

26 settembre 2011

Per accelerare le particelle non basta un campo e.m., la cosa è più complessa perché le particelle le vogliamo ordinarie, cioè in un fascio e con una precisa energia. Fare questo è una scienza.

Ci sono acceleratori con campi statici, altri che variano nel tempo, applicati esternamente ecc...

C'è poi il problema di come tenere compatti i fasci, si accelerano solo le particelle cariche (quelle neutre sono accelerate solo perché attraccate a particelle cariche e poi queste in qualche modo si tolgono strada, cioè solo particelle neutre).

C'è bisogno di comprimere le particelle per evitare contro la forza di Coulomb, allora si devono creare delle forze di richiamo, - si devono andare compattate un grande numero di particelle dello stesso segno che naturalmente tenderebbero a respingersi.

La forza di richiamo (nella direzione del moto delle particelle) può essere lineare (proporzionale a quanto si allontana la particella dal centro del fascio), e oggi non si riescono a creare acceleratori non lineari; il moto delle particelle è classico, obe regole della relatività ristretta.

Un acceleratore è tanto più complesso quanto più vogliamo il fascio compatto.

$\lambda = \frac{h}{p}$  - la lunghezza d'onda di De Broglie, maggiore è l'impulso migliore è la capacità risolutiva perché per  $\lambda$  è minore, si accelerano particelle per avere una sempre migliore capacità risolutiva, per vedere le particelle elementari.

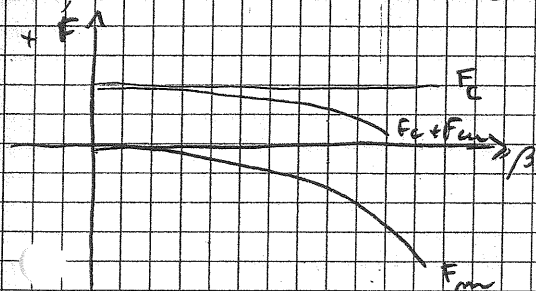
$E = mc^2 = m_0 \gamma c^2$  - accelerando si aumenta il  $\gamma$  della particella, allora questa accumulata energia e cedendola può creare altre particelle, la  $\lambda$  fa la "foto", con  $E$  si riesce a creare nuove particelle, questo è il processo inverso a quello che è successo dopo il big bang; per avere densità di energia simile a quella che c'è vicino al big bang si devono accelerare.

Un'ultima funzione degli acceleratori è penetrare nella materia, questo è importante in Fisica Medica ed è importante avere fasci molto compatti; infine si possono usare le particelle come sonda.

La capacità di penetrazione di un fascio si può usare in vari modi. Gli acceleratori servono per la fisica nucleare e delle particelle per fare ricerca (per questo sono nati) ma oggi quelli per la ricerca sono pochi, la metà sono per medicina, piccola parte per la ricerca e molti a scopo industriale, per esempio per fare la radiografia di materiali come alle lamiere per aerei per evitare che ci siano bolle d'aria; si usano in chimica per vedere proteine e virus per datare materiali archeologici, e anche per sterilizzare gli oggetti medici. Oggi vengono di moda le sorgenti di luce di sincrotrone prodotti da elettroni frenati, così si ottengono raggi-x con lunghezze d'onda e dunque una capacità di risoluzione dell'immagine molto buona.

Gli acceleratori sono molto diversi anche se le particelle sono adroni o leptoni. Gli elettroni emettono radiazioni se accelerati, i protoni no, solo al LHC si riescono a vedere i picchi irraggiamenti del protone.

Due cariche elettriche che viaggiano nella stessa direzione si attraggono, mentre staticamente due cariche dello stesso segno si respingono.



Più la particella è veloce maggiore è la corrente, e maggiore è il suo  $\beta$ ; la forza repulsiva di Coulomb non cambia con la velocità ma dipende solo dalla loro distanza.

La forza magnetica è attrattiva e aumenta all'aumentare di  $\beta$ .

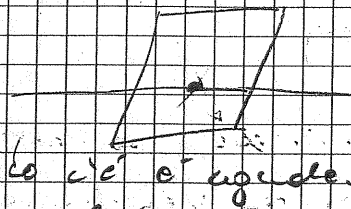
La forza risultante è la somma delle due e diminuisce all'aumentare di  $\beta$ , quindi è più facile tenere a bada particelle veloci piuttosto che lente, il problema è farle veloci.

Il problema è che le distanze che percorrono le particelle sono enormi (> sistema solare) e si riescono a tenere vicine particelle dello stesso segno fino a decine di nm per distanze così grandi. Si riescono a tenere protoni vicini alla velocità  $c$  per qualche centinaio di giorni al LHC o al Tevatron.



Se le particelle in qualche punto sono perturbate, tale perturbazione se la portiamo dietro a lungo, percepiamo le asperità dell'ambiente, ci anda molto poco a perturbarle; c'è poi il problema che queste perturbazioni se la trasmettono ando via di loro (e questo è un grosso problema); allora più sono compatte più è facile perturbarle. Si deve tener presente poi che gli acceleratori costruiti non sono come quelli disegnati; anzi si è cercato di aggiungere pezzi per correggere gli errori.

Se prevediamo il moto della particella lungo la direzione di spostamento e quello nel piano trasverso, quando si trova in un campo  $E$  e  $B$ .

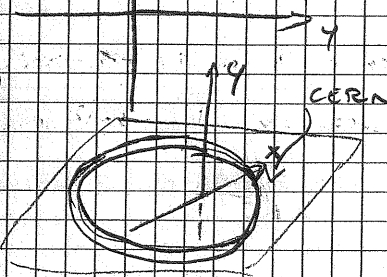


A volte si dà  $t$  perché dato che la velocità  $c$  è data dove  $e^-$  o dove qual...

La  $c$  è uguale.

$y$  è la coordinata verticale al piano dell'acceleratore e la  $x$  è quella del piano dell'acceleratore.

Le particelle nel piano trasverso non stanno ferme.



Una particella nel piano trasverso si sposta da una posizione A ad una B.

$$x_1 = ax_0 + by_0$$

$$y_1 = cx_0 + dy_0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = M \vec{A}$$

Questa matrice ci dice dove si trova la particella alla distanza  $s$  nel piano trasverso.

Allo stesso modo dopo un altro tratto la particella è in un altro punto del piano

$$\vec{A} \rightarrow \vec{B} \quad M_1$$

$$\vec{B} \rightarrow \vec{C} \quad M_2$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{C} \quad M_3 = M_1 \cdot M_2$$

Se poi da  $\vec{C}$  si torna ad  $\vec{A}$ , allora la matrice di tutto il movimento è  $\mathbb{1}$ .

Per tornare da  $\vec{B}$  ad  $\vec{A}$ :  $\vec{A} = M^* \vec{B}$  perché  $MM^* = \mathbb{1}$  e questo

Lo sappiamo perché siamo andati allo stesso punto di partenza (in parole:  $M^* = M^{-1}$ ).

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Saremo in grado di descrivere lo spostamento di una particella dal piano trasverso tramite matrici. Tale matrice la costruiamo associando agli elementi elettro-magnetici che ci sono nel tratto in cui vogliamo conoscere lo spostamento.

Per ogni elemento sapremo qual è la matrice associata.

Un acceleratore dal punto di vista del piano trasverso è una matrice.

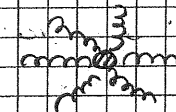
Dato che le eq. di Maxwell non dipendono dal segno.

Accelerando protoni e antiprotoni questi ultimi usano la matrice inversa allora si deve stare attenti al che  $\det M \neq 0$ , antiprotoni e protoni devono viaggiare lungo la stessa orbita solo che un fascio è nel verso opposto.

Questo è un elemento fondamentale per costruire gli acceleratori.

Oltre alle matrici useremo l'eq. differenziale che descrive il moto armonico, questo perché la forza in un acceleratore è data da  $\vec{F} = -K\vec{x}$ , si deve tener conto del fatto che la gravità non ha influenza sulle particelle.

Esistono dei tipi di magneti che generano questa forza lineare gli si chiama

 Le matrici in realtà è come se fossero  $\infty$ . Dato che i magneti sono lineari il risultato finale è che il movimento sul piano trasverso sarà oscillatorio (con tutte le varianti). La costante elastica  $K$  la costruiamo con i magneti; data una sequenza di magneti con il  $K$  che vogliamo sapremo tutte le trasformazioni in matrici.

Siccome così che si decide il  $K$  e la lunghezza del magnete, la matrice allora avrà i valori che dipendono da questi parametri.

INTRODUCTION TO ACCELERATOR PHYSICS Wille

WIDEMANN (è più in mano)

28 settembre 2011 MANCA

29 settembre 2014

La legge di Lorentz:

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Un'informazione che si ricava da questa legge si può fare:

$$\vec{v} \cdot \vec{f} = \frac{d}{dt} (m_0 \gamma c^2)$$

↳ espressione dell'energia

Mediamai nel caso in cui si ha solo campo magnetico e non quello elettrico; supponiamo anche che  $\vec{B}$  sia costante.

$$\vec{v} \cdot \vec{f} = 0 \quad \text{perché } \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}), \text{ il vettore tra parentesi è } \perp \text{ a } \vec{v}.$$

Dire che  $\gamma$  è costante  $\Rightarrow |\vec{v}| = \text{costante}$ . Dato  $\vec{B}$  costante e una particella sentita non riesce ad accelerare la particella qualunque sia l'angolo tra  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ .

Scriviamo la forza di Lorentz come variazione dell'impulso:

$$B \frac{d}{dt} (m_0 \gamma v^2) = (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{B} = 0$$

Prendendo anche ora il prodotto scalare con  $B$  si ottiene sempre 0

$$\gamma \frac{d}{dt} (\vec{B} \cdot \vec{v}) = 0 \quad \vec{v}_{\parallel} = \text{costante}$$

$$\text{Data } \vec{f}: |\vec{v}| = \text{cost}$$

$$\vec{v}_{\parallel} = \text{cost}$$

$v_{\parallel}$  al campo magnetico

$$\vec{v}_{\perp} = \text{cost}$$

Possiamo anche fare delle deduzioni riguardanti alla componente perpendicolare di  $v$ .

L'unica cosa che fa una particella che entra in  $B$  è che può fare un moto circolare uniforme, il moto poi è elicoidale perché c'è anche la componente parallela.

$$\frac{d}{dt} (m_0 \gamma v_{\perp}) = q(\vec{v} \times \vec{B}) = m_0 \gamma \frac{v_{\perp}^2}{\rho}$$

La velocità longitudinale non cambia ne modulo ne direzione e quella  $\perp$  cambia solo la direzione. Il terzo termine è il prodotto della massa per l'accelerazione.

$$m_0 \gamma \frac{v_{\perp}^2}{\rho} = q v_{\perp} B$$

$$\Rightarrow \frac{p_{\perp}}{\rho} = q \cdot B$$

eq fondamentale che regola il moto delle particelle in un acceleratore.

$$\boxed{B \cdot \rho = \frac{p}{q}}$$

Il campo  $\vec{B}$  in un acceleratore è statico, in base a questa si definiscono anche le dimensioni dell'acceleratore, definiti  $\rho$  e sapendo che magneti si hanno  $\Rightarrow$  si trova  $p$ .



Seppiamo anche che in un moto circolare uniforme:

$$\omega = \frac{v}{\rho} = \frac{qB}{m\gamma}$$

$$\omega_0 \times \frac{v}{\rho} = qB \Rightarrow \frac{v}{\rho} = \frac{qB}{m\omega_0} \quad \text{così si ricava } \omega$$

Questa frequenza è fondamentale e si chiama **FREQUENZA DI CICLOTROONE**:  $\omega = \frac{qB}{m}$

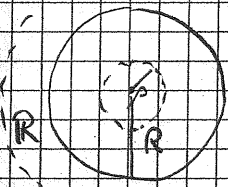
Tutte queste cose le abbiamo dedotte avendo supposto  $B$  costante, ma cosa succede se  $B$  cambia?

Dalla legge di Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{C} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

In un campo magnetico costante una particella fa un moto elicoidale (ma se  $v_{\parallel} = 0 \Rightarrow$  fa un moto circolare uniforme).

Finché  $B$  è costante  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{C} = 0$ , allora se  $B \neq \text{cost}$  la particella si sente di un campo elettrico; una ~~una~~ particella in un campo elettrico accelera. La forza sulla particella varia.



La parte tratteggiata è la zona dove si trova il campo magnetico, quella continua è dove ruota la particella.

$\pi \rho^2 \vec{B} \rightarrow$  ha una certa circolarità

$\pi R^2 \vec{B} \rightarrow$  ha un'altra circolarità

$\pi R^2 \vec{B} \rightarrow$  il flusso non cambia perché è fatto solamente sul corso della particella e non cambia se  $\vec{B}$  è più largo.

Vediamo ora cosa succede ad  $\vec{F}$  se abbiamo un campo elettrico costante:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = \frac{d}{dt} (m_0 \gamma \vec{v})$$

$$\hookrightarrow \frac{q\vec{E}}{m_0} = \frac{d}{dt} (\gamma \vec{v}) \quad \text{integrando:}$$

$$\gamma \vec{v} = \frac{q\vec{E}}{m_0} \cdot t$$

Dalla cinematica relativistica:  $\gamma^2 = 1 + \left(\gamma \frac{v}{c}\right)^2$  possiamo ricavare

$\gamma v$  da questa relazione e metterla nell'eq. sopra.

$$\gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{qE}{m_0 c} t\right)^2}$$

Da questo si vede che in un campo elettrico costante una particella accelera e ci dice anche come accelera.

Abbiamo quindi due modi per accelerare la particella: un  $\vec{B}$  che varia nel tempo e un  $\vec{E}$  costante.

La differenza sta nel fatto che nel caso di  $\vec{E}$  la particella accelera nella direzione di  $\vec{E}$  invece con  $\vec{B}$  accelera nella direzione perpendicolare a  $\vec{B}$ .

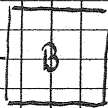
$$\frac{dx}{dt} = \frac{vE}{c} = \frac{qE}{\gamma m_0} \quad \text{integrando:}$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2\gamma} \frac{qE}{m_0} t^2 \quad \text{questa vale nel caso in cui } qE \ll \text{ della forza intrinseca della particella stessa.}$$

$\| B\rho = \frac{p}{e}$  Supponiamo di avere delle particelle mescolate con

impulsi vari:

$p_1, p_2, p_3$



Un magnete fa come uno specchio.

$$p_1 < p_2 < p_3$$

schermo.

Si deve ora capire se è meglio usare  $B \propto E$  per accelerare; per la fisica i metodi sono equivalenti, ma dal punto di vista della tecnologia è meglio un altro.

Oggi si arriva ad avere:  $|B| \sim 1 \text{ Tesla (10.000 Gauss)}$

$$|E| \sim 10 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$$

Si deve allora vedere chi genera la forza più intensa.

$$\frac{F_{\text{MAG}}}{F_{\text{EL}}} = \frac{q c B}{q E} = \beta c \frac{B}{E} \quad \text{moltiplicando per } \frac{v}{c}$$

$$= 30 \beta \quad \text{questo è il risultato che dipende dalla tecnologia.}$$

Da qui si capisce che se abbiamo una particella e gli vogliamo applicare una forza per riportarla sul fascio, nel caso di diserti, allora ci conviene applicarla magnetica.

A LHC i magneti che riportano le particelle sul fascio sono di 1 T.

Se invece volessimo accelerare la particella di 1 GeV basta applicare un campo  $\vec{E}$  per 100 m.

Quello che si fa è applicare  $\vec{E}$  per due metri e nel frattempo la particella ruota grazie ad un  $B \perp$ , e poi passa molte volte dallo stesso  $E$ .

Ma tutte le volte che passa si deve variare  $B$  per poter mantenere

lo stesso raggio:  $B\rho = \frac{p}{q}$

La variazione di  $B$  è talmente lenta che l'accelerazione che da è trascurabile.

Per vedere quante volte la particella passa dal campo  $E$  si deve  
 ze  $\frac{3 \cdot 10^6 \text{ km}}{30 \text{ km}} = 10^5$  volte, l'accelerazione che ha la particella  
 e':  $30 \cdot 10^5 \cdot 10^6 = 3 \cdot 10^{12} \text{ eV} = 3 \text{ TeV}$

Gli acceleratori iniziano con Thomson che scopre l'elettrone,  
 c'è poi uno che riesce a costruire  $\Delta V = 100 \text{ kV}$ , questo è stato  
 molto importante perché erano  $\Delta V$  statiche in continua.

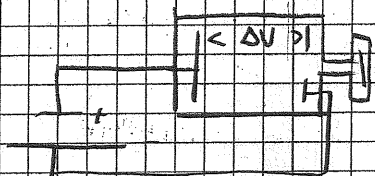
Nel 1924 venne proposto per la prima volta il concetto di come  
 fare gli acceleratori circolari; nel '27 ci fu il primo acceleratore  
 lineare.

$p + Li \rightarrow 2He$  in questo modo con un acceleratore nel '31 si  
 fece la prima reazione nucleare, si capì che non si potevano otti-  
 re elementi con  $Z >$  di quello iniziale.

Il betatrone è l'unico acceleratore che usa un  $B$  variabile per  
 accelerare, tutti gli altri usano campi elettrici.

Nel '50 si è capito come tenere gli elettroni dentro un fascio tra-  
 mite un campo elettrico.

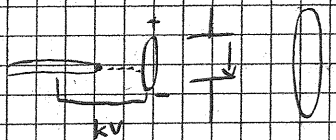
Concettualmente un acceleratore era:



C'è una camera a vuoto, poi c'è una  
 filo che applica una differenza di poten-  
 ziale, c'è un condensatore, su una lastra

un buco, così le particelle sono accelerate e vanno ad irradia-  
 re su una targhetta.

Nel 1897 Thomson inventò il tubo catodico, c'è un filamento e se  
 lo riscaldiamo comincia ad emettere elettroni.



Il limite di questo principio è dato dalla massi-  
 ma  $\Delta V$  che sia possibile applicare, il massimo che

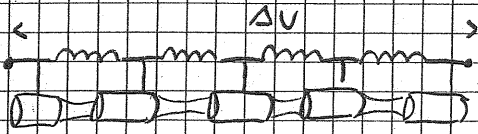
si può fare con cose così sono  $10^6 \text{ V}$ , con alcuni trucchi e soffe-  
 renze però si arriva a  $10 \text{ MV}$  con il problema che però si co-  
 mincia a scaricare dappertutto, al massimo si riempie di Fluoro  
 che assorbe le particelle, ma così si deteriora il fascio.

C'è poi il problema che le particelle vanno a deteriorare le lastre,  
 quelle che non passano dal buco; urtando sulle lastre allora tutto  
 va fuori e quindi si abbassa  $\Delta V$ , ma allora aumentando  $\Delta V$  op-



piccola cresce anche questo effetto: è un problema, detto di break-down.

È stata poi un'idea per diminuire questo problema, cioè si deve un po' sfoddiare le particelle, negli anni '20 l'unica cosa che hanno pensato è di mettere tante resistenze:



Tra ognuno dei cilindri c'è un  $\Delta V$  e alla fine abbiamo proprio quelle applicate.

Il  $\Delta V$  non sono uniformi ma amp sono sempre 100000, la particella è accelerata solo tra i gap.



Se una particella si trova distante dal fascio risente di una forza verso il centro.

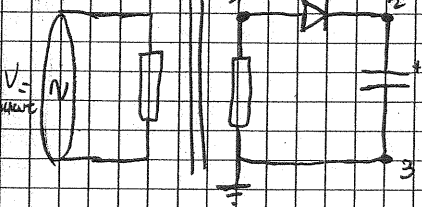
$F \cdot \Delta t = \Delta p \rightarrow$  nella gap la particella accelera allora il tempo  $t_1 > t_2$  e quindi è maggiore l'effetto di tirare verso il centro la particella piuttosto che tirarla fuori.

L'accelerazione genera un'asimmetria temporale e quindi un fogggiamento.

3 ottobre 2014

FOTOCOPIARE AOPUNTI PRIMA MEZZ'ORA

Greinaker - fece un acceleratore molto grande, Cockroft-Walk ward, e la catena Greinacher per il loro acceleratore.



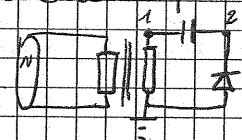
$HV(1) = V_0 \sin \omega t$  Sono: due voltaggi di tensione e quasi capi

$HV(2) = V_0$  Il diodo tra i punti 1 e 2 fa sì che la tensione nel punto 2 rimane sempre  $V_0$

$$HV(3) = V_0 - V_0 \sin \omega t$$

La piastra + del condensatore è sempre carica.

Secondo pezzo dell'acceleratore:



$$HV(1) = V_0 \cos \omega t$$

$$HV(2) = V_0 + V_0 \sin \omega t$$

Il piatto + destra del condensatore non si può scaricare, è sul piatto 1 che le cariche vanno e vengono.

Il tecnico ora si prendere il secondo generatore e abbozzare: la

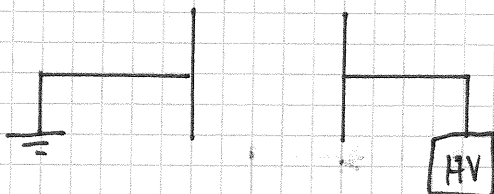
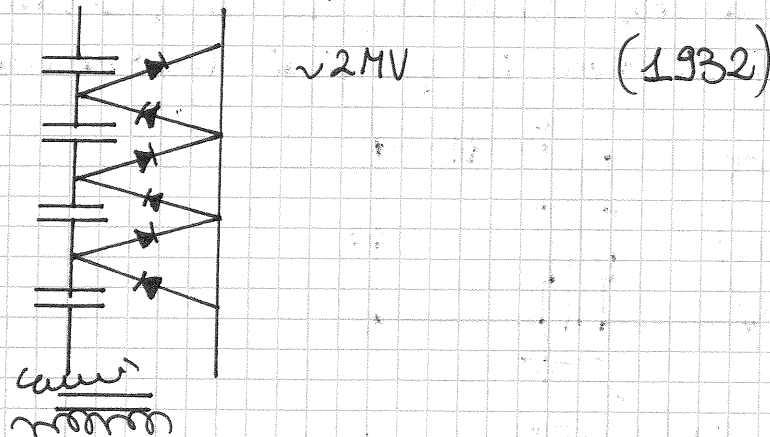
26/9 29/9  
13/10

# MACROFISICA ACCELERATORI

3/10/11

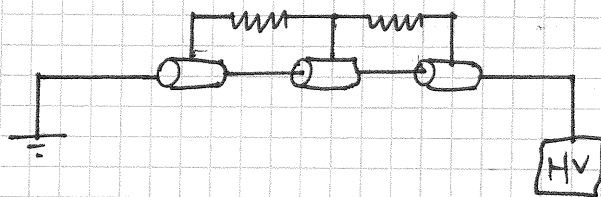
In un acceleratore elettrostatico il problema consiste nel produrre il  $\Delta V$ .

Cockroft - Walt  $\rightarrow$  primo acceleratore elettrostatico.

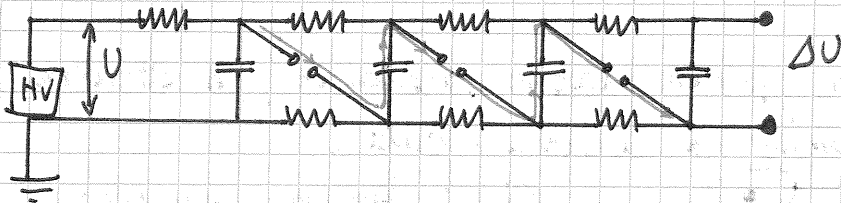


Se il  $\Delta V$  è molto grande, le armature non possono essere molto vicine, altrimenti scaricano. La soluzione

è frazionare il  $\Delta V$ :



Ora vediamo come produrre un grande  $\Delta V$ .



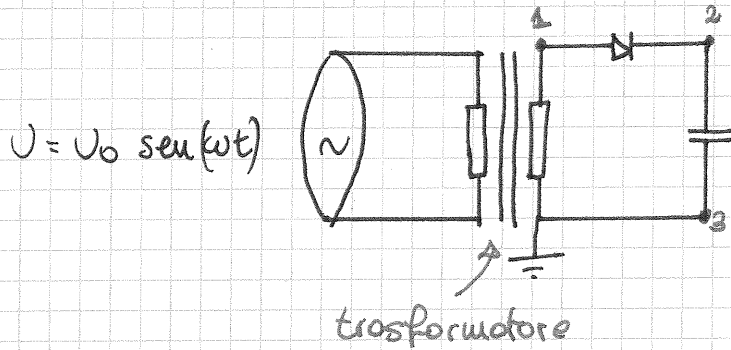
Se gli estremi delle bacchette sono abbastanza vicine, verrebbero delle scariche, e la corrente circolerebbe in serie negli  $N$  condensatori;  $\Rightarrow \Delta U = N U$

Poi le bacchette vengono allontanate ed i condensatori si ricaricano.  $\Delta U = N U$  solo per la durata della scintilla,  $\sim 40-50$  ns.

Con, ad esempio, 100 condensatori in serie, si è raggiunto un  $\Delta U \sim 6 \text{ MV}$ . (Generatore spark-gap).

In 40 ns, una particella che viaggia a  $v \approx c$  percorre poco più di 40 metri.

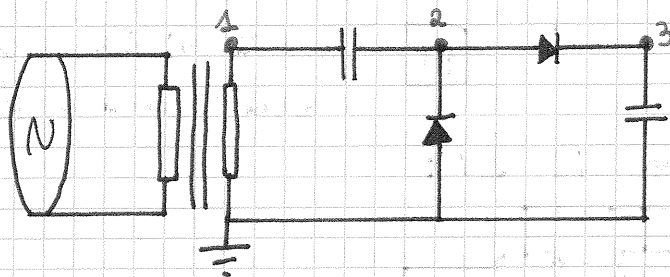
Una idea geniale la ebbe Greinacher, con un generatore di tensione che oggi si trova in qualsiasi elettrodomestico.



$$HV(1) = U_0 \sin(\omega t)$$

$$HV(2) = U_0$$

$$HV(3) = U_0 - U_0 \sin(\omega t)$$

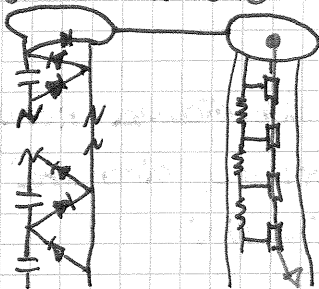


$$HV(1) = U_0 \sin(\omega t)$$

$$HV(2) = U_0 + U_0 \sin(\omega t)$$

$$HV(3) = 2U_0$$

Possiamo aggiungere quante maglie vogliamo, ed ottenere un potenziale stabile  $\Rightarrow$  Cockroft-Walton.



Ci si ferma comunque verso  $E \approx 2 \text{ MeV}$ , perché c'è una caduta di tensione:

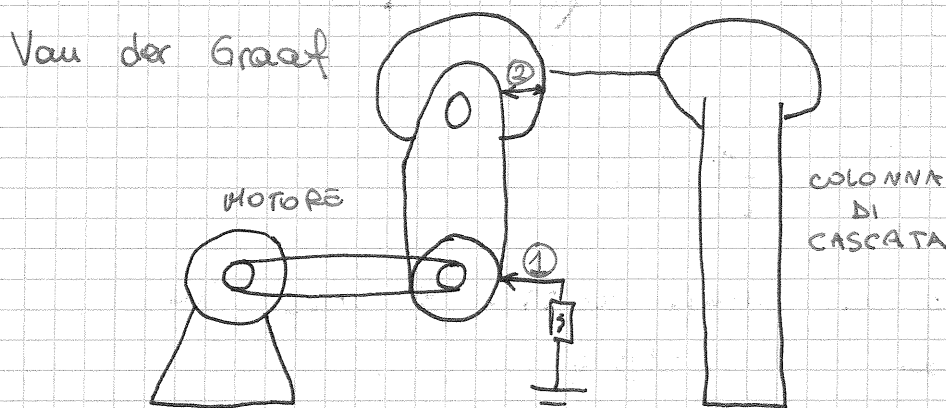
$$\Delta U = \frac{N^3 I}{\omega C}$$

$\xrightarrow{\text{numero stadi}}$   
 $\uparrow$   
 capacità condensatori

Questo è dovuto al fatto che il condensatore non ha tempo a caricarsi completamente.



Per ridurre  $\Delta V$  si possono utilizzare condensatori piú grandi, oppure generatori ad alta frequenza  $\Rightarrow$  però  $\omega$  non può aumentare molto, altrimenti il generatore comincia ad emettere e diventa un'antenna.



La punta ①, carica, viene fatta strisciare su un nostro isolante. La punta ② raccoglie la carica e la deposita su una sfera.

Memoriamo con questo acceleratore si supera qualche MeV, perché ad un certo punto la repulsione tra le cariche e quelle accumulate è così forte che il motore non riesce piú a far girare il nastro.

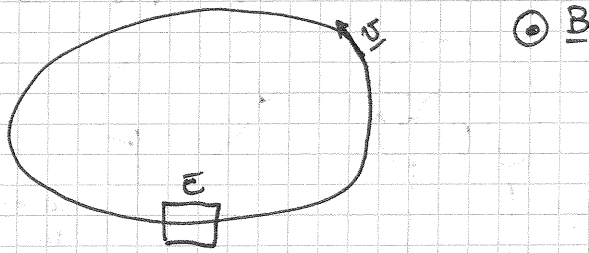
Il Van der Graaf ha due varianti, di cui una tuttora utilizzata (a Catania).

In questa variante si pone una sorgente di ioni negativi in fondo alla colonna di cascata, che vengono accelerati verso la sfera carica. Qui con un processo di stripping vengono tolti due elettroni allo ione, che diventa positivo e viene accelerato di nuovo nel verso opposto (o, meglio, nello stesso verso lungo una colonna di cascata aggiuntiva).

$$E = (q+1) V$$

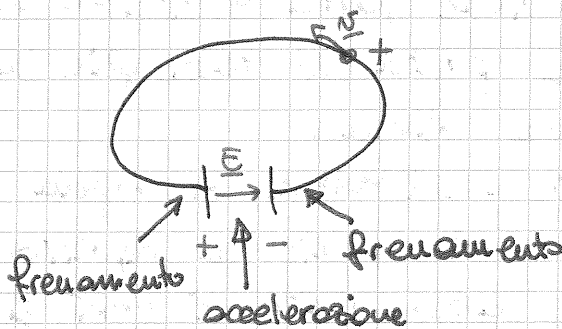
dove  $q$  è la carica dello ione dopo lo stripping. Questa variante si chiama Tandem Van der Graaf.

Un campo magnetico costante fa sì che una particella carica si muova lungo una circonferenza di raggio dato da  $B \cdot r = \frac{p}{e}$



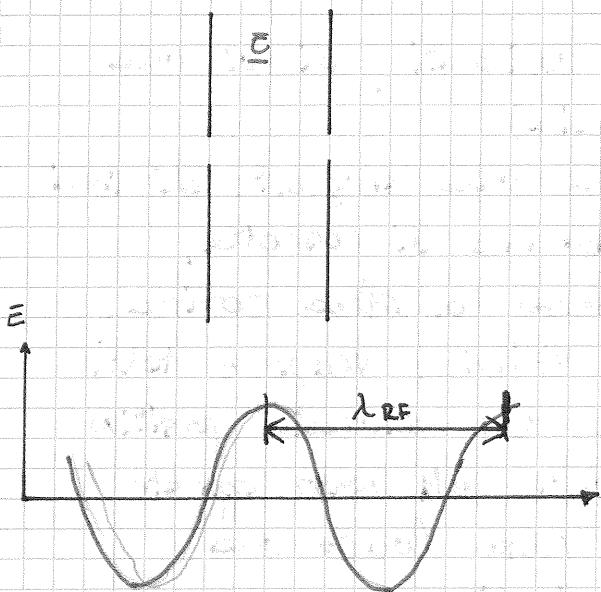
Aggiungendo un campo elettrico  $\underline{E}$  lungo la circonferenza,  $W = L \cdot (\underline{E} \cdot q)$

Non possiamo usare un semplice condensatore:



Alla fine non si ha un aumento di energia. Occorre qualcosa che oscilli!

⇒ CAVITA' A RADIOFREQUENZA



RF: 3 kHz → 300 GHz  
(definizione che esula dalla fisica)

Moi vogliamo che la frequenza di oscillazione corrisponda alle dimensioni dell'acceleratore.

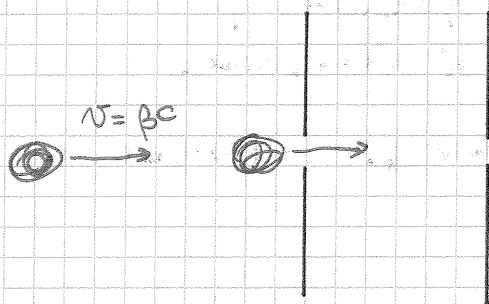
$$3 \text{ kHz} \rightarrow 100 \text{ km}$$

$$300 \text{ GHz} \rightarrow 1 \text{ mm}$$

$$W = q \underline{E} \cdot l$$

Più è lungo il tratto lungo il quale avviene l'accelerazione, più è grande l'accelerazione ⇒ ~ m ⇒ siamo nell'intervallo delle RADIOFREQUENZE.

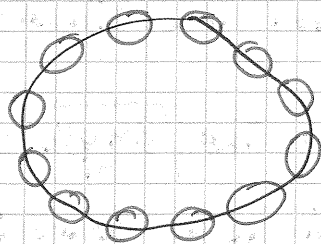
Voglio far passare le particelle nella cavità RF in euro volte possibile, per non sciupare il fascio.



È oscilla  $\Rightarrow$  il fascio viene suddiviso in BUNCHES distanziati di  $d = n \lambda_{RF}$  (multipli di  $\lambda$ ).

Bucket = lo "slot" che può essere potenzialmente occupato da un bunch.

I bucket sono strutture virtuali distribuite lungo l'acceleratore.

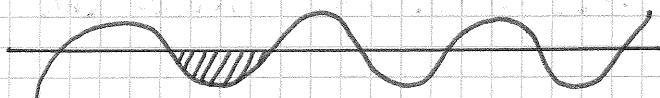
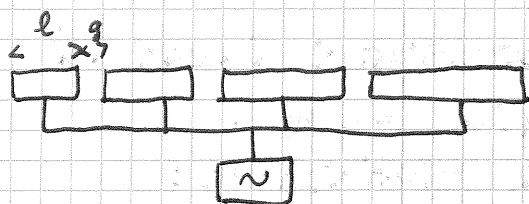


Quanto può essere lungo un bunch?

$$l_{\text{bunch}} = ?$$

Vogliamo dare a tutte le particelle la stessa energia, quindi il bunch deve essere corto rispetto alla lunghezza d'onda di  $\underline{E}$ .

$$l_{\text{bunch}} \ll \frac{1}{2} \lambda_{RF} \cdot \beta$$



$$d = T_{RF} \cdot v$$

5/10/11

200 MHz. Questo è il modo per far restare una particella all'interno della gabbia di Faraday in fase con la radiofrequenza.

Occorre inoltre dare alle particelle lo stesso impulso:  
GAP  $\ll$  gabbia di Faraday  $(g \ll l)$



$$L = T_{RF} \cdot v$$

Non necessariamente lo particello attraversa lo gap in fase col massimo della RF, ma con una fase "qualsiasi"  $\varphi$ .  
 $\varphi$  sarà costante perché via via i tubi si allungano.

Energia acquistata dallo particello nel passaggio attraverso lo gap:

$$\Delta E = q V_0 \sin \varphi$$

Consideriamo protoni non relativistici ( $E < 1 \text{ GeV}$ ):

$$\frac{1}{2} m v_m^2 = m q V_0 \sin \varphi \quad (\text{dopo } m \text{ gap})$$

$$v_m^2 = \frac{2 m q V_0 \sin \varphi}{m} \Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{2 m q V_0 \sin \varphi}{m}}$$

Qual è la lunghezza del cilindretto  $m$ -esimo?  $l_m = ?$

Per definizione:

$$l_m = v_m T_{RF} = T_{RF} \sqrt{\frac{2 m q V_0 \sin \varphi}{m}}$$

Ovviamente  $T_{RF}$  e  $V_0$  sono conosciuti.

$$l_m = \frac{2\pi}{\omega_{RF}} \sqrt{\frac{2 m q V_0 \sin \varphi}{m}}$$

Sappiamo anche che  $T_{RF} \cdot c = \lambda_{RF}$ , ad es.  $200 \text{ MHz} \rightarrow 1.5 \text{ m}$

$$l_m = \frac{\lambda_{RF}}{c} \sqrt{\frac{2 m q V_0 \sin \varphi}{m}} \propto \sqrt{m}$$

Il risultato interessante è che la lunghezza  $m$ -esima va come  $\sqrt{m}$ .

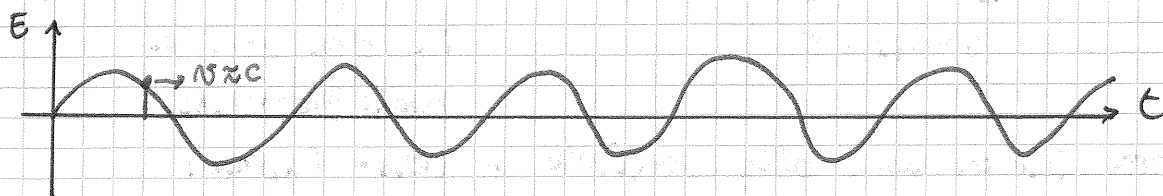
I cilindretti servono anche a foccheggiare il fascio, che per via della radiofrequenza sarà bunchato.

Questo è il principio degli acceleratori lineari di ioni e protoni a bassa energia ( $< 1 \text{ GeV}$ ).

Come si fa con le particelle relativistiche?

Utilizziamo delle onde e.m. e si usa l'idea del

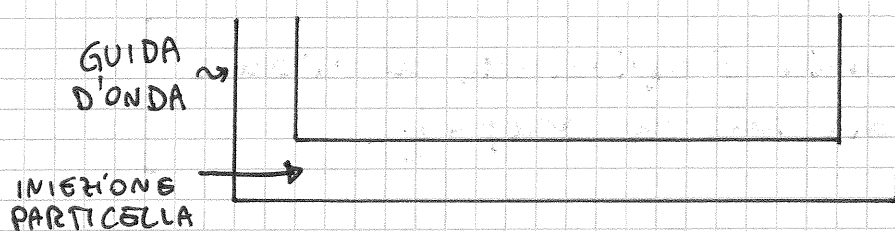
SURF:



Inevitabilmente dopo un po' particella e onda perderanno la fase. Però per diverse decine di metri lo particello vedrà sempre lo stesso  $\bar{E}$ . Oggi si riesce a dare:

$$\frac{d\bar{E}}{dl} = \frac{10 \text{ MeV}}{\text{m}}$$

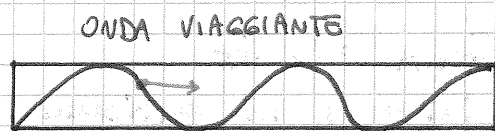
⇒ in 100 metri si accelera da 0 a 1 GeV.



N.B.: La particella va iniettata con un  $\beta$  già sufficientemente grande, altrimenti perde subito la fase!

⇒ Gli acceleratori elettrostatici sono ottimi strumenti per preaccelerare il fascio.

Dentro una cavità possiamo anche creare un'onda stazionaria.



$$\bar{E}(t, s) = \bar{E} \sin(\omega t - ks) \quad v = \frac{\omega}{k}$$

Il campo  $E$  sentito dalla particella è determinato dalla fase  $\omega t - ks$ .  
⇒  $\bar{E} \leq 10 \text{ MV/m}$



$$\bar{E}(t, s) = \bar{E} \sin(\omega t) \sin(ks)$$

I termini di fase sono disaccoppiati.

Però sappiamo che per l'onda stazionaria:  $t = \frac{s}{v_{part.}}$

Quindi:  $E(t, s) = \bar{E} \sin^2(ks)$

La particella rimane in fase con l'onda, la cui fase dipende dalla  $v$  della particella. L'accelerazione non sarà costante.

La particella va da modo a modo in un semiperiodo, così da raggiungere il prossimo "perce" sempre in tempo per trovare  $E > 0$ .

Per questo motivo si dice:

onda viaggiante → "modo  $2\pi$ "

onda stazionaria → "modo  $\pi$ "

Nell'energia acquistata c'è un fattore 2.

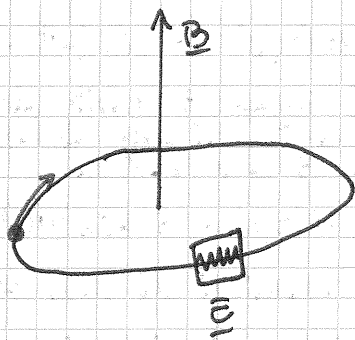
In modo  $2\pi$  il campo elettrico visto dalla particella è costante; in modo  $\pi$  non lo è (ai modi ad esso è nullo). Qual è il campo medio in una lunghezza d'onda?

$$\langle E \rangle = \frac{1}{\lambda_{RF}} \int_0^{\lambda_{RF}} E \sin^2(ks) ds = \frac{1}{2} E$$

Un'onda stazionaria è equivalente ad un'onda viaggiante con fase tale che  $\sin \varphi = \frac{1}{2}$ .

N.B.: non importa con che fase la particella entra, purché entri nel semiperiodo giusto. L'energia acquisita sarà sempre quella.

Se mettiamo degli iridi lungo il cammino di una onda viaggiante, essa sarà rallentata ( $\cong$  cambiare l'indice di rifrazione). Questo è utile per accelerare particelle inizialmente lente.



$T_{ORBITA} = m T_{RF}$   
 $m$  intero  $\Rightarrow$  la particella entra nella regione del campo elettrico sempre nella stessa fase della radiofrequenza.

L'energia acquisita ad ogni passaggio è:

$$\Delta E = l q E \sin \varphi$$

Sappiamo che:  $B\rho = p/q \Rightarrow$   $\exists$  relazione tra  $B$  e  $\bar{p}$  che determina il raggio dell'anello.

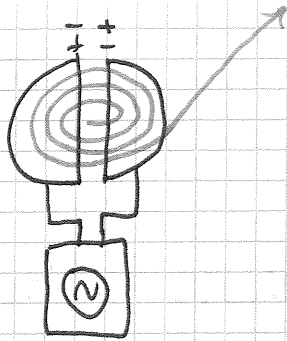
1930  $\rightarrow$  ciclo trone di Lorentz:

$$\frac{m v^2}{R} = q v B \Rightarrow \frac{m v}{R} = q B$$

$$v = \omega_0 R \quad \omega_0 = \text{frequenza dell'orbita}$$

$$\frac{m \omega_0 R}{R} = q B \Rightarrow \omega_0 = \frac{q B}{m}, \quad \omega_0 = \frac{q B}{2\pi m} \quad \text{frequenza di ciclotrone}$$

$\Rightarrow$  la frequenza dell'orbita non dipende dal raggio!



Nelle due "D" (gabbie di Faraday" metalliche) c'è una polarità oscillante. Se  $B$  è scelto in modo tale che  $\omega_0 = n \omega_{RF}$ , la particella vedrà nel gap sempre la stessa fase.

Ad ogni giro l'orbita aumenterà di raggio, cosicché ad un certo punto diventa più grande del ciclotrone e la particella esce.

L'energia dipende dal numero di giri e dal  $\Delta V$  tra le D.

Bisogna stare attenti che la particella entri senza alcuna componente dell'impulso  $\perp$  all'orbita (oppure rendere il ciclotrone molto spesso).

Inoltre,  $\frac{mv^2}{R} = qvB$  vale nel caso non relativistico.

Se la particella subisce molte accelerazioni, diventa relativistica, e allora:

$$\frac{m_0 \gamma v^2}{R} = qvB \Rightarrow \omega_0 = \frac{Bq}{m_0 \gamma}$$

$\Rightarrow \omega_0$  diminuisce non meno che aumenta  $\gamma$ , e la particella si sfasa rispetto alla RF.

Come si risolve questo problema?

- SINCROCICLOTRONE

Diminuisco  $\omega_{RF}$  al crescere di  $\gamma$ :  $\omega_{RF} \propto \frac{1}{\gamma}$

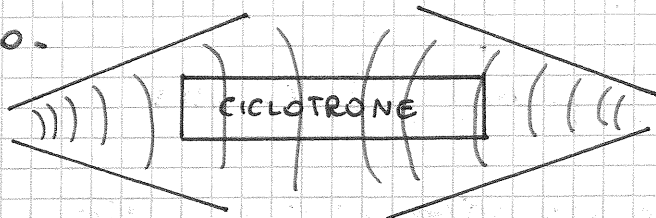
- CICLOTRONE ISOCRONO

$$\gamma = \gamma(t) \Rightarrow \gamma = \gamma(R) \quad B \equiv B_0 \cdot \gamma(R)$$

Nei ciclotrone isocrono si ottiene:  $\omega_0 = \frac{Bq}{2\pi m_0 \gamma} = \text{cost.}$

Si come nei ciclotroni il raggio

dell'orbita aumenta col numero di giri, è equivalente dire che  $\gamma$  aumenta col tempo o che  $\gamma$  aumenta col raggio.



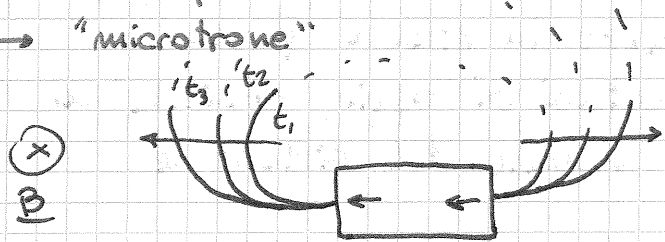


10/10/11

Frequenza di ciclotrone:  $\omega_c = \frac{qB}{2\pi m}$

Esiste la possibilità di accelerare particelle relativistiche?

→ "microtrone"



Qual è la "spinta" che devo dare alla particella tale per cui ad ogni giro rientra nella cavità in fase? ( $\Delta t = n \frac{1}{\nu}$ ?)

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

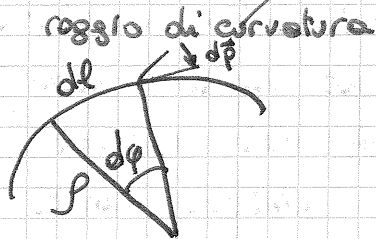
$$|\vec{F}| = qvB$$

$$\rho = \frac{dl}{d\phi}$$

← arco  
← angolo

$$\rho = \frac{dl}{d\phi} = \frac{v dt}{d\phi/p} = \frac{vp}{d\phi/dt}$$

$$\left(\frac{d\phi}{p} = dt\right)$$



$$\Rightarrow \rho = \frac{vp}{qvB} = \frac{p}{qB}$$

$$\rho B = \frac{p}{q}$$

Tornando al nostro problema:

$$\Delta t = 2\pi \left( \frac{\rho_{m+1}}{v_{m+1}} - \frac{\rho_m}{v_m} \right)$$

$$v = v_0 \gamma$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{qB} (m_0 \gamma_{m+1} - m_0 \gamma_m) = \frac{2\pi}{qB c^2} \Delta K$$

→ diff. di energia cinetica

$$\Delta t = \left( \frac{2\pi}{qB c^2} \right) \Delta K \equiv n T_{RF} = n \frac{2\pi}{\omega_{RF}}$$

Questa relazione, fissato  $B$ , definisce l'energia che devo dare ad ogni passaggio.

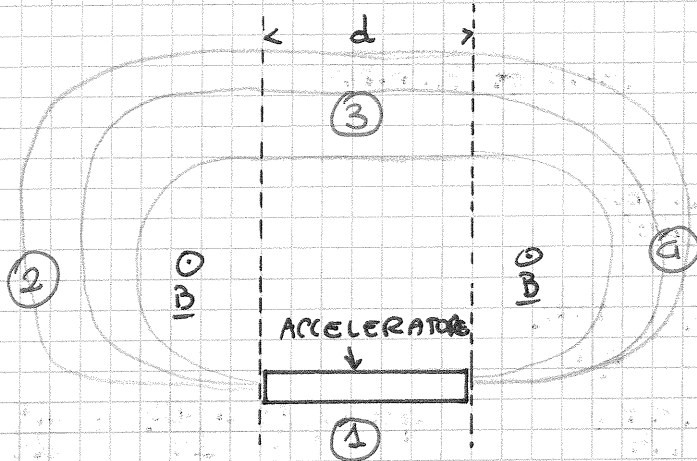
$$\Delta K = \frac{m}{\omega_{RF}} qB c^2$$

Se  $m \equiv 1$ ,  $B \equiv 1T$  ( $\Rightarrow \rho$  piccolo),  $\omega_{RF} \equiv 3GHz$

$$\Rightarrow \Delta K = 4.78 \text{ MeV}$$

Con che velocità iniziale deve arrivare l'e- per entrare in fase?

Al minimo l'energia della mia particella deve valere 4.78 MeV.  $\Rightarrow$  questo acceleratore può funzionare solo come secondo stadio, occorre un iniettore.  
 $\Rightarrow$  "ciclotrone autodromo"



Tempo per fare un giro:  
 $T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = T + T_1 + T_3$   
 purché  $2d = m\lambda$ , siamo a posto.

"Race track"

Il vantaggio del microtrone racetrack è che fornisce un grande  $\Delta k \Rightarrow$  può lavorare a basse  $\omega_{RF}$ .

Finora abbiamo accelerato particelle con campi elettrici, usando  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Ma dalle leggi di Maxwell sappiamo che anche un campo magnetico oscillante ha una circolazione non nulla del campo elettrico.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$\Rightarrow$  possiamo accelerare una particella anche facendole percorrere una linea chiusa attraverso la quale facciamo variare un campo magnetico.

È possibile mantenere costante (chiuso) questo percorso?

$$B\rho = \frac{p}{e} \quad \text{Voglio } \rho \text{ costante, e } p \text{ che aumenti} \\ \Rightarrow \text{deve aumentare } B.$$

$\Rightarrow$  La forza di Lorentz deve generare una forza centripeta crescente.

È possibile ottenere questo bilanciamento?

$$R = \left( - \frac{p(t)}{qB(r,t)} \right)$$

$\rightarrow$  per ottenere una forza attrattiva.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi R E = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \equiv \frac{d\langle B \rangle \cdot \pi R^2}{dt}$$

Videroe  $\rightarrow$  campo non uniforme all'interno del percorso.

$$2\pi R E = \frac{d}{dt} (\langle B \rangle \pi R^2) \Rightarrow 2E dt = R d\langle B \rangle$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = qE = q \frac{R}{2} \frac{d\langle B \rangle}{dt}$$

$$dP(t) = q \frac{R}{2} d\langle B \rangle \quad R = \frac{P(t)}{qB}$$

$$\Rightarrow \frac{dP(t)}{dt} = q \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{P(t)}{qB(R,t)} \frac{d\langle B \rangle}{dt} \quad qE = q \frac{R}{2} \frac{d\langle B \rangle}{dt} = \frac{dP}{dt}$$

Integro questa espressione:

$$P(t) - P(0) = q \frac{R}{2} [\langle B(t) \rangle - \langle B(0) \rangle]$$

Supponendo  $P(0) = 0$ ,  $B(0) = 0 \Rightarrow$

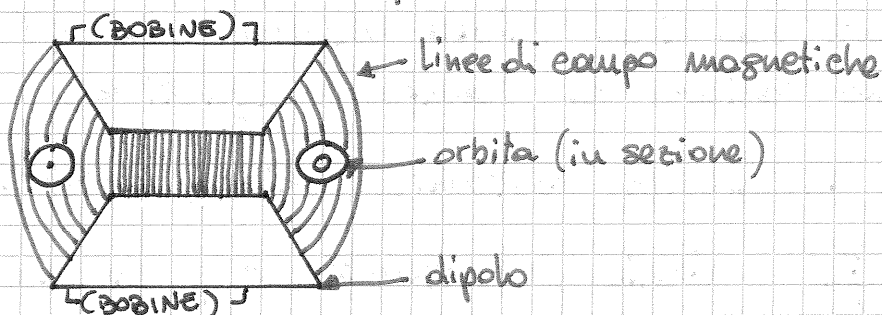
$$p(t) = q \frac{R}{2} \langle B(t) \rangle$$

Questo si dice anche:

$$(\text{Lorentz} \rightarrow) \quad p(t) = q B(t) R = q \frac{R}{2} \langle B(t) \rangle \quad (\leftarrow \text{Maxwell})$$

$$\text{Betatrome} \Rightarrow B(t) = \frac{\langle B(t) \rangle}{2}$$

Il valore del campo magnetico sull'orbita deve essere uguale a metà del campo medio all'interno del cerchio.



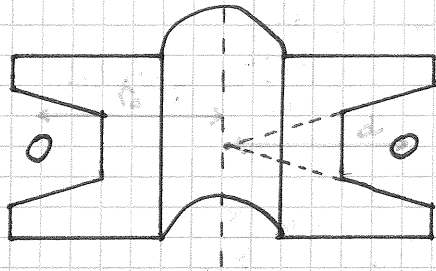
In questo modo si accelerano elettroni fino a 20 MeV.

Per accelerare con un campo magnetico occorrono molti giri.

(il tempo d'isteresi di un campo  $B$  tipico è dell'ordine di secondi).

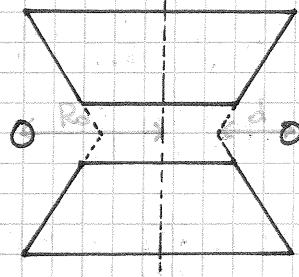
Se le particelle possono sfuggire sul piano trasverso: occorre una forza di richiamo  $\rightarrow$  posso giocare sull'inclinazione delle facce del dipolo.

Dal 1940 al 1952 ci fu un graduale processo di comprensione di questi problemi  $\Rightarrow$  fuocheggiamento.



Dall'equazione di Laplace, per un sistema di questo tipo:

$$B(r) = B_0 \left( \frac{R_0}{r} \right)^n, \quad n \approx \frac{R_0}{d}$$



Facendo il logaritmo a destra e a sinistra:

$$\ln \frac{B}{B_0} = n \ln \frac{R_0}{r}$$

$$n = \frac{\ln \frac{B}{B_0}}{\ln \frac{R_0}{r}} = \frac{\ln \left( 1 + \frac{\Delta B}{B_0} \right)}{\ln \left( 1 - \frac{\Delta r}{R_0} \right)}, \quad \text{con } r = R_0 + \Delta r, \quad B = B_0 + \Delta B$$

In prima approssimazione,  $\ln(1+\epsilon) \approx \epsilon \Rightarrow$

$$n = - \frac{\frac{\Delta B}{B_0}}{\frac{\Delta r}{R_0}} = \frac{\text{variazione \% del campo}}{\text{variazione \% del raggio}}$$

Il rapporto tra le due variazioni è  $n$ .

La scelta di  $n$  può generare la forza di richiamo?

Quando abbiamo a che fare con bunch di particelle, esistono per forza impulsi tra oversi: le particelle si reprimono tra loro.

$$\bullet \quad \leftarrow R \quad \bullet \quad x \quad F(r) = \frac{\sigma m v^2}{r} - q v B_y(r)$$

$$B \rightarrow B_y$$

Supponiamo di spostarci dall'orbita ideale di una quantità  $x$ :

$$r = R + x = R \left( 1 + \frac{x}{R} \right) \quad \frac{1}{r} \approx \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{x}{R} \right)$$

$$B(r) \approx B(R) + \frac{\partial B}{\partial x} x = B(R) \left( 1 + \frac{\frac{\partial B}{\partial x} x}{B(R)} \right) =$$

$$= B(R) \left[ 1 + \frac{1}{B} \frac{R}{R} \frac{\partial B(R)}{\partial x} x \right] =$$

$$= B(R) \left[ 1 + \frac{\partial B}{B} \frac{R}{\partial x} \frac{x}{R} \right] = B(R) \left[ 1 - n \frac{x}{R} \right]$$

$n$  è una grandezza fisica che so costruire ad hoc.



$$\Rightarrow F(r) = \gamma \frac{mv^2}{r} - qvB_y(r) =$$

$$= \gamma \frac{mv^2}{R} \left(1 - \frac{r}{R}\right) - qvB(R) \left[1 - m \frac{r}{R}\right]$$

Ma sappiamo che, sull'orbita ideale,  $\gamma \frac{mv^2}{R} = qvB(R)$

Quindi:

$$F(r) = qvB(R) \left(1 - \frac{r}{R}\right) - qvB(R) \left(1 - m \frac{r}{R}\right)$$
$$= qvB(R) \left(m \frac{r}{R}\right)$$

$$\Rightarrow F(x) = \gamma m \frac{d^2x}{dt^2} = \gamma \frac{mv^2}{R^2} x (1-m)$$

$$\ddot{x} - \frac{v^2}{R^2} (1-m)x = 0$$

Questo è un oscillatore con  $\omega = \omega_0 \sqrt{1-m}$ .

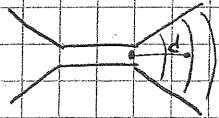
$\Rightarrow$  se  $m < 1$  si ha una forza di richiamo!

///  $d > R_0$  per avere fuocheggiamento in  $x$ .

12 ottobre 2011

$n$  - indice di campo

$$n = \frac{R}{d}$$



Nel betatrone c'era il problema di come fare e far circolare le particelle nel vuoto, allora si fanno girare nel tubo che e' come una ciambella intorno al magnete.

Non vogliamo che la particella si sposti rispetto al centro della traiettoria, ma vogliamo che la particella, se si dovesse spostare torni poi nella posizione di equilibrio.

$n < 1 \Rightarrow$  la particella e' stabile sul piano della macchina, cioè orizzontalmente



In genere la stabilita' lungo  $x$  e' data da  $n < 1$ , una componente e' sul piano verticale.

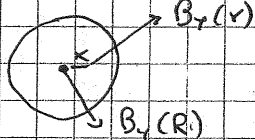
$$F_y = qvB_x \quad \nabla \times B = 0$$

Di sicuro non c'e' la componente  $B_z$ , che e' quella nello stesso senso del moto della particella

$$\nabla \wedge B = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x}$$

$$B_y(r) = B_y(R) \left(1 - \frac{nr}{R}\right)$$

$r$  e' la variabile che mi dice qual e' la componente del  $B$  verticale



I raggi si calcolano rispetto al centro del magnete

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = B_y(R) \frac{n}{R}$$

Allora possiamo fare un'integrazione:

$$B_x = -B_y(R) \frac{n}{R} y \quad n \text{ volte di } B_x$$

La particella e' lungo  $z$ , la componente di  $B$  e' verso  $x \Rightarrow$  le forze sono' lungo  $z$ . Dobbiamo capire pero' se la  $F$  e' di attrazione o di repulsione.

Alla fine otteniamo la relazione:

$$F_y(y) = -\gamma m n \frac{v^2}{R} \cdot \frac{y}{R}$$

si arriva qui perche' per imporre la

stabilita' sul piano della macchina deve essere:

$$B_y(R) = \frac{\gamma m v^2}{R q \mathcal{H}} \quad [F_{\text{centrifuga}} = qvB_y(R)]$$

La forma di Lorentz lungo l'orbita deve essere uguale all'accelerazione centripeta.

$$\gamma m_0 \frac{v^2}{R} \quad B_y(R) = \frac{\gamma m_0 v^2}{qR}$$

I passaggi completi sono:

$$F_y = qv B_x \quad \text{ma} \quad B_x = -B_y(R) \frac{y}{R}$$

$$\Rightarrow F_y = -qv B_y(R) \frac{y}{R} \quad \text{ma} \quad B_y = \frac{\gamma m_0 v^2}{Rq}$$

$$\Rightarrow F_y = -\gamma m_0 v \frac{v^2}{R} \cdot \frac{y}{R} = -\gamma m_0 v \frac{v^2}{R^2} y$$

↳ Questa forza è di richiamo che cresce al crescere di  $y$ , e' proprio quella che volevamo.

$\omega_y = \omega_0 \sqrt{n}$  si deve capire quando e' che questa  $\omega$  e' zero

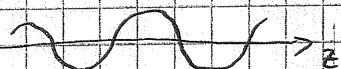
(cioe' agisce veramente come un pendolo):  $n > 0$ , quindi

le condizioni per mantenere il fascio al centro della camera

la e':  $\boxed{0 < n < 1}$

Allora all'interno di  $B$  ci sarà una forza di richiamo lungo

yo y e allora la particella fa:

  $\rightarrow z$  cioe' si allontana e ritorna

Queste frequenze si chiamano oscillazioni di betatrone. Sul piano

yo verticale hanno una frequenza e su quello orizzontale ne

hanno un'altra, che sono scorrelate.

$$\omega_y = \omega_0 \sqrt{n} \quad \omega_x = \omega_0 \sqrt{1-n} \quad \text{Queste sono indipendenti}$$

Abbiamo un'oscillazione di betatrone sul piano x e una sul piano

y:  $\beta_x \neq \omega_0$ , solo in casi eccezionali queste oscillazioni sono uguali.

li, ma in generale non contano niente.

Si era poi capito che i magneti andavano costruiti con i nuclei di

campo tali per cui c'era la forza di richiamo.

Per stare sull'orbita di riferimento la particella deve essere

iniettata esattamente nel punto (ostacolo) del centro e

con impulso quello preciso, questo e' praticamente impossibile.

Possiamo scegliere noi qual e' la sezione trasversa del pacchetto,

prima erano di  $2 \times 6$  mm ora si usano fore di  $10 \text{ nm} \times 10 \text{ nm}$ .

La grandezza tipica del fascio rimane comunque il mm.

$B\rho = \frac{p}{e}$  e qui si deve capire fino a quanto può arrivare la tecnica di focalizzamento  $B\rho$  è fissato dall'impulso.

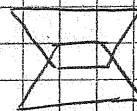
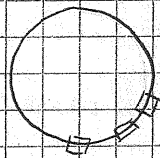
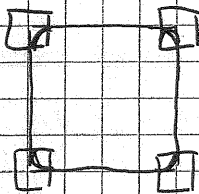
Se vogliamo una particella da 200 MeV:  $B\rho = 2.2 \text{ Tm}$ , dato che a livello industriale si riescono a fare campi di 1 T allora ci vogliono 2m di raggio.

Per 1000 MeV:  $B\rho = 5.7 \text{ Tm}$

7 TeV =  $7 \cdot 10^6 \text{ MeV}$  → allora si vede che non funziona la tecnica di andare avanti con un campo magnetico unico.

Quindi invece di usare un solo magnete si è pensato di usare tanti piccoli ciascuno dei quali devia la particella, una tra una e l'altra la particella va a dritto.

Questa tecnica permette di fare anche un acceleratore quadrato:



→ altro tipo di magnete

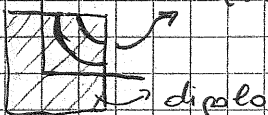
Avere tanti magneti invece di uno crea più gradi di libertà.

A questo punto usciamo 2 raggi nella teoria degli acceleratori.

$R$  - raggio fisso della macchina, che non ha niente a che vedere con  $p$ ,  $R$  è legato al periodo di rivoluzione  $T_{rev}$

$\rho$  - raggio di curvatura che fanno i dipoli

Questi sono due  $\rho$  diversi tra loro.



dipolo

$\rho$  dipende essenzialmente da  $B$ , il quale è dato dall'impulso con cui la particella entra

nell'acceleratore;  $\rho$  è legata all'intensità del campo dei dipoli.

Se un dipolo fa un  $\rho = 20^\circ \Rightarrow$  abbiamo bisogno di  $\frac{360}{20}$

dipoli, nell'esempio quadrato ogni dipolo ruota di  $90^\circ$ , più è grande il numero di dipoli (minore è l'angolo di curvatura)

più l'acceleratore si avvicina ad uno circolare; il problema che nasce è legato alla potenza usata per alimentarli.



Tutte le volte che una particella aumenta il suo impulso allora  $B$  o  $\omega$  aumentano per mantenere fisso  $R$  (e anche  $p$ ).

Il raggio del ciclotrone definisce un tempo di rivoluzione.

$\omega = \frac{2\pi N_{part} \cdot n}{L}$   $\rightarrow$  questo deve essere un numero intero della radiofrequenza  $\omega_{RF}$ , si chiamano armoniche.

$n$  ha anche un altro significato: quanti sono i pacchetti che possono circolare dentro l'acceleratore? proprio  $n$ , se l'armonica è  $\pm 1$  allora si possono mettere solo 1 pacchetto; se  $n = 10$  allora solo 10 pacchetti possono entrare con la fase giusta.

Il problema è che i campi  $B$  non si possono cambiare molto velocemente (che è il tempo brevissimo che ci mette la particella a fare un giro), la cosa è risolta perché  $p$  non cambia molto perché ci sono le forze di richiamo che mantengono la particella al centro ci sono e ci danno qualche giro di margine.

Il centro un po' più si sposta, aumenta la  $\omega$  del betatrone, ma non di molto. Ci sono poi le oscillazioni lungo  $z$  (oscillazioni di sincrotrone) ma le vedremo poi.

Avevamo visto che i cilindretti focalizzano il fascio, ma se il LINAC è troppo lungo questi non bastano, allora ci si mettono delle lenti; ogni volta che si focalizza le particelle cominciano ad oscillare; l'oscillazione è attorno al centro del fascio  $\Rightarrow$  ogni particella ha una sua diversa oscillazione e non rientra niente una con l'altra. L'oscillazione è attorno al centro ideale del pacchetto. Il moto della particella è dato dalla combinazione di 2 oscillazioni sul piano trasverso e una su quello longitudinale.

La regione del pacchetto è particolarmente turbolenta, non per altro ci è il motivo della repulsione. Andremo poi a vedere quali sono le caratteristiche di una particella perché una particella esca dal pacchetto.

Gli acceleratori si progettano studiando il moto di una singola particella. Abbiamo visto che con il tempo si deve aumentare il campo che guida il moto della singola particella.

Con che velocità si deve aumentare  $B$ ?

$$\frac{dp}{dt} = e \rho \cdot \frac{dB}{dt} = e \rho \cdot B'$$

(da cambiare)

$$(\Delta p)_{\text{giro}} = e \rho B' T_{\text{riv}} = \rightarrow \text{Di quanto cambia l'impulso in un giro}$$

$$= e \rho B' \cdot \frac{2\pi R}{v}$$

$R$  è il raggio della circonferenza equivalente al perimetro dell'acceleratore che abbiamo (di qualunque forma si tratti). Facendo tanti giri: più sono più si rimpicciolisce e poi non si riesce a fare i giri allora dovremmo mettere sempre più correzioni. I limiti però sono solo tecnici e non fisici.

Dalla cinematica:  $E^2 = E_0^2 + c^2 p^2 \Rightarrow \Delta E = v \Delta p$

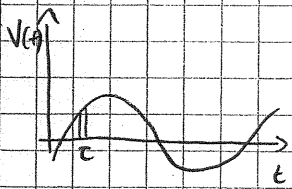
$$\Delta p = \frac{\Delta E}{v} \Rightarrow \frac{\Delta E}{v} = \frac{2\pi R}{v} e \rho B'$$

Tutte queste grandezze le definiamo al momento della progettazione.

Attraverso tutti questi parametri si ricava l'informazione su come si deve cambiare il campo magnetico, e facciamo il circuito in un solo tale da  $B$  cui cambi come  $v$ .

$$\Delta E = V \sin \varphi$$

dove  $V$  è differenza di potenziale massima e disposizione, e entrerà con una certa fase.



$t$  è il tempo di transito, che è trascurabile rispetto a  $V$  perché la particella va alla velocità della luce.

$\Delta E$  fissa  $B'$ , questo vuol dire che c'è una fase fissa, altrimenti o la frequenza cambiare la velocità con cui cambiare il campo  $B$ .

La stabilità di fase non c'è perché il pacchetto è esteso, ma è stato dimostrato che l'accelerazione funziona lo stesso.

Trovare in quanti punti i pacchetti si incontrano in funzione dell'energia (con particelle di segno opposto). # pacchetti, come si distribuiscono come interagiscono.

Abbiamo visto che i dipoli si possono fare anche con i piani non  
paralleli:  $\parallel$  o  $\angle$

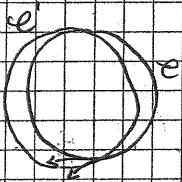
Ma in un caso i magneti devono essere sempre più grandi, ma  
allora  $u \gg 0$  ma questo porta a non avere più foceggiamento,  
allora si alternano:  $u \gg 0$  e  $u \ll 0$ , ma la cosa non ha  
funzionato perché non si riesce a seguire bene l'orbita di par-  
ticolare singolo.

Allora si usano lenti magnetiche che foceggiano il fascio.

13 ottobre 2011

sicuramente sono gli acceleratori più idonei per andare verso impulsi più alti possibile; ci sono più inquieti che dovremmo tenere le particelle il più compatte possibile, dobbiamo anche costruire questi magneti che vicino le forze di richiamo sulle particelle per tenerle compatte.

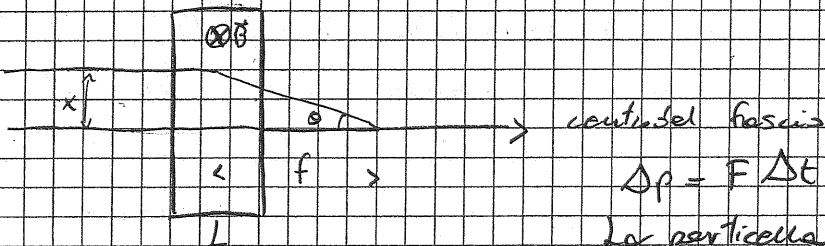
La particella forma una circonferenza per la forza di Lorentz. Dobbiamo capire cosa succede se la particella entra con impulso non tangente:



Si trova in questo modo l'oscillazione di betatrone, se non c'è una forza di richiamo avremo spallamenti enormi.

In base alla componente trasversa di  $\vec{p}$  possiamo fare oscillazioni; come ci pare, quello che vogliamo però è che siano piccole. L'orbita della particella è stabile perché è chiusa, anche se oscilla rimane sempre la stessa.

C'è poi il problema della stabilità sul piano verticale, sulla  $x$  agisce la forza di Lorentz, e sulla  $y$  dobbiamo usare delle lenti magnetiche. Se la particella scivola verticalmente allora si spiralizza e la perde.

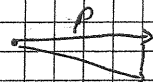


$$\Delta p = F \Delta t = e v B \frac{L}{v} = e B L$$

La particella si muove a distanza  $x$  rispetto a dove dovrebbe stare, poi attraverso la lente magnetica e viene deviata secondo le leggi ottiche.

Rispetto all'asse il campo  $\vec{B}$  deve essere opposto altrimenti anche la particella che viaggia a  $-x$  sarebbe deviata parallelamente e quindi si allontanerebbe.

$$\theta = \frac{\Delta p}{p} = \frac{e B L}{p}$$



Avremmo visto che un focalizzamento efficace è quello debole che varia lentamente alla distanza dall'asse del fascio

$$B = \frac{\partial B}{\partial x} x = B' x \quad B' \text{ costante}$$

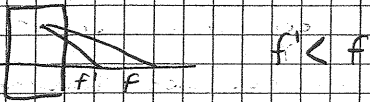
$$\theta = \frac{e B' L}{p} x \quad \text{l'angolo varia con } x$$



Per analogia con l'ottica geometrica:  $\theta = \left(\frac{eB'L}{p}\right) x = \frac{x}{f} \cdot x$

$\frac{eB'L}{p}$  fa proprio ciò che fa il fuoco  $\rightarrow$  costante

Avere un fuoco piccolo vuol dire che il fascio è piegato duramente



Viene però utilizzata un'altra notazione: la traiettoria è governata da  $B_0 \rho = \frac{p}{e}$  e assicura il fatto che la particella giri, in un

acceleratore:  $B_0 \rho \equiv \text{RIGIDITÀ}$

$B_0$  non è un campo unico ma è stato spezzettato in frazioni di grado

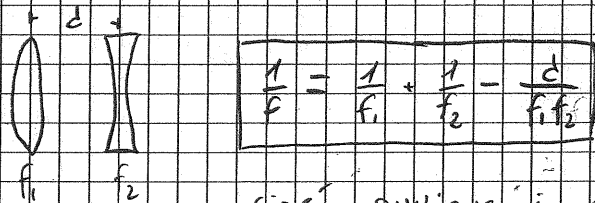
$B \cdot \rho = 3.33 \rho$  così possiamo facilmente calcolare la  
 $\text{TD} \rightarrow m \quad \rightarrow \frac{\text{GeV}}{c}$   
 rigidità e sapendo  $B$  anche la lunghezza delle dimensioni dell'acceleratore

La costante 3.33 viene fuori dalle unità di misura che usiamo.

Alla fine si trova:  $f = \frac{e B_0 \rho}{e B' L} = \frac{B_0}{B'} \cdot \frac{\rho}{L}$

N.B.  $B'$  non è un campo magnetico, ma è il gradiente del campo magnetico nella lente deobbiana.

Questo descritto è il principio della lente magnetica.



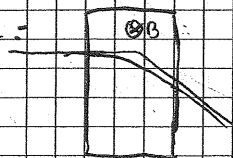
Esistono infiniti valori di  $f_1$  e  $f_2$  per cui il focologgiamento è positivo

cioè avviene in avanti rispetto alla direzione di incidenza della luce. Dall'ottica: un doppietto convergente-divergente può essere positivo (= in avanti).

Il problema deobbiano è che se una lente converge in  $x$  e diverge in  $y$  (o viceversa) allora dobbiamo usare i doppietti per avere una convergenza complessiva sia in  $x$  che in  $y$ .

Affidando si possa scrivere  $\theta = \frac{x}{f}$  abbiamo essere in condizioni di lente sottile, magneticamente vuol dire che le dimensioni della lente devono essere piccole rispetto al raggio di curvatura.

Quando abbiamo misurato  $\theta$  abbiamo preso la metà del raggio, in realtà la particella curva:



Ad entrambi i magneti dobbiamo applicare la lente sottile sul piano (se è quello su cui vogliamo agire).

Nella lente sottile ideale la traiettoria è proprio una sferica.

Il raggio dell'acceleratore è importante perché con il magnete io ho sempre la stessa curvatura, ma questo mi va ad intaccare con la traiettoria delle particelle per cui la curvatura che da la lente deve essere adeguata.

## = MAGNETI

Useremo campi magnetici bidimensionali, cioè che lavorano sul piano trasverso rispetto al percorso della particella.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

↳ Non dobbiamo correre da generano  $\vec{B}$  nel volume considerato

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{essendo } \varphi \text{ il campo scalare di } \vec{F} = \vec{A} + i\varphi$$

$$\text{↳ eq. di Laplace } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Per campi bidimensionali possiamo usare  $z = x + iy$  (punto sul piano xy)

Si può dimostrare che una soluzione dell'eq. di Laplace è:

$$F = C_n z^n$$

$\nabla \times B$  - situazione dei campi dove si muove il fascio

$\nabla \cdot B$  - si capisce da qui che la parte scalare soddisfa l'eq. di Lap.

$F = C_n z^n$  - da qui si trova una soluzione sia per  $\varphi$  che per  $A$ , infatti note  $\varphi$  si ricava  $A$  in qualche modo

$n$  - numero dei poli che generano il campo magnetico; per cui la soluzione di un dipolo è data da  $C_1 z^2$ , per il quadrupolo si ha  $C_2 z^3$ .

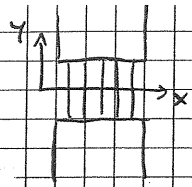
Dobbiamo poi vedere relazione c'è tra  $F$  e le componenti di  $B$

$$F = \vec{A} + iV$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} B_x = -\frac{\partial A}{\partial y} \\ B_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \end{array} \right.$$

Separando le componenti vettoriale e scalare di  $F$  allora facendo derivate si ricavano  $B_x$  e  $B_y$ .

Se  $C_n \in \mathbb{R}$  si può dimostrare che se  $y=0 \Rightarrow B_x=0$  e  $B_y \neq 0$  e quindi i magneti sono detti verdi.



Dipolo reale se  $B_x = 0$  e  $B_y \neq 0$

Questo dipolo poi lo possiamo ruotare di  $\frac{\pi}{2}$  e si trova  
 due per  $y=0$   $B_x \neq 0$  e  $B_y = 0$

Se  $C_n$  è immaginario allora il dipolo è quello ruotato della propria  
 simmetria (cioè: si scambia  $x$  con  $y$ ) si dice schew.

In tutte le soluzioni intermedie avremo componente sia reale che im-  
 maginaria.

In un acceleratore non si devono mai mescolare  $x$  e  $y$ , cioè  $C_n$   
 deve sempre essere 0 reale o immaginario, se  $x$  e  $y$  sono comp-  
 piati l'acceleratore non funziona.

Prendiamo  $n=1$ , si studia quindi il campo di un dipolo, con  
 $C_1 \in \mathbb{R}$  e reale.

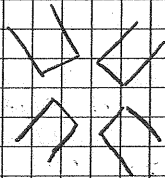
$$F = C_1 Z = C_1(x + iy) = A + iV \rightarrow \text{per definizione}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = C_1 x \\ V = C_1 y \end{cases}$$

$$\text{Allora calcoliamo i campi: } B_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = -C_1$$

Quello cui vogliamo arrivare erano le superfici equipotenzioli del ma-  
 gnete.

Nel quadrupolo:



In realtà non è fatto così, ma le su-  
 perfici fanno un'iperbole:  $xy = k$ , il  
 problema poi è come saper calcolare le

La capacità focaleggiante è legata  $k$ , e le lent. magnetiche devono  
 essere diseguate ad hoc.

e superfici equipotenzioli sono:  $x = \frac{A}{C_1}$  e  $y = \frac{V}{C_1}$  in fatto sostitu-  
 do queste espressioni in  $F$ :  $F = C_1(x + iy) = A + iV$  e non varia perché è  
 costante.

Se  $C$  è un immaginario puro allora troviamo la relazione simmetri-  
 ca a quella trovata, e si trova il magnet a  $90^\circ$  rispetto a quel-  
 lo fatto.

Da un dipolo abbiamo ottenuto che il campo è costante o in  $x$   
 o in  $y$ , e le superfici sono rette orizzontali, in un dipolo schew le  
 soluzioni sono rette ma verticali. Nel quadrupolo si hanno delle  
 iperboli, nel sestupolo la curva è molto più strana.

$$n=2 \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

$$F = C_2 (x + iy)^2 = C_2 (x^2 - y^2 + 2ixy) \equiv A + iV$$

per definizione

$$A + iV = C_2(x^2 - y^2) + 2iC_2xy$$

Questa è l'iperbole che viene fuori.

$n = 3$   $C_3 \in \mathbb{R}$  caso del sestupolo

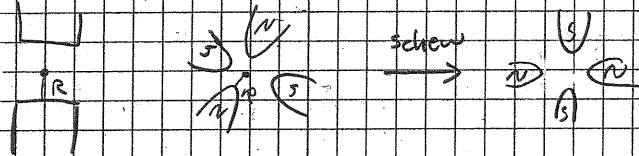
$$F = C_3(x + iy)^3$$

Le simmetrie del campo fuori dell'eq di Laplace nel caso bidimensionale sono del fatto che l'equazione è quadratica. Date la forma del potenziale (la somma della parte reale più quella immaginaria) allora possiamo trovare il campo calcolando le derivate parziali.

$$= C_3(x^3 - iy^3 + 3iyx^2 - 3xy^2) = C_3(x^3 - 3xy^2) - C_3i(y^3 - 3x^2y)$$

superficie equipotenziale

Il valore della costante è  $\mathbb{R}$ , che è metà della gap.



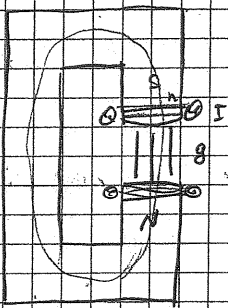
Nel quadrupolo la simmetria è a  $45^\circ$  e non a  $30^\circ$  come nel caso del dipolo, per cui per avere lo schew del quadrupolo dobbiamo essere a  $45^\circ$ .

20 ottobre 2011

Si deve capire che tipo di forze esercitano i magneti, e quindi qual è la capacità di piegamento di ogni tipo di magnete.

Con un dipolo si applica un campo  $\perp$  al piano della macchina modo tale da avere  $B \cdot \rho = \frac{p}{e}$ . Ma come si calcola  $B$ ?

Si parte con un dipolo:



Ci sono le spire entro cui circola corrente e genera il campo.

Le grandezze in gioco sono: la corrente  $I$ , la distanza tra i poli e il numero  $N$  di spire.

Dalla legge di Ampere:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = NI$$

flusso di corrente attraverso l'area dell'unità della circuitazione.

$$H = \frac{B}{\mu_0}$$

troviamo 1 il percorso dentro al magnete e 2 quello intorno ai poli del magnete.

$$H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot g = NI$$

$$\frac{B}{\mu_0 \mu_r} l_1 + \frac{B}{\mu_0} g = NI$$

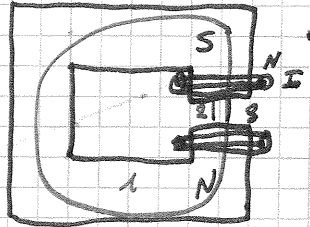


20/10/11

$$B_p = \frac{p}{e} \quad \frac{1}{f} = 0,3 \frac{eB}{p}$$

$$\oint H ds = \int J dA = I_T$$

$$H = \frac{B}{\mu_0}$$



$$H \cdot (l_1) + H g = N \cdot I$$

$$\frac{B}{\mu_0} l_1 + \frac{B}{\mu_0} g = NI$$

La differenza tra il percorso 1 ed il percorso 2 sta nel materiale attraversato.

$l_1$  è dell'ordine di poco più di  $g$ ,

mentre il fattore  $\mu$  moltiplicarlo è estremamente più piccolo  $\Rightarrow$  trascurare il termine.

Ora sappiamo fare un dipolo con il campo magnetico che vogliamo, trovando fattori elettrici e geometrici.

NB.: in ogni caso, per materiali ferromagnetici,  $B \leq 2T$ , poi il ferro si satura.  $\Rightarrow$  superconduttori.

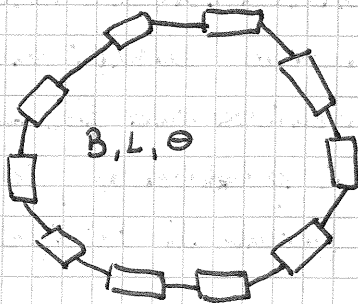
$$B = \frac{\mu_0 N I}{g}$$

Ovvero:  $B_y = \frac{0,4\pi}{10^4} \cdot \frac{I \text{ [Ampere/giro]}}{g \text{ [cm]}}$

$I$  tiene conto del numero di spire! Es.: 1 A/giro  $\forall$  spira, 50 spire  $\Rightarrow I = 50 \text{ A/giro}$

Attorno ai grandi acceleratori sorgono sempre piscine e torri piezometriche, che fungono da raffreddamento per le spire dei magneti, così che possano sopportare più corrente possibile.

Se ho un acceleratore abbastanza grande, non posso avere un unico dipolo che contenga tutta l'orbita.

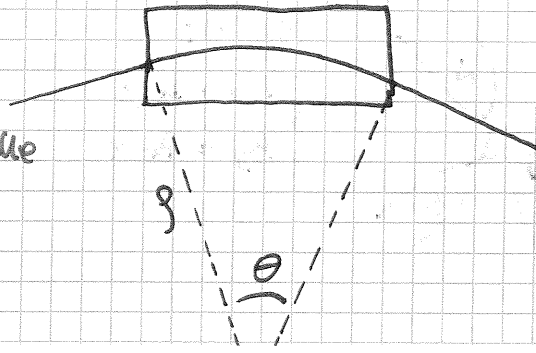


La particella curva soltanto all'interno dei dipoli.

Ma occorre conoscere la relazione tra  $B$ ,  $e$  e  $\theta$ .

$$\sum_i \theta_i = 360^\circ$$

$B$ ,  $f$  sono definiti a priori dalle esigenze di fisica e dal budget a disposizione.



$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{L}{2p} \quad Bp = \frac{p}{e}$$

Se  $\theta$  è piccolo:

$$\frac{\theta}{2} \approx \frac{L}{2p} \Rightarrow \theta = \frac{L}{p}$$

NB.: Il raggio è funzione della carica della particella!  $e \rightarrow ze$ .

Ora abbiamo delle particelle cariche che compiono un'orbita chiusa. Se aumentiamo il loro impulso, dobbiamo aumentare la corrente sui dipoli per mantenerle su un'orbita chiusa. Bisogna stare attenti che la corrente nelle bobine sia

lontano dal punto di fusione del rame; inoltre deve sempre essere sinusoidale per mantenerci in fase con le particelle.

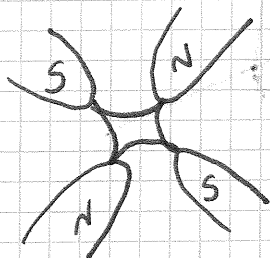
Di solito manteniamo la corrente ad impulso massimo minore o simile a metà della corrente massima gestita dai dipoli:

$$I_{MP} \leq \frac{I_M}{2}$$

Quindi l'intervallo di corrente con cui lavoriamo è:  $\Delta I = I_{MP} - I_i$

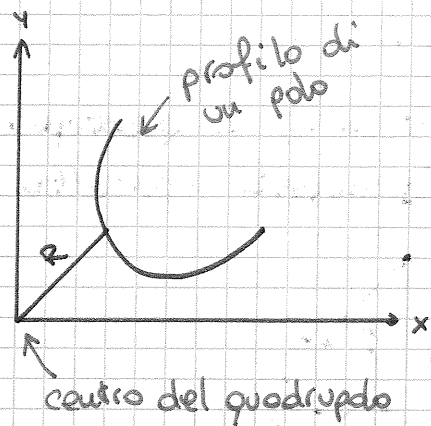
Gli acceleratori non sono termostati  $\Rightarrow$  la resistività del rame dipende anche dalla temperatura.

Il fascio ha bisogno di essere fuocoeggiato con forze di richiamo, affinché si muova ragionevolmente intorno all'orbita di riferimento  $\Rightarrow$  Occorrono campi magnetici fuocoeggianti. Il magnete che fornisce una forza di richiamo - kx tipo oscillatore armonico è il quadrupolo, le cui superfici equipotenziali hanno la forma di un'iperbole.



$$xy = k$$

$$\begin{cases} B_x = B_0 y \\ B_y = B_0 x \end{cases}$$



lungo  $R$ ,  $x = y$ .

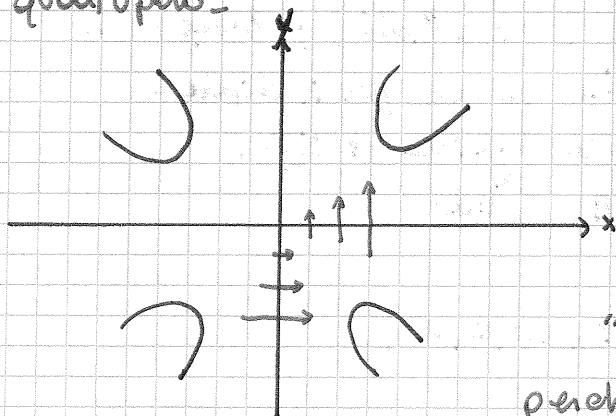
Quindi:  $B_r = B_0 r$

Ora per costruire il quadrupolo dobbiamo conoscere  $k$ :  
 com'è fatta l'ipbole?

lungo  $R$  vale: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y^2 = R^2 \\ x = y \end{cases}$$

ma  $xy = k \Rightarrow y^2 = k \Rightarrow \boxed{k = \frac{R^2}{2}}$

$\Rightarrow$  L' "apertura" dell' iperbole è definito dalle dimensioni del quadrupolo.



Al centro la forza è nulla, e cresce man mano che ci allontaniamo dall' orbita ideale.

" $B_0$ " in realtà si chiama " $B_2$ ", perché è un coefficiente che

dipende da  $\frac{N}{z}$ ,  $N =$  numero dei poli. Viene chiamato anche gradiente.

$B_2 = \frac{\partial B_y}{\partial x} \left[ \frac{T}{m} \right]$  nel dipolo il gradiente si misura in  $T$ , nel quadrupolo in  $T/m$ ,

nel sestupolo in  $T/m^2$ , nell'ottupolo in  $T/m^3$ ...

Si definisce gradiente normalizzato  $\frac{B_2}{B_p}$ .

Si usa il gradiente normalizzato, ovvero  $\frac{B_2}{B_p} = \frac{B_2}{\rho E}$ , perché utilizzo  $B$  come campo di richiamo: ci interessa conoscere il rapporto tra l' impulso trasverso e l' impulso delle particelle, ovvero l' ANGOLO dalla traiettoria ideale.

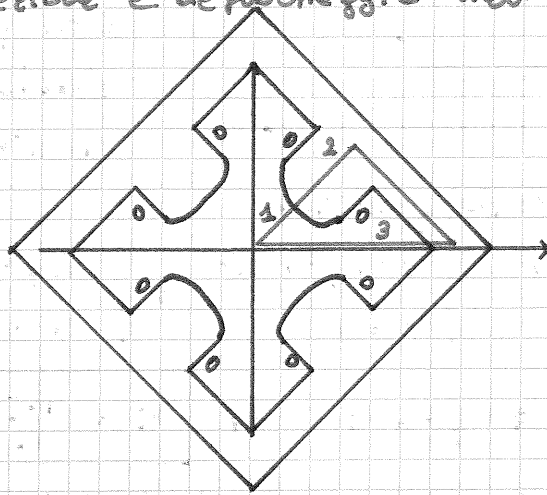
$\Rightarrow$  Risultato che è più facile fuocoaggiare particelle con alto impulso lungo la direzione dell' acceleratore.

Una delle branche di ricerca nel campo degli acceleratori è lo studio di sorgenti a bassa emittanza, ovvero di sorgenti di particelle a più basso impulso possibile

(e quindi a più basso  $B_{\perp}$  possibile).

A secondo di come sono messi N ed S, il quadrupolo fuocheggia in una direzione e defuocheggia nell'altra.

Quanto vale  $B_2$ ?



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

lungo il percorso 3  $\vec{H} \cdot d\vec{l}$  è nullo (ortogonali); lungo il percorso 1 termine è trascurabile come per il dipolo.

NB.: il percorso attraverso una sola bobina  $\Rightarrow \frac{NI}{2}$ .

$$B_2 = \frac{2\mu_0 NI}{R^2} \frac{1}{2} \quad (\text{abbiamo fatto } \int_0^R \vec{H} \cdot d\vec{r})$$

$$= \mu_0 NI \frac{1}{R^2} \quad B_2 = B_2(N, I, R^2)$$

$\Rightarrow$  i quadrupoli sono oggetti piccoli, perché R va mantenuto piccolo.

I dipoli possono essere molto lunghi, perché  $\theta$  dipende dalla lunghezza; inoltre possono essere anche più grandi trasversalmente rispetto al quadrupolo.

$$\begin{cases} B_x = G y \\ B_y = G x \end{cases} \quad \text{La forza agente è quella di Lorentz, } \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow F = vB = kv[kx]$$

(dentro k c'è il gradiente normalizzato).

$$F = vB$$

$$F_x = v B_2 x \equiv kx, \quad k = v B_2 = v \mu_0 NI \frac{1}{R^2} = \frac{p}{m} \mu_0 NI \frac{1}{R^2} = \frac{e B p}{m} \mu_0 NI \frac{1}{R^2}$$



MECHINE 24/10/11

Volevamo calcolare il gradiente di un sestupolo.

Averanno trovato che, per un 6-polo, l'inverso del fuoco ha questa espressione:

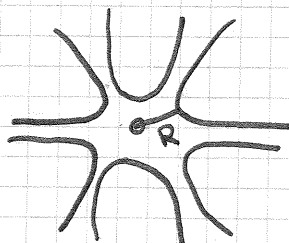
$$\frac{1}{f} = \frac{B''L}{B\rho}$$

Per un sestupolo dobbiamo ricordarci che:

$$3x^2y - y = \pm R^3$$

$$B_x = 6B_3 xy$$

$$B_y = 3B_3(x^2 - y^2)$$



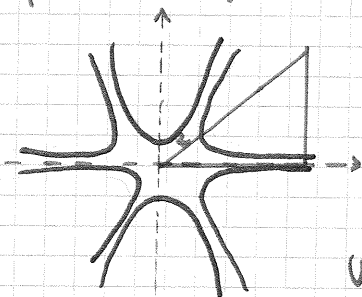
Scegliamo un sistema di assi cartesiani tale che, lungo R,  $x=y$ . Si ricava quindi:

$$B_R = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 3 \cdot B_3 \cdot R^2$$

Per il quadrupolo avevamo trovato  $B_R = c \cdot R^1$ , e per il dipolo  $B_R = c \cdot R^0 \Rightarrow$  nell'ottupolo avremo  $B_R \propto R^3$ .

Il gradiente è:  $G = B'' = 6B_3$

Dobbiamo calcolare il coefficiente  $B_3$ . Come per dipolo e quadrupolo, scegliamo un percorso di questo tipo:



$$\oint H dl = \frac{NI}{2} = \frac{1}{\mu_0} \int_0^R \frac{B''}{2} r^2 dr \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow B'' = \mu_0 \frac{6NI}{R^3} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow B_3 = \mu_0 \frac{NI}{R^3} \cdot \frac{1}{2}$$

Una volta calcolato il gradiente, siccome questo dipende solo da R, non ha più

importanza come ho impostato il sistema di assi cartesiani.

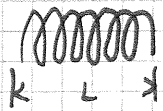
L'abbiamo scelto come ci era più conveniente per il calcolo.

Anche il sestupolo risulta essere una buona lente magnetica.

L'acceleratore ideale è fatto di dipoli e quadrupoli. Nei casi reali si usano anche sestupoli. Se la macchina è veramente problematica usiamo anche ottupoli e decapoli.

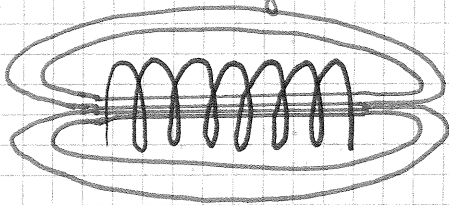
È un altro tipo di lente magnetica, non multipolare,

molto utile per bassi impulsi (fisico medica) =  
il SOLENOIDE. Sappiamo che:



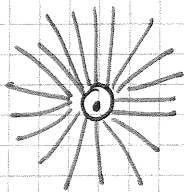
$$B_z = \mu_0 \frac{NI}{L}$$

Come fa a comportarsi da lente un oggetto che crea un campo solo lungo z? Il trucco sta nell'exit feed:



All'interno del solenoide la particella spiralizza, come nel dipolo. All'uscita vede un campo che si torce.

Sul piano trasverso vediamo, all'uscita, un campo a simmetria radiale:



Si dimostra che:

$$B_x = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \cdot x$$

$$B_y = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \cdot y$$

(all'interno,

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0)$$

Questo è un campo di tipo quadrupolo, ma a differenza del quadrupolo è contemporaneamente fuococonvergente in entrambe le direzioni.

Come mai allora usiamo i quadrupoli?

• quadrupolo  $f_{\text{QD}} = \frac{B\rho}{B'L} \sim p$

• solenoide  $f_s = \frac{2}{L} \left( \frac{B\rho}{B_z} \right)^2 \sim p^2$

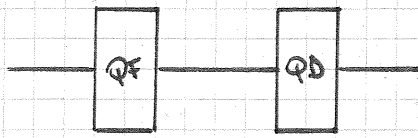
⇒ il fuoco del solenoide è molto più grande ⇒ è più distante, la lente magnetica fuococonverge di meno.

Il solenoide è buono in sincrotroni ed elettrosincrotroni dove  $p < 1 \text{ GeV}$ .

DIPOLO → la particella si muove lungo una circonferenza

QUADRUPOLO → fatto di richiamo per particella che si discosta dall'orbita ideale.

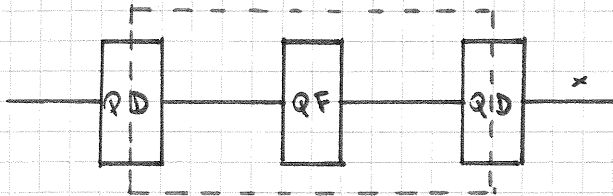
L'elemento di base di un acceleratore moderno è il doppietto di quadrupoli, uno fococcheggiante ed uno defococcheggiante lungo una data direzione.



Il doppietto ha capacità complessiva di fococcheggiare:

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \right)$$

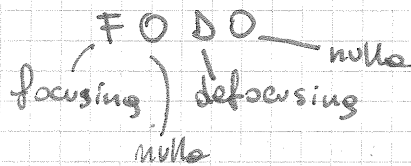
I macchinisti definiscono "FOOO" il sistema:



$$\frac{1}{f} = \left( \frac{2}{f} + \frac{2}{f} - \frac{x}{f^2} \right)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{4f - x}{f^2} \quad x \approx 3f$$

Questo consente di considerare l'acceleratore come un numero intero di FOOO.

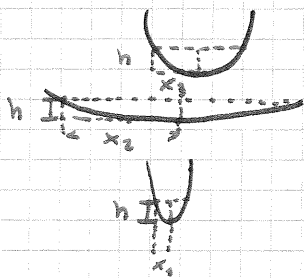


Progettare un acceleratore  
 $\equiv$   
 progettare un FOOO.

Il percorso di una particella in un acceleratore è come quello di una pallina in una grondaia.

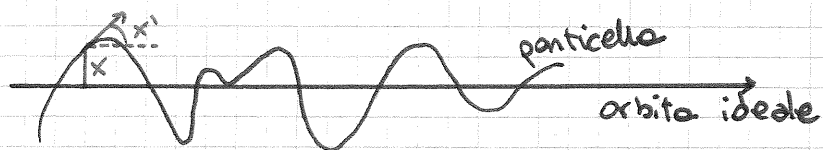


Ma in un acceleratore il profilo (la buca di potenziale) non è costante: l'ampiezza dell'oscillazione è dipendente dalla forza di richiamo e varia lungo la circonferenza.



Le quantità che ci interessano sono:

- la distanza  $x$  dall'orbita ideale
- l'angolo  $x'$  rispetto all'orbita ideale



I quadrupoli riusciranno a fococcheggiare in un certo intervallo di angoli  $x'$ .

Tune  $\equiv$  (in italiano ~~sinerchia~~ "tuno") è il numero di oscillazioni compiute dalla particella in un giro completo.

Scopriremo che se il tune è un intero o un razionale  
la nostra macchina non funziona.

È un parametro di progettazione: se costruiamo una  
macchina con  $N$  oscillazioni di betatrone, essa può  
lavorare con tune  $N, x_1, x_2, \dots$ . Il tune può essere  
modificato anche mentre il fascio viene accelerato.

Il moto della particella attorno all'orbita di riferimento  
si esprime con un'equazione di oscillatore armonico,  
punto per punto.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Gli acceleratori non usano il tempo: il loro orologio è il  
giro:

$$\frac{ds}{dt} = c \Rightarrow dt = \frac{ds}{c}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} + kx = 0$$

La posizione lungo la traiettoria si esprime con  $s$ .  
Quindi in forma generale:

$\frac{d^2x}{ds^2} + k(s)x = 0$	EQUAZIONE DI HILL
---------------------------------	----------------------

Questo oscillatore armonico si sa risolvere con  $s$  fissato.  
In un acceleratore vero  $k$  varia MOLTO con  $s$ .  
L'equazione di Hill è alla base di qualsiasi acceleratore,  
anche lineare.

Se fosse un oscillatore armonico, la soluzione sarebbe:

$$x = A \cos(k's)$$

Nel nostro caso possiamo ipotizzare:  $x = A(s) \cos[k'(s)s]$   
La soluzione vera è:

$$x = \sqrt{\epsilon \beta(s)} \cos[\phi(s) + \phi_0]$$

Poniamoci 3 domande:

- 1)  $\beta$  e  $\phi$  sono correlate?
- 2) che relazione c'è tra  $\beta(s)$  e  $k(s)$ ?  $k(s)$  è necessariamente  
il gradiente del quadrupolo nel punto  $s$ .



3) cosa rappresenta  $\epsilon$ ?

Verifichiamo se questo ansatz è soluzione dell'equazione di Hill -  
mercoledì prossimo non c'è lezione.

$$\phi \equiv \phi(s) + \phi_0$$

$$\alpha \equiv -\frac{\beta'}{2} \quad (\beta' = \frac{\partial \beta}{\partial s})$$

$$\beta \equiv \omega^2$$

$$\gamma \equiv \frac{1 + \alpha'}{\beta} \quad (\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial s})$$

$$x'' + k(s)x = 0$$

Risolviamo:

$$x \equiv w \sqrt{\epsilon} \cos \phi$$

$$x' = \sqrt{\epsilon} \cdot \frac{dw}{ds} \cos \phi - w \sqrt{\epsilon} \phi' \sin \phi$$

$$x'' = w'' \sqrt{\epsilon} \cos \phi - \phi' \sqrt{\epsilon} w' \sin \phi - \sqrt{\epsilon} w' \phi' \sin \phi - \sqrt{\epsilon} w \phi'' \sin \phi - \sqrt{\epsilon} w \phi'' \cos \phi$$

Sostituendo nell'eq. di Hill:

$$w'' \sqrt{\epsilon} \cos \phi - \underbrace{w' \phi' \sqrt{\epsilon} \sin \phi - w' \phi' \sqrt{\epsilon} \sin \phi - \sqrt{\epsilon} w \phi'' \sin \phi - \sqrt{\epsilon} w \phi'' \cos \phi}_{-2w' \phi' \sqrt{\epsilon} \sin \phi - \sqrt{\epsilon} w \phi'' \cos \phi} + k(s) \sqrt{\epsilon} w \cos \phi = 0$$

Il termine in  $\sin \phi$  deve essere  $= 0$ , altrimenti la soluzione non è definita. Il termine in  $\cos \phi$  non contiene la fisica del sistema ( $k$ ).

$$-2w' \phi' - w \phi'' = 0$$

$$2w' \phi' + w \phi'' = 0$$

Questa è una condizione. Risponde alla domanda 1):  $w^2 = \beta$  e  $\phi$  sono correlati. L'ampiezza e la fase dell'oscillazione sono correlate.

$$2w w' \phi' + w^2 \phi'' = 0$$

ovvero:

$$\beta' \phi' + \beta \phi'' = 0$$

$\Downarrow$

$$\frac{d}{ds} (\beta \phi') = 0 \quad \beta \phi' = \text{costante}$$

Scegliendo il punto di inflessione posso imporre  $\beta \phi' = 1 \Rightarrow$

$$\phi' = \frac{1}{\beta}$$

Questo significa che:

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta} + \phi_0$$

dove  $s=0$  è il punto di iniezione e  $\phi_0$  è la fase al momento dell'iniezione.

NB.: questa è ancora una soluzione a particella singola.

27/10/11

Mercoledì non c'è lezione.

L'equazione di Hill ci dice punto per punto quant'è il coefficiente di richiamo.

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = 0 \quad \text{Equazione di Hill}$$

$$x = \sqrt{E \cdot \beta(s)} \cos \phi, \quad \phi(s) = \tilde{\phi}(s) + \phi_0$$

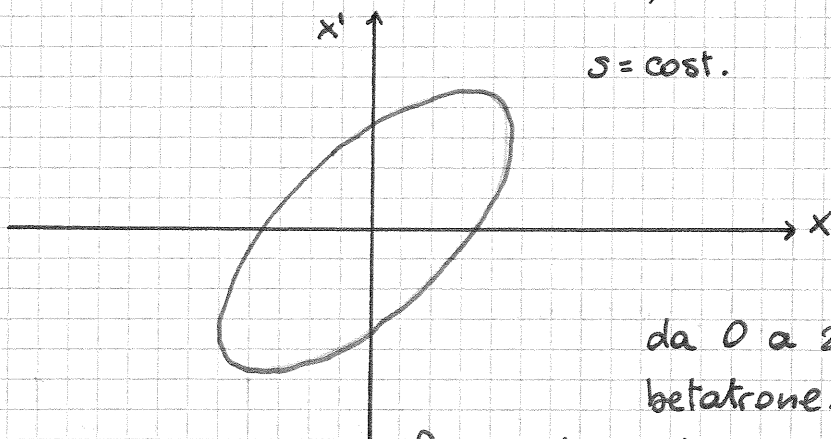
$$\phi(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta} + \phi_0$$

In ogni punto, se conosciamo  $\beta$  conosciamo  $\phi$ .

Rimane da capire come  $K(s)$  è legato alle lenti magnetiche, e come si fa a conoscere  $\beta$  in ogni punto.

$$x' = \alpha \sqrt{\frac{E}{\beta(s)}} \cos \phi - \sqrt{\frac{E}{\beta(s)}} \sin \phi, \quad \alpha = -\beta'/2$$

Il significato fisico di  $x'$  è l'angolo della particella rispetto al sistema di riferimento. Le informazioni che ci interessano a proposito della particella che si muove sono  $x$  ed  $x'$ , sono le variabili coniugate della nostra hamiltoniana ideale (l'impulso  $\gamma$  è fissato  $\Rightarrow$  non contiene informazioni rilevanti).



Per  $0 \leq \phi \leq 2\pi$

La curva nel piano delle fasi è una ellisse.

Tuno  $\equiv$  quante volte  $\phi$  va da 0 a  $2\pi$  dopo un giro di betatrone.

Se il numero di oscillazioni

fosse intero, dopo ogni giro la troveremmo nello stesso punto. Ma se non lo è  $\rightarrow$  "avanzamento di fase" in un giro.

( $E$  è una costante; ad  $s$  fissato  $\beta(s) = \text{costante} \Rightarrow$  ciò che fa variare  $x$  è  $\phi$ ). La posizione nel piano delle fasi si muove lungo l'ellisse. Se il tuo non è un numero razionale, la particella non tornerà mai 2 volte nello stesso punto nel piano delle fasi. Un acceleratore funziona solo in questo caso. Arrivare nello stesso punto sempre con una fase diversa mette la particella al riparo da eventuali perturbazioni esterne imprevedibili.

RISONANZA = una particella torna nello stesso punto nel piano delle fasi più di una volta.

Al variare di  $s$  e quindi di  $\beta$ , l'ellisse ruota sul piano. La sua area è però una costante, e vale  $E$ :

$$\pi r_1 r_2 = E$$

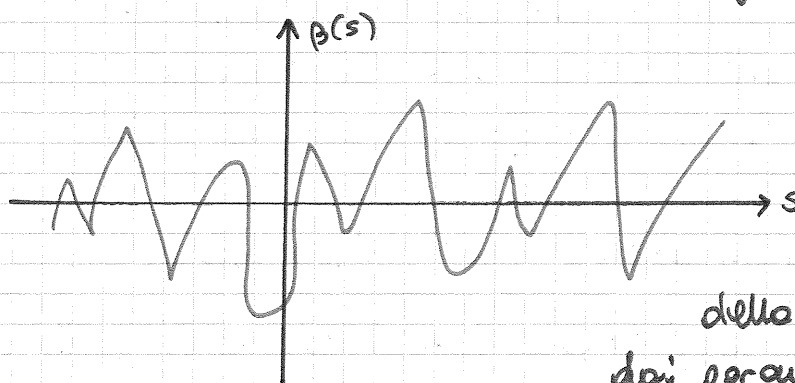
Ci sono 2 posizioni fondamentali: quando l'ellisse è "verticale" e quando è "orizzontale".

- ellisse orizzontale: è quando  $x$  può raggiungere il valore massimo  $\Rightarrow \beta(s)$  è massimo  $\Rightarrow \beta'(s) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ .  
In questo punto abbiamo l'oscillazione più larga.
- ellisse verticale:  $x$  è minimo e l'angolo è massimo.  
Anche in questi punti  $\beta'(s) = 0$ .

N.B.:  $x$  ed  $x'$  sono correlati.

N.ò.: in un acceleratore ci possono essere moltissimi punti di massimo e minimo (relativi) diversi (cioè con ellissi più larghe o più strette): ma sono tutti soluzioni della stessa equazione di Hill. E gioca il ruolo dell'energia. Ad energia costante, l'area dell'ellisse è costante.

Ma durante l'accelerazione facciamo crescere  $E$ !



$\beta(s)$  non deve essere per forza una sinusoidale.  $\beta(s)$  è la "carta d'identità" della macchina e dipende dai parametri delle lenti magnetiche.

Questo si dice emittanza trasversa.

L'ampiezza massima di  $x$  per un dato punto  $s$  vale:

$$x_{\max} = \sqrt{\epsilon \beta(s)}$$

e per questo  $x$ :  $x'(x_{\max}) = \alpha \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta}}$

L'intercetta con l'asse delle  $x$ :  $x(x'=0) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\gamma}}$

(questo punto rappresenta la particella che passa // all'orbita ideale, ma spostata).

Invece:  $x'(x=0) = \sqrt{\epsilon/\beta}$  (particella nell'orbita ideale, ma con un angolo).

$$\alpha = -\beta'/2 \quad \beta = w^2 \quad \gamma = \frac{1+\alpha^2}{\beta}$$

L'emittanza  $\epsilon$  si misura in distanza  $\times$  angolo:

$$[\epsilon] = [\text{mm} \cdot \text{mrad}]$$

Negli acceleratori moderni  $\epsilon \ll 1 \text{ mm} \cdot \text{mrad}$ .

Finora abbiamo considerato un acceleratore con dentro una singola particella. In realtà noi iniettiamo un pochetto di particelle. Le loro ellissi non saranno tutte uguali! Infatti dipende dall'impulso con cui la singola particella è stata iniettata.

Si dice emittanza dello macchina l'ellisse che contiene il 90% delle emittanze per le singole particelle.

Si dice invece accettanza di un acceleratore l'ellisse più grande sulla quale esso è in grado di mantenere una particella.

N.B.: si dimostra che la distribuzione in  $x$  e in  $y$  di un fascio è gaussiana. Se la prendiamo fino a  $2 \div 3 \sigma$ , abbiamo l'emittanza.  $\exists$  accettanza  $\Rightarrow$  non riusciamo a contenere le code nella macchina per intero.

Se l'emittanza è più grande dell'accettanza, perdiamo tutte le particelle comprese in quella corona ellittica

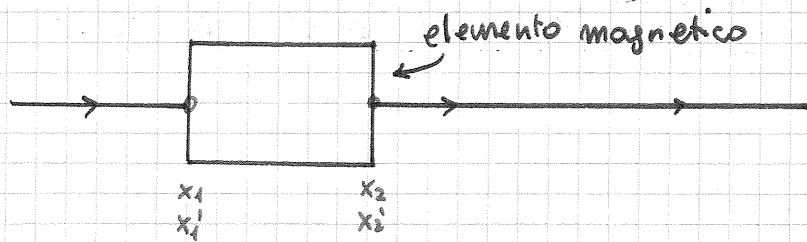
$\Rightarrow$  "perdere un fascio".

$\Rightarrow$  l'accettanza va mantenuta  $>$  dell'emittanza.

La distribuzione delle leni lungo l'acceleratore si chiama lattice.



Vogliamo saper costruire un lattice tale da poter far girare una particella in un acceleratore indefinitamente. Per sistemi di più particelle interverranno fenomeni collettivi -



Le posizioni  $(x_1, x_1')$  e  $(x_2, x_2')$  hanno  $s$  diverso  $\Rightarrow \beta$  diverso. Possiamo scrivere la lente magnetica sotto forma di matrice:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} \quad M \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Se sapessi scrivere una matrice  $M$   $\forall$  tipo di elemento magnetico, saprei descrivere esattamente l'orbita di una particella.

$M \rightarrow$  gradiente del campo magnetico

$(\therefore) \rightarrow$  variazione di  $\beta$

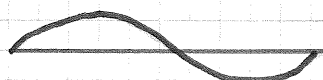
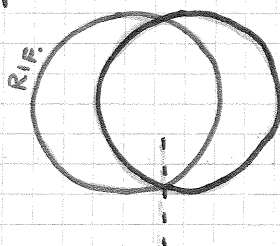
Dato il vettore  $(x_0, x_0')$  al momento dell'iniezione, riesco a correlare il gradiente con  $\beta$ .  $\beta$  e  $\phi$  sono correlate  $\Rightarrow$  la mia unica variabile è  $\beta$ .

Questo tipo di ragionamento vale  $\forall$  tipo di acceleratore: lineare o circolare.

Ripartiamo dall'equazione di Lorentz:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m} (\vec{v} \wedge \vec{B})$$

In assenza di forze longitudinali, la particella si muove di moto uniforme, mentre sul piano della macchina (che contiene  $x$ ) essa è accelerata. Inoltre, se ho impulsi iniziali differenti:



Questo è un naturale fenomeno di hocheggiamento dovuto alla presenza di un di polo.

Le eq. di Hill su  $x$  e  $y$  sono diverse.

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + k(s) y = 0$$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} - \left(k - \frac{1}{\rho^2}\right) x = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p_0}$$

(Se  $\rho$  è grande, la capacità fuocheggiante del dipolo è trascurabile).

$$B \cdot \rho = p/e$$

$$B \cdot \rho' = (p + \Delta p)/e$$

$$B \cdot (\rho - \rho') \equiv B \cdot x$$

In fatti  $x$  è lo spostamento radiale dell'orbita di riferimento!

$$B(\rho - \rho') = Bx = -\frac{\Delta p}{e}$$

$$\frac{Bx}{\rho} = -\frac{\Delta p}{\rho e} \quad \frac{Bx}{\rho^2} = -\frac{\Delta p}{\rho^2 e}$$

$$B\rho = p/e \Rightarrow e\rho = p/B$$

$$\Rightarrow \frac{Bx}{\rho^2} = -\frac{\Delta p B}{\rho p}$$

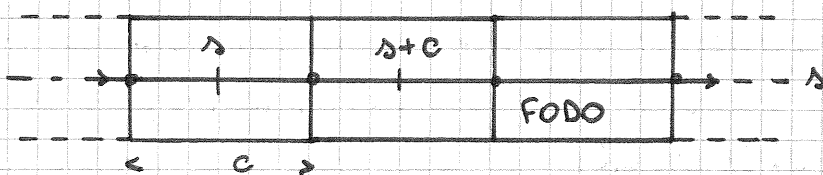
$$\boxed{\frac{x}{\rho^2} = -\frac{\Delta p}{\rho p}}$$

In un acceleratore tipico  $\left(\frac{\Delta p}{p}\right) \sim 10^{-3}$  e  $\rho$  è grande  
 $\Rightarrow$  le equazioni di Hill sono "uguali" per  $x$  ed  $y$ .

$$x'' + k(s)x = 0$$

Se la nostra macchina ha una simmetria, che cosa succede a  $k$ ?

La macchina è costituita da tante "celle elementari":  
 i FODO.



$$k(s) = k(s+c)$$

L'acceleratorista non progetta la macchina, progetta il FODO.

Poi l'acceleratore non sarà mai una successione perfetta

di FODO uguali: da qualche parte ci saranno degli elementi acceleranti, un punto di iniezione e uno di uscita, ecc. Il trucco è rendere questi "elementi speciali" equivalenti ad un FODO da un punto di vista magnetico.

$$u \equiv x, y$$

$$u'' + k(s)u = 0$$

$$\begin{aligned} \begin{array}{l} // \\ // \\ // \\ // \end{array} \quad & \begin{aligned} u(s) &= C(s)u_0 + S(s)u'_0 \\ u'(s) &= S'(s)u_0 + C'(s)u'_0 \end{aligned} & k > 0 \\ & C(s) = \cos(s\sqrt{k}) \quad S(s) = \sin(s\sqrt{k}) \\ & u_0, u'_0 \text{ soluzioni al punto d'iniezione} \end{aligned}$$

Questa è la soluzione per  $k > 0$ . E se  $k < 0$ ?

$$\begin{aligned} \begin{array}{l} // \\ // \\ // \end{array} \quad & \begin{aligned} C(s) &= \cosh(\sqrt{k}s) \\ S(s) &= \sinh(\sqrt{k}s) \end{aligned} & k < 0 \end{aligned}$$

$k > 0 \rightarrow$  fuocoheggiamento

$k < 0 \rightarrow$  defuocoheggiamento

$$\begin{aligned} \begin{array}{l} // \\ // \\ // \end{array} \quad & \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{pmatrix} & \begin{aligned} u(s) &= C(s)u_0 + S(s)u'_0 \\ u'(s) &= C'(s)u_0 + S'(s)u'_0 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$(C'(s) = S(s), S'(s) = C(s))$$

$\sqrt{k} \rightarrow$  gradiente normalizzato.

2 novembre 2011

Equazione di Hill sul piano x:

$$x'' + k(s)x = 0$$

Il  $k(s)$  è diverso per  $x$  o per  $y$ :

$$x = k(s) \rightarrow \left( k(s) - \frac{1}{\rho(s)^2} \right) \quad y = k \rightarrow k(s)$$

L'equazione generale:  $u'' + k(s)u = 0$

La soluzione generale:  $u(s) = u(0)C(s) + u'(0)S(s)$

Essendo  $C = \cos(\sqrt{k}s)$  e  $S = \frac{\sin(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}} \rightarrow$  Se  $k > 0$ , e quindi  $C_0$  forza e' attrattiva.

Se  $k < 0 \Rightarrow$  abbiamo  $\cosh(\sqrt{k}|s|)$  e  $\frac{\sinh(\sqrt{k}|s|)}{\sqrt{k}}$

Verificare che effettivamente il  $\sin(\sqrt{k}s)$  ha anche un  $\sqrt{k}$  al denominatore.

$$u'(s) = C'(s)u(0) + S'(s)u'(0)$$

$u$  e  $u'$  sono la posizione e l'angolo, che sono le variabili coniugate nel piano trasverso.

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k}s & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k}s \\ -\sqrt{k} \sin \sqrt{k}s & \cos \sqrt{k}s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix} \quad k = \frac{G}{B\rho}$$

Le due soluzioni generali le possiamo scrivere sotto forma matriciale, essendo  $k$  il gradiente magnetico normalizzato, dipende da  $s$  perché dipende dalla posizione,  $G$  dipende da  $s$  e dalla corrente.

Se  $u(0)$  è la posizione della particella prima di entrare nel magnete allora  $u(s)$  ci dà la posizione all'uscita del magnete la posizione che si è trovata ora diventa la posizione iniziale all'entrata nel nuovo magnete.

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ M^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0' \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Posizione iniziale prima del secondo} \\ \text{magnete.} \end{array}$$

$\begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ \text{1° magnete} & \text{2° magnete} \end{matrix}$

Chiamiamo  $N = MM^*$ ; se ora il blocco dei magneti si ripete, uno dopo l'altro, allora dopo due blocchi simmetrici la posizione sarà data da  $N^2$ . Se facciamo in blocchi tutti uguali; la posizione finale sarà data da  $N^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n$

Se abbiamo:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$
  
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$$

Facendo la simmetria speculare allora la matrice si ottiene solo scambiando i termini in diagonale



Da notare che i magneti piani sono simmetrici e se li mettiamo e i magneti gli stessi, questo deriva da soluzioni di Laplace, che i magneti piani non hanno un verso.

Nel piano trasverso si può addirittura avere una sola matrice con un quadrivettore.

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ y(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} \quad \text{Nella forma generale}$$

Se gli zeri non sono più tali allora  $x$  e  $y$  si accoppiano e la cosa si fa molto complicata, si mescolano  $k_x$  e  $k_y$ , e la stabilità dell'orbita non è più ovvia.

Cambiando un quadrupolo in  $x$  lo facciamo scendere in  $y$  ed è un coseno. Inoltre i termini nulli non li conosciamo e non è sufficiente neanche calcolare e quindi è difficile guidare la particella.

Dobbiamo verificare che la soluzione generale sotto forma matriciale corrisponde effettivamente a come ci aspettiamo che i magneti si comportino.

Allora ci costruiamo uno spazio di drift (spazio tra due magneti consecutivi) e lo consideriamo come un magnete con  $B=0$ .

Supponiamo che tale spazio sia lungo  $L$ .



Vogliamo conoscere  $x(L)$  e  $x'(L)$

$$\begin{cases} x(L) = x_0 + x'_0 L \\ x'(L) = x'_0 \end{cases}$$

Che in forma matriciale diventa:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

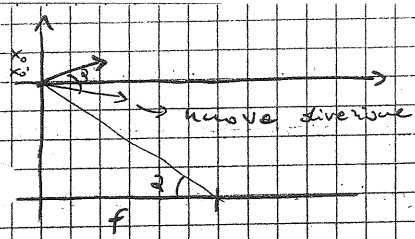
Questa cosa è simile a quella che avevamo trovato o no?

$$k=0: \quad \cos(0) = 1$$

$$\frac{\sin \sqrt{k} s}{\sqrt{k}} \approx \frac{\sqrt{k} s}{\sqrt{k}} = s \quad (L \text{ nel nostro caso})$$

Il comportamento della particella dove non c'è campo si trova impedenza da la condizione generale e sostituendo  $B=0 \Rightarrow k=0$ .

Audiamo ora e vedere se la cosa torna con un quadrupolo nell'approssimazione di lente sottile.



Se la lente è convergente ha un fuoco  
L'angolo iniziale della particella cambia di  $\alpha$

Alla fine del quadrupolo la posizione sarà:

$X(s) = X_0 \rightarrow$  Se la lente è sottile  $x$  resta invariato.

$$X(s) = M_0' - \alpha - M_0 - \frac{X_0}{f}$$

perché la lente è convergente (c'è il +) se la lente è divergente

In forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_0' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_0' \end{pmatrix}$$

Ricordando che  $\frac{1}{f} = \pm \frac{1}{B\rho}$  LK

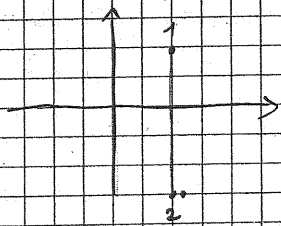
La soluzione di  $X'(s)$  è quella perché l'angolo è piccolo.

Nel caso della lente sottile è  $s$  che va a 0, nel caso dello spazio libero è  $\kappa$  che scadeva a zero.

Anche in questo caso la matrice trovata torna con quella della soluzione generale.

Ci rimane da vedere un altro elemento magnetico: il DIPOLO.

Nello spazio delle fasi, un quadrupolo fa:

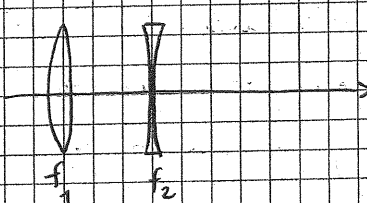


La particella va dalla posizione 1 alla 2 con stesso  $x$ , il che vuol dire che  $\frac{L}{\rho}$  è piccolo, non che tutta quella quantità lo è.

Andiamo prima a vedere qual è la matrice di un doppietto di quadrupoli.

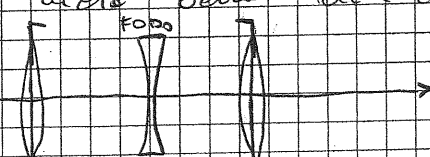
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L & 0 \\ \frac{1}{f_2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L & 0 \\ 1 - \frac{L}{f_1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con  $\frac{1}{f^*} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_1 f_2}$



Nel caso  $f_1 = -f_2 \rightarrow \frac{1}{f^*} = \frac{L}{f_2^2}$

Questo diseguito però non è un FODO, infatti per definizione inizia da una lente convergente fino a metà di quella successiva.



Considerando lenti con stesso  $f$ , la matrice corrispondente al FODO è data dal prodotto di 3 matrici. Allora per la matrice del mezzo quadrupolo basta mettere  $\frac{1}{2}$  davanti a  $\frac{1}{f}$ , allora l'elemento

$$a_{21} = \frac{1}{2f}$$

Abbiamo 2 mezzi quadrupoli; 2 spazi di derive e un lente divergente.

$$M_{\text{FODO}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L^2}{2f^2} & 2L\left(1 + \frac{L}{2f}\right) \\ \frac{L}{2f^2}\left(1 + \frac{L}{2f}\right) & 1 - \frac{L^2}{2f^2} \end{pmatrix}$$

Se sappiamo  $x_0$  e  $x'_0$  ad un punto dell'acceleratore, e abbiamo un FODO interno all'acceleratore, allora la posizione finale si trova con

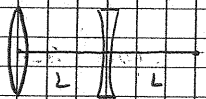
$$\vec{x} = M_{\text{FODO}}^n \vec{x}_0 \quad (\text{dopo un giro})$$

$$\text{dopo } m \text{ giri: } \vec{x} = (M_{\text{FODO}})^{n \cdot m} \vec{x}_0$$

Nulla vieta di non fare simmetrica la struttura dell'acceleratore, ma se non facciamo così allora il punto ci dobbiamo costruire una matrice diversa; ma se facciamo tutto simmetrico allora è tutto più semplice perché basta elevare ad  $n$  una matrice nota.

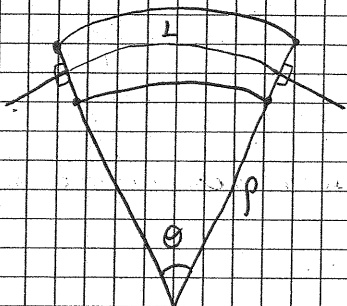
Si usa questa struttura del FODO perché si scelgono  $L$  e  $f$  in modo tale che la soluzione finale sia una convergenza sia su  $x$  che su  $y$  (costante se abbiamo lenti sia convergenti che divergenti); un sistema di questo tipo ci dà come una soluzione una convergenza (cosa vista qualche lezione fa).

Se usassimo:



Allora abbiamo solo 4 matrici da moltiplicare, se definiamo così  $M_{\text{FODO}}$  la cosa va bene lo stesso anche se la matrice non sarà uguale. Se abbiamo una matrice che invece non importa di come la prendiamo, perché siano tutte uguali.

Si devono ora vedere i dipoli. Questi non sono facili da maneggiare a livello di matrici.



Le particelle entrano dritte, fa una riflessione e poi esce dritte, questo è un dipolo settore, ma non è quello che abbiamo visto prima.





## Dipolo reale

Torniamo però al dipolo settore, che è più semplice:

$$\theta = \frac{L}{p} \quad \kappa = \frac{1}{p^2} \quad \text{termine correttivo che viene fuori dall'equazione di Hill.}$$

La matrice generica cambia un po' ora:

$$M = \begin{pmatrix} \cos \frac{L}{p} & p \sin \frac{L}{p} \\ -\frac{1}{p} \sin \frac{L}{p} & \cos \frac{L}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & p \sin \theta \\ -\frac{1}{p} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{Matrice di un magnete settore}$$

Per trovarla geometricamente si passa in coordinate cilindriche o si vuole e fare  $x_0$  e  $x_1$ .

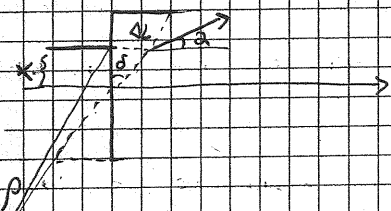
Cosa succede alla direzione  $\gamma$ ? Un dipolo è equivalente ad un'azione di campo, quindi la matrice del dipolo:

$$M_d = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nel caso del magnete rettangolare, è uguale ad un magnete settore moltiplicato per due matrici di correzione:  $M_c M_s M_c$ . È come se fosse un magnete settore con due altri magneti.

Se le correzioni fossero simili a dei quadrupoli allora sarebbe il tutto abbastanza semplice.

Guardiamo un foto:



$p$  - prolungamento del magnete settore

$\Delta L$  tratto che la particella fa in più

$$\Delta L = \frac{\Delta L}{p} = \frac{x \cdot \tan \theta}{p}$$

$$\Delta L = \frac{1}{f} x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{\tan \theta}{p}$$

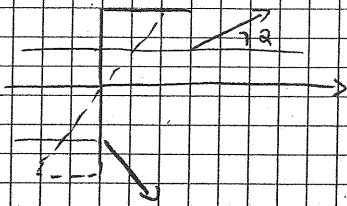
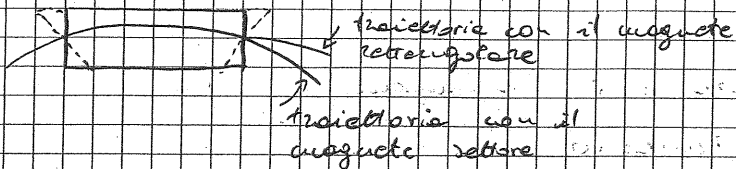
Conoscendo il fuoco sappiamo costruire anche l'effetto del magnete ed è un quadrupolo divergente.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \theta}{p} & 1 \end{pmatrix}$$

La particella che entra nel caso rettangolare viene piegata meno, e anche quando esce, lo fa prima e quindi è ugualmente piegata meno, allora le  $M_c$



sia a destra che a sinistra sono uguali.



Se la particella passa di sotto allora curva di più rispetto alla traiettoria, quindi la lente è sempre divergente.

Quando l'acceleratore è molto grande allora  $\frac{q\delta}{p}$  è trascurabile, questa correzione si fa solo negli acceleratori piccoli; in quelli grandi  $\delta \sim 0$  ( $\sim \mu\text{rad}$ ) e allora viene fuori la matrice identità, cioè si ottiene  $M_1$  e il sistema è consistente.

La matrice che viene fuori dalla moltiplicazione è:

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{f} & L \\ -\frac{L}{f} + \frac{L^2}{f^2} & 1 - \frac{L}{f} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \frac{1}{f} = \frac{q\delta}{p}$$

Per far girare una particella dovremmo curvarla e farla stare intorno all'orbita di riferimento. Si è più trovato che si possono mettere i magneti e scriverli in forma matriciale.

Avremmo anche visto le oscillazioni di Betatron e ci manca da trovare un collegamento tra queste matrici e  $\beta$ .

$$u = \sqrt{\epsilon\beta} \cos(\Phi_0 + \Phi) \quad \text{questa è un'altra soluzione all'equazione di Hill.}$$

Se sappiamo collegare le grandezze fondamentali (l'emitteanza,  $\beta$  e  $\Phi$ ) alle matrici, allora abbiamo risolto tutto.

Saperemo che ad ogni giro cambia la fase, allora ci deve essere un collegamento tra la fase e la matrice, essendo poi la fase collegata a  $\beta$ , allora conosciamo anche le oscillazioni a partire dalle matrici dei magneti.

A quel punto conosciamo la fase oraria della particella e quindi di la posizione sul piano trasverso.

03/11/11

Adesso bisogna combinare le matrici con le eq. di Hill.  
NB.: le matrici contengono parametri di costruzione dell'acceleratore.

$$A) \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

Ma sappiamo anche che:

$$B) \begin{aligned} x(s) &= \sqrt{\epsilon \beta} \cos \phi \\ x'(s) &= \alpha \sqrt{\epsilon/\beta} \cos \phi - \sqrt{\epsilon/\beta} \sin \phi \end{aligned}$$

Ma siccome queste due scritture sono soluzione della stessa equazione, necessariamente i parametri  $a, b, c$  e  $d$  saranno collegati con  $\alpha, \beta, \gamma$ .

$$\begin{aligned} \alpha &= -\beta'/2 \\ \beta &= \omega^2 \\ \gamma &= (1 + \alpha')^{1/\beta} \end{aligned}$$

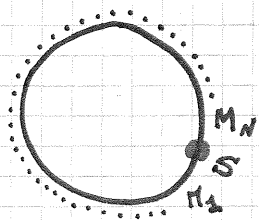
NB.: se si conosce  $\beta$  è possibile ricavare tutti gli altri parametri.

Risolviamo in maniera esplicita A).

$$\begin{pmatrix} x(s) = \sqrt{\epsilon \beta} \cos(\mu + \phi) \\ x'(s) = [\dots] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 = \sqrt{\epsilon \beta} \cos \phi \\ x'_0 = [\dots] \end{pmatrix}$$

I  $\beta$  che compaiono a destra e a sinistra non sono gli stessi:  $\beta = \beta(s)$ . C'è anche un avanzamento di fase:  $\phi \rightarrow \phi + \mu$ .

La matrice sarà costituita dal prodotto delle matrici di singolo elemento magnetico:



Se impongo questa condizione,  $s$  è lo stesso a destra e a sinistra dell' "=", e quindi è lo stesso anche  $\beta(s)$ .

La matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  rappresenta

ora la matrice di un giro, giro che parte dal punto  $s$  che ho scelto.

Da un giro all'altro non cambia  $\beta$ , né può cambiare  $E$ : l'unica cosa che c'è è un avanzamento di fase.

Supponiamo dunque di conoscere  $a, b, c, d$ .

$$\sqrt{\epsilon\beta} \cos(\mu + \phi) = a\sqrt{\epsilon\beta} \cos\phi + b\alpha\sqrt{\epsilon/\beta} \cos\phi - b\sqrt{\epsilon/\beta} \sin\phi$$

Per la trigonometria possiamo scrivere:

$$\cos(\mu + \phi) = \cos\phi \cos\mu - \sin\phi \sin\mu$$

$\phi$  è la fase in partenza,  $\mu$  l'incognita. Vogliamo che quest'uguaglianza valga  $\forall \phi$ . Uguagliamo quindi termine a termine i coseni e i seni:

$$-\sqrt{\epsilon\beta} \sin\phi \sin\mu = -b\sqrt{\epsilon/\beta} \sin\phi$$

$$b = \beta \sin\mu \quad [\dots]$$

$$a = \cos\mu + \alpha \sin\mu$$

$a$  e  $b$  sono conosciuti. Le variabili sono  $\mu$  e  $\beta$ : il sistema è già risolvibile. In realtà abbiamo a disposizione ancora una equazione (quella che collega  $x'_{cs}$  a  $x'_0$ ).

Posso adesso riscrivere la matrice del giro:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha \sin\mu & \beta \sin\mu \\ -\gamma \sin\mu & \cos\mu - \alpha \sin\mu \end{pmatrix}$$

Siamo in grado di scrivere questa matrice  $\forall s$ !

Ad esempio per calcolare l'avanzamento di fase in un giro basta sommare gli elementi della diagonale:

$$a + d = 2 \cos\mu \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} \arccos(a + d)$$

Possiamo anche calcolare il numero di oscillazioni di betatrone in un giro:  $Q = \mu \frac{1}{2\pi}$ .

Vedremo che  $Q$  deve essere un numero irrazionale:

$$Q = \mu \frac{1}{2\pi} \neq \frac{m}{n} \quad \forall m, n$$

$\mu, Q$  non dipendono dalla posizione  $s$  iniziale.

Possiamo calcolare il  $\Delta\mu$  tra due punti.

Se il nostro acceleratore è composto da FODO di lunghezza  $L$  il  $\beta$  sarà periodico:

$$\beta(s+L) = \beta(s)$$

Anche la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  sarà periodica di passo  $L$ .

$\Rightarrow$  più è grande il numero di FODO e più è conveniente averne: occorre solo calcolare la matrice per un FODO ed elevarla a potenza  $N$ -esima,  $N$  numero dei FODO.

Per come è costruito il FODO,  $\beta$  è continuo:



Amche l'avanzamento di fase è legato a  $\beta$ : avevamo visto che:

$$\mu = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\beta}$$

Che cosa succede se ad esempio in un quadrupolo il gradiente è leggermente diverso da quello che mi aspetto? Oppure se l'avanzamento di fase è tale per cui  $Q$  è razionale? Devo cercare di modificare le oscillazioni che la particella fa in un giro, cambiando il gradiente di qualche quadrupolo.

Supponiamo di aggiungere un piccolo quadrupolo di gradiente  $dk$  e lunghezza  $ds$  (equivalente ad aumentare un poco la corrente di un quadrupolo).

$$dk = \frac{dG}{\beta\rho}$$

L'inverso del fuoco è  $k \cdot l$ :  $dk ds$

Il mio fuoco si modificherà in

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -dk ds & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha \sin\mu & \beta \sin\mu \\ -\gamma \sin\mu & \cos\mu - \alpha \sin\mu \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha \sin\mu & \beta \sin\mu \\ -dk ds (\cos\mu + \sin\mu) - \gamma \sin\mu & -dk ds \sin\mu + \cos\mu - \alpha \sin\mu \end{pmatrix}$$

(i primi due termini non cambiano).

Ad una piccola modifica di questo tipo è più sensibile  $\mu$  rispetto a  $\beta$ . Posso scrivere la nuova matrice come:

$$\begin{pmatrix} \cos\mu_1 + \alpha \sin\mu_1 & \beta \sin\mu_1 \\ -\gamma \sin\mu_1 & \cos\mu_1 - \alpha \sin\mu_1 \end{pmatrix}$$

ovvero prevedendo solo una trasformazione  $\mu \rightarrow \mu_1$ .

Posso ora ad esempio uguagliare la traccia di queste due matrici, ottenendo:

$$2 \cos\mu_1 = 2 \cos\mu + dk ds \beta \sin\mu$$

$$\mu_1 \approx \mu + d\mu$$

$$\cos\mu_1 = \cos\mu - \sin\mu d\mu \quad (\text{con } \sin d\mu \approx d\mu)$$

$$\Rightarrow d\mu = \frac{1}{2} dk ds \beta$$

$$\text{E quindi: } dQ = d\mu \frac{1}{2\pi}$$



$$dQ = \frac{1}{4\pi} dk ds \rho$$

La variazione del tune è  $\propto$  alla variazione di  $k \cdot L$ .

NB.: tutti i fodo del giro possono essere modificati, basta ottenere la stessa matrice di giro.

07/11/11

Abbiamo visto l'effetto di una piccola variazione del gradiente del campo magnetico sul tune.

$$dQ_n = \frac{1}{4\pi} dk ds \beta_n$$

( $k$  gradiente normalizzato:  $G/\beta\rho$ )

$\beta\rho = P/e \Rightarrow$  abbiamo studiato una particella singola ad impulso  $P$  definito.

Le particelle che vengono iniettate nelle situazioni reali hanno però un repper piccolo spread  $\Delta P$ :

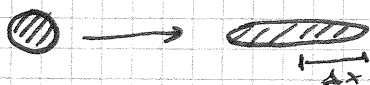
$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta P}{P} \lesssim 10^{-3}$$

$\Rightarrow$  il fascio non è monocromatico (è infatti generato con processi termodinamici).

Come conseguenza di questo  $\Delta P$ : quadrupoli cominciano ad agire come se fossero dei dipoli:  $\Delta P$  modifica il  $K$  del quadrupolo  $\Rightarrow$  sposta il fuoco delle particelle che lo attraversano.

Cosa succede ad una particella carica in un  $\vec{B}$  costante se ne aumento l'impulso  $P$ ? Incomincia a girare su un raggio di curvatura  $\rho$  più grande.

Fascio non monocromatico  $\Rightarrow$  si allarga e perde la simmetria cilindrica.



si allarga sul piano della macchina.

La particella oscillerà attorno a quest'orbita.

Le particelle si distribuiscono su diversi  $\rho$  solo quando attraversano un  $\vec{B}$ : il  $\Delta x$  è funzione del lattice.

$$\Delta x = \Delta x(s)$$

C'è un effetto simile anche in verticale solo se per qualche

motivo l'acceleratore prevede anche dipoli verticali -  
 d'allontanamento dell'asse di progetto si dice  
 dispersione ed è definita da:

$$\Delta x(s) = D(s) \frac{\Delta p}{p} \quad \text{DISPERSIONE}$$

(situazione ideale  $\rightarrow \Delta x = 0 \forall s$ )

$\Delta x$  rappresenta lo spread delle orbite ideali dovuto alla  
 presenza del  $\Delta p$ .

Spread verticale  $\Rightarrow$  possibili difetti di fabbricazione di  
 qualche dipolo.

$$\frac{\Delta r}{r} = \alpha_c \frac{\Delta p}{p} \quad \alpha_c = \text{fattore di compattamento dell'impulso}$$

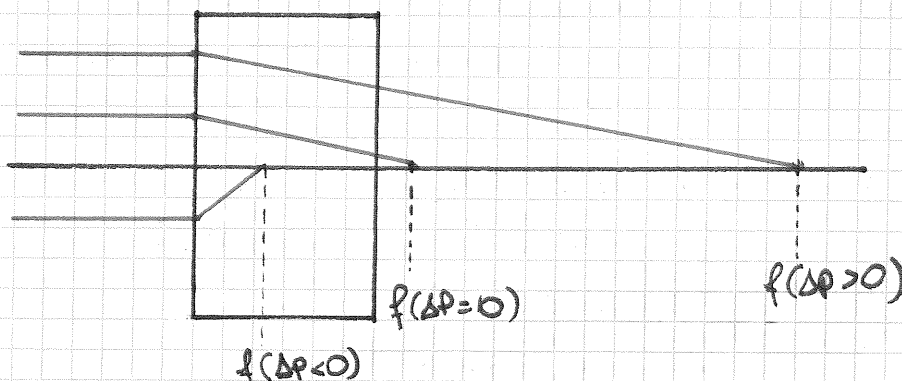
Non necessariamente  $\alpha_c = 1$ .

Per definizione:  $k = \frac{G}{B\rho} = \frac{dB_y}{dx} \cdot \frac{1}{B\rho}$

$$k = \frac{eG}{p} \quad (B\rho = p/e)$$

$$\Rightarrow \Delta k = \frac{eG}{\Delta p}$$

Se  $p$  cresce,  $k$  decresce (fuocheggia meno);  
 allo stesso modo una particella con impulso più  
 piccolo viene fuocheggiata "di più".



$$\frac{\Delta k}{k} = - \frac{\Delta p}{p}$$

Averanno visto che la variazione del tuo è  $\propto$  alla  
 variazione dell'impulso:

$$\frac{\Delta Q}{Q} \propto \frac{\Delta P}{P}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta k &= -\frac{\Delta P}{P} k \\ dQ &= \frac{1}{4\pi} dk ds \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\Delta Q}{Q} &= \xi \frac{\Delta P}{P} \\ \xi &= \text{CROMATICITA'} \end{aligned}}$$

La cromaticità di una macchina è, per costruzione, sempre negativa.

$\Delta P > 0 \Rightarrow$  diminuisce il numero di oscillazioni di betatrone.

$$\Delta Q = \frac{1}{4\pi} \Delta k ds \beta$$

Divido ambo i membri per  $Q$ :

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta k}{Q} ds \beta$$

Utilizzo la relazione  $\Delta k = -\frac{\Delta P}{P} k$ :

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \underbrace{-\frac{1}{4\pi} \frac{k}{Q} ds \beta}_{\xi} \frac{\Delta P}{P}$$

$$\xi = -\frac{1}{4\pi} \frac{k}{Q} ds \beta$$

( $ds$  lunghezza del quadrupolo)

Se voglio minimizzare o annullare  $\Delta Q$  devo imporre un  $k$  che varia con  $p \Rightarrow$  occorre inserire dei sestupoli. Essi introducono una cromaticità positiva, che va a ridurre la naturale cromaticità negativa del fascio.

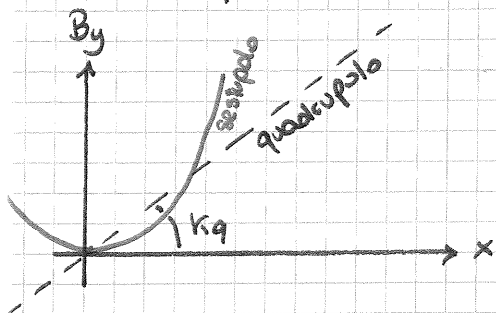
Per un quadrupolo:  $B_y \propto x \Rightarrow B_y = k_q x$

(i quadrupoli sono elementi magnetici lineari).

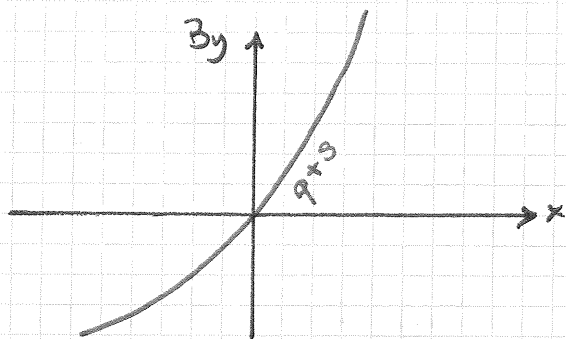
Per un sestupolo?

$$B_y = k_s x^2$$

$k_s =$  gradiente di sestupolo.



Se metto un sestupolo accanto ad un quadrupolo (che per un acceleratore di grandi dimensioni è equivalente a sovrapporli nello stesso punto), il campo magnetico totale sarà la somma dei due.



⇒ Se  $x < 0$  fuocoheggia poco,  
e se  $x > 0$  fuocoheggia  
di più: l'effetto è  
inverso a quello  
della eromaticità.

Vs sappiamo calcolare  $\xi$  ⇒ tanto introdurre un  
sestupolo con il giusto  $k_s$ .

$$B_y \equiv c x^2 \quad k_s = \frac{dB_y}{dx} \frac{1}{\beta p} = \frac{2cx}{\beta p}$$

$$k_s = k_s(x)$$

$$\frac{\Delta k_s}{\Delta x} = \frac{2c}{\beta p}$$

Ma sappiamo anche che  $\Delta x = D(s) \frac{\Delta p}{p}$ .

$$\Delta k_s = \frac{2c}{\beta p} D(s) \frac{\Delta p}{p}$$

Questo  $\Delta k_s > 0$  genera un  $\Delta a > 0$ .

$\Delta p$  è inevitabile ⇒ il nostro acceleratore avrà  
bisogno di almeno un sestupolo.

L'effetto della eromaticità è più grande dove  
 $\beta(s)$  è massimo ⇒ metteremo il sestupolo in  
quel punto, per evitare che in quel punto la particella  
possa vedere un  $\alpha$  rationale.

A parità di  $\beta(s)$ , metto il sestupolo dove  $ds$  è  
più grande.

Dato il prodotto  $C \cdot D(s)$  fissato ad un valore  $h$   
dalla eromaticità della macchina, è preferibile  
lavorare con  $D(s)$  massimo e  $C$  minimo.

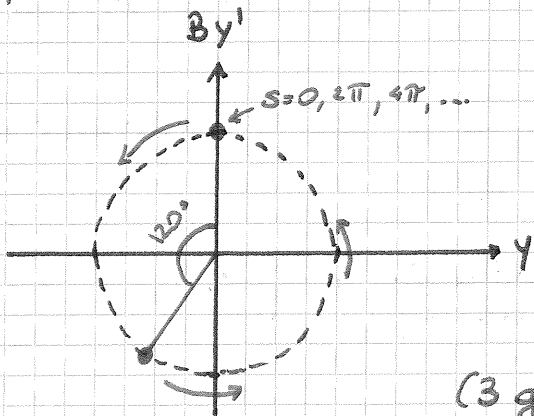
In particolare vorremmo  $C$  quasi nullo: più piccolo  
è  $C$ , meno ci allontaniamo dalla linearità  
(così da poter continuare a descrivere l'acceleratore  
con una matrice).

Vediamo ora come mai il tuo è un parametro così



delicato in un acceleratore.

Mettiamoci nello spazio delle fasi: normalizzato: cioè dove la particella descrive una circonferenza anziché un'ellisse. (Le ampiezze erano  $\sqrt{E/\beta}$  e  $\sqrt{E\beta}$ ).



Supponiamo di avere  
 $Q = 3, \bar{3} = 1/3 + 3$   
 $\Rightarrow$  ad ogni giro ho  $3, \bar{3}$  oscillazioni di betatrone  
 $\Rightarrow$  dopo un giro sono spostato di  $120^\circ$

(3 giri e  $1/3$ ). Al giro successivo sarà spostato di altri  $120^\circ$ , e al terzo giro ritorna dritta, tutte le volte che  $n \cdot Q = I$  e' un numero intero.

Il numero dei giri che il pacchetto per tornare alla stessa posizione dipende dalla parte decimale del tuo e si chiama ordine della risonanza.

Ogni volta che la particella torna nello stesso punto aumenta l'ampiezza di oscillazione  $\Rightarrow$  aumentano  $x$  o  $y$ , finché perdo la particella.

Risonanza  $\equiv$  campo e.m. oscillante che disturba il moto. In generale voglio  $Q \neq \frac{I}{n}$ , cioè voglio  $Q$  irrazionale.

NB: più  $n$  è grande e meno l'effetto è pericoloso, soprattutto se è modulato dalle interazioni reciproche delle particelle del pacchetto. Le risonanze pericolose sono quelle di ordine piccolo.

$n$  deve essere sufficientemente grande da far sì che la particella si possa "termalizzare" con le altre particelle del pacchetto.

Vedremo che  $\exists$  degli  $n$  che sono particolarmente pericolosi all'interno delle lenti magnetiche:

$n$ intero	$\leftrightarrow$	dipoli
$n \neq 1/2$	$\leftrightarrow$	4-polo
$n \neq 1/3$	$\leftrightarrow$	6-polo
$n \neq 1/4$	$\leftrightarrow$	8-polo

N.B.: il percorso di una particella in un acceleratore è più grande delle dimensioni del sistema sdere. (...)

Domani no lezione

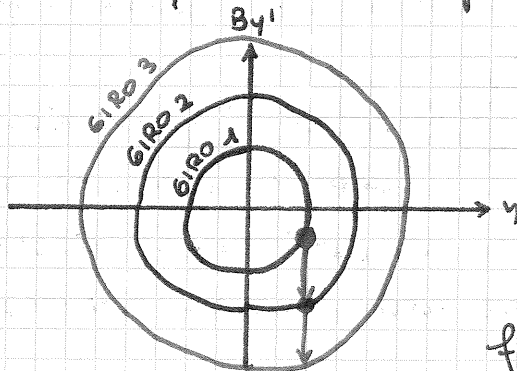
$dk \rightarrow dQ$ , cioè una variazione della traiettoria.

Nello spazio delle fasi normalizzato l'ellisse diventa un cerchio. Il numero di giri percorsi nello spazio delle fasi durante una rivoluzione nell'acceleratore è il  $Q$ uno. Vediamo cosa succede per vari  $dk$ .

- Perturbazione di tipo dipolare: agisce sulla particella ovunque essa si trovi nell'intorno dell'orbita di riferimento, e qualunque angolo essa abbia.
- Perturbazione quadrupolare: la perturbazione è  $\propto x$ .
- Perturbazione sestupolare: " " "  $\propto x^2$ .

...

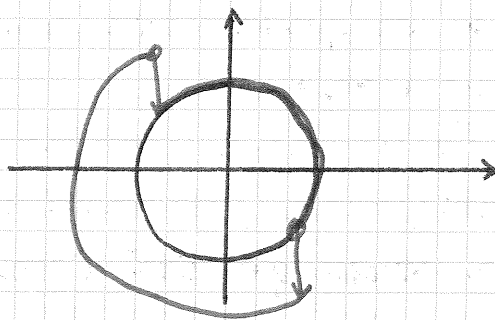
Supponiamo di avere una perturbazione (kick) di polo, che quindi non dipende dal quadrante:



stiamo applicando una perturbazione angolare. Ad ogni giro l'orbita diverge  $\Rightarrow$  un tono intero non funziona perché perderemmo

le particelle a causa di perturbazioni dipolari.

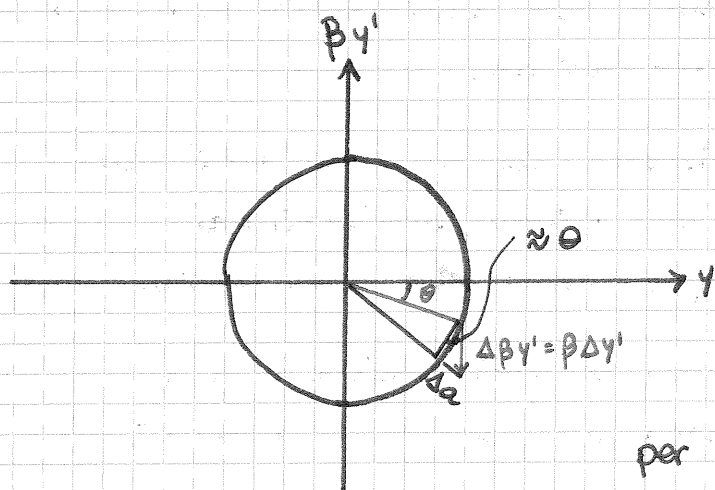
Supponiamo di avere un tono di tipo intero  $+ \frac{1}{2}$ : siccome la perturbazione è indipendente dal quadrante:



Se invece con un tono di tipo intero  $+ \frac{1}{2}$  abbiamo una perturbazione quadrupolare, il kick che prende ad ogni giro ha uno segno opposto  $\Rightarrow$  l'orbita diverge di

nuovo. Per questo tipo di perturbazione andrebbe bene un tuno  $Q = I + \frac{1}{3}$ , che sicuramente farà divergere l'orbita nel caso della perturbazione sestupolare. E così via.

⇒ Un tuno che è un numero razionale non va bene.



Dalla soluzione dell'eq.

di Hill sappiamo che,

$$y = a \cos \theta$$

In un quadrupolo, ad

esempio,

$$\Delta y' = \ell (dk) y$$

Per un sestupolo,  $\Delta y' \propto y^2$ ;

per un ottupolo  $\Delta y' \propto y^3$ .

In generale:  $\Delta y' = \ell (dk) y^{\frac{m}{2}-1}$

Vogliamo calcolare  $\Delta a$ .

$$\begin{aligned} \Delta a &= \beta \Delta y' \sin \theta = \beta (\ell dk) y \sin \theta = \quad [\text{caso 4-polo}] \\ &= \beta \ell dk a \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta a}{a} = \beta \ell dk \cos \theta \sin \theta$$

$\Delta a/a$  è la variazione % di  $a$

dopo un giro.  $\theta$  è la fase

nello spazio delle fasi dove la particella ha ricevuto il kick.

Sempre nel caso 4-polo posso ancora scrivere:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{2} \beta \ell dk \sin(2\theta)$$

Ad ogni giro,  $\theta$  aumenta di  $2\pi Q$  (AVANZAMENTO DI FASE).

Quindi, dopo  $\infty$  giri,

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{2} \ell dk \beta \sum_{m=1}^{\infty} \sin[2(\theta + 2m\pi Q)]$$

NON perdo la particella solo se questa serie converge a 0.

Se il tuno è di tipo intero +  $\frac{1}{2}$ :

$$\sin[2(\theta + 2m\pi Q)] = \sin[2(\theta + 2m\pi I + 2m\pi 0.5)] =$$

$$= \sin[2(\theta + 2m\pi I + m\pi)] = \sin[2\theta + 4m\pi I + m\pi]$$

Sto sommando  $\infty$  volte la stessa quantità  $\Rightarrow$  la serie

diverge a  $\infty$ . Siamo sempre nel caso quadrupolare!

Sappiamo che un  $dk$  implica anche un  $dQ$ .

$$\Delta \theta = \beta \Delta y' \cos \theta \frac{1}{a}$$

$$\Delta Q = \frac{\Delta \theta}{2\pi}$$

$$\Delta Q = \frac{1}{2\pi a} \beta \Delta y' \cos \theta$$

Mel caso quadrupolare posso sostituire:

$$\Delta a = \frac{1}{2\pi a} \beta (l dk) a \cos^2 \theta = \frac{1}{4\pi} \beta (l dk) [\cos(2\pi) + 1]$$

Ora devo sommare su tutti gli avanzamenti di fase:

$$\Delta a = \frac{1}{4\pi} l \beta dk \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} [\cos 2(\theta + 2\pi m a)] + 1 \right\}$$

Anche questa serie è convergente a meno che

Q non sia  $I + 1/2$ . Sfortunato questo tuo, si ha:

$$\Delta a = \frac{1}{4\pi} l \beta dk \quad [\text{mediamente}] \quad \text{STOP BAND}$$

risultato che avevamo già ricavato dall'equazione di Hill. La presenza di una perturbazione modifica giro per giro il tune della particella: anche se, in partenza, questo è stato scelto "giusto", rischiamo sempre di "agganciarci" ad una risonanza.

La STOP BAND è ciò che rende particolarmente pericolose le perturbazioni 4-polari - Dobbiamo fare in modo che sia più piccola possibile.

Per un sestupolo:  $\Delta y' = (l dk) y^2$

$$\Rightarrow (l dk) a^2 \cos^2 \theta$$

$$\frac{\Delta a}{a} = l \beta dk a \sin \theta \cos^2 \theta$$

Per l'ottupolo:

$$\frac{\Delta a}{a} = l \beta dk a^2 \sin \theta \cos^3 \theta$$

In generale:  $\frac{\Delta a}{a} = l \beta dk \sin \theta \cos^{\frac{m}{2}-1} \theta a^{\frac{m}{2}-2}$  [per 1 giro]

poi c'è da sommare sugli avanzamenti di fase.

Tornando al caso del sestupolo, l'espressione finale è:

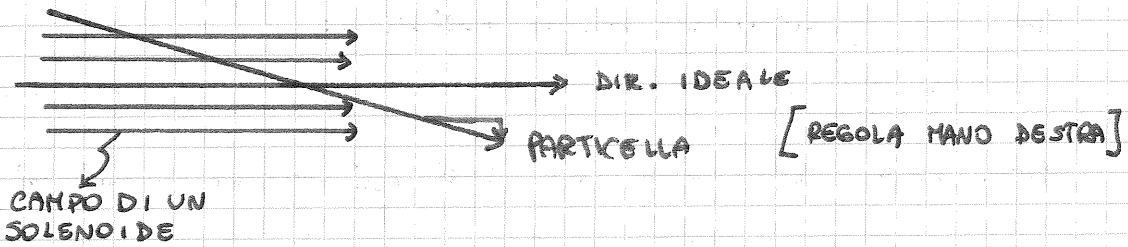
$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{l dk}{2} \beta \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \underbrace{\cos 3(\theta + 2\pi m a)}_{\substack{\text{risonanza con} \\ Q = I + 1/3}} + \underbrace{\cos(\theta + 2\pi m a)}_{\text{risonanza con } Q = I} \right]$$

Analogamente con l'ottupolo:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{l dk}{2} \beta a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \underbrace{\cos 4(\theta + 2\pi m a)}_{\text{risonanza a } .25} + \underbrace{\cos 2(\theta + 2\pi m a)}_{\text{risonanza a } .5} \right]$$



La cosa si complica se  $x$  ed  $y$  sono accoppiati.



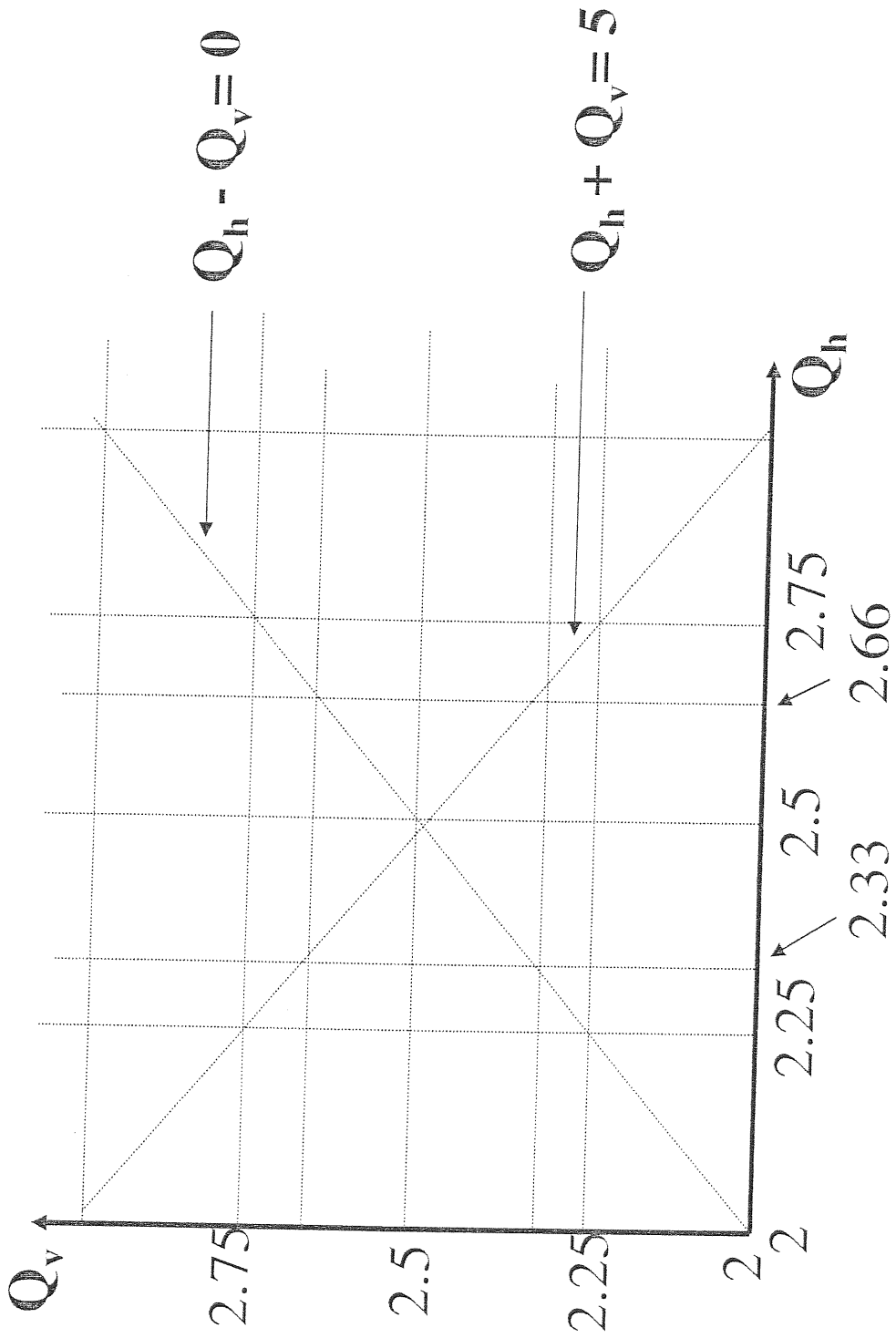
Il solenoide accoppia  $x$  ed  $y$ . In questo caso non vale più  $m_{@x,y} \neq I$ , si ha invece:  $m_{@x} + m_{@y} \neq I$ .

⇒ ci sono un sacco di "linee" proibite.

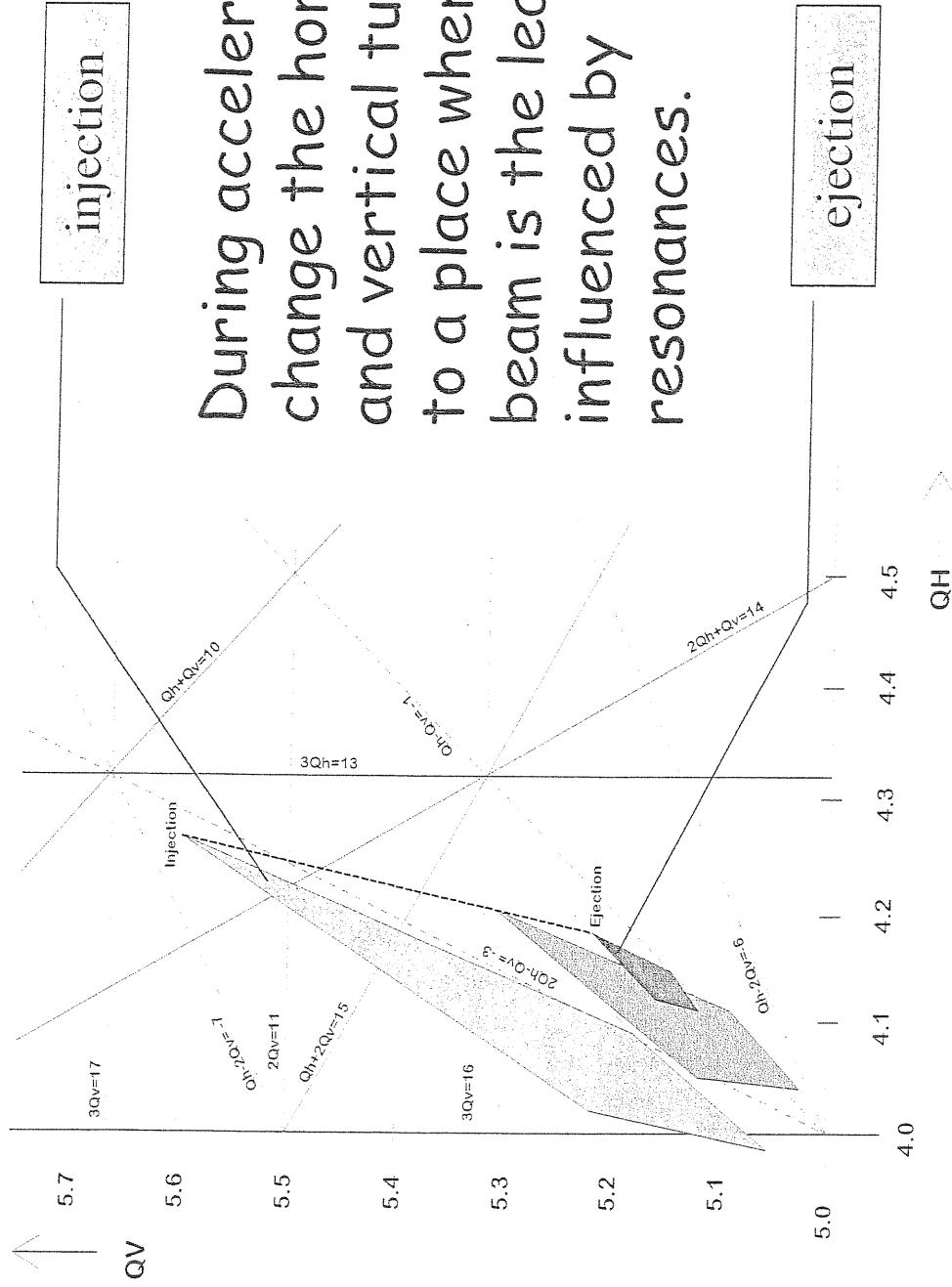
Ci sono molte cose in una macchina che possono generare risonanze, tra cui la costruzione ed il posizionamento dei magneti, o la presenza di magneti sperimentali, o i magneti di final focussing ai punti d'interazione.

Le risonanze più probabili sono quelle di ordine basso,  $n \leq 10$ .

# General tune diagram



# P.S. Booster tune diagram



During acceleration we change the horizontal and vertical tune to a place where the beam is the least influenced by resonances.

Stop band :  $SB = \frac{e\beta k}{2\pi}$

14/11/11

Abbiamo parlato finora del moto trasverso.  
Che cosa succede al moto longitudinale quando  
l'impulso della particella aumenta?

$$B \cdot p = p / e$$

L'impulso aumenta  $\Rightarrow$  aumenta il raggio di  
curvatura. Avremo introdotto la costante  
di proporzionalità  $\alpha_c \equiv$  fattore di compressamento  
tale che:

$$\frac{\Delta r}{r} = \alpha_c \frac{\Delta p}{p}$$

Come possiamo calcolarlo?

Ci aspettiamo che un  $\Delta p$  comporti un  
cambiamento del periodo di rivoluzione.

RADIOFREQUENZA  $\Rightarrow$  ACCELERAZIONE  $\Rightarrow$  PERDITA DI FASE  
RISP. ALLA RADIOFREQUENZA INIZIALE

Sappiamo che vale la relazione:  $v = 2\pi R \cdot f$   
Se deriviamo:

$$dv = 2\pi f dR + 2\pi R df$$

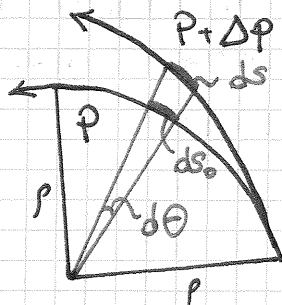
$$\frac{dv}{v} = 2\pi f dR \frac{1}{2\pi R f} + 2\pi R df \frac{1}{2\pi R f}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dR}{R} + \frac{df}{f} = \alpha_c \frac{dp}{p} + \frac{df}{f}$$

$p$  e  $v$  sono strettamente legate: questa  
relazione ci dice come cambia il periodo  
di rivoluzione ( $f = 1/T_r$ ) al variare di  $p$ .

$$\frac{df}{f} = \frac{dv}{v} - \alpha_c \frac{dp}{p}$$

Resto solo da capire quanto vale  $\alpha_c$ .





$$ds_0 = \rho d\theta$$

$$ds = (\rho + x) d\theta$$

$$\frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{x d\theta}{ds_0} = \frac{dl}{ds_0}$$

$x$  può essere  $> 0$  e  $< 0$ . Rappresenta, moltiplicato a  $d\theta$ , la variazione del percorso.

$$\frac{x d\theta}{ds_0} = \frac{x d\theta}{\rho d\theta} = \frac{dl}{ds_0}$$

Se integriamo su tutto l'anello:  $\int dl = 2\pi \int dR =$

$$= \int \frac{x}{\rho} ds_0$$

$\rho$  è il raggio di curvatura prima della "spinta".

$$= \frac{1}{\rho} \int x ds_0$$

$$\text{Quindi: } dR = \frac{1}{2\pi\rho} \int x ds_0 = \langle x \rangle$$

Ricordiamoci la definizione di dispersione:

$$x = D_x \Delta p / p$$

Così come  $\beta = \beta(s)$ , anche  $D = D(s)$ . Se conosco  $\beta$  in ogni punto, allora so scrivere la matrice-giro, e posso calcolare la dispersione punto per punto.

$$\langle x \rangle = \langle D_x \rangle \frac{\Delta p}{p} \quad \text{variazione di } p \text{ lungo un giro}$$

Averemo definito:  $\frac{dr}{r} = \alpha_c \frac{dp}{p}$ . Ma  $dr = \langle x \rangle$ , di conseguenza:

$$\langle D_x \rangle \frac{1}{R} = \alpha_c$$

Il fattore di compattazione è uguale al valor medio della dispersione diviso per il raggio dell'orbita ideale. Ci piacerebbe che questo numero fosse piccolo. Tipicamente  $\langle D \rangle \sim \Delta \Rightarrow \alpha_c$  è piccolo.

$$\frac{df}{f} = \frac{d\pi}{\pi} - \frac{\langle D \rangle}{R} \frac{dp}{p}$$

N.B.:  $D(s)$  così come  $\alpha_c$  sono calcolabili in fase di progettazione.

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dB}{\beta} \quad \Leftarrow \text{qui } \beta \text{ è il } \beta \text{ relativistico, non } \beta(s).$$

$$p = \epsilon_0 \beta \gamma \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{dp}{d\beta} = \frac{\epsilon_0 \gamma^3}{c} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \gamma^2 \frac{dB}{\beta} = \gamma^2 \frac{d\gamma}{\gamma}$$

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{dp}{p}$$

$$\text{quindi: } \frac{df}{f} = \frac{d\gamma}{\gamma} - \alpha_c \frac{dp}{p} = \frac{dB}{\beta} - \alpha_c \frac{dp}{p} =$$

$$= \left( \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_c \right) \frac{dp}{p}$$

$$\boxed{\frac{df}{f} = \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{\langle D \rangle}{R} \right) \frac{dp}{p}}$$

Se la particella ha impulso basso,  $\beta$  è piccolo e  $\gamma \approx 1 \Rightarrow \frac{df}{f} \propto \frac{dp}{p}$  (il coefficiente è positivo).

Ma se la particella è molto accelerata, cioè  $\gamma$  è molto grande, può succedere che  $\frac{df}{f} \propto \left( -\frac{dp}{p} \right)$ : la particella ci mette sempre più tempo a compiere il giro, perché è più influente l'aumento del raggio di curvatura.

$\alpha_c$  è conosciuto  $\Rightarrow$  è possibile calcolare l'energia alla quale il coefficiente  $\frac{1}{\gamma^2} - \alpha_c$  è nullo (energia di transizione), ed il  $\gamma$  corrispondente:

$$\frac{1}{\gamma_{TR}^2} = \alpha_c$$

$$\boxed{\frac{df}{f} = \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_{TR}^2} \right) \frac{dp}{p}}$$

$$(\gamma^{-2} - \gamma_{TR}^{-2}) \equiv \eta = \text{"slip factor"}$$

Con questa definizione:

$$\frac{df}{f} = \eta \frac{dp}{p}$$

Ci sono 3 casi possibili:

$\eta > 0 \longleftrightarrow$  siamo "sotto la transizione"

$\eta = 0 \longleftrightarrow$  TRANSIZIONE

$\eta < 0 \longleftrightarrow$  siamo "sopra la transizione"

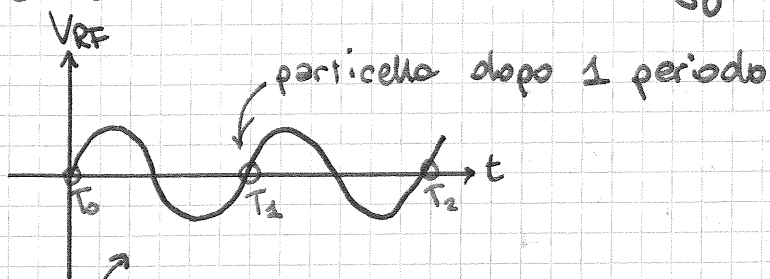
Stiamo supponendo  $\beta$  fisso. Questo non toglie generalità, perché negli acceleratori reali  $\beta$  cambia molto lentamente rispetto al moto di rivoluzione della particella.

Esempio: al PS del CERN,  $E_{TR} = 6 \text{ GeV}$  e  $\langle D \rangle \approx 0.5 \frac{m}{\text{GeV}}$ .  
Questi effetti sono importanti per i protoni, ma trascurabili per gli elettroni. Per un elettrone, infatti, avremo sempre  $\eta < 0$ , la transizione avviene subito.

Il PS del CERN accelera protoni da 3 a 28 GeV: le particelle prima finiscono il giro più velocemente, e poi più lentamente. Il passaggio dell'energia di transizione è delicatissimo.

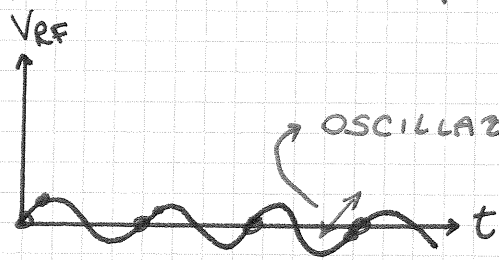
Altra differenza tra acceleratori leptonici e adronici: gli  $e^-$  irradiano. La radiofrequenza deve non solo accelerare, ma anche restituire agli  $e^-$  l'energia che perdono per radiazione di sincrotrone.

NB.: alle energie attuali di LHC non è più trascurabile nemmeno l'irraggiamento dei protoni.



sto lavorando sull'armonica 1.

Supponiamo di lavorare in un regime per cui  $\eta > 0$ , e supponiamo che dopo un giro la particella arrivi piú tardi cambiando fase.



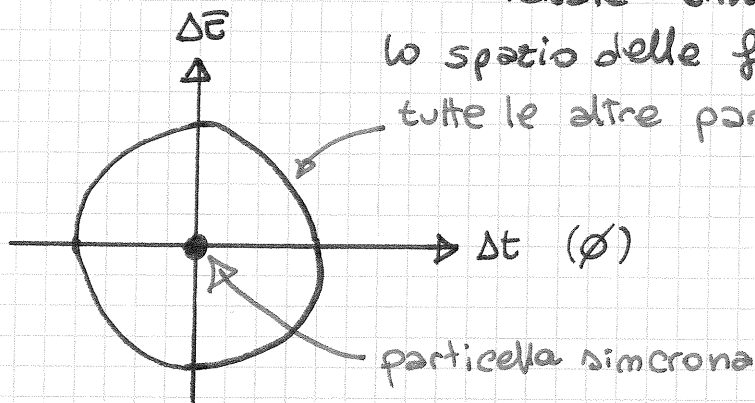
OSCILLAZIONE DI SINCROTRONE: le

particelle oscillano attorno alla fase della particella

ideale sincrona - Introduciamo

lo spazio delle fasi  $\Delta E - \Delta t$ :

tutte le altre particelle



Vedremo che l'oscillazione di sincrotrone non è lineare (non è scrivibile come un oscillatore armonico).

Questo ragionamento va bene per  $E < E_{tr}$  ( $\eta > 0$ ). Che cosa succede SOPRA l'energia di transizione ( $\eta < 0$ )?

Energia piú grande  $\rightarrow$  orbita piú lunga  $\rightarrow$  la particella arriva in ritardo  $\rightarrow$  alla prossima RF prende ancora piú energia.

Viceversa, se l'energia è minore e la particella arriva prima, prende meno spinta.

Questo non funziona.

$\Rightarrow$  Dopo l'energia di transizione, le particelle si accelerano usando il fronte di discesa della RF.

In acceleratori come il PS, ad un certo punto dovremo shiftare la radiofrequenza di un tot. Basta uno switch che possa far passare la RF attraverso un cavo piú lungo. Basta fare questa azione una volta sola per bunch.



Se ignorassimo il fenomeno, il bunch si allungerebbe, e perderemmo tutte le particelle.

Il moto oscillatorio longitudinale non è <sup>lineare</sup> ~~oscillatorio~~.

16/11/2011

Introduciamo un altro num. di variabili, scegliendo un 2° solido con la particella sinistra.

$$\Delta f_c = f_c - f_s$$

freq. oscillazione  
particella

freq. oscillazione  
particella sinistra

$$\left. \begin{aligned} \Delta \phi &= \phi - \phi_s \\ \Delta p &= p - p_s \\ \Delta E &= E - E_s \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{queste due tutte} \\ \text{differente e poste} \\ \text{in posizione} \end{array}$$

A partire da tempo  $t_0$  la particella si muove in una posizione diversa rispetto a quella iniziale



$$\Delta t = t - t_s \quad \left. \begin{array}{l} \text{differente e poste} \\ \text{in tempo} \end{array} \right\}$$

Per definizione

$$f_{RF} = h f_c \Rightarrow \Delta \phi = -h \Delta \sigma$$

↳ armonica della freq. di oscillazione

questo punto

$$\Delta \sigma = \frac{2\pi}{T} \Delta t$$

$$\Delta \phi_{RF} = \frac{2\pi}{T_{RF}} \Delta t$$

freq. angolare particella

$$\Delta t = \frac{T}{2\pi} \Delta \sigma \rightarrow \Delta \phi_{RF} = \frac{2\pi}{T_{RF}} \frac{T}{2\pi} \Delta \sigma = h \Delta \sigma$$

Il segno  $\ominus$  deriva dalle considerazioni a quale particella viene posta.

$$\Delta \omega_c = \frac{d}{dt} \Delta \sigma = -\frac{1}{h} \frac{d}{dt} \Delta \phi = -\frac{1}{h} \frac{d\phi}{dt}$$

~~per~~  $\phi_s \rightarrow$  costante

Abbiamo trovato la velocità precedente:

$$\eta = \frac{p_s}{\omega_s} \left( \frac{d\omega_c}{dp} \right) \rightarrow dp = \frac{d\omega}{\omega} \frac{p}{\eta}$$

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2 \rightarrow dE = v dp = \omega_s R_s \quad (\text{c nem. relativ.})$$

Possiamo scrivere una wave relativistica:

$$\frac{dE}{\omega_s} = R_s dp = R_s \frac{d\omega}{\omega} \frac{p}{\eta} = -\frac{R_s}{\omega} \frac{p}{\eta} \frac{1}{h} \dot{\phi}$$

E siamo calcolati la velocità con la quale cambia la fase.

Con la velocità cambia l'energia?

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = c v \sin \phi \left( \frac{\omega c}{2\pi} \right) \rightarrow \text{particella sinistra}$$

Il punto fondamentale delle oscillazioni di sinusoidali è dare tutti

~~il punto fondamentale delle oscillazioni di sinusoidali è dare tutti~~

kt → effetto, non è statico.

Il regime della pendola è di un'oscillazione di un periodo → il periodo è il tempo in cui c'è una R<sub>s</sub> del resto un periodo per pendola è statico. Se cambia la fase φ cambia la quantità di energia / periodo. Se cambia la quantità di energia / periodo di questa piccola quantità di tempo all'interno stesso R<sub>s</sub>.

Una volta è chiesto dE/dt per una pendola e questa singola?

$$2\pi \Delta \left( \frac{\dot{E}}{\omega_s} \right) = eV (\sin \phi - \sin \phi_s)$$

$$\Delta \left( \frac{\dot{E}}{\omega_s} 2\pi \right) = \Delta (\dot{E} T_c) \approx \dot{E} \Delta T_c + T_{cs} \cdot \Delta \dot{E} = \Delta E T_c + T_{cs} \Delta E =$$

Usa come "analogia" delle accelerazioni in periodo in cui esiste una piccola pendola.

$$\dot{E} = \frac{\Delta E}{T} \quad \text{ho passato il denominatore di } \Delta T_c \rightarrow \frac{\Delta E}{T} = \dot{E}$$

chiamerò il periodo T<sub>s</sub>,

$$\text{ma } \frac{\dot{E}}{\omega_s} \approx \frac{\dot{E}}{\omega_s + \epsilon} \quad \text{Ecco il modello del } \omega$$

$$\rightarrow E(x) = E(x + \epsilon)$$

cambio di T<sub>c</sub> e T<sub>s</sub>.

$$= \frac{d}{dt} (T_{cs} \cdot \Delta E)$$

Altrimenti

$$2\pi \frac{d}{dt} \left( \frac{T_{cs} \cdot \Delta E}{2\pi} \right) = eV (\sin \phi - \sin \phi_s)$$

$$2\pi \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta E}{\omega_s} \right) = eV (\sin \phi - \sin \phi_s) \quad \rightarrow \text{espressione analitica (è utile ma differenziale)}$$

Trasforma periodo da

$$\frac{\Delta E}{\omega_s} = - \frac{R_s}{\omega} \frac{P}{\eta h} \dot{\phi}, \quad \text{Sostituendo abbiamo}$$

$$- 2\pi \frac{d}{dt} \left( \frac{R_s}{\omega} \frac{P}{\eta h} \dot{\phi} \right) = eV (\sin \phi - \sin \phi_s)$$

una variabile: φ

$$\left( \frac{R_s}{\omega} \frac{P}{\eta h} \frac{1}{2\pi} \right) \ddot{\phi} + eV (\sin \phi - \sin \phi_s) = 0$$

abbiamo ottenuto un'eq. analogica a

Sui testi troviamo:

$$\ddot{\phi} + \frac{\Omega^2}{\cos \phi_s} (\sin \phi - \sin \phi_s) = 0$$

$\ddot{X} + k(x)X = 0$  \*  
 avrebbero uguale il coefficiente  
 $\sin \phi - \sin \phi_s = \phi$ ,  
 ma cos non è  
 Sono quindi altre non identiche.

per l'equazione simile a \* -

$$\Omega^2 = \frac{eV}{2\pi} \frac{\omega \eta h}{R_s P} \cos \phi_s$$

Quand'è che  $\Omega \neq 0$  e l'eq per  $\dot{\phi}$  diventano uguali? Per  $\dot{\phi}$  molto piccoli.

$$\sin \phi - \sin \phi_s = \sin(\phi_s + \Delta\phi) - \sin \phi_s \approx \cos \phi_s \Delta\phi$$

e abbiamo quindi

$$\ddot{\phi} + \Omega^2 \Delta\phi = 0$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \text{per } \beta \ll 1 \\ &\approx \sin \alpha + \beta \cos \alpha \\ &= \sin \phi_s + \Delta\phi \cos \phi_s \end{aligned}$$

$\Omega^2$  deve essere maggiore di zero, altrimenti non abbiamo forze di richiamo.  $\Omega$  deve essere reale e positivo.

Hp:  $r < r_{\pi} \rightarrow \eta > 0$  se  $\eta$  è negativo  $\Omega$  è immaginario.

Se  $0 < \phi_s < \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \phi_s > 0 \rightarrow$  devo lavorare sul fronte di valle e quindi sono funzioni.

È necessario che anche  $\cos \phi_s > 0 \rightarrow \Omega^2 > 0$

Per  $\eta < 0$  ( $r > r_{\pi}$ ) dobbiamo avere  $\cos \phi_s < 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} < \phi_s < \pi$   
 $\rightarrow$  fronte di discesa.

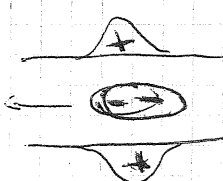
Abbiamo ottenuto coi valori di questi esponenti che avremo un certo numero di oscillazioni.

$$\left( \sqrt{\frac{2\pi h \nu}{\epsilon}} \cdot f_i \right) = \text{TONO DELL'OSILLAZIONE DI SINCRONIZAZIONE (num. di oscillazioni di sincronizzare per giro)}$$

Abbiamo finito la storia della particella singola.

Un gruppo di particelle può essere instabile, a causa delle interazioni coulombiane.

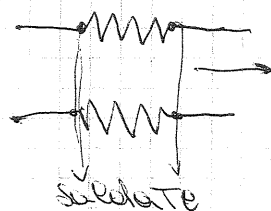
Supponiamo di avere un bunch che viaggia dentro un tubo conduttore. Esistere e questo si muove come un'onda immaginaria.



La carica immagine che non sono quantificata ma è alla carica che ho.

Il tubo a vuoto è un conduttore perfetto.

La carica immagine che si perde energia (secondo la pipe dopo lo spegnimento è calda  $\rightarrow$  sempre più rumore) - il fatto è che per fare i quali ci sono le interazioni di diff. (TANBACK):

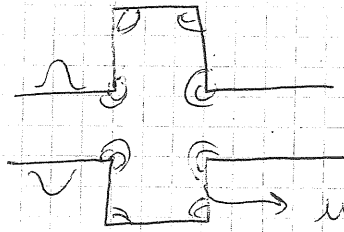
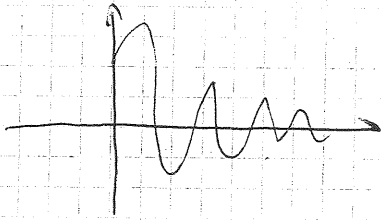


si allunga e si restringe

sebbene



Si creano due coppie di campi → si crea un campo di questo sistema un'oscillazione di tensione.



mezzi singoli, si può ottenere  
 due campi identici  
 perché si comportano  
 come capacitivi / resistivi  
 se si staccano  
 un po' dopo il  
 passaggio del bunch.

Effetti:

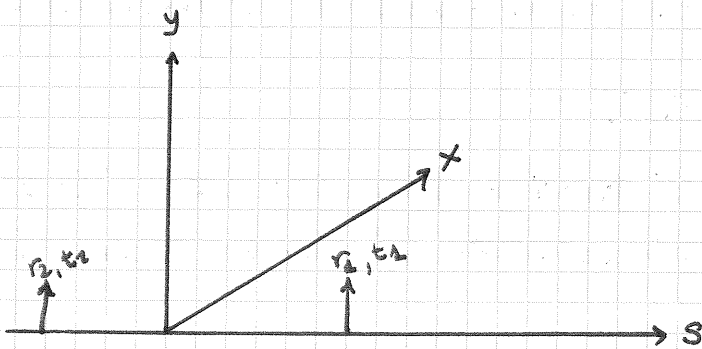
- shift frequenza
- modifica la distribuzione  
 nel del bunch
- lo campo creato  
 può essere come  
 bene allungarsi e per  
 superare ciò si crea un  
 punto del focus.

17/11/11

Una cavità è uno scatolo al cui interno facciamo risuonare una radiofrequenza (onda statica): le dimensioni della cavità devono essere molto precise.

Se però si crea una risonanza tra il campo scia e il campo all'interno della cavità, si possono facilmente creare delle instabilità.

Ogni volta che un bunch entra in una cavità, si crea una perturbazione che si smorza nel tempo quando il bunch esce. Se lo smorzamento è lento ed il campo è ancora perturbato quando arriva il bunch successivo, si parla di perturbazioni multi-bunch. Queste possono essere pericolosissime.



Se  $(r_1, t_1)$  è la prima particella del bunch ed  $(r_2, t_2)$  l'ultima, per calcolare l'effetto della perturbazione devo integrare su tutto il bunch: è l'integrale di una corrente tra  $r_1$  ed  $r_2$ .

N.B. Ogni particella produce una perturbazione che agisce su tutte le particelle successive  $\Rightarrow$  è un integrale doppio.

Ogni campo scia cede energia alle particelle successive, deformando il bunch.

La variazione in energia di una singola particella di carica unitaria dovuta al campo scia di una singola particella di carica unitaria:

$$W = V/q \quad \text{Funzione di scia}$$

$$Nq = \iint i(r, t) dr dt$$

$N$  numero di particelle del bunch.

Il potenziale totale generato dai campi scia è:

$$V = \iint W i dr dt$$

Passando al dominio delle frequenze, il bunch diventa una sommatoria di onde a frequenze diverse.

Si può così definire l'impedenza di accoppiamento per una particella di frequenza  $\omega$  a distanza  $r$  dell'orbita ideale:

$$z(r, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(r, t) e^{-i\omega t} dt$$

Ne risulta che il potenziale totale indotto è scrivibile come:

$$\tilde{V}(r, t) = Z(r, \omega) I(r, \omega)$$

con  $I$  trasformato di Fourier della corrente  $i(r, t)$ .

Si dimostra che il ragionamento è valido anche nel senso inverso:

$$V = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{V} e^{i\omega t} d\omega$$

Nel dominio delle frequenze il potenziale segue la legge di Ohm  $\Rightarrow$  dobbiamo calcolare  $Z(r, \omega)$ .

Tutto questo serve a vedere come reagisce il fascio di fronte ad imperfezioni della beam pipe.

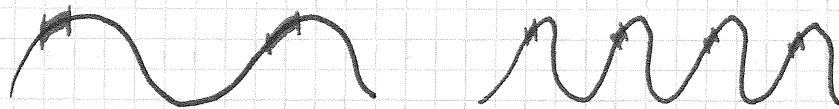
Vediamo come si calcola l'impedenza di una cavità.

In questi oggetti, la frequenza è un'armonica della radiofrequenza  $\Rightarrow$  è facile entrare in risonanza.

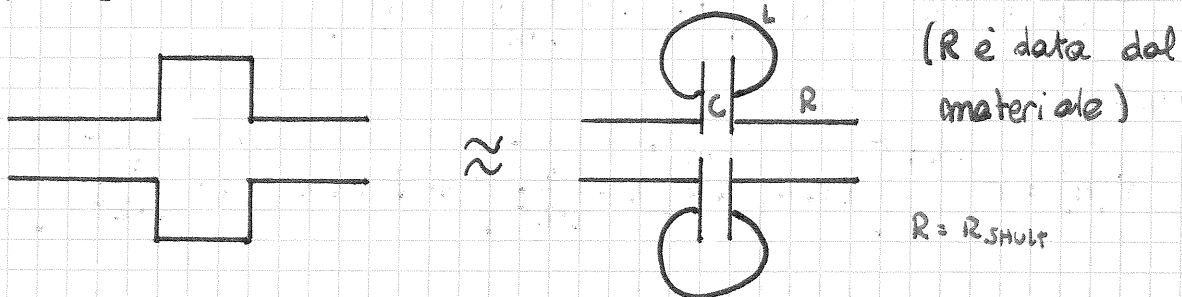
$$T_R = h T_{RF} \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

Il numero max di bunch che posso mettere dentro contemporaneamente è pari all'armonica. Ad esempio, ad LHC  $h \approx 1500$ .

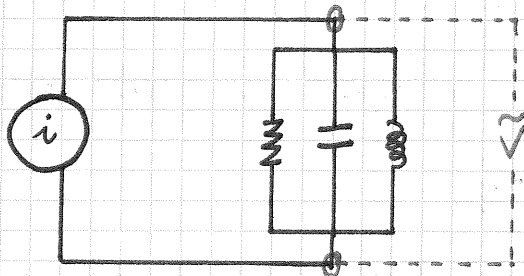
NB.: se la frequenza è alta è più difficile mantenere i bunch in fase (st piccolo).



Vediamo come si calcola, ad esempio, l'impedenza di una cavità.



Schematizzo il resto dell'acceleratore come un generatore di corrente.



Questo tipo di trattazione è generale: ogni imperfezione è approssimabile con un circuito.

Un circuito RLC è dato da:

- frequenza di risonanza  $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- fattore di qualità  $Q = R_s \sqrt{C/L} = R_s \frac{1}{L \omega_r} = R C \omega_r$
- fattore di damping  $\alpha = \frac{\omega_r}{2Q}$ ,  $L = \frac{R_s}{Q \omega_r} \Rightarrow Q = C \omega_r R_s$

Risolviamo ora il circuito.

$$V_R = I_R R_s \quad V_C = \frac{1}{C} \int I_C dt \quad V_L = L \frac{dI_L}{dt}$$

$$V_R = V_I = V_L \quad I = I_R + I_C + I_L$$

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C + \dot{I}_L \Rightarrow \dot{I} = \frac{\dot{V}_R}{R_s} + C \ddot{V}_C + \frac{V_L}{L} \Rightarrow \dot{I} = \frac{\dot{V}}{R_s} + C \ddot{V} + \frac{V}{L}$$

In termini di grandezze misurabili sulla macchina abbiamo:



$$\ddot{V} + \frac{\omega_r}{Q} \dot{V} + \omega_r^2 V = \frac{\omega_r R_s I}{Q}$$

L'esperienza mostra che un RLC è una buona schematizzazione per una cavità. Purtroppo non è sempre così semplice, per le altre impurità.

Nel nostro caso la soluzione è:

$$V(t) = \hat{V} e^{-\alpha t} \cos\left(\omega_r \sqrt{1 - \frac{t}{4Q^2}} + \phi\right)$$

ovvero

$$V(t) = e^{-\alpha t} \left[ A \cos\left(\omega_r \sqrt{1 - \frac{t}{4Q^2}}\right) + B \sin\left(\omega_r \sqrt{1 - \frac{t}{4Q^2}}\right) \right]$$

Questa è la soluzione per correnti generiche. Nel caso di un bunch "corto", posso scrivere:

$$I \equiv q \delta(t)$$

Le condizioni iniziali per una corrente di questo tipo:

$$V(0^+) = q/C = \frac{\omega_r R_s}{Q} q$$

L'energia spesa per caricare il condensatore è:

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{V(0^+)}{2} q = K_{pm} q^2 \quad \begin{matrix} \rightarrow K_{pm} = \frac{\omega_r R_s}{2Q} \\ \text{paraxitic mode} \end{matrix}$$

$$\dot{V}(0^+) = -\frac{q^2}{C} = -2 \frac{\omega_r K_{pm}}{Q} q$$

Con queste due condizioni iniziali la soluzione diventa:

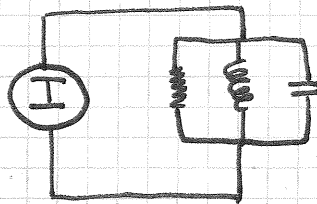
$$V(t) = 2q K_{pm} e^{-\alpha t} \left[ \cos\left(\omega_r \sqrt{1 - \frac{t}{4Q^2}}\right) + \frac{\sin\left(\omega_r \sqrt{1 - \frac{t}{4Q^2}}\right)}{2Q \sqrt{1 - \frac{t}{4Q^2}}} \right]$$

Funzione di Green - di scia

21/11/11

Abbiamo risolto una cavità come se fosse un generatore di corrente con un parallelo RLC:

$$\ddot{V} + \frac{\omega_r V}{Q} + \omega_r^2 V = \frac{\omega_r R_s}{Q} \hat{I}$$



Per una corrente a delta di Dirac abbiamo ottenuto come soluzione il potenziale di scia. Una corrente più simile ad un bunch reale è più della forma:

$$I = \hat{I} \cos(\omega t)$$

Sostituendola nell'equazione:

$$\ddot{V} + \frac{\omega_r V}{Q} + \omega_r^2 V = -\hat{I} \frac{\omega_r R_s}{Q} \omega \sin(\omega t)$$

N.B.:  $\omega \neq \omega_r$ !

$\omega_r$  = frequenza di risonanza dell'RLC

$\omega$  = frequenza di rivoluzione del bunch

Cerchiamo una soluzione del tipo:

$$V = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

A e B derivano dalle condizioni iniziali. Otteniamo la soluzione generale per una corrente di questo tipo:

$$V(t) = \hat{I} R_s \frac{\cos(\omega t) + Q \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega_r \omega} \sin(\omega t)}{1 + Q^2 \left( \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega_r \omega} \right)^2}$$

Vediamo che se per caso  $\omega_r = \omega$ , la perturbazione sarà massima. Questo ce lo aspettavamo

⇒ il parallelo RLC è una buona schematizzazione per la cavità.

Il potenziale perturbativo ha una componente

In caso, il termine resistivo, che è in fase con il passaggio del buco. C'è poi il termine in seno, detto termine fuori fase (NB:  $\cos \alpha = \sin(\pi/2 - \alpha)$ ), detto anche termine reattivo, che non partecipa allo scambio di energia tra il fascio e la cavità.

Possiamo ora definire l'impedenza della cavità:

$Z(\omega) = \frac{V(\omega)}{I(\omega)} = \frac{R_s}{1 + Q^2 \left( \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega_r \omega} \right)^2}$	IMPEDENZA RESISTIVA
$Z_i(\omega) = - R_s \frac{Q \left( \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega_r \omega} \right)}{1 + Q^2 \left( \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega_r \omega} \right)^2}$	IMPEDENZA REATTIVA

L'impedenza resistiva è sempre positiva; quella reattiva ha un segno che dipende dalla differenza tra  $\omega^2$  e  $\omega_r^2$ . Il "-" iniziale è dovuto allo sfasamento di  $\pi/2$ .

Lo stesso risultato poteva essere ricavato con:

$$I \equiv \hat{I} \left( e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) \quad 0 < \omega < +\infty$$

dove però l'intervallo delle frequenze ammesso è asimmetrico. Per renderlo simmetrico:

$$I \equiv \text{Re} \left\{ \hat{I} e^{i\omega t} \right\} \quad -\infty < \omega < +\infty$$

Si trova una soluzione del tipo:

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t} \quad (\text{di cui è di rilevanza fisica solo la parte reale})$$

$$\left( -\omega^2 e^{i\omega t} + i \frac{\omega_r \omega}{Q} e^{i\omega t} + \omega_r^2 e^{i\omega t} \right) V_0 = i \frac{\omega_r \omega}{Q} \text{Re} e^{i\omega t} \hat{I}$$

e quindi:

$$Z(\omega) = \frac{V_0}{I} = Z_e + i Z_i = \frac{R_s}{1 + iQ \left( \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)}$$

$$= R \frac{[1 - iQ \left( \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega \omega_r} \right)]}{1 + Q^2 \left( \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega \omega_r} \right)^2}$$

È esattamente la stessa cosa: la parte  $R$  è la resistenza e la parte immaginaria la reattanza.

Per  $\omega = \omega_r$  la parte resistiva è massima, e la parte reattiva è nulla: non ci sono sfasamenti, ma solo scambi di energia.

Per  $0 < \omega < \omega_r$  la reattanza è un'impedenza induttiva. Al contrario, se  $0 < \omega_r < \omega$  la parte dominante è quella capacitiva.

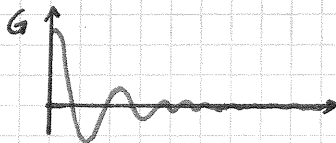
N.B.: nel passaggio da  $\omega$  a  $-\omega$  (un fascio che gira "al contrario") l'impedenza resistiva è, come ci aspettiamo, invariata.

$$\text{N.B.: } z(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) e^{-i\omega t} dt$$

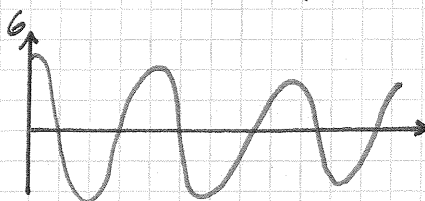
dove  $G(t)$  è la funzione di Green ed è nulla per  $t < 0$ .  $\Rightarrow$  principio di causalità:  $G$  rappresenta il potenziale lasciato da una particella visto dalla particella successiva.

N.B.: Se  $Q$  è molto grande, la parte reale perde importanza rispetto a quella immaginaria. Nel limite di  $Q$  molto piccolo,  $z(\omega) \approx R_s$ .

Per  $Q$  piccoli:



Per  $Q$  grande il tempo di damping è molto più lungo.

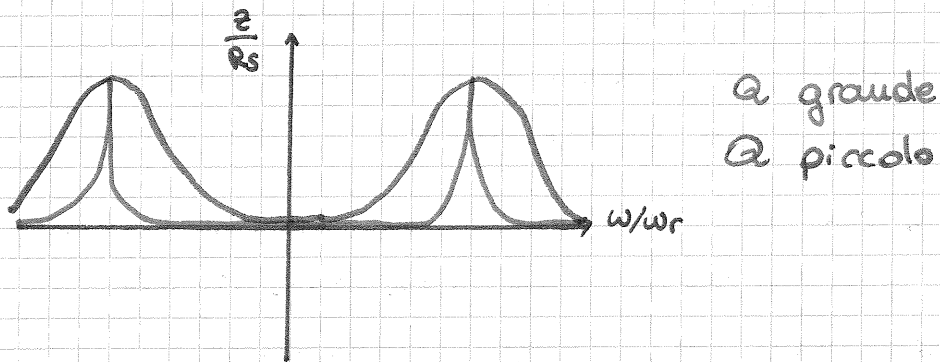




Vediamo infatti: la parte resistiva per  $Q$  grande:

$$\approx \frac{R_s}{Q^2 \left( \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega_r \omega} \right)^2} = \frac{R_s (\omega_r \omega)^2}{Q^2 (\omega_r - \omega)^2}$$

Il  $Q$  grande non garantisce un'impedenza piccola!  
se  $\omega \approx \omega_r$ , questa diverge.



$Q$  grande  $\rightarrow$  risonance a banda stretta  
 $Q$  piccolo  $\rightarrow$  risonance a banda larga

(Questo vale per qualsiasi circuito RLC, non solo negli acceleratori).

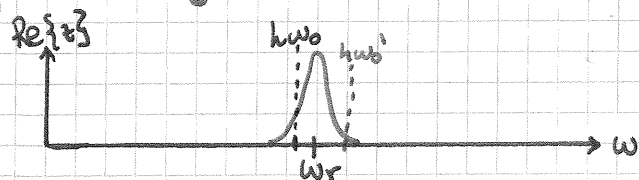
Tutte le perturbazioni sono schematizzate con circuiti RLC (eventualmente poi si pone  $a=0$  R, L o C) -

In generale: le cavità sono risonante a banda stretta; tutte le altre imperfezioni sono a banda larga (ad es. saldature ( $L \approx 0$ ), ecc.).

La perturbazione può essere di 2 tipi:

- longitudinale
- trasversa

Per esempio, consideriamo un singolo bunch che gira lungo l'acceleratore a frequenza  $\omega_r$



Supponiamo di avere una cavità ad alto  $Q$  con frequenza di risonanza

$\omega_r$  vicina ad un'armonica della frequenza sincrona ( $h\omega_0$ ).

Le particelle con  $\omega' < h\omega_0$  vedono un'impedenza piú alta; quelle con  $\omega' > h\omega_0$  ne vedono una piú alta (perdono quindi piú energia) -

Ci sono vari casi.

Se siamo SOPRA l'energia di transizione:

$$h\omega_0 < \omega_r$$

- $\omega < h\omega_0 \Rightarrow \Delta E$  basso
- $\omega > h\omega_0 \Rightarrow \Delta E$  alto

Le particelle con piú energia ne perdono meno di quelle che ne hanno meno.

Allora, dato che non possiamo cambiare  $\omega_r$ , "spostiamo" la cavità in modo da ottenere:

$$\omega_r < h\omega_0$$

- $\omega < h\omega_0 \Rightarrow \Delta E$  alto
- $\omega > h\omega_0 \Rightarrow \Delta E$  basso

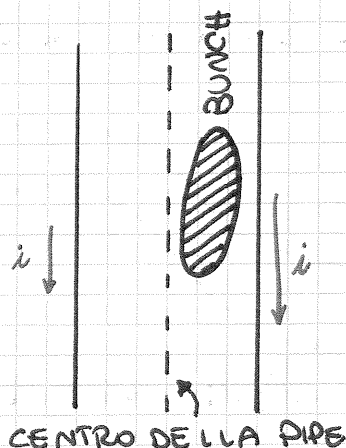
Questa si chiama instabilità di Robinson.

In questo caso, le particelle che hanno piú energia ne perdono di piú, e quelle che ne hanno meno ne perdono meno  $\Rightarrow$  rischio di perdere meno particelle.

NB.: se la cavità non fosse narrow-band sarebbe molto piú difficile spostare la frequenza per portarci dalla situazione " $h\omega_0 < \omega_r$ " alla situazione " $h\omega_0 > \omega_r$ ".

Esempio

SPARCIATO DI  
UNA BEAM  
PIPE



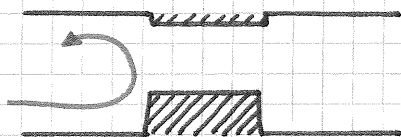
La corrente a destra è piú grande di quella a sinistra  $\Rightarrow$  si crea un  $\vec{B}$  uscente dal foglio.

$$\int_0^S (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) dS = \int z_{\perp}(\omega) I(\omega) d\omega$$

$z_{\perp}$  = impedenza trasversale

(Abbiamo esplicitato il lavoro per carica unitaria) -

Se abbiamo una pipe e ad un certo punto la "stringiamo":



$z_{\parallel}$  diverge;  $z_{\perp}$  crea dei loop:

( $\exists$  un'onda riflessa)

↓  
loop di corrente

Riprendiamo la cromaticità:  $\xi = \frac{\Delta Q}{Q} / \frac{\Delta P}{P}$

→ il tubo è trasversale. L'impedenza di macchina implica un trasferimento di energia  $\Rightarrow \Delta P \neq 0$ .

Se  $\exists$  punti della macchina in cui  $\xi \neq 0$  si sta modificando il tubo della macchina.

Un'impedenza è in grado di far diventare trasversale un'impedenza longitudinale, a meno che la cromaticità non sia nulla lungo tutto la macchina.

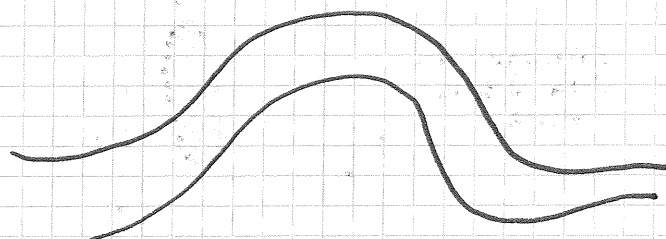
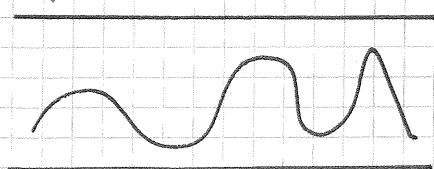
23/11/2011

Quanto è forte la repulsione elettrostatica tra le particelle di un bunch?

Ci sono due tipi di effetti:

- movimenti incoerenti all'interno del volume occupato dal bunch;
- effetti coerenti: si sposta l'intero fascio.

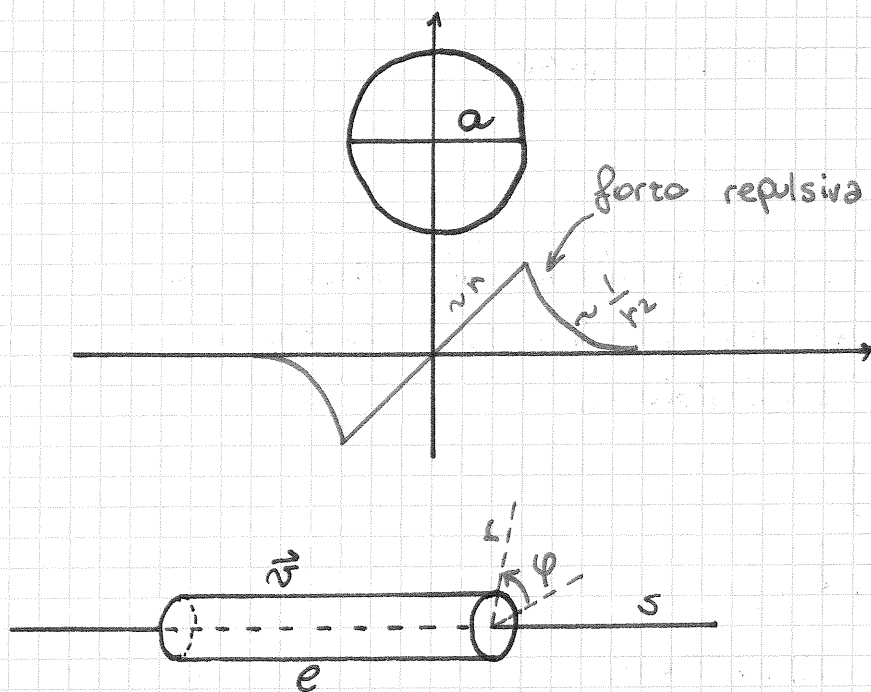
effetti incoerenti



effetti coerenti

Le particelle sono sottoposte sia ad una forza repulsiva, sia ad una forza magnetica crescente con la loro velocità: l'effetto totale è una forza repulsiva che diminuisce al crescere della velocità.

Supponiamo che il fascio sia circolare e le cariche siano uniformemente distribuite.



$dS$  = superficie  $d$ -esima laterale del cilindro

$dA$  = " " " fascio del cilindro

La forza magnetica è attrattiva e bilancia la repulsione elettrostatica.

$$\eta = \text{densità di carica} \left[ \frac{e}{m^3} \right]$$

$$\lambda = \eta \pi a^2 = \text{densità lineare di carica}$$

$$I = \lambda \beta c = \text{corrente}$$

Valgono le leggi di Maxwell. In particolare:

$$\text{div } \vec{E} = \eta \frac{1}{\epsilon_0}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad \vec{J} = \beta c \eta = \text{densità di corrente}$$

Per una particella a distanza  $r$  dal centro del fascio,



applichiamo la legge di Faraday e la legge di Gauss:

$$\iiint \operatorname{div} \vec{E} \, dV = E \, 2\pi r l = \pi r^2 l \eta \frac{1}{\epsilon_0}$$

di conseguenza:

$$E_r = \frac{I r}{2\pi \epsilon_0 \beta c a^2}$$

Calcoliamo ora il campo magnetico:

$$2\pi r \vec{B} = \mu_0 r^2 \pi \beta c \eta$$

(abbiamo usato circuitazione = flusso)

$$\Rightarrow B_\varphi = \frac{I r}{2\pi \epsilon_0 c^2 a^2}$$

Supponiamo di avere una particella di carica  $e$  a distanza  $r$  dal centro del fascio. La forza risultante è, per definizione,

$$\vec{F} = e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$F_r = e (E_r - |\vec{v} \wedge \vec{B}|)$$

facendo i conti otteniamo:

$$F_r = \frac{e I}{2\pi \epsilon_0 \beta c} (1 - \beta^2) \frac{r}{a^2} = \frac{e I}{2\pi \epsilon_0 c^2} \frac{1}{\gamma^2} \frac{r}{a^2}$$

$$F_r = F_x + F_y$$

Ci conviene scomporre la forza radiale nelle sue componenti lungo  $x$  ed  $y$  per lavorare con i multipoli. Questa è una forza defuocheggiante.

$$F_x = \frac{e I}{2\pi \epsilon_0 c^2} \frac{1}{\gamma^2} \frac{x}{a^2}$$

$$F_y = \frac{e I}{2\pi \epsilon_0 c^2} \frac{1}{\gamma^2} \frac{y}{a^2}$$

N.B.: Questa forza è sempre  $> 0 \Rightarrow$  sempre defuocheggiante, ma è più efficace a basse energie: scende con  $\gamma^2$ .

Questa forza assomiglia molto alla forza di quadrupolo. Possiamo inserirla nell'equazione di Hill come perturbazione.

$$\ddot{x} + k(s)x = 0 \quad \text{equazione di Hill}$$

$$\ddot{x} + \left[ k(s) + \underline{\underline{\Delta k(s)}} \right] x = 0 \quad \text{eq. di Hill perturbata}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{\beta^2 c^2} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\beta^2 c^2} \frac{F_x}{m_0 \gamma} = \\ &= \frac{2r_0 I}{e a^2 \beta^3 \gamma^3 c} x, \quad r_0 \equiv \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m_0 c^2} \end{aligned}$$

NB.: tutti i calcoli sono stati fatti supponendo che le particelle siano uniformemente distribuite all'interno del bunch.

Avevamo trovato precedentemente che:

$$\Delta Q_x = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi r} k_x(s) \beta_x(s) ds$$

(un  $\Delta k$  induce nella macchina un  $\Delta Q$ , calcolabile se conosciamo l'espressione di  $\Delta k$ ).

Questo effetto  $\nexists$  per la particella singola: è dovuto esclusivamente alla presenza delle altre particelle.

$$\Delta Q_x = - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi R} \frac{2r_0 I}{e \beta^3 \gamma^3 c} \frac{\beta_x(s)}{a^2} ds$$

In questa espressione l'unica cosa da integrare è  $\beta_x(s)$ .

$$= - \frac{2r_0 I}{4\pi e \beta^3 \gamma^3 c} \int_0^{L_{acc}} \frac{\beta_x(s)}{a^2} ds$$

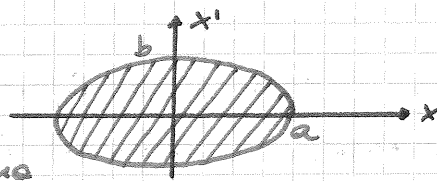
$\beta$  delle macchina  
 $R =$  raggio dell'acceleratore

$\beta$  relativistico

Si vede che ad alta energia  $\Delta Q$  è trascurabile. È invece rilevante per bunch molto "corichi" ( $\Rightarrow$  molta corrente) e a bassa energia.

Ricordiamo che l'emittanza (l'area dell'ellisse nello spazio delle fasi) è data da:

$$\epsilon_x = \pi a b \approx \left\langle \frac{a^2}{\beta x} \right\rangle$$



In fatti:

$$\frac{a^2}{\beta} = a \frac{a}{\beta} \sim a x'$$

$\beta$  di macchina

E' ragionevole approssimare il  $\Delta Q$  con:

$$\Delta Q_x \approx - \frac{2 r_0 I}{4 \pi e \beta^3 \gamma^3 c} \frac{1}{\epsilon_x}$$

Questo ci dà un'idea dell'entità della variazione

del tune dovuta alla

presenza di molte particelle

all'interno del fascio.

$$\frac{1}{\epsilon_x} \approx \int_0^{2\pi} \frac{\rho_x(s)}{a^2} ds$$

$\Delta Q$  è tanto più grande quanto più è piccola

l'emittanza. Questo è significativo: in fisica

medica, ed in ricerca nelle alte energie, si

cerca sempre di avere fasci ad emittanza più

bassa possibile (= fasci stretti, dritti ed intensi).

Spesso si scrive anche:

$$\Delta Q_x = - \frac{r_0 N}{2 \pi \epsilon_x \beta^3 \gamma^3}$$

dove  $N$  è il numero totale di particelle che circolano

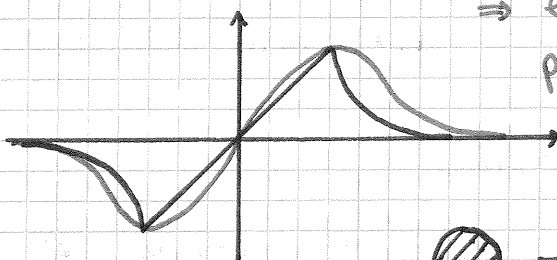
all'interno dell'anello. Questo è un altro modo per vedere

che la variazione del tune è più grande se iniettiamo

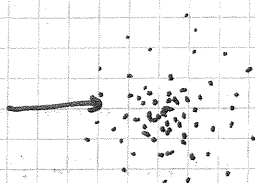
più particelle.

Se il fascio non è confinato esattamente in un

volume cilindrico:



⇒ la forza repulsiva non è più lineare.



Nel caso lineare è facile calcolare la quantità

$$Q_p + Q_c = Q_{tot}$$

$\uparrow$  di progetto       $\uparrow$  di macchina

e per rendere  $Q_{\text{tot}}$  irrazionale basta modificare quasi impercettibilmente l'anello o qualche quadrupolo.

Ma nei casi reali la forza repulsiva non è lineare, e induce un'incertezza:

$$Q_c \rightarrow Q_c \pm \Delta Q_c \quad \text{Effetto Lonlett}$$

Si dimostra che lo spread del tune ha varianza  $\frac{1}{2} Q_c$ :

$$Q_c \rightarrow Q_c \pm \frac{Q_c}{2}$$

Questo tipo di problema si ha nei booster, quando  $\gamma$  è piccolo.

Ad esempio, nel booster del CERN,

$$E = 0.998 \text{ GeV} \quad \gamma = 1.053 \Rightarrow \Delta Q = Q_c = 0.3$$

al PS:

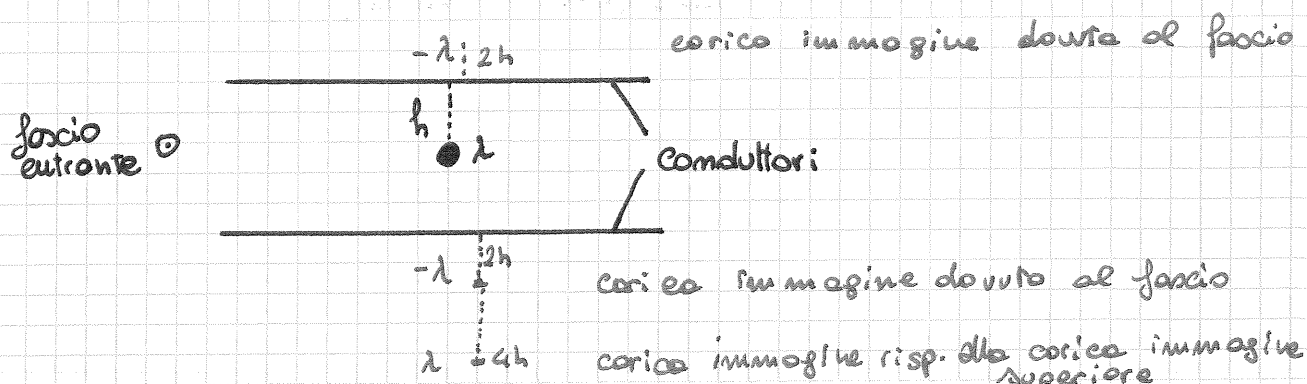
$$E = 2.4 \text{ GeV} \quad \gamma = 2.475 \Rightarrow \Delta Q = Q_c = 0.05$$

all' SPS:

$$E = 14 \text{ GeV} \quad \gamma = 15 \Rightarrow \Delta Q = Q_c = 0,00001$$

Questo spiega perché nel booster si accelera solo di 1 GeV e mezzo: dobbiamo tenere le particelle nel booster meno tempo possibile, perché se vanno in risonanza le perdiamo. Nel PS la probabilità di entrare in risonanza è più piccola  $\Rightarrow$  posso accelerare più a lungo le particelle, e così via.

Approssimiamo la pipe come due conduttori paralleli:



Il campo elettrico di cui risente ogni particella del bunch è:

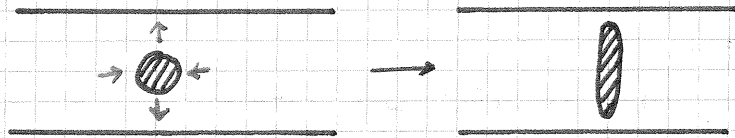
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 h^2} \left( \frac{\pi^2}{12} \right) y$$

dove  $y$  è lo scostamento "verticale" dall'asse della pipe. L'effetto è più grande tanto più piccolo è  $h \Rightarrow$  tanto più stretta è la pipe.

Nell'altra direzione abbiamo una componente analogica, infatti:

$$0 = \text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \Rightarrow E_x = - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 h^2} \left( \frac{\pi^2}{12} \right) x$$

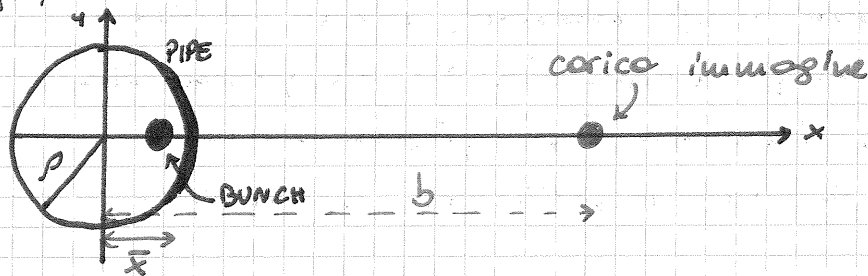
Cioè il fascio si restringe (conservazione della carica):



Esercizio: perché la pipe non è isolante?

Usare delle pipe più larghe ha una conseguenza economica: occorrerebbero magneti più grandi.

C'è anche un altro effetto di carica immagine: se il bunch non è esattamente al centro della pipe, si ha:



$$b \bar{x} = p^2 \quad E(\bar{x}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(b-\bar{x})} \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 p^2} \bar{x}$$



Abbiamo sempre trascurato due elementi:

- iniezione ed estrazione;
- come si accelerano le particelle (come sono fatte le cavità a RF).

Un altro set di acceleratori è necessario prima di poter iniettare particelle ad una macchina ad alta energia: abbiamo bisogno di molte linee di trasferimento, che estraggano un fascio da una macchina e lo iniettino in un'altra.

In fisica medica la fase di estrazione è importantissima.

Una volta che abbiamo definito un set di magneti per l'iniezione, per effettuare l'estrazione è sufficiente prendere lo speculare.

Una linea di trasferimento è necessariamente fatta di dipoli e quadrupoli  $\Rightarrow$  le particelle avranno oscillazioni di betatrone.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

La linea di trasferimento è rappresentata da una matrice. La differenza tra una linea di trasferimento e un acceleratore è il fatto che, nelle prima, il fascio passa una volta sola. L'orbita è aperta.

Nel caso dell'acceleratore, la matrice generale era del tipo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha \sin\mu & \beta \sin\mu \\ \gamma \sin\mu & \cos\mu - \alpha \sin\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

( $\mu$  = avanzamento di fase in un giro).

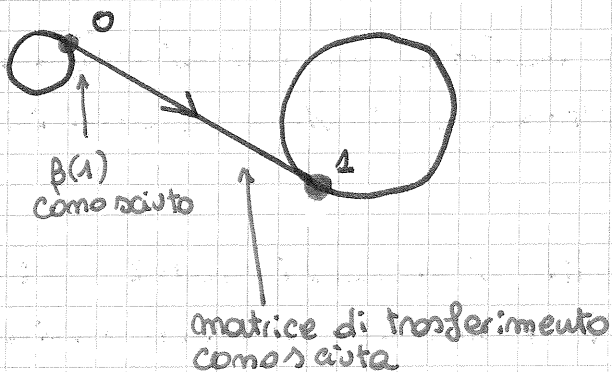
Si dimostra che in una linea di trasferimento vale l'espressione:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_1/\beta_0} (\cos\mu + \alpha_0 \sin\mu) & \sqrt{\beta_0\beta_1} \sin\mu \\ \frac{(1 + \alpha_0\alpha_1)\sin\mu + (\alpha_1 - \alpha_0)\cos\mu}{\sqrt{\beta_0\beta_1}} & \sqrt{\beta_1/\beta_0} (\cos\mu - \alpha_1 \sin\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

dove  $\beta_0 = \beta(0)$  e  $\beta_1 = \beta(1)$ .

Un giro in un anello è equivalente ad una linea di trasferimento con  $Q \equiv 1$ . Se teniamo conto di questo e confrontiamo le matrici, vediamo che in questo caso la matrice di trasferimento equivale alla matrice di macchina.

Il problema è che in questo caso abbiamo infinite soluzioni.



Dato un punto di partenza  $(x_0, x_0')$ , conosco tutti i parametri  $\beta_0, \alpha_0$ , ecc.

Conoscendo la matrice di trasferimento, posso progettare il secondo acceleratore in modo da avere il  $\beta(2)$  corrispondente al punto di ingresso (quadrupoli di matching).

Si può anche seguire il processo inverso, se si è già costruito gli acceleratori e si deve progettare la linea di trasferimento: dobbiamo mettere una serie di FODO tale che la matrice prodotto accoppi  $\beta_0$  e  $\beta_1$ .

Nel punto  $s=0$  di estrazione il primo acceleratore avrà una certa emittanza (l'ellisse nel piano delle fasi che contiene una certa % delle particelle del bunch, tipicamente il 90%).

Lungo la macchina l'ellisse che rappresenta

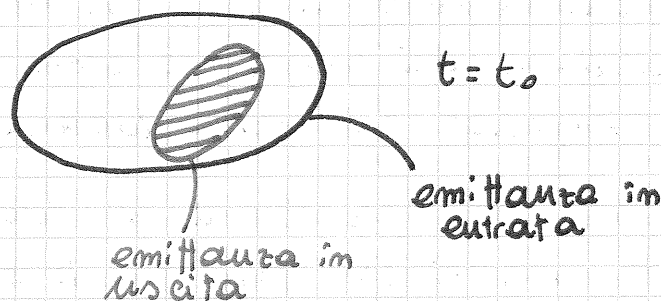
L'emittanza ruota sul piano delle fasi.

Tutti i parametri dell'ellisse sono esprimibili in funzione del parametro di Twist  $\beta$ .

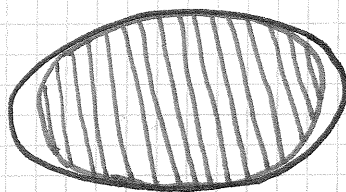
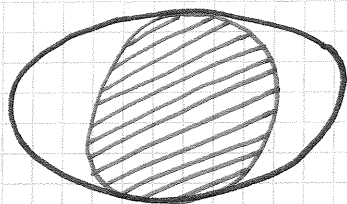
A  $\beta_0$  corrisponde una certa ellisse; a  $\beta_1$  un'altra. In che relazione devono essere?

L'ellisse al punto  $s=1$  deve contenere l'ellisse al punto  $s=0$ . Così ogni punto dello spazio delle fasi che era disponibile per le particelle estratte dal primo acceleratore è ancora accessibile nel secondo acceleratore, e non perdiamo particelle.

In particolare:

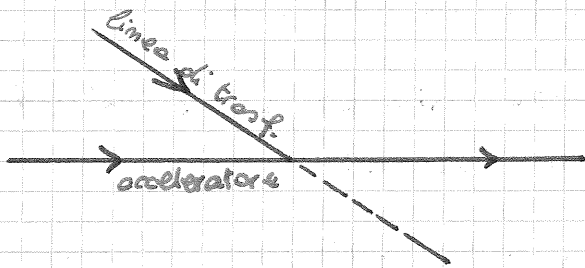


Per principi termodinamici, dopo un certo  $\Delta t$  le particelle tenderanno ad occupare tutto lo spazio disponibile nello spazio delle fasi:



N.B.: le dimensioni del fascio sono date da  $\sqrt{\epsilon\beta}$   $\Rightarrow$  tenere sotto controllo  $\epsilon$  significa tenere sotto controllo la dimensione del fascio ( $\Rightarrow$  fisica medica).

Ora che abbiamo la linea di trasferimento dobbiamo fare l'iniezione. Questo richiede far ruotare il fascio con un dipolo:



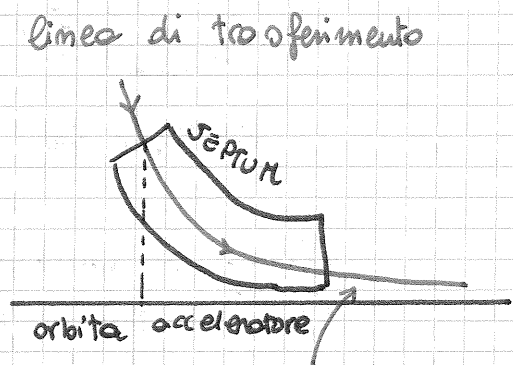
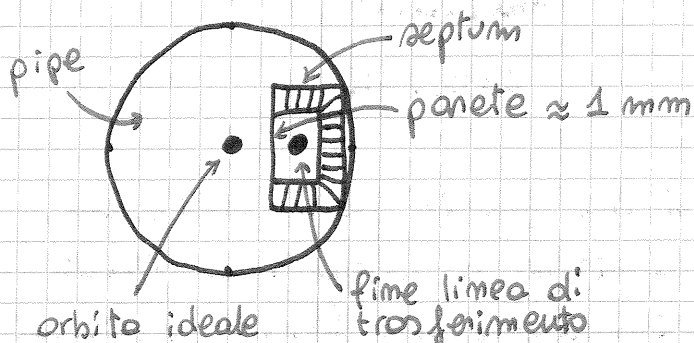
Tipicamente si utilizza un magnete speciale, detto septum, che porti il fascio parallelo alla linea dell'orbita ideale dell'acceleratore, a qualche mm da essa: questo per non disturbare il fascio, che già circola nell'acc., con campi magnetici.

Si aggiunge poi un condensatore, kicker, che oscilla alla frequenza di iniezione dei bunch, e serve a "spingere" il bunch in ingresso sull'orbita ideale.

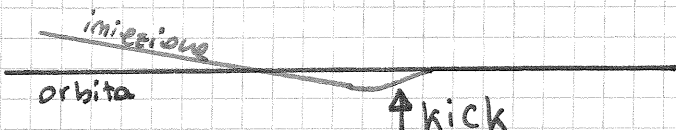
Teniamo acceso il kicker solo per alcuni ms all'iniezione di ogni bunch: questo non si può fare con il septum, per via del fenomeno di isteresi  $\Rightarrow$  per questo lo teniamo "lontano" dal fascio (qualche mm).

N.B.: i kicker sono elementi fonti di risonanze dal punto di vista dei campi scia: si cerca di progettarli in modo che  $RLC = 0$ .

Com'è fatto il septum?

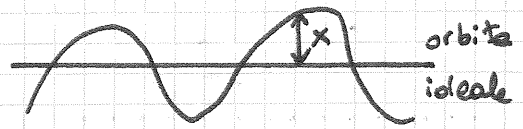


Rimane un piccolo  $d\theta$ , che viene eliminato dal kicker



Dobbiamo tener conto anche del fenomeno della dispersione.

$$X = X_{\text{progetto}} + \text{Dispersione} \frac{\Delta p}{p}$$



C'è necessariamente un  $\Delta p$  che non si riesce ad eliminare. Bisogna fare anche un matching con la dispersione.

Se iniettiamo con un  $\Delta p$  diverso da quello della macchina di arrivo, quello che succede dipende dal tipo di particella:

- $e^- e^+$   $\Rightarrow$  tramite la radiazione di sincrotrone si rimescolano in energia con le altre particelle.
- $p$  o ioni  $\Rightarrow$  il bunch diventa "globuloso", strutturato in bunchetti di impulso diverso.

N.B.: Questo effetto si nota quando abbiamo una macchina dove già circola un fascio, e vogliamo aumentare il numero di particelle in un bunch. Questa è una situazione tipica ai collisori adronici, dove vogliamo tenere fasci in circolazione per periodi molto lunghi (ore, o giorni).

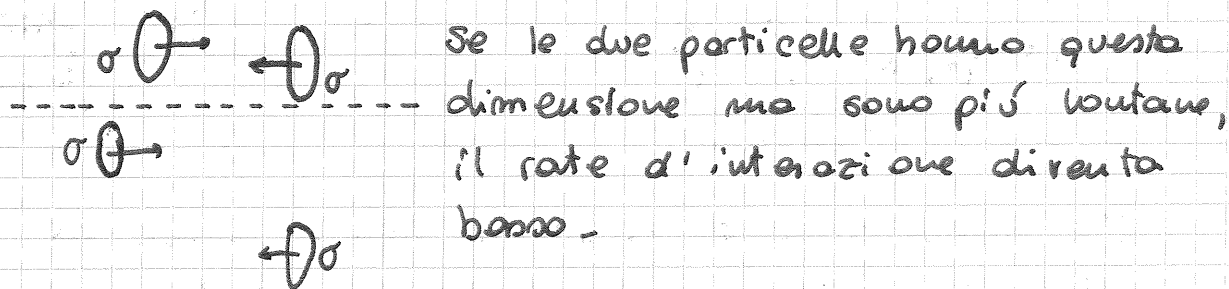
Dopo un po' di ore di utilizzo, l'acceleratore si è mezzo svuotato. Si fa allora un pile-up dei bunch, inserendone di nuovi. Questo permette anche di risparmiare potenza elettrica nell'accelerazione.

Il rate è dato dalla probabilità fisica di interazione, per la luminosità del fascio:

$$R = \sigma \mathcal{L}$$



La luminosità è un parametro di massima, del fascio: rappresenta la densità di particelle.

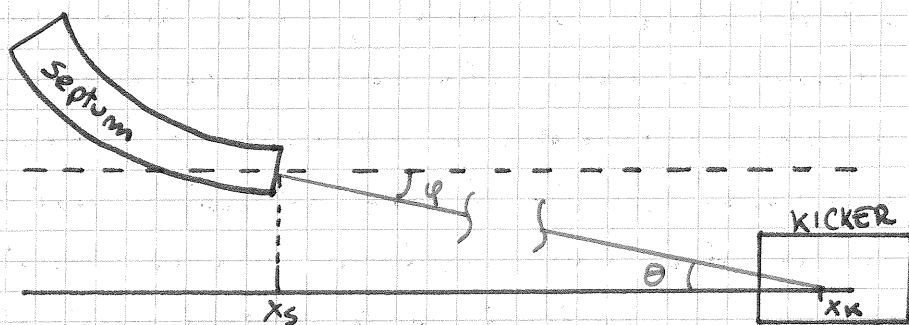


$d \propto \frac{I_1}{N_1} \cdot \frac{I_2}{N_2} \Rightarrow$  più aumentiamo la luminosità e più abbiamo effetti di repulsione elettrostatica con conseguenti  $\Delta Q$ .

Il filling-up con i protoni non si fa: con fasci granulari non si riesce a calcolare la luminosità.

Come si calcola il  $d\theta$  da eliminare con il kicker?

Comosciamo l'impulso longitudinale  $\Rightarrow$  mi serve solo calcolare il  $\Delta P$  trasverso.



Le particelle, radenti al fascio, viaggiano molto a lungo e attraversano anche campi magnetici  $\Rightarrow \theta$  non necessariamente è  $= \varphi$ .

Le posizioni del fascio all'altezza del kicker saranno date da:

$$\begin{pmatrix} x_k \\ x'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_k}{\beta_s}} (\cos\mu + \alpha_s \sin\mu) & \sqrt{\beta_k \beta_s} \sin\mu \\ -\frac{(1 + \alpha_s \alpha_k) \sin\mu + (\alpha_k - \alpha_s) \cos\mu}{\sqrt{\beta_s \beta_k}} & \sqrt{\frac{\beta_s}{\beta_k}} (\cos\mu - \alpha_k \sin\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ x'_s \end{pmatrix}$$

$(x_s, x'_s)$  noti. Vogliamo imporre  $x_k = 0$ . Risultato:

$$x'_s = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{cotg} \mu + \alpha_s}{\beta_s} \cdot x_s \Rightarrow \text{ricaviamo l'avanzamento di fase } \mu.$$

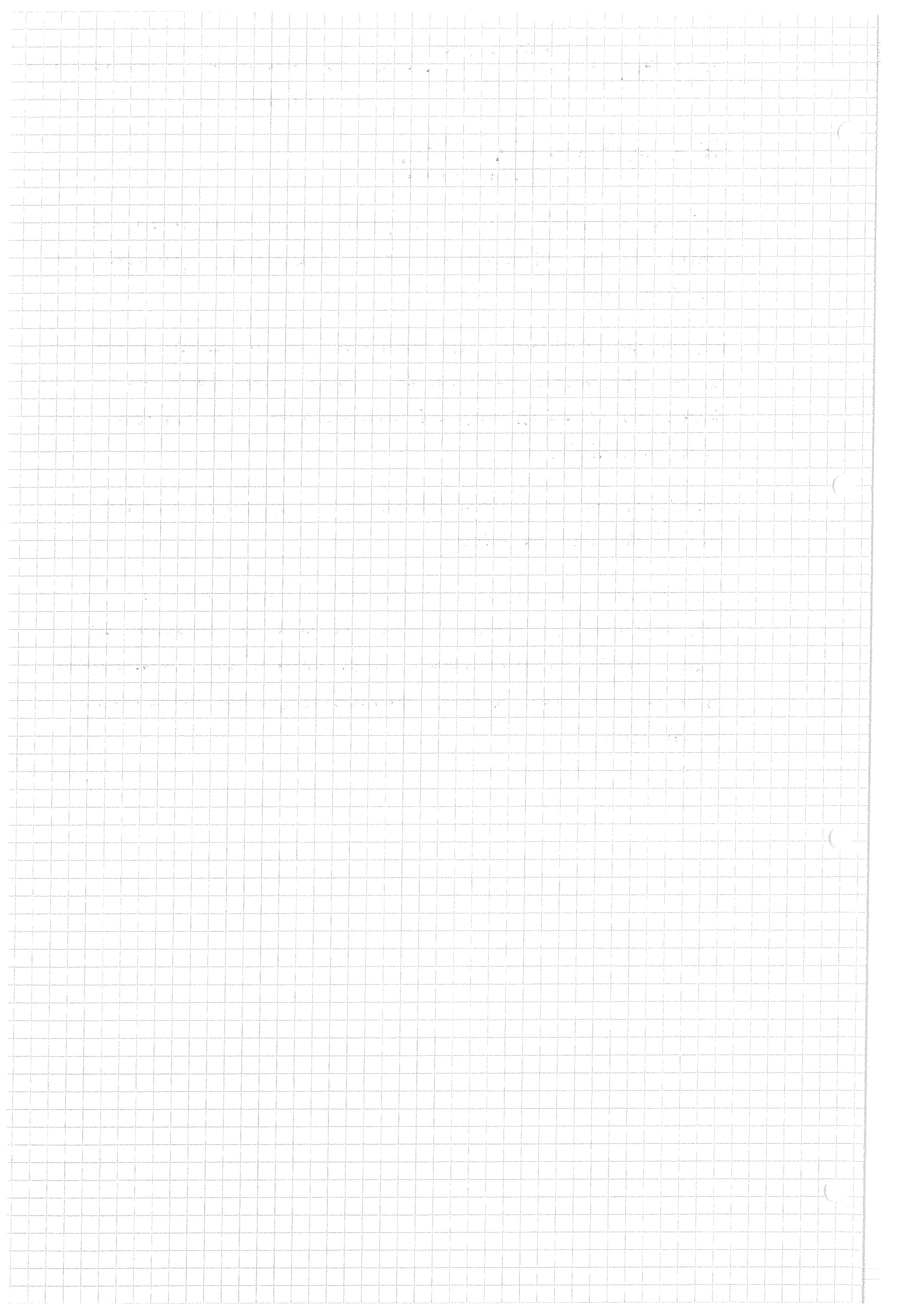
$$x'_k = \operatorname{tg} \theta = - \frac{1}{\sqrt{\beta_s \beta_k}} \frac{x_s}{\sin \mu}$$

Abbiamo ricavato  $\mu$ ;  $\beta_k$  è quello della macchina al punto  $x_k \Rightarrow$  ricaviamo  $\theta$  e sappiamo quindi che kick dare.

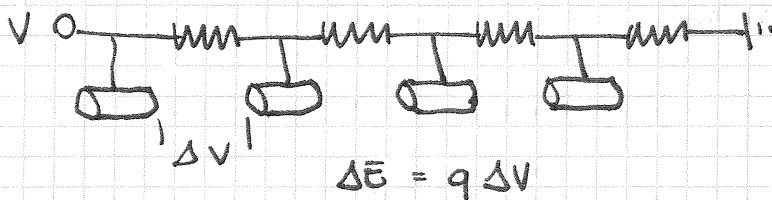
Per quanto riguarda gli elettroni, se li inietta dove  $x_s \ll$  lunghezza del fascio, non serve dare un kick: la radiazione di sincrotrone "li ributta nel mucchio".

Multiiniezione / Multiestrazione: quando avviene più volte in un giro.

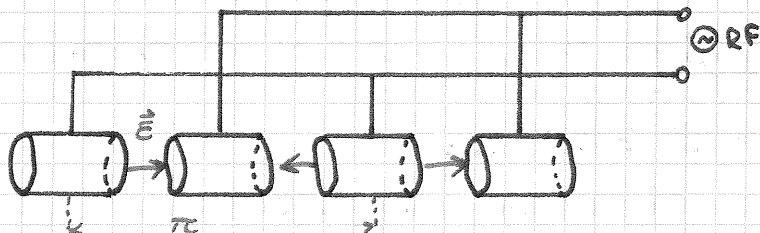
Iniezione risonante / estrazione risonante:  
 per estrarre il fascio, con un kick lo manda su una forte risonanza: così non è più contenuto nell'accettanza della macchina, ed esce dopo pochi giri.



28/11/2011



Acceleratore  
elettrostatico



Acceleratore a  
radiofrequenza

"modo  $\pi$ ": in una lunghezza d'onda c'è un  
cambiamento di fase di  $180^\circ$ .

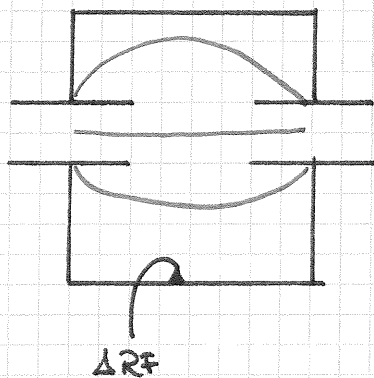
$$L = n \frac{T_{RF}}{2} \quad n = \frac{2L}{T_{RF}}$$

Cambiare polarità in continuazione significa  
caricare e scaricare condensatori. Più  $L$  è  
lungo, più il tempo di [s] caricamento si allunga:  
se  $L$  è troppo grande, i cilindretti non raggiungeranno  
mai la carica massima ottenibile con quel  $\Delta V$   
 $\Rightarrow$  acceleratore inefficiente.

Oltretutto, stiamo creando un'antenna: aumentando  
la RF iniziamo ad irraggiare (come un telefonino)  
 $\Rightarrow$  il  $\Delta V$  disponibile diminuisce sia di aumentare  
della lunghezza che della frequenza.

Qual è un sistema efficiente?

CAVITÀ



Manteniamo un'onda  
stazionaria all'interno  
della cavità risonante.  
L'energia resta all'interno  
di questa "scatola risonante".

Questo richiede che l'energia  
venga trasferita dalla RF al pacchetto  
di particelle senza attrito  $\Rightarrow$  si utilizzano cavità  
superconduttrici.

Il campo elettrico all'interno della cavità sarà della forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - ks)}$$

con  $\omega$  armonica della frequenza di rivoluzione e dell'acceleratore.

Negli acceleratori elettrostatici,  $V_{RF} = \frac{\omega_{RF}}{2\pi} = 0$   
(la differenza di potenziale tra due punti è fissa).

Per i betatroni:  $V_{RF} = 10 \div 10^3$  Hz

N.B.: i betroni accelerano ad campo magnetico.

Per gli acceleratori a radiofrequenza (ad es. sincrotroni)

la frequenza necessaria è:  $V_{RF} = 10^6 \div 10^{11}$  Hz

Equazioni di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{campo elettrico normalizzato}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \text{" magnetico "}$$

Come possiamo modificare con una cavità la struttura di un acceleratore per avere un campo elettrico o magnetico come lo vogliamo noi?

Vediamo come si modificano le eq. di Maxwell se la nostra onda cammina nel vuoto:

$$\vec{J} = 0 \quad \rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

N.B.: ricordiamoci che  $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0$ .

Per definizione:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

$$\text{Nel vuoto: } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0$$

$$\text{Inoltre: } \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \left( - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow - \nabla^2 \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \left( - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = - \frac{d}{dt} \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$



Ne risulta:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{Equazione di Laplace}$$

La cui soluzione generale è:  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

Lo stesso ragionamento si può fare per il campo magnetico.

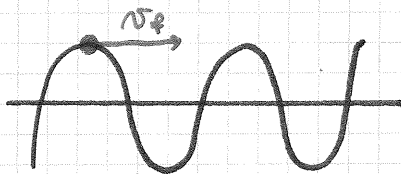
Sappiamo anche che  $\vec{B}$  ed  $\vec{E}$  sono ortogonali.

Questo descrive la propagazione di un'onda e.m. nel vuoto.

Se scegliamo come direzione  $z \equiv s$ :  $\vec{E}_0 \equiv E_0$

$$E_z = E_0 \cos(\omega t - kz)$$

(ci interessa solo la parte  $\in \mathbb{R}$ )



La velocità di fase è tale che  $\varphi = \omega t - kz = \text{costante}$ .

Definiamo quindi:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} (\omega t - kz) \equiv 0$$

$$\omega - k \frac{dz}{dt} = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} \equiv v_f$$

La frequenza e il numero d'onda sono proporzionali:-

Cos'è la velocità di gruppo?

L'ampiezza  $E_0$  viene modulata secondo il tempo e secondo lo spazio.

Se la nostra onda è una sovrapposizione di onde di poco dissimili in  $\omega$  e in  $k$ , utilizzando

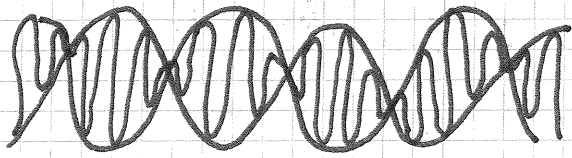
$$\cos[(kx - \omega t) \pm (\Delta k x - \Delta \omega t)] = \cos(kx - \omega t) \cos(\Delta k x - \Delta \omega t) \pm \sin(kx - \omega t) \sin(\Delta k x - \Delta \omega t)$$

otteniamo, per due onde di frequenza  $\omega \pm \Delta \omega$  e numero d'onda  $k \pm \Delta k$ ,

$$2 \cos(kx - \omega t) \cos(\Delta k x - \Delta \omega t)$$

Che è un'onda di ampiezza modulata due volte:

$$\vec{E} = [2 E_0 \cos(kx - \omega t)] \cos(\Delta k x - \Delta \omega t)$$



fenomeno dei  
battimenti

La velocità di gruppo è quella tale che  $\Delta k x - \Delta \omega t = \text{costante}$ :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{Velocità di gruppo}$$

Cosa succede se mandiamo l'onda in un conduttore?

Gli e<sup>-</sup> del conduttore iniziano a muoversi, ma il conduttore presenta una resistenza  $\Rightarrow$  c'è dissipazione di energia in calore. L'energia è fornita dall'onda  $\Rightarrow$  l'ampiezza dell'onda cala man mano che esso attraversa il conduttore.

In un conduttore:  $\rho = 0$   $\vec{j} = \sigma \vec{E}$   
con  $\sigma$  conduttività del conduttore.

$$\text{Ricaviamo: } \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

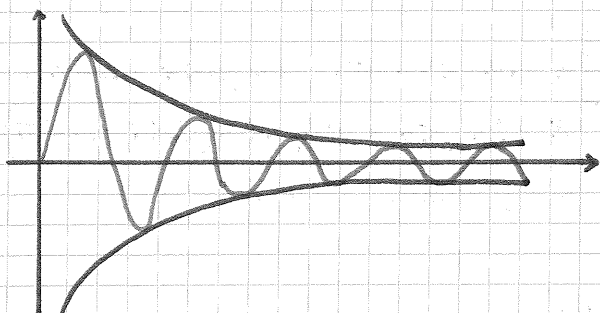
N.B.: la velocità della luce in un mezzo è  $v = c/n$ .

$$-\vec{k}^2 + i\omega\sigma\mu_0 + \frac{\omega^2}{v^2} = 0 \quad \text{Relazione di dispersione}$$

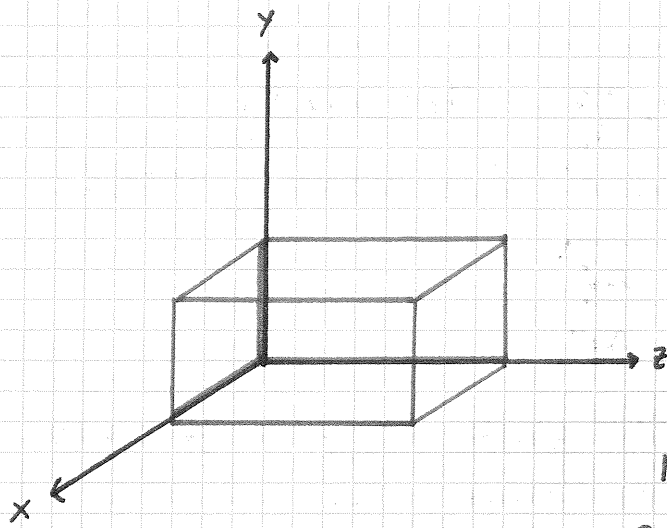
Se prendiamo  $k$  tale che  $\vec{k} = \vec{\alpha} + i\vec{\beta}$   
otteniamo:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\vec{\beta} \cdot \vec{r}} e^{i(\vec{\alpha} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

È un'onda che si propaga attenuandosi.



In un materiale  
superconduttore l'onda  
viene trasportata come  
se fosse nel vuoto.



Prendiamo una guida d'onda di forma parallelepipedale. Dentro c'è il vuoto. Ci saranno dunque solo dei vincoli sulle pareti, che definiscono le condizioni iniziali e quindi  $E_0$ .

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \ddot{E} = 0$$

Inserendo i vincoli dati dalle pareti otteniamo:

$$E_y = E_{y0} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t}$$

È ugualmente nelle altre direzioni. C'è modulazione in ogni direzione.

Un'onda può oscillare su tutti i gradi di libertà:

$$E_x = E_{x0} \sin(k_z z) \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{-i\omega t}$$

$$E_z = E_{z0} \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_x x) e^{-i\omega t}$$

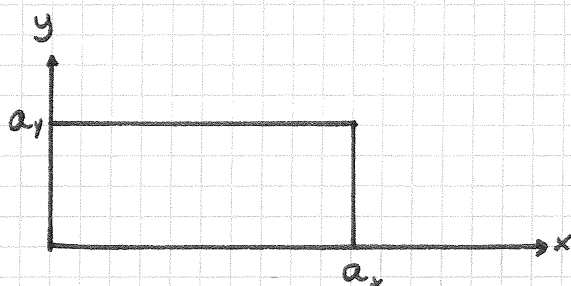
Naturalmente deve valere la relazione:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \left( \vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \right)$$

Siccome abbiamo solo correnti e non cariche statiche, vale anche l'equazione:

$$k_x E_{x0} + k_y E_{y0} + k_z E_{z0} = 0$$

Prendiamo ad esempio un caso bidimensionale:



applicare le condizioni al contorno significa

$$E_y(y=0) = 0$$

$$k_x a_x = m_x \pi$$

$$k_x = m_x \frac{\pi}{a_x}$$

In generale:

$$k_x = m_x \frac{\pi}{a_x}$$

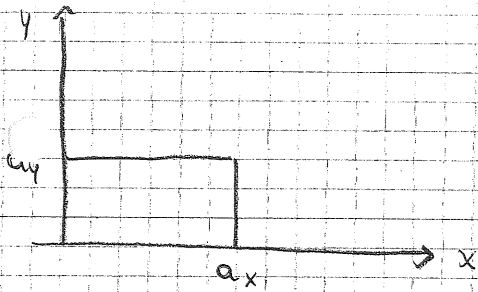
$$k_y = m_y \frac{\pi}{a_y}$$

$$k_z = m_z \frac{\pi}{a_z}$$

e la somma dei loro quadrati deve essere  $= \omega^2/c^2$  :

$$\omega = \pi c \sqrt{\frac{m_x^2}{a_x^2} + \frac{m_y^2}{a_y^2} + \frac{m_z^2}{a_z^2}}$$

Le dimensioni spaziali della guida d'onda fissano la frequenza che essa deve trasportare.



pu  $y=0 \quad E_y=0$

$E_y=0$

$x=a_x \quad k_x = \frac{m_x \pi}{a_x}$

Condizioni generali:

$k_x = \frac{m_x \pi}{a_x}, \quad k_y = \frac{m_y \pi}{a_y}, \quad k_z = \frac{m_z \pi}{a_z}$

Regola generale:

$\omega = \pi c \sqrt{\frac{m_x^2}{a_x^2} + \frac{m_y^2}{a_y^2} + \frac{m_z^2}{a_z^2}}$

Dato una guida rettangolare a questo ci viaggia un'onda con frequenza  $\omega$  che si ricava dalle dimensioni geometriche della guida stessa.

30/11/2011

Le onde si classificano come:

- Onde trasversali TE
- Onde trasversali TM
- Onde trasversali TEM

Analoga in coord. cilindriche  $x$  e  $y$  avviene un andamento sinusoidale in  $\rho$  e in  $\phi$ .

Le onde vengono classificate anche in base agli indici:

TM  $m, n, p \rightarrow$    
 - caso rettangolare  $\rightarrow$  sono i  $E, B$  a dipendere da  $x$    
 - caso cilindrico  $\rightarrow$   $m \rightarrow E, B$  a dipendere da  $\rho$  che grazie all'angolo  $\phi$  fa l'onda in una circonferenza chiusa.

$m \rightarrow E_z$  e  $B_z \propto J_m(x_{m, n} r/R_c) \rightarrow$  determinati da il coeff. della funzione di Bessel.

$p \rightarrow E$  e  $B \propto \cos p \pi z \rightarrow$  velocità con la quale si muove lungo  $z$ .

\* Ci dice quale tipo di Bessel abbiamo prendere.

La più semplice ha le TM  $0, 1$ :

TM  $0, 1$

Per questo avremo:

- $E_z = E_0 J_0(k_c r) e^{-ik_z z} e^{i\omega t} \rightarrow$  onda che viaggia lungo  $z$
- $E_r = i \frac{k_z}{k_c} J_1(k_c r) e^{-ik_z z} e^{i\omega t}$
- $H_\phi = i \frac{k}{Z_0 k_c} E_0 J_1(k_c r) e^{-ik_z z} e^{i\omega t}$



Cos'è  $k_c$ ? Abbiamo  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \rightarrow k_z^2 + k_c^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ , con  $k_c^2 = k_y^2 + k_x^2$   
 e definiamo  $k_c = \frac{\omega_c}{c} = \lambda_c^{-1}$  (c sta per "cut-off").

Sappiamo che la velocità di fase è:  $v_f = \frac{\omega}{k_z}$ . Quindi possiamo scrivere:

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{v_f^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_c^2}{c^2}, \text{ perché } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_c^2$$

Quindi 
$$v_f = \frac{c^2 \omega}{\omega^2 - \omega_c^2}$$

Se  $\omega_c = 0 \rightarrow v_f = c$  - la velocità di fase può essere anche maggiore di  $c$  ( $\omega > \omega_c$ ) - se  $\omega < \omega_c$  l'onda si smorza.

$\omega_c$  è legata alle caratteristiche trasversali del nostro tubo nel caso cilindrico e complicate forse i calcoli, mentre è più semplice farlo in coordinate cilindriche. Vediamo quindi per un tubo e ragioniamo sulle equazioni  $E_z = E_0 J_0(k_c z) e^{-ik_z z}$ .

Quando  $z = a$  vogliamo che

$$J_0(k_c a) = 0$$



Tubo di raggio  $a$ , conduttore.

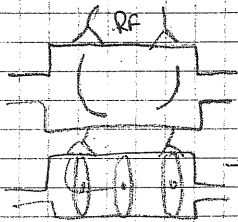
ci assicura che a qualunque posizione lungo  $z$   $E_z = 0$ , perché è un conduttore.

La funzione di Bessel ha il primo zero per  $X = 2.405$  ( $J_0(x) = 0$ ).

Qui vogliamo che  $k_c a = 2.405$ . Scegliendo il raggio della nostra guida d'onda possiamo definire  $k_c$  e sappiamo quali sono le onde (le loro frequenze) che possono viaggiare all'interno del nostro tubo.

Ora abbiamo 2 possibilità per accettare parzialmente un'onda:

1 - possiamo prendere un tubo di raggio  $a$ , si inietta l'onda e si fa "strip"



Problema:  $v_f > c$  per diminuire  $v_f$  si possono usare le degli iridi

sono caratterizzati da 4 parametri:

$b$  (raggio tubo),  $a$  (raggio del foro nel quale passano le particelle),  $h, h'$  - si può dimostrare che,

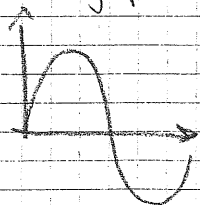
regolando opportunamente questi parametri,  $v_f$  diminuisce. Più gli iridi aumentano e l'impedenza  $\rightarrow$  il potenziale che occorre decresce mano a mano che ci portiamo. Esistono anche le cavità a gradiente costante  $\rightarrow v = \text{costante}$  come si realizza? Si fanno meno e in modo costante.\*

2 - Che succede se  $\omega = \omega_c$ ?  $v_f \rightarrow \infty$  - questo significa che ho un'onda stazionaria.

\* Questo degli iridi è un sistema che si usa nei LINAC, perché nei dimensioni il sistema è inefficiente.



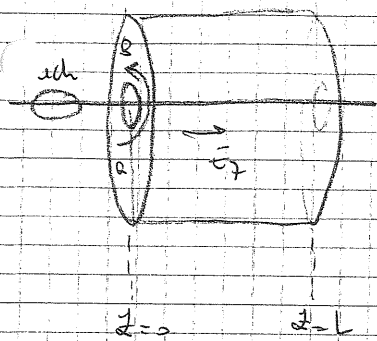
Lungo le gap vede un potenziale



Bisogna entrare con la fase giusta.

Perché è solo una viaggio e non a un punto delle un pedana.

TM<sub>01</sub>



Condizioni al contorno:

$$E_z(r=a) = E_\theta(r=a) = 0$$

$$E_z(z=0) = E_\theta(z=0) = 0$$

$$E_z(z=L) = E_\theta(z=L) = 0$$

Assumendo queste in  $E_z$  otteniamo

$$E_z = E_0 J_0(k_c r) \cos k_c z$$

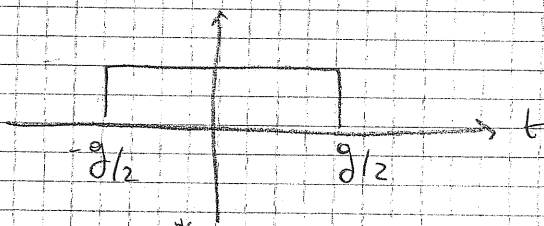
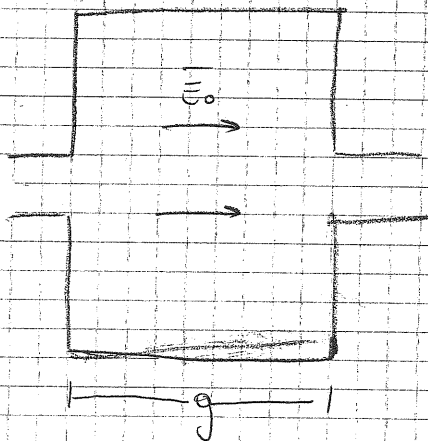
Dalla relazione  $k_c a = 2.405$  otteniamo  $k_c$

Se abbiamo una sorgente RF che ha  $\omega$  o  $f = 500$  MHz il raggio sarà  $a = 229.5$  mm.

L'energia immagazzinata nella cavità è molto maggiore rispetto a quella che entra ed esce per il campo, ma non è "ultracorta".  
Tuttavia con le perdite (1) se tutto il lavoro è dissipato in  
Commutazione.

Ma è difficile costruire la cavità ad onde stazionarie; dipende da  $k_c$  e quindi il raggio ideale con il quale vogliamo costruire la cavità.

Al primo colpo si cercano di fare cavità sferiche, perché non hanno un problema. Il problema è che è difficile mantenere l'oggetto sferico. Per questo vengono usati i liquidi, ma se abbiamo alcuni problemi con il fascio (perdita di energia), è difficile formare una stanza vuota sferica, quasi un ferromagnete o elettrodi di metallo. Questo perché l'energia immagazzinata nelle liquida è enorme.



In modo approssimato e più o meno costante se vogliamo fare i calcoli esatti abbiamo

$$E_z = E_0 \cos k_c z$$

$$z = \sqrt{t} g/2$$

$$\Delta W = \frac{eV}{g} \int_{-g/2}^{g/2} \cos \frac{z}{v} dz$$

$$\Delta W = eV \frac{\sin g/2}{g/2} = eV T$$

$$T = \frac{\sin g/2}{g/2} \rightarrow \text{fattore tempo di transito}$$

Se  $v$  è costante  $\Delta W = \frac{eV}{g}$

La resistenza di shunt  $e^{-1}$  è il parametro che definisce il rapporto fra la potenza accelerante e l'energia dissipata -  
ovvero la potenza dissipata è:

quantità di  $\sqrt{\frac{P_d}{R_s}} = \frac{V^2}{R_s} \rightarrow$  potenza di vuoto del bunch quando circolava  
l'energia per mantenere la cavità in risonanza

Si definisce fattore di qualità il rapporto di confronto l'energia immagazzinata nella cavità e l'energia che viene dissipata (il tutto in un ciclo)

$$Q = \omega \frac{W_s}{P_d} \quad \therefore \frac{Q T}{T_{RF}} = \omega$$

Più  $Q$  è grande, migliore è la cavità

Otteniamo

$$Q = \frac{R}{\omega W_s}$$

In una cavità RF l'energia immagazzinata dal campo magnetico è la stessa di quella elettrica ma in modo uguale.  
Regge analogie fra il circuito RLC utilizzando questo e la considerazione dell'energia immagazzinata dai campi e possibile ricambiare molte altre resistenze.  
Corrispondenza CIRCUITO RLC  $\leftrightarrow$  CAVITÀ RISONANTE

Vediamo come si formano pacchetti di particelle cariche.

— Elettroni —

Negli acceleratori abbiamo tipicamente a che fare con fermioni.

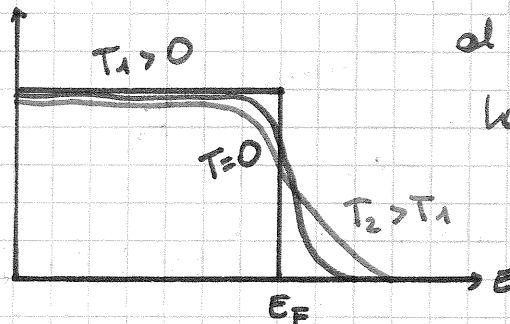
$$f_F(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}$$

Distribuzione di Fermi-Dirac

$E_F$  = massimo livello energetico alla temp. ambiente.

Ad es., nel rame  $E_F = 7 \text{ eV}$ , e la distribuzione ha

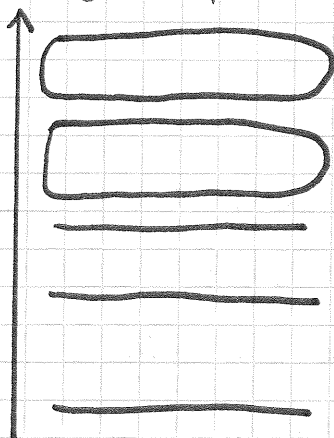
la forma:



al crescere della temperatura, la distribuzione si allarga oltre l'energia di Fermi.

Nel nostro acceleratore abbiamo bisogno di avere il minor  $\Delta E$  possibile. Qual è il limite naturale a questo proposito?

Solidi  $\rightarrow e^-$  "interni" legati ai nuclei, + bande di elettroni legati più alla struttura che al singolo atomo.



Per estrarre un  $e^-$  da un solido gli forniamo energia. Può uscire da bande diverse  $\Rightarrow$  esce con un valore indefinito di energia.

Si definisce funzione lavoro l'energia che devo fornire per

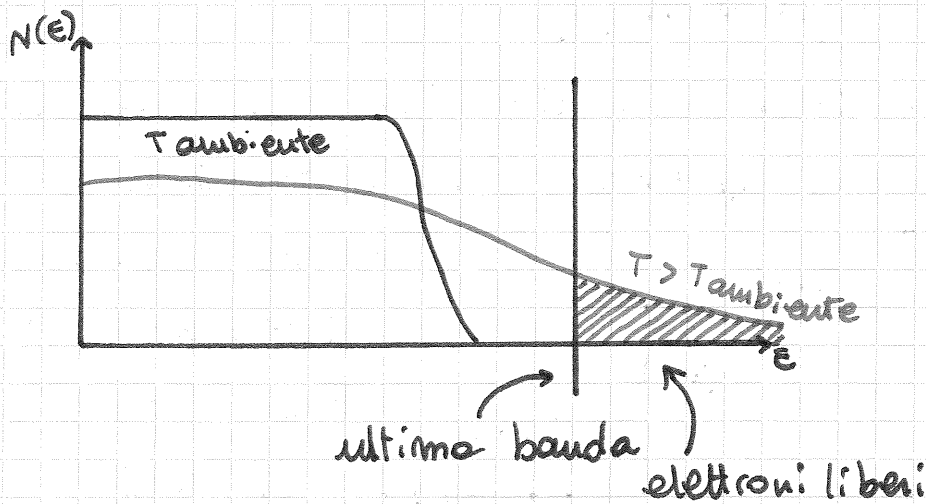
ionizzare un  $e^-$  che è al livello dell'energia di Fermi.

Per il rame, la funzione lavoro è circa 7.4 eV.

In un isolante, bande di valenza e bande di conduzione sono separate. Nei conduttori, esse hanno un overlap. Per i semiconduttori, c'è un gap

tale che l'agitazione termica fornisce abbastanza energia da superarla. La conduttività dipende dalla temperatura, in questo caso -

Uno dei metodi per estrarre un elettrone da un solido è l'emissione termoionica:



Gli  $e^-$  escono poi dal solido con energie molto diverse. La corrente in uscita è:

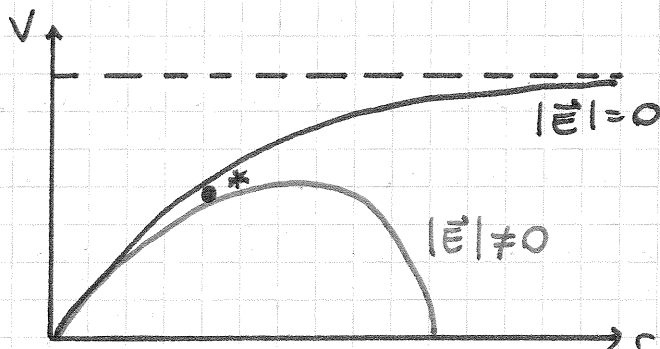
$$i = A T^{1/2} e^{-W/kT} \quad (W \text{ funzione lavoro})$$

Un altro metodo è l'effetto fotoelettrico:

se  $E_\gamma = h\nu > W \Rightarrow$  l' $e^-$  ha abbastanza  $E$  per scappare via.  $E_e \approx E_\gamma - W$  (se gli  $e^-$  fossero tutti ad energia  $W$ ).

A  $T=0 \Rightarrow i=0$ . Mi interessa più la monocromaticità o l'intensità del flusso di elettroni in uscita?

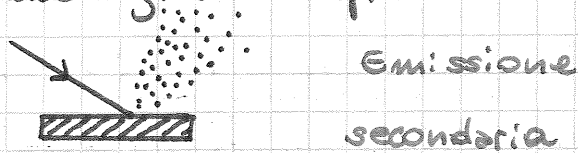
È un altro processo di estrazione: mettiamo un solido in un forte campo elettrico. Il potenziale atomico è del tipo:



\* questo è può uscire per effetto tunnel.



possiamo anche far collidere un fascio primario su un bersaglio. Ma ci sarebbe grande spread in energia e in angolo.



Nel caso ideale, vorremmo estrarre elettroni a temperatura 0, così da poterli far muovere solo come vogliamo noi.

N.B.: l'emissione secondaria è quella in grado di fornire intensità più alta.

Utilizzando i processi visti, fin'ora si possono realizzare diversi tipi di ELECTRON GUN, con parametri diversi.

L'energia può andare da pochi eV a qualche MeV (emissione secondaria).

Energia: eV ÷ MeV

$\Delta E$ :  $\geq .eV$

Corrente: pA ÷ 10 A

Corrente di picco:  $\mu A \div \geq 10 A$

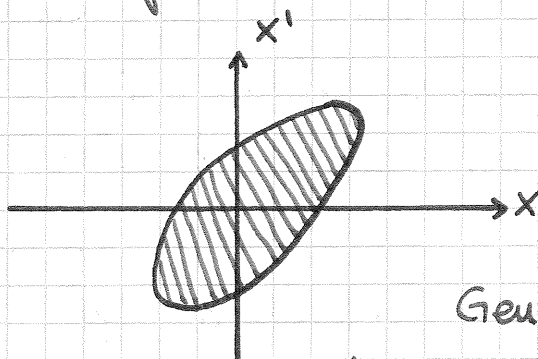
Struttura temporale: da impulsi a bassa frequenza al continuo

lunghezza impulso:  $\sim 100 fs \div 1 \mu s$

Oggi si riescono a fare electron gun da un elettrone per volta.

Si possono avere e<sup>-</sup> polarizzati e/o non polarizzati.

Un altro parametro fondamentale è l'emittanza.



Si dice emittanza effettiva o efficace la quantità:

$$E_{eff} = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle x x' \rangle^2}$$

Generalmente scegliamo electron gun ad  $E_{eff}$  più bassa possibile. (Questo per gli

acceleratori di ricerca o ad uso medico.)

An applicazioni specifiche (ad es. sterilizzazione rifiuti) è invece conveniente un grande  $E_{eff}$ .

Si definisce Brillanza il numero di particelle per bin nello spazio delle fasi. Alta brillantezza è fascio stretto e ben collimato, ad alta intensità. C'è un limite dovuto al principio di indeterminazione: il volume minimo occupato da una particella è un cubo di lato  $h/mc$  (cioè una  $\lambda_{Compton}$ ). Per un elettrone,  $h/mc \approx 2.4 \text{ pm}$ . Si dice fattore di degenerazione  $\delta$  il numero di particelle in una cella elementare.  $\delta_{max} = 1$ .

termoionico  $\leftrightarrow \delta = 10^{-14}$

fotoelettrico  $\leftrightarrow \delta = 10^{-12}$

effetto tunnel  $\leftrightarrow \delta = 10^{-5}$  ← è quanto di

miglior si riesce a fare adesso.

Limitazioni: se estraiamo  $e^-$  da un solido in un tempo breve, in quel tempo il solido si carica localmente positivamente.

## — IONI, PROTONI —

Il plasma è uno stato della materia in cui la densità di energia è talmente alta che le particelle possono considerarsi libere ("una zuppa di cariche libere"). Se ci mettiamo un campo  $\vec{E}$ , da una parte se ne vanno gli  $e^-$  e dall'altra gli ioni, come vogliamo. Si parte da elementi allo stato gassoso. Per ottenere il plasma poi ioniamo

energia sotto forma di calore e fotoni.

Sorgenti di protoni:  $\left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{Fenning} \\ \rightarrow \text{Plasmatron} \\ \rightarrow \text{Magnetron} \\ \rightarrow \dots \end{array} \right\}$  utilizzano processi diversi, ma in sostanza lavorano con plasmi ed  $\vec{E}$ .

È anche sorgenti di positroni, anti-protoni e neutroni.

- positroni  $\rightarrow$  produzione di coppie  $\gamma + N \rightarrow N + e^+ + e^-$   
Si fa con  $e^- + \text{tungsteno} \rightarrow \gamma + \text{tungsteno} \rightarrow e^+ e^- + \text{nu}$ .  
Questo è un processo molto efficiente, ma c'è un grande spread in energia. Poi gli  $e^+$  fanno radiazione di sincrotrone  $\Rightarrow$  diventano quasi monocromatici.
- anti-protoni  $\rightarrow p (> 10 \text{ GeV})$  su bersaglio. Questi può essere raffreddati, perché non irradiano.
- neutroni  $\rightarrow {}^{235}\text{U}$  (reazioni nucleari), ma è vietato da leggi internazionali. Allora si manda un fascio di protoni su un bersaglio con un gran numero di neutroni. Si "pulisce" poi l'output con campi magnetici. Questa si chiama produzione di neutroni per spallazione. Occorrono fasci iniziali di protoni molto intensi.

7 dicembre  $\rightarrow$  no lezione

FINE PROGRAMMA  $\rightarrow$  inizio lezioni di contorno.

05/12/2011

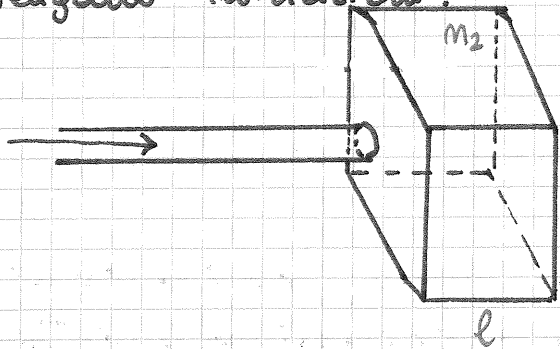
~~Lunedì~~ e mercoledì <sup>e giovedì</sup> settimana prossima  $\rightarrow$  lezioni di diagnostica dei fasci (che non è argomento d'esame)

Luminosità

$R = \sigma \mathcal{L}$  Il rate a cui avviene un'interazione è il prodotto della sezione d'urto del processo per la luminosità  $\Rightarrow$  per osservare un processo raro

occorre luminosità bassa.

Prendiamo un fascio che colpisce un solido di densità particellare  $n_2$ . Qual è la probabilità che avvengano interazioni?



$\sigma n_2 l$  è la probabilità che una particella che arriva interagisca.

Se il fascio incidente è fatto da  $N_1$  particelle al secondo, il rate è:

$$R = N_1 \cdot \sigma n_2 l \equiv \mathcal{L} \sigma$$

$\mathcal{L} \equiv N_1 n_2 l$ Brilliance	$[\text{s}^{-1} \text{cm}^{-2}]$
---	----------------------------------

N.B.: Noi traduciamo con "brillantezza" due concetti:

- Brightness (legata all'emittanza)
- Brilliance (luminosità per un fascio su bersaglio)

$$\int R dt = N_{\text{TOT}} = \int \sigma \mathcal{L} dt = \sigma \int \mathcal{L} dt$$

LUMINOSITÀ INTEGRATA	$[\text{cm}^{-2}]$
$\int \mathcal{L} dt$	

In realtà  $\sigma$  si misura in barn ( $1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2$ )

$\Rightarrow \int \mathcal{L} dt$  si misura in  $1/\text{barn}$ .

$10^{-24} \text{ cm}^2$  è la dimensione di un nucleo.

Tipicamente utilizziamo:

$$1 \text{ mb} = 10^{-27} \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ } \mu\text{b} = 10^{-30} \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ pb} = 10^{-33} \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ fb} = 10^{-36} \text{ cm}^2$$

Ad esempio, la  $\sigma$  di produzione dell'Higgs è tra il femtobarn ed il picobarn.

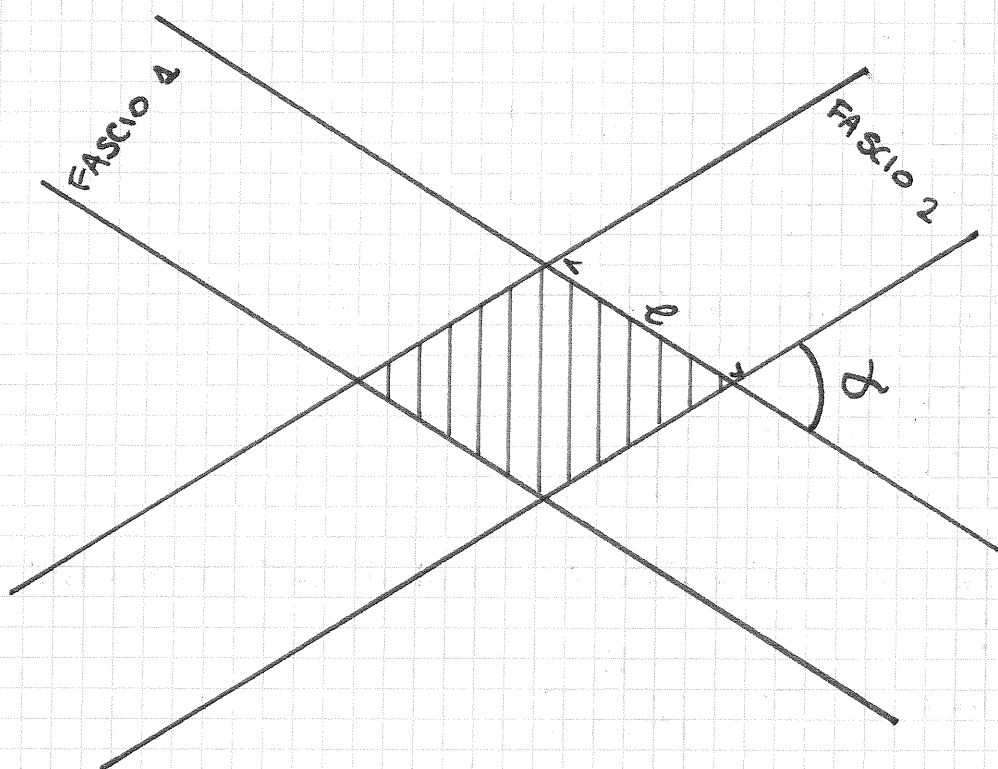
La luminosità non può essere costante: se avvengono

interazioni,  $N_1$  ed  $n_2$  diminuiscono nel tempo.

Il termine luminosità si usa principalmente per i collisionatori. Dipendenza dalla dimensione e dalla densità delle particelle.

In generale la densità di particelle non è uniforme: andrà espressa in termini di integrali di distribuzioni nelle 3 direzioni.

numero particelle al secondo =  
 numero particelle per bunch  $\cdot$  rate interazioni tra bunch



Prendiamo 2 fasci continui, parallelepipedali, di dimensioni rispettivamente  $h \cdot w_1$  e  $h \cdot w_2$ .

Nel sistema di riferimento dove il fascio 2 è fermo:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha' &= \frac{\sin \alpha}{\gamma_2 (\cos \alpha - \beta_2 / \beta_1)} & \text{Ma ad un collisionatore} \\ & & \beta_1 = \beta_2 \text{ e } \gamma_1 = \gamma_2, \text{ quindi:} \\ &= \frac{\sin \alpha}{\gamma (\cos \alpha + 1)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha/2}{\gamma} & \text{con } \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma. \end{aligned}$$

Sappiamo anche che:

$$\sin \alpha' = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\gamma} \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\gamma^2}} \approx \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\gamma} \quad \beta \approx 1$$



Au che  $l$  trasforma: nel r. d. r. del fascio 2 a riposo

$$l' = \frac{w_2 \gamma}{\text{tg } \alpha/2}$$

È la densità di particelle:  $m_2' = \frac{m_2}{\gamma}$

NB.: ovviamente il rate di interazioni è un invariante di Lorentz.

$$m_2' l' = \frac{m_2 w_2}{\text{tg } \alpha/2}$$

Ci resta da trovare  $N_1$  (numero particelle al secondo per il fascio 1):

$$N_1 = \underbrace{m_1 w_1 h c}_{\text{densità lineare (cm}^{-1}\text{)}} \underbrace{c}_{\text{cm/s}} \Rightarrow N_1 = [\text{s}^{-1}]$$

La luminosità al mio collisionatore sarà:

$$L = \frac{m_2 w_2}{\text{tg } \alpha/2} m_1 w_1 h c$$

Abbiamo espresso la luminosità in termini dei parametri dei due fasci.

Se utilizziamo:  $n = \frac{I}{whc}$

(definizione generale di corrente)

il rate diviene:

$$R = L \sigma = \sigma \frac{I_1 I_2}{c e^2 h \text{tg } \alpha/2}$$

In generale il fascio non è un parallelepipedo  $\Rightarrow$  si introduce al posto di  $h$  l'altezza efficace:

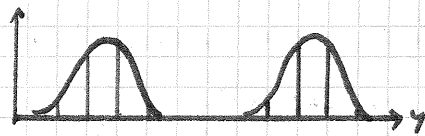
$$h_{\text{eff}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_1 dy \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_2 dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_1 \rho_2 dz}$$

$$R = \sigma \frac{I_1 I_2}{c e^2 h_{eff} \text{tg}^2 \frac{\Delta y}{2}}$$

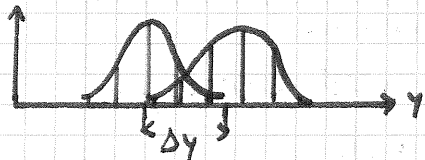
NB.:  $\int p_1 dy$  e  $\int p_2 dy$  sono valori fissati -

$\int p_1 \cdot p_2 dz$  è non nullo solo se i fasci si "vedono" (se non restano paralleli su tutta la circonferenza) -

Ad esempio:



$$p_1 \cdot p_2 = 0 \quad \forall y$$



$$\exists \Delta y: p_1 \cdot p_2 \neq 0$$

In fatti, se i due fasci non si sovrappongono, il rate è 0 -

Abbiamo ricavato la luminosità per fasci che si incrociano (correnti che si incrociano) -

Se invece di due correnti continue si incrociano dei bunch, la luminosità è data da:

$N_1, N_2$  numero particelle nei bunch  
 $f$  frequenza rivoluzione pacchetti  
 $k$  numero pacchetti

↓

$$L = f k N_1 N_2 \int p_1(x, y, ct) \cdot p_2(x, y, ct) dx dy dt$$

(Questo vale se il numero di bunch dei due fasci è =) -

$$p_1 \equiv p_x p_y p_z$$

Nel caso di una distribuzione Gaussiana:

$$p_u = \frac{1}{\sigma_u \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_u^2} (u - u_0)^2}$$

e possiamo scrivere:

$$\mathcal{L} = \frac{f k N_1 N_2 e^{-\frac{(x_1^2 - x_2^2)}{4\sigma_x^2} - \frac{(y_1 - y_2)^2}{4\sigma_y^2}}}{2\pi \sqrt{(\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2) + (\sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2)}}$$

⇒ se i fasci si incontrano "head-on" l'esponentiale assume il suo valore massimo (1).

Questo vale per pacchetti Gaussiani.

Sui libri troviamo spesso una semplificazione (le due gaussiane sono sovrapposte =):

$$L = \frac{f k N_1 N_2}{4\pi \sigma_x \sigma_y}$$

- head-on
- pacchetti Gaussiani
- $\rho_1 = \rho_2$

La luminosità deve essere più calcolata nel modo più preciso possibile (o misurata): dato il rate a cui avviene un'interazione, conoscendo la luminosità della macchina possiamo ricavare la sezione d'urto di quel processo

$$\left. \begin{array}{l} k = 2808 \\ f = 11 \text{ kHz} \\ \sigma_x \sim \sigma_y \sim 16 \mu\text{m} \end{array} \right\} \mathcal{L} = 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ (LHC)}$$

I macchinisti utilizzano questa espressione:

$$\beta^* = \beta \text{ (punto di interazione)}$$

$$k_0 = k$$

$$N = \text{num. particelle / bunch}$$

$$r_p = \text{raggio classico del protone}$$

$$\xi = \text{beam-beam tune shift (i fasci si danno noia quando si attraversano, e variano il tune)}$$

$$\forall \text{ acceleratore: } \xi = 0.039 \pm 0.007$$

$$L = \xi \frac{f N k_0 \gamma}{r_p \beta^*} F$$

F = fattore di Fermi (i fasci non picchiano head-on, ma con un piccolo angolo ⇒  $F \approx 0.6 \div 0.8$ )

Come possiamo misurare la luminosità?

$R = \sigma L$  Posso usare un processo di cui conosco la sezione d'urto -

Ad es:  $\sigma_{\text{BHABHA}} = \sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)$

Contiamo quanti scattering elastici abbiamo in un acceleratore  $e^+e^- \Rightarrow$  misuriamo  $R \Rightarrow$  misuriamo  $L$ .

Per processi protone-protone le  $\sigma$  conosciute con più precisione sono conosciute al 5-10%.  
La QCD è quindi un po' più rozza della QED.

Possiamo utilizzare un'altra cosa per avere una misura più precisa: il teorema ottico.

$$L \left( \frac{dW}{dt} \right)_{t=0} = R_{\text{tot}}^2 \frac{(1+\rho^2)}{16\pi}, \quad t = p^2 \theta^2$$

( $\rho$  è il rapporto tra parte immaginaria e parte reale dell'ampiezza di scattering).

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| f(\theta) \right|_{t=0}^2 = \text{Im} \{ f(\theta) \}^2 + \text{Re} \{ f(\theta) \}^2$$

$$\rho \equiv \frac{R}{I}$$

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{p} \text{Im} \{ f(\theta) \}$$

Quindi:

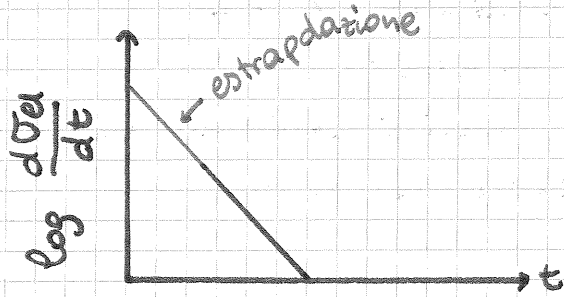
$$\frac{d\sigma_{\text{el.}}}{d\Omega} = (1+\rho^2) \text{Im} \{ f(\theta) \}^2 = (1+\rho^2) \left( \frac{p \sigma_{\text{tot}}}{4\pi} \right)^2$$

Faccio un cambiamento di variabile:

$$\left( \frac{d\sigma_{\text{el.}}}{dt} \right)_{t=0} = \frac{\sigma_{\text{tot}}^2}{16\pi} (1+\rho^2)$$

$$\frac{d\sigma_{\text{el.}}}{dt} = \frac{\pi}{p^2} \frac{d\sigma_{\text{el.}}}{d\Omega}$$

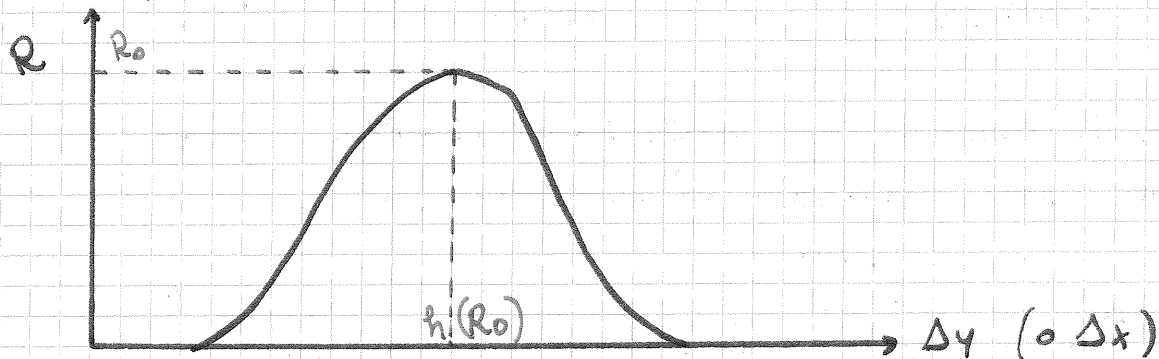
$\frac{d\sigma_{el.}}{dt}$  si sa misurare bene fino ad una certa distanza dal fascio.



Si dimostra ed è verificato sperimentalmente che  $\beta \ll 1$   
 $\Rightarrow \rho^2$  è trascurabile.

Con questo analogo adronico dello scattering Rutherford si riesce a misurare la luminosità con una precisione al 2%. L'errore è dato in gran parte dall'estrapolazione.

Altro metodo (metodo di van der Meer): costruiamo il rate d'interazione in funzione del "parametro d'impetto" tra i fasci:



$$R = B \int \rho_1(y) \rho_2(h-y) \Delta y$$

↑  
costante

L'area dello arco sarà:

$$A = \int B \left( \int \rho_1(y) \rho_2(y-h) dy \right) dh$$

Ma  $\int \rho_2(y-h) dh = \int \rho_2(y) dy$ , tanto gli integrali sono estesi da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Posso quindi calcolare:

$$\frac{A}{R_0} = \frac{B \int \rho_1(y) dy \int \rho_2(y) dy}{B \int \rho_1 \rho_2 dy} = h_{eff}$$

Misurata l'altezza efficace e noti i parametri



$I_1$ ,  $I_2$  ed  $\alpha$ , ho misurato la luminosità.  
Questo è il metodo utilizzato attualmente ad LHC.

N.B.: contiamo solo le dimensioni trasverse del fascio, non la lunghezza dei bunch.

La luminosità decresce esponenzialmente (vedi dispense). Ad es. ad LHC:

$$10^{14} \text{ protoni/bunch} \quad \tau_L \approx 50 \text{ ore} = t \left( \alpha = \frac{2\sigma}{e} \right)$$

Se poi consideriamo l'impoverimento del fascio dovuto al gas residuo all'interno della pipe, vediamo che il tempo di decadimento tipico della luminosità ad LHC scende a circa 35 ore.

Il gas residuo è dato anche dalle interazioni dei protoni con il metallo della pipe: le pompe a vuoto vengono quindi fatte lavorare in continuazioni. Le pompe ioniche non riescono però a tirar via gli elettroni: questi vanno a formare elettrostaticamente una electron cloud attorno ai protoni del bunch. Questo problema tuttora non si riesce a risolvere.

N.B.: a bassa energia vengono creati pochi e<sup>-</sup>, e vengono risucchiati dalla pipe, che è messa a massa.

14/12/2011

Per controllare il funzionamento di un acceleratore occorrono monitor di vario tipo. Ad esempio, per misurare l'orbita, la corrente, la durata di un fascio, il profilo del bunch...

La "durata" di un fascio si stima misurando le perdite di particelle.

In fisica medica occorre anche stimare o misurare

la divergenza del fascio.

La luminosità di un collisore è un'altra grandezza da monitorare, ed è di estrema importanza in fisica delle particelle.

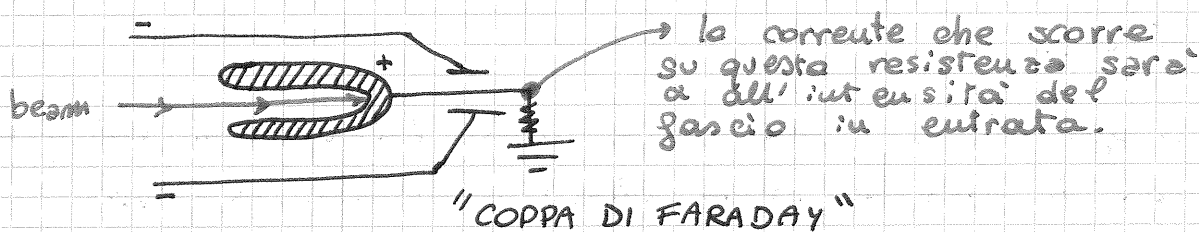
Altre misure effettuabili:

- emittanza
- impulso (possibilmente con altissima precisione)
- spread in impulso
- intensità
- ...

Esempio: misurare l'intensità di un fascio.

Il monitor distruttivo e monitor non distruttivo.

Si può usare ad es. una gabbia di Faraday:



Il molti tipi di coppe di Faraday diverse, a seconda dell'energia incidente: ad altissima energia, la coppa si comporta da target, e possono esserci prodotti di collisione che "scappano" nella direzione da dove è venuto il fascio. Per ridurre questo effetto, si può polarizzare "-" la coppa e "+" la guaina esterna, di modo da creare linee di campo che riportino le particelle all'interno della coppa.

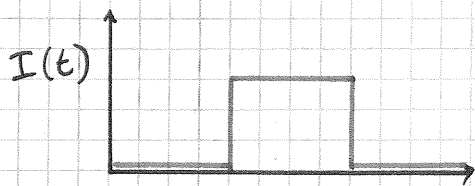
Con questo dispositivo si misurano anche correnti molto deboli, fino al pA. È però un monitor distruttivo.

Come sistema non distruttivo possiamo usare:

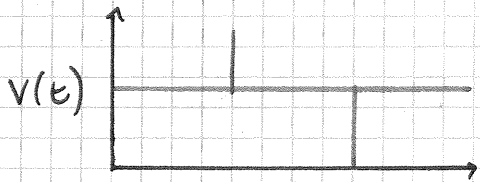


$$V = L \frac{dI}{dt}$$

con un trasformatore di questo tipo riusciamo a misurare correnti purché siano non continue.

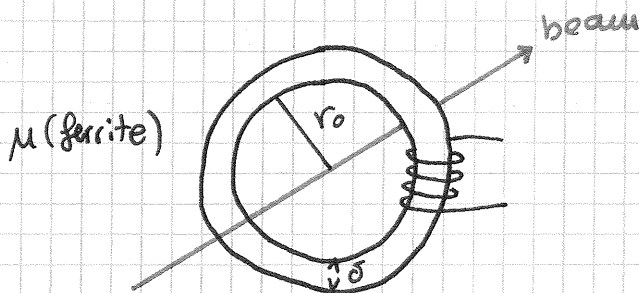


beam (a pacchetti)



monitor

Ovviamente la risposta peggiora nel caso reale, dove i bunch sono gaussiani in tutte le direzioni.



$$\delta \ll r_0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I$$

$$B = \frac{\mu}{2\pi} \frac{(ib)}{r_0} \leftarrow \text{corrente del fascio}$$

$$\phi = \int B da$$

$$\varepsilon = \frac{d\phi}{dt} = \int \left( \frac{dB}{dt} \right) da$$

$$= \mu \frac{1}{2\pi r_0} A \frac{dib}{dt}$$

$$(\mu = \mu_r \mu_0)$$

sezione dell'anello di ferrite

Il fascio stesso diventa un generatore di corrente esterna. Lo stiamo però perturbando sottraendogli energia, anche se non lo distruggiamo.

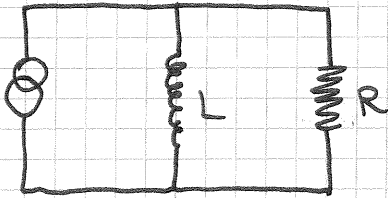
Ci interessa sapere qual è la sensibilità della nostra misura. Ci aspettiamo che esso sia una funzione della frequenza di rivoluzione  $\omega$ .

$$\text{Sensibilità } S(\omega) = \frac{V(\omega)}{I(\omega)}$$

La corrente che misuriamo è un integrale su tutte le frequenze:

$$I = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \sin(\omega_i t)$$

N.B.: un trasformatore è schematizzabile come un parallelo RL:



$$L = \frac{N^2}{R_h}$$

← numero avvolgimenti:  
 ← "RELUZZANZA" dell'anello di ferrite

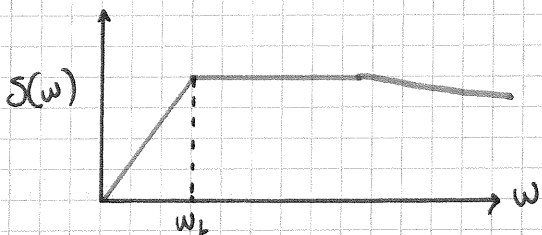
$$R_h = \frac{l}{\mu A}$$

La reluttanza è definita da:  $R_h = \frac{F}{\Phi}$ , con  $F =$  forza magnetomotrice. È l'analogo magnetico della legge  $\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt}$  (legge di Ohm per il campo magnetico: al posto della corrente c'è il flusso perché  $\oint$  carica magnetica  $\Rightarrow$  il campo magnetico è sempre chiuso e possiamo misurarne solo il flusso).

Nel caso di questo circuito, la sensitività è data da:

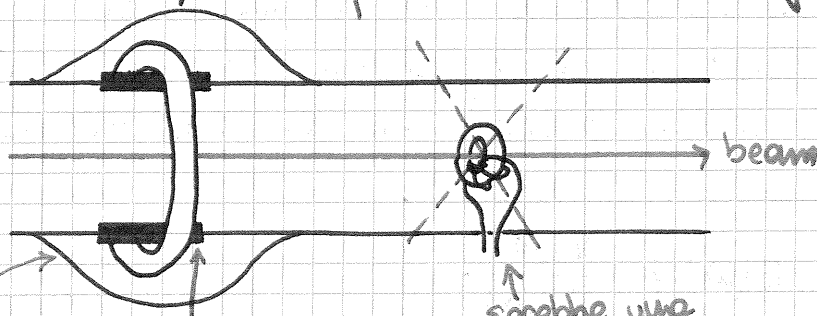
$$S(\omega) = \frac{R}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}$$

$\omega_L = R/L$  frequenza di cut-off



Vorremmo  $\omega_L$  piccola  
 $\Rightarrow L$  grande  $\Rightarrow N$  grande

Una volta che abbiamo progettato l'anello, dobbiamo piazzarlo in qualche punto attorno al fascio.



ceramica: serve ad evitare che il segnale ri-gliesso che viaggia sulle pipe "annulli" la carica in transito all'interno dell'anello!

"ponte" per consentire il passaggio del campo sda.

N.B.: la connessione pipe-ceramica deve comunque essere a tenuta di vuoto.

A volte per esigenze sperimentali occorre addirittura creare giunzioni a ceramico in grado di sopportare una differenza di pressione di decine di atmosfere, vedi shuttle.

Idea: prendiamo direttamente la carica immagine viaggiante sulla pipe, con un cavo coassiale. Poi la "restituiamo" alla pipe dopo averla scaricata su una resistenza per misurare  $V(t)$ . Attenzione: occorre un perfetto matching delle impedenze.

Questo sistema si chiama Wall Gap Monitor.

$$S(\omega) = \frac{R}{\omega \rightarrow +\infty \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

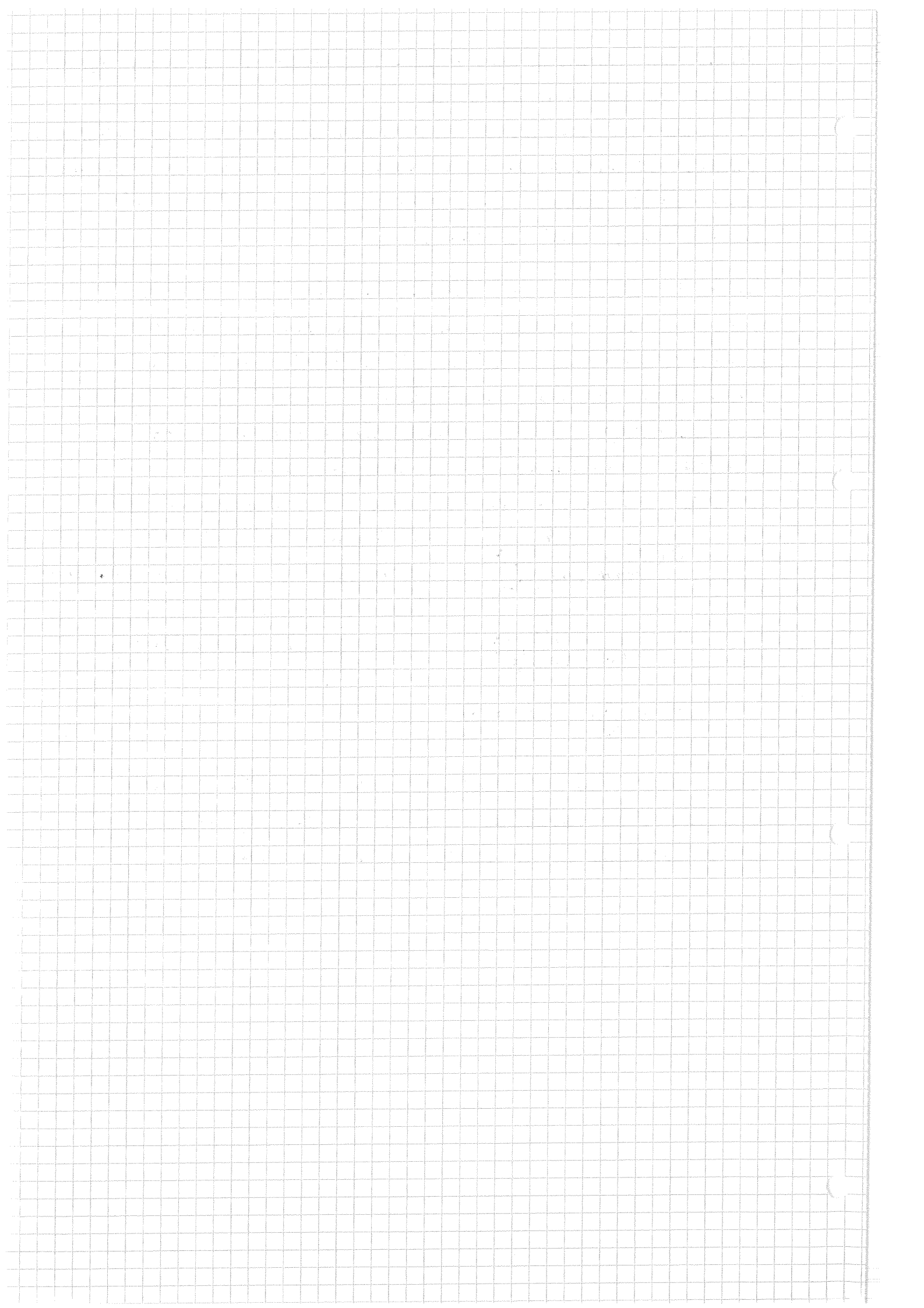
$$S(\omega) = \frac{R}{\omega \rightarrow 0 \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \quad \omega_L = \frac{R}{L}$$

Il termine di cut-off stavolta è al denominatore (qui c'è anche una componente capacitivo).

Nel caso intermedio, occorre fare in modo che  $R$  sia grande (ferrite) ( $\omega_c$  piccolo) ed  $L$  grande -  $C$  deve essere grande.





Per altre freq. se termine indotto parake  $\rightarrow$  perdite RC:

$$Z | \cos \epsilon | = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Ciruito RL / Ciruito RC  $\rightarrow \omega / \omega_c$  appaiono al num / denomin  
 più si fa è inverso cioè impedenza

Se la freq. va a zero  $\rightarrow$  Ciruito RL ( $\omega L \rightarrow 0$ )

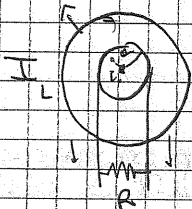
Per tutte le  $\omega$  si può dire che  $\omega < \omega_c$  siamo nel caso intermedio, che è  
 il punto a cui vogliamo avere }  $\omega_c$  basso  $\rightarrow L$  grande  
 $\omega_c$  alto  $\rightarrow C$  piccolo

Se utilizziamo un cavo coassiale questo deve essere quindi corto  $\rightarrow$  quello  
 ci dice che la misura va fatta proprio in quel punto

Un altro modo per fare un buon VNA è quello di usare un sistema capacitivo  $\rightarrow$  condensatore di si come l'altro  
 $\rightarrow$  si come il campo sia, quindi indichiamo questo di parte  
 della pipe  
 sappiamo che  $v = \frac{d}{c}$  con  $d = i \omega t = i \omega L \rightarrow$  lunghezza cavo  
 $c \rightarrow$  vel. luce

La risposta del sistema di prendere la  $R$  che è molto più lunga della capacità, la freq. con cui abbiamo a che  
 fare sono basse

Capacità



La lunghezza ai capi della quale possiamo  
 avere una ddp.

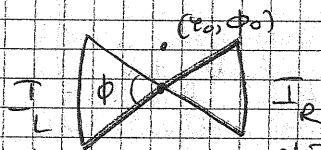
15/12/2014

La densità di carica raccolta dalla condigia (come  
 unitaria) è pari a

$$\sigma = \frac{1}{2\pi a} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r_0}{a} \right)^n \cos n(\phi - \phi_0) \right]$$

$r_0$   $\rightarrow$  punto in cui passa il  
 beam (definisce la pipe)

$\phi$   $\rightarrow$  dimensione angolare delle elettrodi



elettrodi  
 di sinistra

elettrodi  
 di destra

Assimilano geometria d'angolo

Esempio:  $I_L = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sigma(r) r d\phi$

Dimensionalmente abbiamo

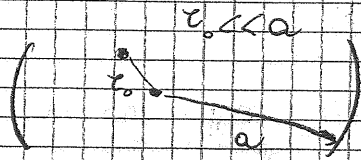
$$\frac{Q}{L} \cdot \frac{L}{T} = \frac{Q}{T} \rightarrow \text{corrente}$$

densità superficiale

$$x_0 \rightarrow \text{spostamento rispetto al centro del fascio} = \frac{1}{2a} \left[ 2\phi + \frac{2x_0}{a} \sin \phi + \frac{x_0^2 - y_0^2}{a^2} \sin 2\phi \right]$$

$x_0^2 - y_0^2$  - contributi dipolari che con l'andamento delle sorgenti contribuiscono sempre meno

NB:  $x_0, y_0 \ll a$



Per la corrente  $I$  l'espressione è la stessa ma i termini dipolari hanno segno opposto

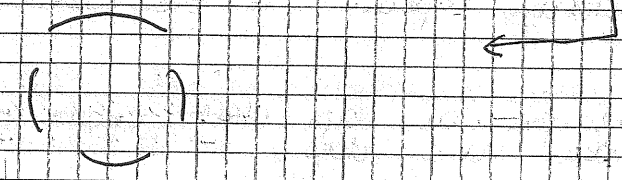
da ddp e-  $V = R(I_L - I_R) \approx 2 i r L (\text{sign}) x_0$

sempre  
se ne  
rimuove in  
 $x_0$

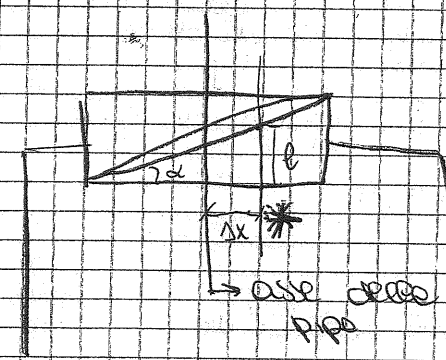
le successive (cambio  
la simmetria del sistema  
rotazione di  $90^\circ$ ) avremo  
qua un  $y_0$ , un  $x_0$

Co questo sistema si misura la forma unidirezionale nei 2 esiti e  
differenziale una costante è possibile un'altra la ddp, e quindi  
la posizione ( $x_0$ )

Nei acceleratori moderni si hanno 4 elettroni nello stesso punto  
per misurare contemporaneamente  $x_0$  e  $y_0$



NB:  
 particelle  $\leftarrow V_D + V_U$   
 q<sub>tot</sub>/q<sub>tot</sub>  
 particelle  $\leftarrow H_R + H_U$   
 q<sub>tot</sub>/q<sub>tot</sub>  
 } queste grandezze sono proporzionali  
 alle differenze di corrente - abbiamo  
 3 misure  
 $H_R + H_U + V_D + V_U$



Spostiamo di altre una volta  
positiva di una diagonale, e se  
fatto si parla in merito

Che dice se se lo faccio posto scostato?  
 la corrente che stiamo dalle 2  
 verso e' diverso - tempo di risposta  
 diverso - se corrente (piccola) si ma  
 ma ad un amplif. e poi di una  
 resistenza per misurare la ddp

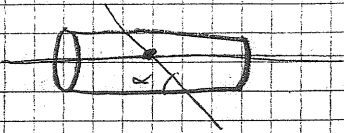
$I_R = (A + \Delta x) I_{ga}$

metà di destra  $I_L = (A - \Delta x) I_{ga}$

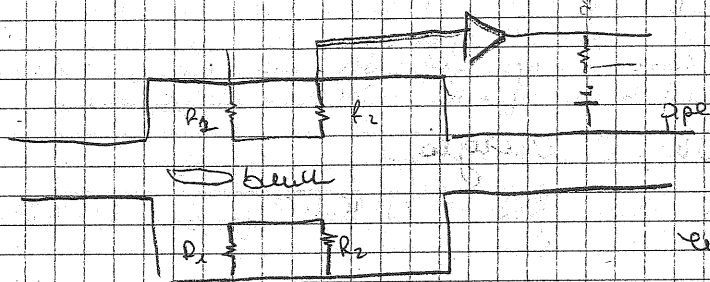
$\Delta x = a \frac{I_R - I_L}{I_R + I_L}$

$V = \frac{Q}{C}$

Le linee di una scala all'interno un cilindro.

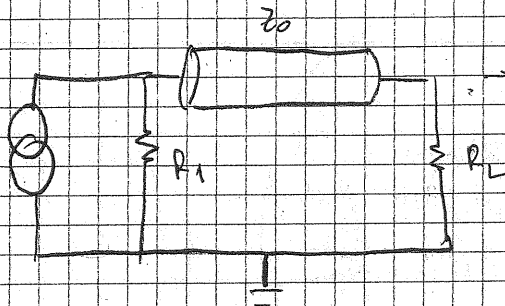


Quale alla simmetria cilindrica per il sistema unidimensionale  $x$  e  $y$ .  
 Nel caso della scala per unidimensionale abbiamo prendere un'altro  
 il quale costante di  $90^\circ$ .



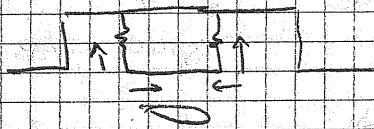
Con questo sistema si considera la pipe come un cavo coassiale.  
 pipe  $\rightarrow$  guaina esterna

resistenza all'interno  $\rightarrow$  guaina interna  
 $R_1$  e  $R_2$  definiscono l'impedenza  $Z_0$  del cavo.



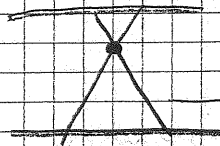
Circuito equivalente

Per quale di questo parte le linee? Per quanto il caso  $R_1 = R_2 = Z_0$   
 quando le linee sono in serie e all'opposto  $R_1$  è un'immagine  
 di  $Z_0$  opposto.



metodo (base per un'altro) ed un'immagine resistente  
 $\rightarrow$  quindi un'immagine  
 nel avanti, non forma  
 immagine.

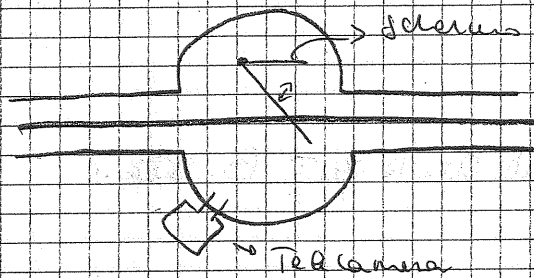
l'immagine che si crea dovrebbe la stessa se i punti fossero infiniti



$\rightarrow$  quanto di linee necessaria della superficie

Ma noi non abbiamo a che fare con punti infiniti. Sfruttiamo  
 però per l'esistenza di conduttori  $\rightarrow$  WIRE-LINE  $\rightarrow$  si mette al centro  
 pipe un elemento e l'immagine questi è come se fossero un caso  
 costante. Se ho meno un'altro  $\rightarrow$  il caso costante  $\rightarrow$  si mette la  
 differenza di corrente (è la forza di attrazione) e si trova la posizione.

È uno ad ora non abbiamo visto nulla della forma del cavo  
 come la si può illustrare?

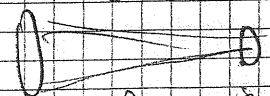


$\rightarrow$  schema rappresentativo che si può vedere

questo è anche un metodo per misurare la posizione

È un metodo molto bello per fare esperimenti  $\rightarrow$  se di questi sistemi, lo mettiamo a distanza superiore la convergenza del filo.

Per un fatto di ciclo è più comodo  
 il punto di esempio lo vediamo fare  
 un'immagine (il suo opposto) = punto  
 di equilibrio isotropo  $\rightarrow$  lo fatto del filo e  
 l'immagine non ne vedremo di veramente  
 la forma. Bisogna anche dare un'altro che il filo non vede. Dopo si ottiene



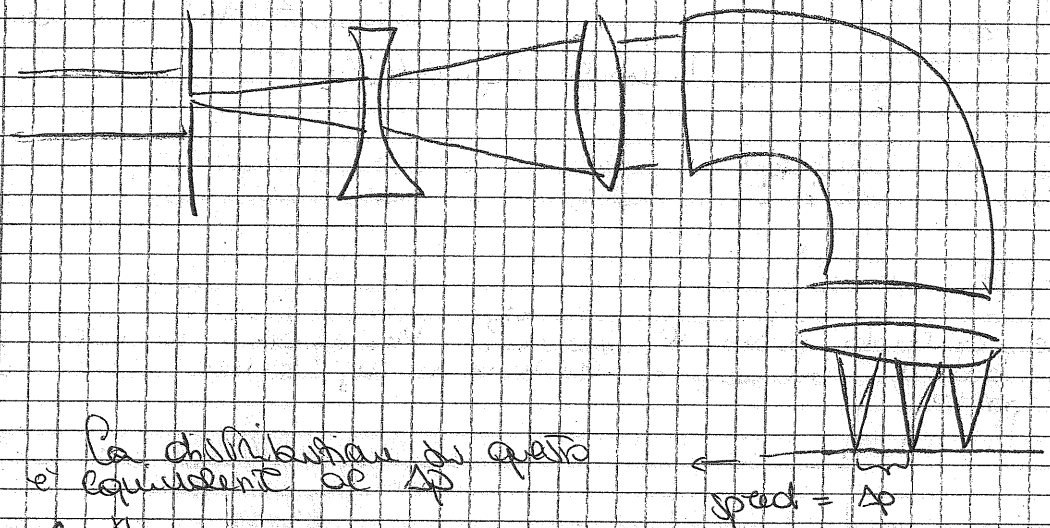
il punto di esempio lo vediamo fare



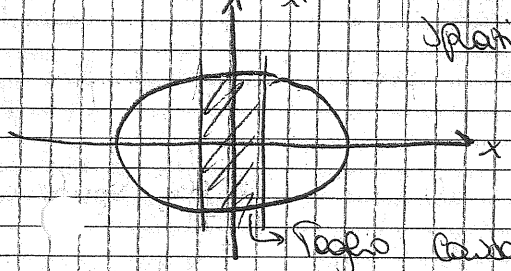
La DGL come può essere derivata da un insieme di dati.  
 Il problema stesso diventa forse evidente se si pensa che il fascio  
 si è diffuso e prendere un fascio fatto uscire e fare del tutto  
 quando con una riflessione, abbiamo la distribuzione del  
 fascio lungo questo direttore.

Un altro metodo è con una camera proporzionale. Fili fini → passiamo  
 attraverso la distribuzione del fascio. Problema: se lo siamo per  
 fasci che colpiscono a diversi punti, perché la camera proporzionale  
 di dati → nel spazio dove per questo non è un confinamento di  
 dati punti. Per i fasci estratti questo metodo va bene.

Vediamo come si misura l'energia.  
 Questo modo di fare con un fascio estratto → per estrazione di dati  
 ne segue l'efficacia.

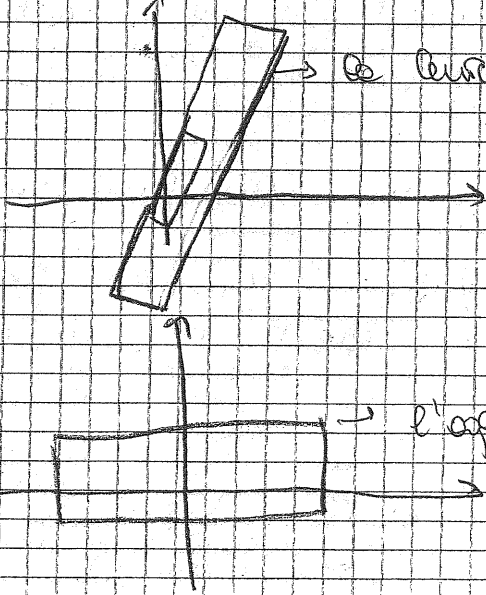


La distribuzione di questi  
 è equivalente ad  $\Delta p$



piano della fase

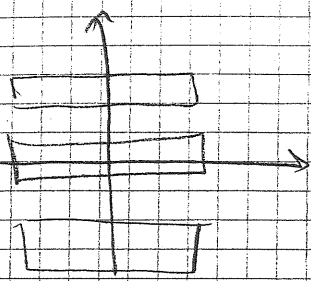
→ foglio curvato dell'opera di un collimatore



→ le linee divergenti non mantengono la posizione

→ l'angolo convergente lo ottiene





Il doppio lo separo → la separazione è  $\Delta p$

Per misurare  $\Delta p$  devo mandare le particelle il più possibile parallele possibile nel doppio.  
Con ragionamenti analoghi di misura  $\Delta x$  è evidente.

Avendo in mente le particelle passiamo a misurare tutti i parametri dello macchina?  $\Delta x, \Delta p$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_f = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_i$$

Sappiamo che  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  dipendono dalle posizioni.

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_f = \begin{pmatrix} R_{11}^2 & -2R_{11}R_{12} & R_{12}^2 \\ -2R_{21}R_{22} & 4R_{21}R_{22} & -R_{21}^2 \\ R_{21}^2 & -2R_{21}R_{22} & R_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_i$$

Se prendo  $R_{11}$  e  $R_{22}$  (perché abbiamo con  $R_{11}$  e  $R_{22}$  la macchina) abbiamo anche la matrice che ci dice come cambiano  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Questi ragionamenti sono stati fatti per una particella singola, ma un fatto è che una somma di particelle singole,  $\alpha$  è unitaria (di più dimensioni).

$$E_x \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 & \langle x x' \rangle - \langle x \rangle \langle x' \rangle \\ \langle x x' \rangle - \langle x' \rangle \langle x \rangle & \langle x'^2 \rangle - \langle x' \rangle^2 \end{pmatrix}$$

devo farlo e' unitario.

$$\begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle x x' \rangle \\ \langle x x' \rangle & \langle x'^2 \rangle \end{pmatrix}$$

possiamo misurare, sperimentare  $\alpha, \beta, \gamma$ .