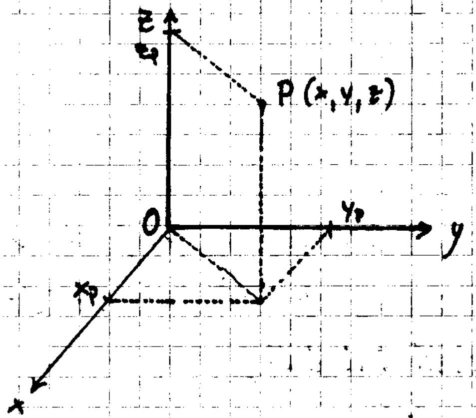
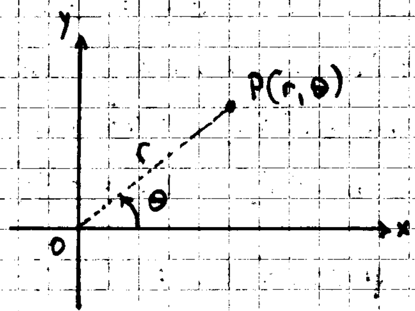
COORDINATE CARTESIANE



$\hat{x} \equiv \hat{i}$

$\hat{y} \equiv \hat{j}$

$\hat{z} \equiv \hat{k}$



COORDINATE POLARI PIANE

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{pmatrix}$$

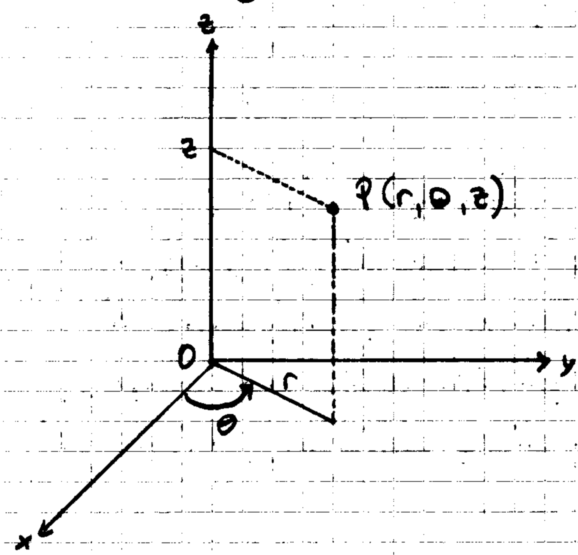
$\hat{r} = \cos\theta\, \hat{i} + \operatorname{sen}\theta\, \hat{j}$ $\qquad$ $\hat{i} = \cos\theta\, \hat{r} - \operatorname{sen}\theta\, \hat{\theta}$

$\hat{\theta} = -\operatorname{sen}\theta\, \hat{i} + \cos\theta\, \hat{j}$ $\qquad$ $\hat{j} = \operatorname{sen}\theta\, \hat{r} + \cos\theta\, \hat{\theta}$

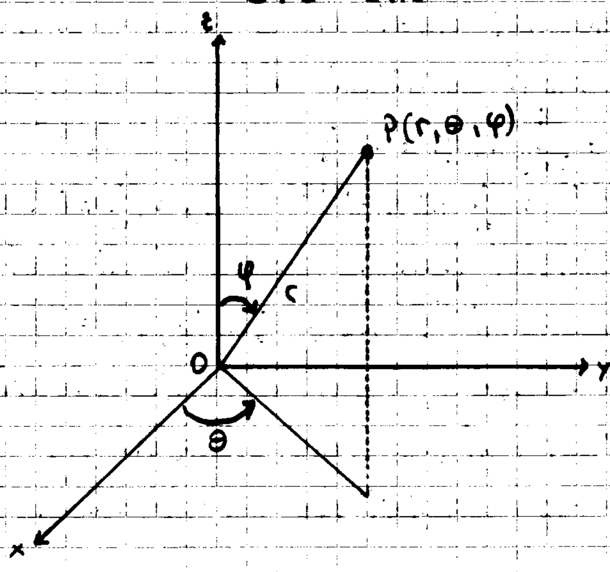
$x = r\cos\theta$ $\qquad$ $r^2 = x^2 + y^2$

$y = r\operatorname{sen}\theta$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\theta = y/x$

COORDINATE POLARI CILINDRICHE



COORDINATE POLARI SFERICHE



$x = r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$

$y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$

$z = r\cos\varphi$

$$\underline{A} \wedge \underline{B} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$

I moti centrali ($\exists\, O : \underline{a} \parallel OP\ \forall t$; O centro del moto) sono moti PIANI ed hanno velocità areolare $\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ COSTANTE.

<u>FORMULA DI BINET</u> $r^2 \dot{\theta} = c \qquad c = c$(dati iniziali)

<u>FORMULA DI BINET</u> $a_r = -\frac{c^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]$

Energia potenziale : $U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$

Campo centrale
$U(\underline{r}) = U(r)$ $\Big\} \Rightarrow$ Il sistema è conservativo

Un campo centrale conservativo conserva energia totale, momento angolare $m r^2 \dot{\theta}$ in direzione, verso e modulo.

$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{m r^2} + U(r)$

<u>TEOREMA DI BERTRAND</u> Dato un campo centrale dove vale $U(r) = \alpha r^m$, la traiettoria è sicuramente chiusa solo nei casi $m = 2$ o $m = -1 \wedge \alpha < 0$.

Equazioni cardinali della dinamica:

$\underline{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i = M \dot{\underline{r}}_G \qquad \dot{\underline{Q}} = \underline{R}^{(est)}$

$\underline{M}_A^{(est)} = \sum_{i=1}^{N} AP_i \wedge \underline{f}_i^{(est)} \qquad \underline{L}_A = \sum_{i=1}^{N} AP_i \wedge m_i \dot{\underline{r}}_i \qquad \dot{\underline{L}}_A = \underline{M}_A^{(est)} - \dot{\underline{r}}_A \wedge \underline{Q}$

I vincoli possono essere di diversi tipi: olonomi $[f(\underline{r}_1 \ldots \underline{r}_N, t) = 0]$, anolonomi $[f(\underline{r}_1 \ldots \underline{r}_N, \dot{\underline{r}}_1 \ldots \dot{\underline{r}}_N, t) = 0]$, scleronomi (indipendenti dal tempo), reonomi (dipendenti esplicitamente dal tempo), unilaterali (se rappresentati da una disequazione), bilaterali (se rappresentati da un'equazione).

d = dimensione dello spazio
N = num. di punti materiali
r = num. equazioni di vincolo
$\Big\} \Rightarrow$ $\ell = d \cdot N - r$ è il numero di coordinate lagrangiane sufficienti a descrivere il moto del sistema.

Vincolo di RIGIDITÀ: $r_i - r_j = d_{ij}\ \forall t$ ovvero $(\underline{v}_j - \underline{v}_i)\cdot \vec{P_iP_j} = 0$

Vincolo di PURO ROTOLAMENTO: $\dot{x} = R\dot{\theta}$

Atto di moto per un corpo rigido in moto rotatorio:

$\underline{v}_P = r\dot{\theta}\hat{\theta} = \underline{\omega} \wedge AP$, dove $A \in$ asse di rotazione ed $\underline{\omega} = \dot{\theta}\hat{u}$.

Caso generale: $\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge AP + \underline{v}_A$ ovvero $\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge CP$

essendo C il centro istantaneo del moto.

Il grafico della traiettoria $C(t)$ del centro del moto si dice BASE se osservato dalla terna fissa, ROLETTA se osservato dalla terna mobile.

FORMULE DI POISSON $\frac{d\hat{i}^*}{dt} = \underline{\omega} \wedge \hat{i}^*$ $\frac{d\hat{j}^*}{dt} = \underline{\omega} \wedge \hat{j}^*$ $\frac{d\hat{k}^*}{dt} = \underline{\omega} \wedge \hat{k}^*$

con $\underline{\omega} = c\hat{i}^* + b\hat{j}^* + a\hat{k}^*$

Dato un generico vettore $\underline{W}(t)$, una terna fissa ed una solidale:

$\frac{d\underline{W}}{dt} = \frac{d_r\underline{W}}{dt} + \underline{\omega} \wedge \underline{W}$ dove $\frac{d_r}{dt}$ è la derivata fatta da $\mathcal{T}^*$ o $\mathcal{T}'$.

Si dicono angoli di Eulero gli angoli Ψ, θ, φ:

$\Psi \in (0, 2\pi)$ angolo tra $\hat{x}$ ed $\hat{N}$ (angolo di precessione)

$\varphi \in (0, 2\pi)$ angolo tra $\hat{x}^*$ ed $\hat{N}$ (angolo di rotazione propria)

$\theta \in (\theta_{MIN}, \theta_{MAX})$ angolo tra $\hat{z}$ e $\hat{z}^*$ (angolo di nutazione)

Si ha: $\underline{\omega} = \dot{\Psi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{N} + \dot{\varphi}\hat{z}^*$

COMPONENTI DI $\underline{\omega}$ SULLA TERNA SOLIDALE:

$\underline{\omega}\cdot\hat{i}^* \equiv p = \dot{\Psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi$

$\underline{\omega}\cdot\hat{j}^* \equiv q = \dot{\Psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi$

$\underline{\omega}\cdot\hat{k}^* \equiv r = \dot{\Psi}\cos\theta + \dot{\varphi}$

Nel caso del sistema Sole-Terra, ON, linea dei nodi, è detta linea degli equinozi ed è l'intersezione tra il piano equatoriale ed il piano dell'eclittica.

ELLISSOIDE E TENSORE D'INERZIA

$A \equiv \sum m_i(y_i^2 + z_i^2)$ $B \equiv \sum m_i(x_i^2 + z_i^2)$ $C \equiv \sum m_i(y_i^2 + x_i^2)$

$D \equiv \sum m_i y_i z_i$ $E \equiv \sum m_i x_i z_i$ $F \equiv \sum m_i x_i y_i$

Il momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta r di coseni direttori (α, β, γ) è una forma quadratica definita positiva pari ad:

$$I_r = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\alpha\gamma - 2F\alpha\beta$$

Si ottiene dal prodotto del tensore $\tilde{I}$ per il versore $\hat{u}$ di r:

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \qquad \hat{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Si dice principale d'inerzia una terna rispetto alla quale $\tilde{I}$ è diagonale (e dunque $I_r = \mathcal{A}\alpha^2 + \mathcal{B}\beta^2 + \mathcal{C}\gamma^2$).

TEOREMA DI HUYGENS $I = I_G + Md^2$

$\mathcal{T}_A$ terna centrata in A in moto rispetto a $\mathcal{T}$. Allora:

$\underline{v}_i = \underline{v}_A + \underline{v}_i^{(r)} \Rightarrow \underline{L}_A = \sum m_i AP_i \wedge (\underline{v}_A + \underline{v}_i^{(r)}) = M AG \wedge \underline{v}_A + \underline{L}_A^{(r)}$

Per quanto riguarda l'energia cinetica: $T^{(r)} = \frac{1}{2} \sum m_i \underline{v}_i^{(r)} \cdot \underline{v}_i^{(r)}$

TEOREMA DI KÖNIG GENERALIZZATO $T = \frac{1}{2} M v_A^2 + T^{(r)} + M \underline{v}_G^{(r)} \cdot \underline{v}_A$

se $A = G \Rightarrow T = \frac{1}{2} M v_G^2 + T^{(r)}$ (teorema di König).

Scelta una terna ed esplicitato $\underline{\omega}$ rispetto ad essa, si può scrivere $(\underline{L}_A^{(r)})_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} I_{\alpha\beta} \omega_\beta$. Nel caso si sia scelta $\mathcal{T}^*$ ed il sistema in esame abbia un ellissoide d'inerzia SFERICO $(\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C})$, allora $\underline{L}_A^{(r)} = I \underline{\omega}$.

Se la terna è solidale, baricentrale e principale:

$\underline{L}_A = \mathcal{A} p \hat{i}^* + \mathcal{B} q \hat{j}^* + \mathcal{C} r \hat{k}^*$ con $\underline{\omega} = (p, q, r)$

$T_A^{(r)} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \omega_\alpha I_{\alpha\beta} \omega_\beta \qquad T_A = \frac{1}{2} M v_A^2 + M \underline{v}_A \cdot (\underline{\omega} \wedge AG) + T_A^{(r)}$

Se la terna è principale d'inerzia $T_A^{(r)} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}p^2 + \mathcal{B}q^2 + \mathcal{C}r^2)$

EQUAZIONI DI EULERO $\underline{\dot{L}}_O = \underline{M}_O^{(a,e)} = (m_1, m_2, m_3)$; O punto fisso

$$\begin{cases} \mathcal{A}\dot{p} - (\mathcal{B} - \mathcal{C}) q r = m_1 \\ \mathcal{B}\dot{q} - (\mathcal{C} - \mathcal{A}) p r = m_2 \\ \mathcal{C}\dot{r} - (\mathcal{A} - \mathcal{B}) p q = m_3 \end{cases}$$

$\underline{M}_O^{(a,r)} = \underline{0} \Leftrightarrow$ moti alla Poinsot $\Leftrightarrow$ ROTAZIONI PERMANENTI

Rotazione uniforme = rotazione t.che $\dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0$

Nell'ambito dei moti alla Poinsot, le uniche rotazioni uniformi possibili sono quelle attorno ad uno degli assi principali d'inerzia.

Giroscopio di asse $O\hat{k}^*$: $\underline{\omega} = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2$ (moti alla Poinsot)

$\underline{\omega}_1 = \frac{\underline{L}_O}{\mathcal{A}}$ = velocità angolare di precessione

$\underline{\omega}_2 = \frac{\mathcal{A} - \mathcal{C}}{\mathcal{A}} r_0 \hat{k}^*$ = velocità angolare di rotazione propria

$\underline{\omega}_1$ ed $\underline{\omega}_2$ sono costanti $\Rightarrow$ in generale i moti alla Poinsot di un giroscopio sono precessioni regolari.

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI detta forza d'inerzia una forza compensante la risultante delle forze agenti sul sistema: $\underline{F}^{(m)} \equiv -m\underline{a}$, la somma dei lavori virtuali compiuti da $\underline{F}^{(m)}$ e della risultante delle forze attive è ≤ 0. Deriva dal fatto che sperimentalmente si verifica che i lavori virtuali compiuti dalle forze vincolari è ≥ 0.

Vincoli bilaterali, olonomi e privi di attrito $\Rightarrow \delta L^{(m)} + \delta L^{(a)} = 0$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot q_k} = \frac{\partial OP_i}{\partial q_k} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial OP_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial v_i}{\partial q_k}$$

$$\delta L^{(m)} = -\sum m_i a_i \cdot \delta OP_i = -\sum m_i a_i \cdot \sum \frac{\partial OP_i}{\partial q_k}\delta q_k = -\sum\left(\sum m_i a_i \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_k}\right)\cdot \delta q_k$$
$$\equiv -\sum T_k \delta q_k$$

allo stesso modo $Q_k \equiv \sum \underline{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_k} \Rightarrow \delta L^{(a)} = \sum Q_k \delta q_k$

Essendo $T = \frac{1}{2}\sum m_i \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i$ risulta $T_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}$

Vincoli BOL $\Rightarrow \delta L^{(a)} + \delta L^{(m)} = 0 \Rightarrow \sum (Q_k - T_k)\delta q_k = 0$

Le δq_k sono tutte indipendenti $\Rightarrow$ la sommatoria si traduce in ℓ equazioni simultaneamente valide: $(Q_k - T_k)\delta q_k = 0 \ \forall k$

ovvero $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$ (eq. di Lagrange di II^a specie)

Vincoli indipendenti dal tempo $\Rightarrow$ sistema conservativo

$\Rightarrow \exists\, U : \underline{F}_i^{(a)} = -\nabla_i U \Rightarrow Q_k = \sum(-\nabla_i U)\frac{\partial OP_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k}$!

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k} \ \land\ U$ dipende solo dalle $q_k \Rightarrow$

definendo $\mathcal{L} \equiv T - U$ (Lagrangiana del sistema) si ha

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$ (EQUAZIONI DI LAGRANGE)

Si ricava $\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k}\dot q_k\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_h}\dot q_h - \mathcal{L}\right] = 0$

$\sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k}\dot q_k - \mathcal{L}$ si conserva durante il moto e si dice energia generalizzata o anche integrale di Jacobi.

Questo si conserva se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$.

$p_k \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k}$ (momento cinetico coniugato a q_k).

In statica il PLV si traduce in $\sum \underline{F}_i^{(a)}\delta P_i = 0 \Rightarrow Q_k = 0\ \forall k \Rightarrow$

$\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 \ \forall h$ (configurazioni d'equilibrio)

CRITERIO DI DIRICLET $\mathcal{U}$ = hessiano di U in $\underline{q}_{eq}$

det $\mathcal{U} > 0 \ \land$ tr $\mathcal{U} > 0 \Rightarrow q_{eq}$ punto di min. per $U \Rightarrow$ equilibrio stabile

det $\mathcal{U} > 0 \ \land$ tr $\mathcal{U} < 0 \Rightarrow \underline{q}_{eq}$ punto sella per $U \Rightarrow$ equilibrio instabile

det $\mathcal{U} < 0 \Rightarrow q_{eq}$ punto di max. per $U \Rightarrow$ equilibrio instabile

Se consideriamo piccole oscillazioni attorno ad una configurazione d'equilibrio stabile: $Q_h = q_h - q_h^{eq}$ $\mathcal{L}_{PO} = \frac{1}{2}\sum T_{hk}\dot{Q}_h\dot{Q}_k - \frac{1}{2}\sum U_{hk}Q_hQ_k$

$T_{hk} = a_{hk}$ valutato all'ordine 0 in q_{eq}.

T, U reali e simmetriche. Equazioni di Lagrange per piccole oscillazioni: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_h}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_h} \Rightarrow T_{hk}\ddot{Q}_k + U_{hk}Q_k = 0 \Rightarrow Q_h(t) = A_h e^{i\omega t}$

$\Rightarrow -\omega^2 T\underline{A} + U\underline{A} = 0$ (equazione caratteristica)

$\det(U - \omega^2 T) = 0 \Rightarrow$ si trovano le frequenze proprie ω_i^2.

Per trovare gli autovettori: $U\underline{A} = \omega^2 T\underline{A}$ $\wedge$ $\langle \underline{A}^{(i)}, T\underline{A}^{(j)}\rangle = \delta_{ij}$

$Q_h(t) = \mathrm{Re}\left[\sum a_i A_h^{(i)} e^{i\omega_i t}\right]$

$\mathcal{Q} = (\underline{A}^{(1)}, \dots, \underline{A}^{(n)})$ $\quad \mathcal{Q}^T U \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ 0 & \ddots & \omega_n^2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{Q}^T T \mathcal{Q} = \mathbb{1}$

Si dicono modi normali gli ξ_i tali che $\underline{Q} = \mathcal{Q}\underline{\xi}$ ($\underline{\xi} = \mathcal{Q}^T T \underline{Q}$)

ed $\mathcal{L}_{PO} = \frac{1}{2}\sum \dot{\xi}_i^2 - \frac{1}{2}\sum \omega_i \xi_i^2$; $\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0$

Operare una trasformazione di Legendre significa esprimere $\dot{q}$ in termini di q e p: $\dot{q}_h = v_h(\underline{q}, \underline{p}; t)$ $\forall h$

L'integrale di Jacobi scritto avendo operato queste sostituzioni si dice Hamiltoniana e, se non dipende esplicitamente dal tempo, rappresenta l'energia totale del sistema: $H = T + V$

Valgono le relazioni: $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$; $\frac{\partial H}{\partial q_h} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h}$; $\frac{\partial H}{\partial p_h} = v_h$, che, unite alle trasformazioni di Legendre ed alle equazioni di Lagrange, portano alle equazioni di Hamilton:

$\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \wedge \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \quad \forall h$

$A = A(\underline{q}, \underline{p}; t)$; $B = B(\underline{q}, \underline{p}; t)$ variabili dinamiche

PARENTESI DI POISSON di A con B $\{A,B\} = \sum\left(\frac{\partial A}{\partial q_h}\frac{\partial B}{\partial p_h} - \frac{\partial A}{\partial p_h}\frac{\partial B}{\partial q_h}\right)$

$\{A,B\} = -\{B,A\}$ $\quad \{A,A\} = 0$ $\quad \{A, BC\} = \{A,B\}C + B\{A,C\}$

$\{A,\{B,C\}\} + \{B,\{C,A\}\} + \{C,\{A,B\}\} = 0$ (Identità di Jacobi)

$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}$

$\frac{d}{dt}(\{A,B\}) = \{\frac{dA}{dt}, B\} + \{A, \frac{dB}{dt}\}$ (Teorema di Poisson)

$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$

$\begin{cases} \dot{q}_h = \{q_h, H\} \\ \dot{p}_h = \{p_h, H\} \end{cases}$ (equazioni di Hamilton)

Le parentesi di Poisson resta invariata solo sotto trasformazioni canoniche.

Si dice potenziale generalizzato una funzione potenziale che dipenda al più linearmente dalle $\dot{q}_k$. La lagrangiana conserva la forma $\mathcal{L} = T - U(\underline{q}, \dot{\underline{q}}; t)$; le eq. di Lagrange non variano. In questo caso $Q_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_k}$.

Il principio classico di minima azione si traduce in meccanica analitica nel Principio di Hamilton: la traiettoria tra due configurazioni è minima se e solo se sono soddisfatte le equazioni di Lagrange.

Teorema di Noether: $\mathcal{L}$ invariante sotto una trasformazione $\Rightarrow \exists$ un integrale primo. (Occorre che $\mathcal{L}$ mantenga la stessa forma funzionale)

Infatti: $\mathcal{L}(x', \dot{x}') - \mathcal{L}(x, \dot{x}) = 0 \Rightarrow 0 \simeq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x' - x) + o((x - x')^2)$

$\Rightarrow \varepsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \simeq 0 \quad \forall \varepsilon \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0 \Leftrightarrow p_x$ costante

Nello spazio delle fasi vale:

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}(\rho \dot{q}) + \frac{\partial}{\partial p}(\rho \dot{p}) = 0$ (equazione di continuità)

TEOREMA DI LIOUVILLE: il fluido nello spazio delle fasi è incomprimibile.

Oscillatore forzato: $\ddot{x} = F_0 - \omega^2 x \qquad x(t) = x_0 + x_p$

$x_0 = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad x_p = F_0$

Integrazione per quadrature $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$

separazione variabili: $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} = \int_{t_0}^{t} dt$

con le condizioni iniziali determino E e gli estremi di integrazione.

Esempio $\ell = 2$: campo centrale conservativo $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{eff}(r)$

Ricavo $r(t)$ per quadratura, poi $\dot{\theta} = \ell / mr^2 \Rightarrow d\theta = \frac{\ell}{m r^2(t)} dt$

$\Rightarrow$ ricavo $\theta(t)$ per quadratura.

Studio del moto di un corpo rigido libero: $\begin{cases} M \underline{a}_G = \underline{R}^{(e,a)} \\ \dot{\underline{L}}_G = \underline{M}^{(e,a)} \end{cases}$

$q = (x_G, y_G, z_G, \psi, \theta, \varphi)$

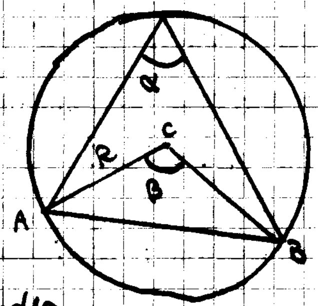
Si proietta la 1ª equazione cardinale sulla terna fissa, e la seconda sulla terna mobile $\rightarrow$ si separano traslazioni e rotazioni.

Significato dell'Hamiltoniano

Termini di potenziali generalizzati corrispondenti a forze che non compiono lavoro, e dunque che non comportano variazioni di energia, sono trascurabili nell'Hamiltoniano.

Teorema della corda

$AB = 2R \operatorname{sen} \alpha = 2R \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}$



Energia elastica

$U = \frac{1}{2} k (x - L_0)^2$

L_0 lunghezza a riposo della molla

Energia potenziale è sempre definita a meno di una costante: includere solo i termini che dipendono da variabili dinamiche.

Teor. di König

Se il polo scelto coincide col centro di massa l'energia cinetica è semplicemente $T = \frac{1}{2} M v_G^2 + T^{(r)}$

Legge delle aree $r^2 \dot{\theta} = \text{costante}$ (moti centrali piani)

Studio di stabilità: applicare una perturbazione alla configurazione d'equilibrio (dipendente dal tempo): vedi 22/07/09 #2.

T Energia cinetica e momenti d'inerzia sono sempre additivi (vedi 22/07/09 #1)

Meccanica Analitica

- Energia $E = T + U =$ costante

$\rightarrow$ $T = \frac{1}{2} M v_A^2 + T^{(r)} + M v_G^{(r)} \cdot v_A$ (Teor. di König generalizzato)

dove $v_G^{(r)} = \frac{d}{dt}(AG)$

e $T^{(r)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^{(r)} \cdot v_i^{(r)}$ (energia cinetica relativa)

dove le $v_i^{(r)}$ sono le velocità delle particelle rispetto al CM.

$\rightarrow$ $U = -\Delta W = -\int_A^B F \cdot ds$

I campi magnetici non producono lavoro: $U_B = 0$

U è sempre definibile a meno di costanti.

Forze elastiche: $U = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2$ dove Δx = allungamento molla

Forza di gravità: $\hat{F}_g = \hat{y} \Rightarrow U_g = -mgy$; $\hat{F}_g = -y \Rightarrow U_g = mgy$

$\rightarrow$ Energia cinetica di rotazione attorno ad un'asse A:

$T_R = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2$ dove I_A = mom. d'inerzia risp. all'asse A.

Alcuni momenti d'inerzia rispetto ad un'asse passante per il baricentro (e $\perp$ al piano in caso di figure piane):

Sfera $I_G = \frac{2}{5} MR^2$

Asta rigida $I_G = \frac{1}{12} ML^2$

Disco $I_G = \frac{1}{2} MR^2$

Anello $I_G = MR^2$

Lastra rettangolare $I_G = \frac{1}{12} M(a^2+b^2)$

$I_A = I_G + M(AG)^2$ (Teorema di Huygens)

- Formalismo di Lagrange

$\rightarrow$ $\mathcal{L} = T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}; t) - U(\underline{q}; t)$ (Lagrangiana)

Equazioni di Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$

$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ (momento cinetico coniugato a q_i)

q_i coordinata ciclica $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\right) = 0 \Rightarrow P_i$ costante

$\rightarrow$ Lagrangiana ridotta q_i ciclica $\Rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} - \dot{q}_i P_i$

→ Configurazioni d'equilibrio $\underline{q}_{eq} = \underline{q} : \frac{\partial U}{\partial q_i}(\underline{q}) = 0 \ \forall i$

Stabilità $\ell = 1 : \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}(q_{eq}) > 0$ (Criterio di Diriclet)

$\ell > 1$: $\mathcal{U}$ = hessiana della funzione potenziale in $\underline{q} = \underline{q}_{eq}$

$\det \mathcal{U} > 0 \wedge Tr\,\mathcal{U} > 0 \Rightarrow \underline{q}_{eq}$ è stabile (min U)

$\det \mathcal{U} > 0 \wedge Tr\,\mathcal{U} < 0 \Rightarrow \underline{q}_{eq}$ è un punto sella per U (instabile)

$\det \mathcal{U} < 0 \Rightarrow \underline{q}_{eq}$ è instabile (max U)

→ Piccole oscillazioni attorno ad una conf. d'equilibrio stabile

$\underline{Q} \equiv \underline{q} - \underline{q}_{eq}$ $\quad U(\underline{q}) \approx U(\underline{q}_{eq}) + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial U}{\partial q_i}\Big|_{q_{eq}} Q_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{\ell} \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_{q_{eq}} Q_i Q_j$

detti U_{ij} gli elementi dell'hessiana di U in $\underline{q} = \underline{q}_{eq}$, si ha

$\mathcal{L}_{P.O.} = \frac{1}{2} a_{ij}(\underline{q}_{eq}) \dot{Q}_i \dot{Q}_j - \frac{1}{2} U_{ij} Q_i Q_j$

→ Frequenze proprie di oscillazione del sistema attorno a $\underline{q}_{eq}$:

$\ell = 1$: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} a(\underline{q}_{eq}) \dot{Q}^2 - \frac{1}{2} k(\underline{q}_{eq}) Q^2$ $\quad \omega^2 = \frac{k}{a}(q_{eq})$

$\ell > 1$: $\quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} T_{hk} \dot{Q}_h \dot{Q}_k - \frac{1}{2} U_{hk} Q_h Q_k$

$\det\left(U|_{q_{eq}} - \omega^2 T|_{q_{eq}}\right) = 0$

NB: • il coefficiente $\frac{1}{2}$ non fa parte né di T_{ij} né di U_{ij}

• T ed U sono simmetriche: se ci sono termini misti vanno suddivisi equamente sopra e sotto diagonale.

→ Modi normali

$U \underline{A}^i = \omega_i^2 \underline{A}^i$ $\quad \langle \underline{A}^i, T\underline{A}^j \rangle = \delta_{ij}$ (autovett. normalizzati nella metrica T)

$\mathcal{A} \equiv (\underline{A}^1, \dots, \underline{A}^\ell)$ $\quad \mathcal{A}^T T \mathcal{A} = \mathbb{1}$ $\quad \mathcal{A}^T U \mathcal{A} = \Lambda = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ 0 & \cdots & \omega_\ell^2 \end{pmatrix}$

$\underline{Q} = \underline{q} - \underline{q}_{eq}$ $\quad \underline{Q} = \mathcal{A}\underline{\xi}$ $\quad \underline{\xi} = \mathcal{A}^T T \underline{Q}$ (ξ_i = modi normali)

$\mathcal{L}_{P.O.} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell} \dot{\xi}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell} \omega_i^2 \xi_i^2$ $\quad$ Lagrangiana piccole oscillazioni

- Formalismo di Hamilton

→ $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{\ell} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$ (Energia generalizzata)

Se $\mathcal{H}$ non dipende dal tempo, è detto Integrale di Jacobi.

$\dot{q}_i = v_i(\underline{q}, \underline{p}; t)$ (trasformazioni di Legendre)

$H = \mathcal{H}(\underline{q}, \underline{v}(\underline{q}, \underline{p}; t); t)$ (Hamiltoniana)

Equazioni di Hamilton: $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$; $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$

→ Simmetria: q_i ciclica $\Rightarrow p_i$ costante ; p_i ciclico $\Rightarrow q_i$ costante

- Campi elettromagnetici

$\underline{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$ $\quad \underline{B} = \nabla \wedge \underline{A}$

$\mathcal{L}_{E.M.} = \frac{1}{2} m v^2 - e\varphi + \frac{e}{c}\underline{v} \cdot \underline{A}$; $\quad H_{E.M.} = \frac{1}{2m}\left(\underline{p} - \frac{e}{c}\underline{A}\right)^2 + e\varphi$