 \quad \hat{t}_1 \cdot \underline{r}_1 = 0$$

$$\underline{B}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{r_2}{e^2 - b^2} \cdot \hat{t}_2 \quad \hat{t}_2 \perp \underline{r}_2 \quad \hat{t}_2 \cdot \underline{r}_2 = 0$$

Ma \underline{r}_1 e \underline{r}_2 non sono indipendenti:

$$\underline{r}_1 - \underline{r}_2 = \underline{d} \quad d = \leftarrow$$

Quindi \underline{B}_1 e \underline{B}_2 non sono indipendenti
e la loro somma fa \underline{B} .

Si dimostra che \underline{B} è costante su
tutta la cavità.

— FINE CORSO —

duffo@unisi.it

