

Il corso richiede molte esercitazioni.

È scritto è un problema da risolvere.

~60-65 ore di lezione / esercitazione.

6^a ora: lunedì alle 14?

Scopo del corso: introduzione alle teorie di campo quantistiche
(3 di cui interazioni fondamentali)

RELATIVITA' RISTRETTA + MECCANICA QUANTISTICA

Prerequisiti

- mecc. quantistica non relativistica
- relatività ristretta (comunque ripresa nelle prime lezioni)
- teoria di campo classica (elettrodinamica)

Seconda quantizzazione → possibilità di descrivere più
particelle nello stesso momento.

meta lezioni e meta esercitazioni circa (30 ore - 30 ore)

"Ricevimento" su richiesta il sabato, per spiegazioni più approfondite.

ESAME: scritto + orale

Il corso non segue strettamente un libro. Per confronto:

Mandenshew - quantum field theory

Peskin - An intro. to quantum field theory

Di Giacomo - (...) teoria di campo

0502214

vicari@df.unipi.it

29/9/11

Riprendiamo i concetti della relatività ristretta.

- ① principio di equivalenza dei sist. inerziali
- ② c velocità massima e che non può essere superata.

Da questi due principi si ricavano le leggi della relatività speciale.

Un evento fisico è qualcosa che succede ad un dato istante in un punto dello spazio. Può essere descritto da 4 numeri:

$$t, \vec{x} \Leftrightarrow SI$$

Cosa succede cambiando sist. di riferimento?

$$t', \vec{x}' \Leftrightarrow SI'$$

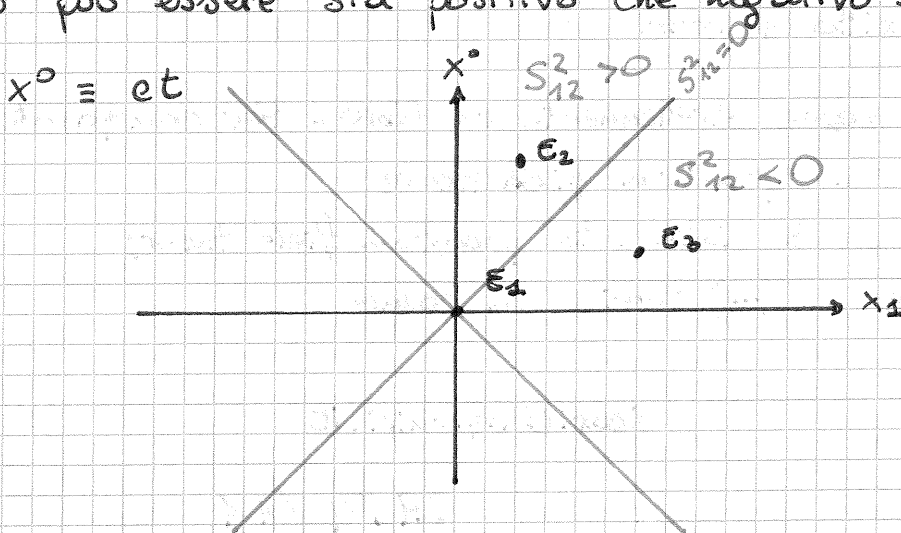
Prendiamo E_1, E_2 . L'intervallo spaziotemporale tra di essi è indipendente dal sist. di rif.

	E_1	E_2
SI	t_1, x_1	t_2, x_2
SI'	t'_1, x'_1	t'_2, x'_2

$$s_{42}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$$

Questo è uno scalare per le trasformazioni di Lorentz ed è indipendente dal sistema di riferimento.

s^2 può essere sia positivo che negativo.



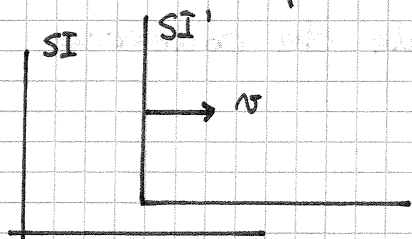
Quali eventi possono in qualche modo essere influenzati da E_1 ? Non quelli con $s^2_{12} < 0$, altrimenti l'informazione dovrebbe propagarsi a $v > c$.

Gli eventi con $s^2 = 0$ sono legati in genere alla propagazione della luce ($m = 0$)

Qualsiasi sist. di rif. può verificare che E_2 accade in seguito ad E_1 .

Invece, per l'evento E_3 \exists almeno un s.r. per il quale c'è l'inversione dei tempi.

Torniamo al problema precedente.



$$\beta = v/c$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

$$x'_1 = \gamma (x_1 - \beta x^0)$$

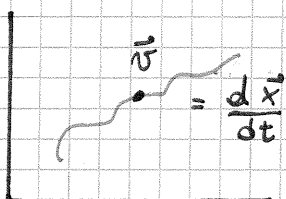
$$x^0 = \gamma (x^0 - \beta x^1)$$

Si verifica che:

$$x_0^2 - x_1^2 = x_0'^2 - x_1'^2$$

Consideriamo un oggetto che si muove a velocità v .

Rispetto ad un altro sistema di riferimento:



$$\vec{v}' = \frac{d\vec{x}'}{dt}$$

La trasformazione non è lineare, in quanto deve tener conto che $\exists v_{max} = c$.

In generale, i vettori si trasformano in maniera semplice in fisica classica. Una formulazione covariante che tenga conto della relatività utilizza i QUADRIVETTORI.

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ t \end{matrix}$

 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\vec{x}}$

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\mu x^\mu \quad \text{con } \Lambda = \left(\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right)$$

È anche possibile traslare:

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\mu x^\mu + a^\alpha$$

Possiamo introdurre una metrica (Minkowski):

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = x^0^2 - \vec{x}^2 \quad (\text{sottint. somma indici rip.})$$

La trasformazione piú generale che conserva questa quantità è

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\mu x^\mu + a^\alpha$$

ed identifica il gruppo di Poincaré.

Si definisce quadrivettore un vettore di 4 elementi che trasforma secondo Poincaré.

$$g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta < 0 \Rightarrow A \text{ è di genere tempo}$$

$$g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta > 0 \Rightarrow A \text{ " " " spazio}$$

$$g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta = 0 \Rightarrow A \text{ " " " luce}$$

Definiamo un tensore controvariante t. c.

$$B'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu B^{\mu\nu}$$

(ad es.: campo e.m.)

È opportuno distinguere tra gli indici in basso e gli indici in alto.

$$A^\mu \quad A_\mu = g_{\mu\alpha} A^\alpha \quad \leftarrow \text{covariante}$$

$$A^\mu B_\mu = A^\mu B^\alpha g_{\mu\alpha} \quad \text{PRODOTTO SCALARE QUADRIV.}$$

Dobbiamo costruire operatori differenziali.

Un quadrivettore trasforma moltiplicativamente.

Prendiamo uno scalare $\varphi(x^\mu)$. NB.: questo dipende dal sistema di riferimento:

$$SI \quad \varphi(x^\mu)$$

$$SI' \quad \varphi'(x^{\mu'}) = \varphi(x(x'))$$

Vogliamo costruire il differenziale di $\varphi(x^\mu)$:

$$SI \quad d\varphi(x^\mu) = \varphi(x^\mu + dx^\mu) - \varphi(x^\mu)$$

(è lo differenziale tra due scalari)

Come definiamo $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi(x)$?

$$d\varphi = dx^\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \quad (\text{relazione tra differenziale e derivata})$$

\uparrow scalare \uparrow quadrivettore (contravariante) \uparrow quadrivettore covariante

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \varphi$$

Come si estende il concetto di divergenza?

Cambiare s.d.r. ed un quadrivettore:

$$A^\mu(x) \rightarrow A^{\mu'}(x') = A^\mu_{\alpha'} A^{\alpha'}(x(x'))$$

$$\frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu A^\mu \quad \text{DIVERGENZA}$$

(è uno scalare)

Vediamo l'operazione di integrazione.

Esempio:

$$\int \varphi dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

Se φ è uno scalare che cosa rappresenta questo integrale? Cambiando sistema di riferimento:

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'}(x)$$

Che cosa succede?

$$\int_{\Omega'} \varphi(x(x')) dx^{0'} dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'} \cdot J$$

$$J = \det \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}}$$

se una trasformazione di Lorentz $\Rightarrow J = 1$

\Rightarrow l'integrale si comporta come uno scalare.

Teorema di Gauss

$$\int_{\partial V} A^i dS^i = \int_V \partial_i A^i d^3x$$

In quattro dimensioni? \Rightarrow IPERSUPERFICIE

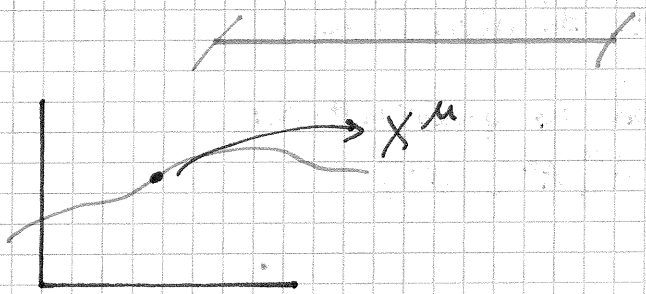
es.: sfera

$$3-D \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$$

$$4-D \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2$$

$$\int_{\partial \Omega} A^\mu dS_\mu = \int_{\Omega} \partial_\mu A^\mu d\Omega$$

TEOREMA DI GAUSS



Per descrivere una particella occorrono posizione e velocità. In fisica classica: $\vec{v} = \frac{dx}{dt}$

Vogliamo rimanere nell'ambito dello covarianza

\Rightarrow occorre un quadrivettore.

~~$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$$~~

Questo non va bene. Al denominatore occorre un 4-vett.

Utilizziamo quindi l'intervallo spaziotemporale.

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$$

Quadrivelocità

N.B.: $\sqrt{s^2} = s$ potrebbe essere nullo o immaginario.

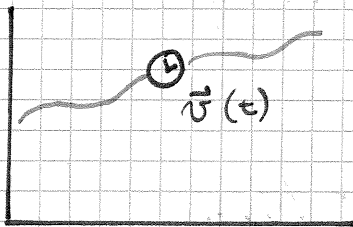
Tuttavia, per una particella fisica che si muove, a $v \ll c$, $s^2 > 0$ sempre.

$c \equiv \underline{1}$ \leftarrow sempre di qui in avanti

$$ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2 \Rightarrow$$

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt \sqrt{1 - \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2}} = (\gamma, \gamma \vec{v})$$

Il tempo che compare in S^2 si dice tempo proprio della particella.



Che cosa misura la particella - orologio?

Posso associare istante x istante un SI alla particella, tale che $v_{SI} = v$ e $\vec{o} = \vec{x}$.

Prendiamo due eventi infinitamente vicini.
 ds^2 è indipendente dal s.d.r.

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = dt^2 \quad \text{misurato dalla particella - orologio}$$

La cinematica relativistica associa ad ogni particella un quadrimpulso.
 In fisica classica:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\sum \vec{p}_i^{(A)} = \sum \vec{p}_i^{(B)} \quad \text{Conservazione dell'impulso}$$

$$\sum E_i^{(A)} = \sum E_i^{(B)} \quad \text{Conservazione dell'energia}$$

Quali sono le corrispondenti relazioni in un contesto relativistico?

Basta una sola equazione!

$$\sum P_{(A)}^\mu = \sum P_{(B)}^\mu \quad \text{Conservazione del quadrimpulso}$$

Definizione:

$$P^\mu = m u^\mu, \quad u^\mu \text{ quadri-velocità.}$$

Per componenti:

$$P^\mu = (m\gamma, m\gamma\vec{v})$$

Per velocità molto piccole, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \rightarrow 1 + \frac{v^2}{2}$

$$\Rightarrow P^0 = m + m \frac{v^2}{2}$$

30/9/11

$$P^\mu = m u^\mu \quad u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad (c=1)$$

In componenti: $P^\mu = m(\gamma, \gamma\vec{v})$, $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

Un tipico problema in cinematica relativistica sono gli urti -

- sistema chiuso
- grande distanza iniziale

$t = -\infty \quad U(r) \approx 0 \quad (\text{interazione trascurabile})$



$$P^\mu_{(i)} = P^\mu_1 + P^\mu_2$$

Questo mette insieme le equazioni che scriveremo in cinematica non relativistica.

Dopo l'urto avremo:

$$P^\mu_{(f)} = P^\mu_3 + P^\mu_4$$

$$\boxed{P^\mu_1 + P^\mu_2 = P^\mu_3 + P^\mu_4}$$

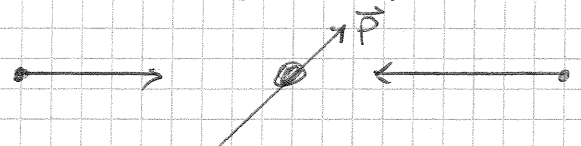
La conservazione del quadrimpulso corrisponde ad una simmetria per traslazione nello sp.-t., così come in fisica classica si aveva:

cons. $\vec{p} \rightarrow$ simm. x transl. spaz.

cons. $E \rightarrow$ " " " temp.

$$u^\mu u_\mu = 1$$

Supponiamo di avere:



Qual è la probabilità di osservare la particella uscente con un certo impulso \vec{p} ?

Per una singola particella: $p^\mu p_\mu = m^2$

⇒ delle 4 componenti, solo 3 sono indipendenti.

$$\frac{dN}{N} \sim f(\vec{p}) d^3p$$

Da cosa dipende $\frac{dN}{N}$? Cambia con il sistema di riferimento? No, magari cambia il volume considerato, però $N = N'$.

d^3p non può invece essere un invariante.

$$p^{02} = \vec{p}^2 + m^2$$

$\frac{d^3p}{p^0}$ è un invariante?

→ sostituendo 4 componenti indipendenti.

→ imponiamo che $p^\mu p_\mu = m^2$

$$\frac{d^3p}{p^0} \propto d^4p \delta(p^\mu p_\mu - m^2) \quad (f(x) = f(x)\delta(x))$$

Se è vero questo, allora $\frac{d^3p}{p^0}$ sarebbe un invariante (d^4p e l'argomento della δ sono invarianti).

$$d^4p = d^3p dp^0 \quad p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

$$d^4p \delta(p^\mu p_\mu - m^2) = d^3p dp^0 \delta[p^{02} - (m^2 + \vec{p}^2)]$$

→ viene dalla Jacobiana

CvD.

$f(\vec{p})$ non può essere un invariante, se vogliamo accoppiarlo a d^3p/p^0 a formare un invariante.

Ci chiediamo anche con quale probabilità i prodotti stiamo in una certa

regione dello spazio -

$$F(\vec{p}, \vec{x}) d^3p d^3x$$

$d^3p d^3x$ è un elemento dello spazio delle fasi -

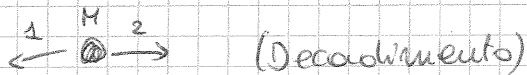
è un invariante? (Posso scrivere $F(p(p), x(x)) d^3p d^3x$?)

$$\frac{d^3p}{p^0} d^3x \quad p^0 \quad d^3x \rightarrow d^3x \gamma$$

$$\text{ma } p^0 = m\gamma$$

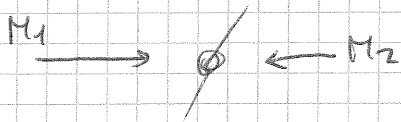
⇒ è un invariante -

Problema



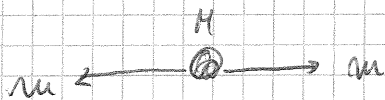
$$p_0^M = p_1^M + p_2^M$$

Problema



Vediamo il problema di decadimento -

Supponiamo che la particella iniziale abbia spin 0 (ad esempio, π).



$$(M, \vec{0}) = (E_1 + E_2, \vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

- i prodotti devono avere impulsi opposti, $|\vec{p}| = \sqrt{E^2 - m^2}$
- $E_1 = E_2 = M/2$

Non abbiamo ancora fissato tutti i gradi di libertà delle particelle finali.

$$l = 3 \rightarrow l = 6 + \text{VINCOLI}$$

La conservazione di p^M toglie 4 gradi di libertà -

Gli altri due corrispondono all'angolo solido

$d\theta d\varphi \rightarrow$ le direzioni dei prodotti -

Ora ci chiediamo: lo spin?

Inizialmente non abbiamo una unica particella scalare. Abbiamo N particelle, facciamo N osservazioni - Parliamo di probabilità -

$$\frac{dN(\vec{p})}{N} =$$

Perché l'informazione dello spin iniziale $= 0$ aiuta?

• ci dice che la distribuzione è isotropa -

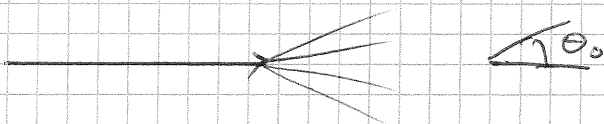
$$\frac{dN}{N} \propto \frac{1}{4\pi} d\cos\theta d\varphi$$

Momento angolare iniziale $= 0 \Rightarrow$ simmetrico per rotazioni TOTALI!

E se avessimo $\vec{S} = \uparrow$? Stiamo polarizzando il sistema rispetto ad un asse privilegiato, quindi non possiamo dire che ogni direzione sia indistinguibile -

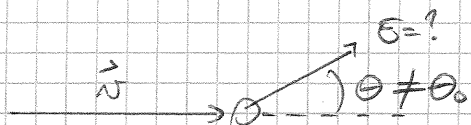
$\left\{ \begin{array}{l} \vec{S} = 0 \\ \text{particella in moto} \end{array} \right.$

\hookrightarrow Perdiamo nuovamente l'isotropia, che resta solo rispetto all'asse del moto -



$$\frac{dN}{N} = \frac{1}{2} d\cos\theta_0 \quad (\vec{S}_0 = 0) \quad \text{s.d.r.} = \text{c.m.}$$

Qual è il numero di particelle che ha una energia E nel sistema del laboratorio?



Distribuzione dell'energia nel sistema del centro di massa:

$$E_0 = \frac{M}{2} \quad P_{\text{cm}}^0 = \frac{M}{2} \propto \delta(P_c^0 - \frac{M}{2})$$

Mel sistema del laboratorio non è così semplice -
Le particelle prodotte in avanti saranno più energetiche.

Ocorre scambiare variabile ed inserire la Jacobiana -

RICEVIMENTO: Lunedì dopo le 3 ?

Giovedì dopo le 2 .

La prima domanda di ogni scritto è di cinematica relativistica -

Risolviamo un problema con un cambio di variabile -

$$dN = \frac{1}{2} \frac{d \cos \theta_0}{dE} dE$$

$$P_{LAB}^{\mu} = (E_L, \vec{P}_L)$$

$$P_{CM}^{\mu} = (E_0, \vec{P}_0)$$

Usiamo una transf. di Lorentz -

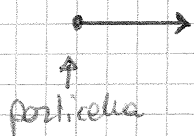
← assumiamo che \vec{v} sia lungo x

$$E_{LAB} = \gamma (E_0 + \beta |\vec{P}_0| \cos \theta_0)$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\frac{\pi}{2}}{2}} \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2}$$

Riguardare

$$\Rightarrow dN = \frac{1}{2\gamma\beta|\vec{P}_0|} dE$$



URTO (meccanica classica)
↑
centro diffusore
che interagisce con la particella
tramite un campo centrale $U(r)$

b parametro d'urto singola particella

v velocità singola particella

χ angolo di deviazione (misurato a grande distanza)

$$\chi(b) = ?$$

Abbiamo molte particelle \Rightarrow ci occupiamo di probabilità -

Si definisce sezione d'urto in questo contesto

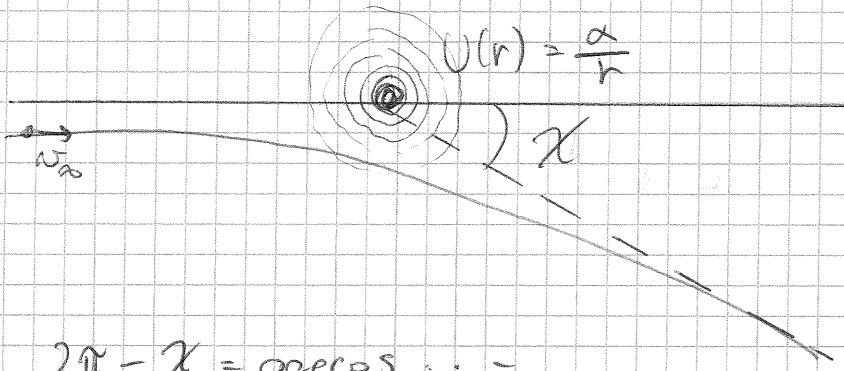
$$d\sigma = \frac{dN(\chi)}{N}$$

$N \rightarrow$ N di particelle in arrivo per unità di superficie

$b \equiv$ parametro d'impulso

$d\sigma = 2\pi b db$ termine Jacobiano

$d\sigma = 2\pi b \left| \frac{db}{dx} \right| dx$ Qual è la relazione tra x e b ?



$2\pi - \chi = \pi \cos \dots$

l'importante è sapere che questa relazione è CALCOLABILE -

4/10/11

Giovedì	→ aula C
Lunedì	→ aula G

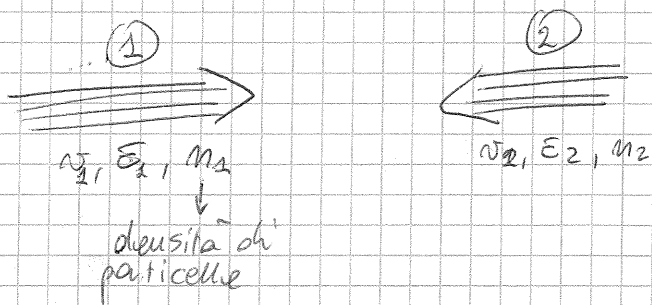
Nel caso della fisica classica si definisce la sezione d'urto come

$d\sigma = \frac{dN}{N}$ per unità di superficie! $\Rightarrow [\sigma] = [m^2]$

(Ad es.: particelle deviate da un centro di scattering tramite un potenziale centrale.)

Conoscendo il potenziale si calcola σ , misurando σ si risale al potenziale -

In meccanica relativistica il concetto è equivalente.



Vogliamo descrivere il fenomeno e costruire una definizione INVARIANTE di sezione d'urto -

Ci mettiamo in un sistema di riferimento in cui ② è fermo (\Rightarrow targhetta fissa) - Supponendo che siano particelle con massa, tale s.d.r. \exists sempre.

Numero di urti / volume-tempo: $dN = (\dots) dV dt$ è un invariante -

$\frac{dN}{dV dt} \propto m_1 m_2$ numero urti \propto numero particelle.

$\frac{dN}{dV dt} \propto v_{rel}$ più veloce va il fascio, più particelle passano attraverso ② nel Δt . $v_{rel} =$ vel. di ② nel s.d.r. in cui ② è fermo.

siamo in unità naturali $c=1$?

$$dN = \sigma v_{rel} m_1 m_2 dV dt$$

$$[/] = [L^2] \left[\frac{L}{t} \right] \left[\frac{1}{L^3} \right] \left[\frac{1}{L^3} \right] [L^3] [t]$$

Naturalmente v_{rel} è limitata a $2c$ (è un s.r., non uno r).

Torniamo nel sistema di riferimento del laboratorio.

$$dN = A m_1 m_2 dV dt \quad \text{S.D.R. GENERICO}$$

$A m_1 m_2$ è INVARIANTE per trasformazioni di Lorentz.

$$m dV = m_0 dV_0 \quad \text{invariante}$$

$$dV \rightarrow dV/\gamma \quad dm \rightarrow dm \cdot \gamma$$

$$m = m_0 \frac{dV_0}{dV} = m_0 \gamma = m_0 \frac{E_2}{m_2}$$

$$A m_1 m_2 \text{ invariante} \iff A E_1 E_2 \text{ invariante}$$

$\Rightarrow A$ si comporta come un'energia⁻². Infatti m trasforma come un'energia.

NB: per noi l'energia è la componente 0 del quadrivettore, e la massa è la massa a riposo.

Si verifica che:

$$A = \sigma v_{rel} \frac{p_1^\alpha p_{2\alpha}}{E_1 E_2}$$

Le condizioni sono rispettate:

- $A E_1 E_2$ è uno scalare
- Nel s.d.r. con ② fermo si ottiene $\sigma \cdot v_{rel}$, infatti $p_1^\alpha p_{2\alpha} = E_1 E_2$.

$$dN = \sigma v_{rel} \frac{p_1^\alpha p_{2\alpha}}{E_1 E_2} m_1 m_2 dV dt$$

Possiamo ancora migliorare la formula definendo v_{rel} in termini di invarianti.

$P_1^\alpha P_{2\alpha}$ è uno scalare \Rightarrow non dipende dal s.d.r.
Nel sist. con ② fermo:

$$P_1^\alpha P_{2\alpha} = E_1 m_2 = \frac{m_1 m_2}{\sqrt{1 - v_{rel}^2}}$$

$$\Rightarrow v_{rel} = \sqrt{1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{(P_1^\alpha P_{2\alpha})^2}}$$

$$dN = \sigma \frac{1}{c_1 c_2} [(P_1^\alpha P_{2\alpha})^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2} m_1 m_2 dV dt$$

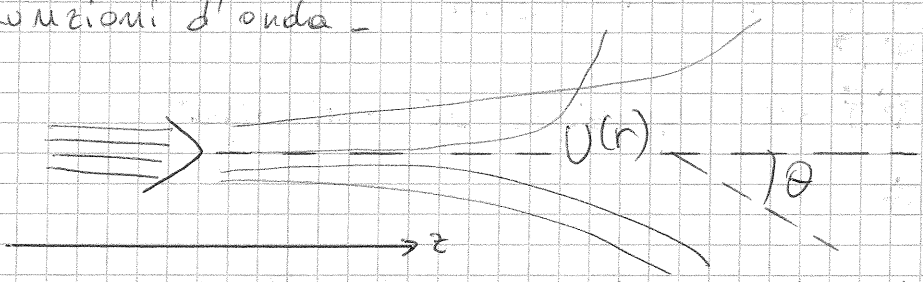
σ = SEZIONE D'URTO INVARIANTE

Adesso torniamo ad un contesto non più relativistico, però quantistico.

In linea teorica, in meccanica classica si poteva seguire il comportamento di una singola particella e seguirne il comportamento. In un contesto quantistico:

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar$$

Passeremo ad una descrizione in termini di funzioni d'onda.



il fascio è descritto da un'onda piana e^{ikz} a impulso k fissato.

Cambio variabile: 2 fasci \rightarrow 1 fascio che interagisce con un potenziale centrale $U(r)$

La situazione dopo l'urto è rappresentata da una funzione d'onda SFERICA $\psi \sim \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta)$

Siamo in un contesto

↑
onda sferica
modulo \hat{z} one di θ

quantistico \Rightarrow la f. d'onda deve essere anche soluzione di una eq. di Schrödinger, tale che le condizioni al contorno (all'infinito) corrispondano da una parte come onda piana e dall'altra come

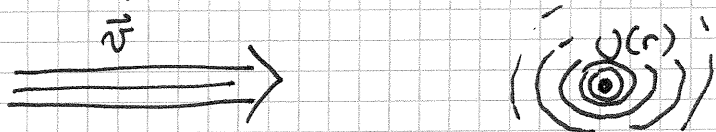
onda sferica -

$$\psi_{r \rightarrow \infty} \sim e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

6/10/11

Descrizione urti in MQ non relativistico.

Non è più possibile seguire la traiettoria delle particelle -



Qualunque problema a 2 corpi può essere risolto come un problema a 1 corpo che interagisce con un potenziale centrale.

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(r) \quad H\psi = E\psi$$

Come dev'essere fatta ψ ? Quali sono le condizioni al contorno?

In arrivo c'è un flusso di particelle, \sim onda piana (impulso fissato \Rightarrow particella delocalizzata) e^{ikz}

A parte fattori, \exists una corrente di probabilità definita come:

$$j = |\psi|^2 \vec{v}$$

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m} \vec{k} \quad \partial \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{equazione di continuità}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = \frac{\hbar}{m} \vec{k} = \vec{v}$$

Poi avviene l'"urto" con il potenziale. Possiamo fare calcoli solo a livello probabilistico. A grande distanza \sim onde sferiche modulate - $\psi \sim f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$
Qual è la corrente di probabilità per una certa direzione \hat{r} ? Si ottiene:

$$\vec{j} \cdot \hat{r} = \frac{\hbar}{m} |f|^2 = v |\psi|^2$$

Il flusso su un elem. di superficie (a grande distanza):

$$\vec{j} \cdot d\vec{s} = v |f|^2 d\Omega \quad (f = f(\theta))$$

do σ è la probabilità di trovare una particella uscente ad angolo θ per unità di flusso incidente.

$$d\sigma = \frac{N |f(\theta)|^2 d\Omega}{N} = |f(\theta)|^2 d\Omega$$

Questo definisce la sezione d'urto in questo contesto. Ora ricaviamo formalmente Ψ .

$$\begin{cases} H\Psi = E\Psi & (\text{eq. di Schrödinger}) \\ \Psi \sim e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} & r \rightarrow \infty \text{ (cond. al contorno)} \end{cases}$$

Non abbiamo tenuto conto delle interferenze tra i due termini: ad $r \rightarrow \infty$ (ad es. nel calcolo della corrente in uscita).

Fascio \neq onda piana!

Il fascio è sufficientemente largo per giustificare in prima approssimazione un'onda piana, ma NON è infinito a grandi distanze, escludendo il limite $\theta \rightarrow 0$, il fascio di potenza non interagisce con i rivelatori \Rightarrow trascuriamo le interferenze.

Risolviamo l'eq. di Schrödinger solo con qualche ipotesi generica: $U(r)$ "piccolo".

Approssimazione di Born

$$H\Psi = E\Psi \quad H = \frac{p^2}{2m} + U(r)$$

Possiamo riscrivere l'eq. come: $\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 2mU\Psi$

$$k = \sqrt{2mE} \quad (\hbar = 1)$$

1DA: considero U come una perturbazione.

Supponiamo anche che U abbia una scala tipica di lunghezza, che chiamiamo "a" (es.: $U(r) = e^{-r/a}/r^x$).

$$\Psi = \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)} \quad \nabla^2 \Psi^{(0)} + k^2 \Psi^{(0)} = 0 \Rightarrow \Psi^{(0)} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

Trosciando termini di ordine superiore:

$$\nabla^2 \Psi^{(1)} + k^2 \Psi^{(1)} = 2mU\Psi^{(0)}$$

$$\Rightarrow \Psi^{(1)}(\vec{x}) = -\frac{m}{2\pi} \int \Psi^{(0)}(\vec{x}') U(\vec{x}') \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}}{R} d^3x', \quad R = \sqrt{(\vec{x} - \vec{x}')^2}$$

$$NB.: \nabla^2 \left(\frac{1}{R}\right) \propto \delta(\vec{r})$$

Cosa significa che il potenziale deve essere "piccolo"?

Per consistenza dobbiamo avere:

$$\psi^{(1)} \ll \psi^{(0)} \Rightarrow \text{condizioni su } U$$

$$\psi^{(1)} \sim mU a^2 \cdot \frac{1}{\hbar^2} \quad \psi^{(0)} \sim O(1) \Rightarrow \frac{mU a^2}{\hbar^2} \ll 1$$

$\Rightarrow U \ll \frac{\hbar^2}{m a^2}$ NB.: abbiamo trascurato il termine di fase e^{ikR} , che rende $\psi^{(1)}$ più piccola.

Se \bar{k} è "grande", e^{ikR} dona grandi variazioni.

\Downarrow
 $ka \gg 1 \Rightarrow$ possiamo "indebitare" la condizione su U .

(questi conti si trovano sul Landau 3)

$$\psi^{(1)} \equiv \psi^{(0)} \cdot g \quad \text{funzione} \Rightarrow \text{Si ottiene: } \nabla^2 g(x) + 2ik \frac{\partial g(x)}{\partial x} = \frac{2mU}{\hbar^2}$$

$ka \gg 1 \Rightarrow \nabla^2 g$ non contribuisce rispetto a $k \frac{\partial g}{\partial x}$

$$i \frac{\partial g}{\partial x} = 2mU \frac{1}{\hbar^2} \Rightarrow g = -\frac{i m}{\hbar^2 k} \int U dx \Rightarrow$$

g è dell'ordine di $\frac{mU}{\hbar^2} \frac{a}{k}$.

$g \ll 1 \Rightarrow U \ll \frac{\hbar^2}{m a^2} (ka)$ La condizione viene allentata se $ka \gg 1$.

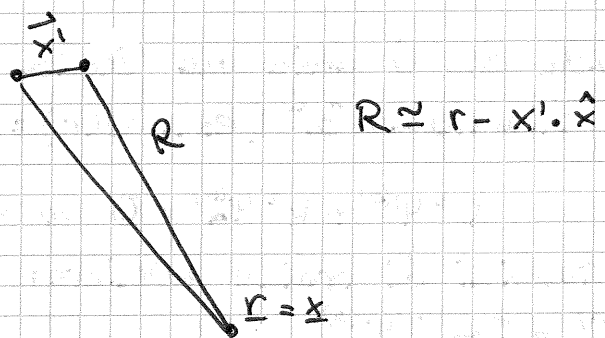
Questo era l'approssimazione di Born.

La condizione sulla lunghezza tipico non esclude del tutto il potenziale Coulombiano:

$$\frac{a}{r} \ll \frac{\hbar k}{m v} \leftarrow \text{confondo } r \text{ con la lunghezza tipica.}$$

Vediamo se $\psi^{(1)}$ corrisponde all'onda sferica per $r \rightarrow \infty$.

$$r \gg a, \quad r \gg k^{-1}$$



$$-\frac{m}{2\pi} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}'} U(\vec{x}') e^{i\vec{k}(\vec{r} - \hat{x} \cdot \vec{x}')} \left(\frac{1}{r}\right)^{d^3x'} = -\frac{m}{2\pi r} e^{ikr} \int d^3x' U(x') e^{i(k-k')x'}, \quad k' = k \hat{x}$$


$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} e^{ikr} \tilde{U}(k-k') \frac{1}{k^2} \quad \text{C.V.D.}$$

\leftarrow onda sferica
 \uparrow modulazione

$\tilde{U}(k-k')$ è una trasformata di Fourier di $U(x)$.

$$H\psi = E\psi$$

$$d\sigma = (\dots) \cdot |\tilde{U}(k-k')|^2 d\Omega$$

$k-k'$ è funzione di θ :  $|k-k'| = 2k \sin \frac{\theta}{2}$

Se abbiamo uno stato iniziale i ed uno finale f , la probabilità di andare da i a f è:

$$dW_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | U | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i) dN_f \quad \text{densità stati finali}$$

$$|i\rangle = \sqrt{\frac{m}{\hbar k}} e^{ik \cdot x} \quad |\vec{j}| = 1$$

$$|f\rangle = e^{ik' \cdot x}$$

(sono due onde piane)

Stiamo cercando un oggetto molto simile a quello di prima ($\vec{j} \cdot d\vec{s}$).

$$\frac{m}{\hbar} \frac{2\pi}{\hbar} \int e^{i(k-k') \cdot x'} U(x') d^3x' \delta(k'^2 - k^2) \frac{d^3k'}{(2\pi\hbar)^3}$$

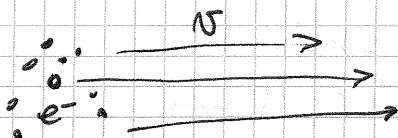
\leftarrow densità spazio delle fasi

\downarrow
c'è da tener conto della Jacobiana

$$= \frac{2\pi m}{\hbar k} |\tilde{U}(k-k')|^2 \delta(k^2 - k'^2) \frac{\hbar^2 dk d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} = d^3k'$$

$$\sim |\tilde{U}(k-k')|^2$$

Applichiamo tutto questo al caso di elettroni veloci contro un atomo.



$$\sigma = ?$$

atomo \rightarrow idrogeno $\psi(r) \propto e^{-r/a_0}$

Qual è lo scalare tipico di un elettrone legato ad un atomo?

$$v = \int \psi^* i \frac{\partial}{\partial x} \psi$$

Guardiamo l'ordine di grandezza.

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} \quad \Delta p \Delta r \sim \hbar \approx 1$$

$$\Rightarrow p \sim \frac{1}{r} \Rightarrow E \sim \frac{1}{2m r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

Minimizziamo risp. ad R per ottenere lo stato fondamentale:

$$R_0 \propto \frac{1}{m\alpha} \quad \text{raggio di Bohr} \sim 10^{-8} \text{ cm}$$

$$\frac{p}{m} = \frac{m\alpha}{m} = \alpha \quad \text{in unità } c=1 \text{ significa } v \approx 10^{-2} c \Rightarrow \text{non relativistico}$$

Uno dei limiti che avevamo imposto era:

$$U = \frac{\alpha}{r} \ll \frac{\hbar}{r} \Rightarrow \text{lo } v \text{ della particella entrante deve essere } \gg v \text{ tipico elettroni atomici!}$$

7/10/11

Riprendiamo lo scattering in MQ non relativistico.

$$\psi \sim e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta)$$

Se questo è vero, allora $d\sigma = d\Omega |f(\theta)|^2$

Per ottenere questo abbiamo usato l'approssimazione di Born.

$$\psi \approx \psi^{(0)} + \psi^{(1)} \Leftrightarrow \begin{cases} U \ll \frac{\hbar^2}{ma^2} \\ U \ll \frac{\hbar^2}{m\lambda^2} \text{ (ka) se } \vec{p} \text{ entrante è grande} \end{cases}$$

$$d\sigma \propto |\tilde{U}(q)|^2 d\Omega \quad k \text{ impulso entrante, } q \text{ impulso uscente}$$

Stiamo considerando il potenziale come una perturbazione.

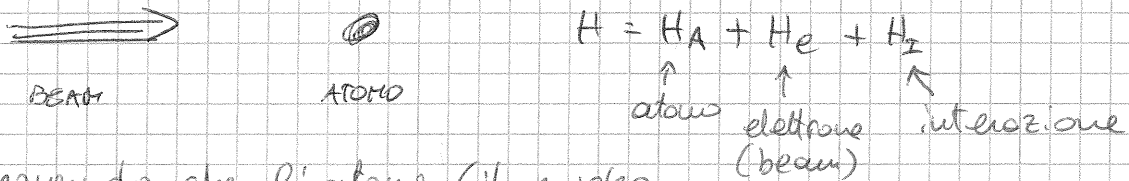
$$dW_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | U | i \rangle|^2 \delta(E_i - E_f) dN_f$$

In MQ relativistico potremmo usare SOLO questo ultimo approccio: considerare stato iniziale e stato finale, non l'interazione che sta nel mezzo.

Possiamo usare l'approssimazione di Born in diversi casi:

- buca di potenziale
- $e^{-r/a} / r^x$

Quello che discuteremo l'altro volta era uno scattering non da potenziale, ma tra due sistemi quantistici.



Supponendo che l'atomo (il nucleo

di H) sia nell'origine: $H_I = \frac{ze^2}{r_e} - \sum \left(\frac{e^2}{|r_e - r_a|} \right)$

$$H_A + H_e \equiv H_0$$

La scala caratteristica dell'interazione sarà dell'ordine del raggio di Bohr.

$$v = \frac{k}{m} \gg v_a \approx \alpha \Rightarrow \text{possiamo usare Born}$$

Devo calcolare l'elemento di matrice tra $|i\rangle$ ed $|f\rangle$.

$\langle f | H_I | i \rangle$ Devo normalizzare lo stato iniziale ad un flusso unitario di elettroni $\rightarrow \sqrt{\frac{m}{k}} e^{ikz}$

$$|i\rangle = \sqrt{\frac{m}{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}_{\text{entr.}}} \psi_0(\vec{x}_a), \quad \vec{x}_{\text{entr.}} = \vec{z}$$

Considero il nucleo come un oggetto classico fermo

$$|f\rangle = \psi_0(\vec{x}_a) e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}_e}$$

Assumiamo che l'atomo non cambi stato - la normalizzazione è giusta a patto che $d^3f = d^3r' / (2\pi\hbar)^3$

$$\begin{aligned} \langle f | H_I | i \rangle &= \int d^3x_e d^3x_a \sqrt{\frac{m}{k}} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}_e} \psi_0^*(\vec{x}_a) H_I(r, r_a) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}_e} \psi_0(\vec{x}_a) = \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \int d^3x_e d^3x_a |\psi_0(\vec{x}_a)|^2 e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}_e} \left(\frac{e^2}{|x_e|} - \frac{e^2}{|x_e - x_a|} \right) \quad (z = z) \end{aligned}$$

$$\text{Per l'idrogeno: } \psi_0 \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-r/r_0}$$

Possiamo vedere l'integrando come una specie di potenziale mediato dalle funzioni d'onda.

⇒ ci siamo riportati al caso dell'interazione con un potenziale, dovuto alla distribuzione di carica atomica -

Ricordiamoci che $d\sigma \propto |U|^2$, proviamo a calcolare la trasformata di questo potenziale.

$\nabla^2 V(x) = -4\pi \rho(x)$ per un potenziale deve valere questa equazione

$q^2 \tilde{V}(q) = -4\pi \tilde{\rho}(q)$

$\tilde{\rho}(q) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} (\delta(r) - |\psi_0(x)|^2)$
carica dell'elettro
 $\equiv e(1 - z(q))$ carica del nucleo

$z(q) = \text{trasf. della densità di carica} = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} |\psi_0(x)|^2$

La sezione d'urto è:

$d\sigma = \frac{4m^2 e^4}{\hbar^4 q^4} (1 - z(q))^2 d\Omega$
↳ z del bersaglio

$\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$ Più grande è \vec{q} e più l'urto è violento.

Come si comporta $d\sigma$ nei limiti $q \rightarrow 0, q \rightarrow \infty$?

Con cosa ha interagito l'elettro?

Scattering elastico $\Leftrightarrow E$ si conserva

⇒ cambiare q significa cambiare Θ .

$|\vec{q}| = |\vec{k}| \sin \frac{\Theta}{2}$

• q piccolo

$z(q) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} n(r) \approx \int (1 + i\vec{q}\cdot\vec{r} - \frac{q^2 r^2}{2} \dots) n(r)$
sviluppo di multipolo
dispari → momento secondo della distrib. di carica
↳ r annullata dal nucleo

il termine dominante è il terzo: $-\frac{q^2}{2} r^2 n(r)$
(struttura dell'orbitale)

• q grande

⇒ l'integrando oscilla ⇒ $\int \dots \approx 0$

⇒ domina la carica del nucleo!

Esercizio: scrivere $d\sigma$ per un processo anelastico -

RICEVIMENTO

MERCOLEDÌ 16-17

GIOVEDÌ 14-17

AUVERTIRE PRIMA

INTERAZIONI FONDAMENTALI

- **Forza forte**: tiene insieme i nuclei atomici, i quark.
I quark non si osservano mai isolati.
↳ **accoppiamento ~ 1** (ad una scala di energia minore del GeV)

- **Elettromagnetica**
↳ **accoppiamento $\sim \alpha = \frac{1}{137}$**

- **Forza debole**: descrive i decadimenti β , ad esempio, e i processi che contengono neutrini.
Il modello standard unifica queste tre forze.
COSTANTE DI FERMI $\rightarrow G_F [E^{-2}] = 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$
Per avere una "costante" di accoppiamento dobbiamo renderlo adimensionale. Metto dentro la massa del protone:

↳ **accoppiamento $\sim G_F m_p^2 = 10^{-5}$**

- **Forza gravitazionale**
COSTANTE DI NEWTON $\rightarrow G_N [E^{-2}]$
moltiplico ancora per m_p^2 :
↳ **accoppiamento $\sim G_N m_p^2 = 10^{-38}$**

A $\sim 10^{19}$ GeV la forza gravitazionale diventa confrontabile con le altre. Non è nel programma del corso.

Per quanto forti, le prime tre forze vengono schermate. Due per motivi di raggio d'azione, la e.m. perché esistono due poli. La forza gravitazionale non viene schermata.

in nessun modo \Rightarrow a grande massa diventa dominante -

$$m_e \approx 0.5 \text{ MeV}$$

$$m_p \approx 1 \text{ GeV}$$

$$m_{\pi} \approx 150 \text{ MeV} = \frac{1}{7} m_p$$

↓
spin 0


m_{π} fornisce la scala tipica delle interazioni forti.

Dimensioni nuclei $\rightarrow 1 \text{ fm} \approx 10^{-15} \text{ m}$

$$1 \text{ fm} = \frac{1}{m_{\pi}}$$

π è la particella più leggera osservabile che interagisce forte - È ragionevole supporre che i nucleoni interagiscano scambiandosi mesoni π -

Qual è la scala tipica di velocità dei protoni all'interno del nucleo? È ragionevole una teoria non relativistica?

nucleone 

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} = \frac{1}{m_{\pi}} = \frac{1}{150 \text{ MeV}} \\ m_p \approx 1 \text{ GeV} \end{array} \right.$$

P, N

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar \Rightarrow p \sim m_{\pi} \quad (\hbar = 1)$$

Il sistema è non relativistico? $E = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$

$$= \frac{m_{\pi}^2}{2m_p} = \frac{1}{2} m_p v^2$$

$v \sim 0,2$ e velocità tipica nucleone

\rightarrow importanti fenomeni relativistici!

10/10/11

Forza	Accoppiamento
forte	1
elettromagnetica	$\alpha = 1/137$
debole	$G_F m_p^2 = 10^{-5}$
gravitazionale	$G_N m_p^2 = 10^{-38}$

Abbiamo derivato la velocità tipica dei nucleoni nel nucleo:

$$\beta \approx 0.2$$

⇒ la trattazione non relativistica è una approssimazione.

ADRONI	LEPTONI
$p, n, \pi \dots$	$e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$
interagiscono forte	NON interagiscono forte
non sono fondamentali	sono fondamentali.

I neutrini interagiscono solo debde.

Gli adroni sono costituiti da 6 tipi di quark.

Poi ci sono i mediatori delle varie forze.

Già questa breve panoramica ci porterà a fare delle previsioni.

$$p \longrightarrow \longleftarrow p \quad \sim 1 \text{ GeV nel c.m.}$$

$$\sigma_{pp} = ?$$

In un modello estremamente semplice, l'interazione avviene se i protoni si toccano (come se fossero biglie).

$$\Rightarrow \sigma_{pp} \approx \pi r_p^2$$

(Già moltiplicato per l'accoppiamento, ≈ 1)

$$\sigma_{pp} \approx \pi r_p^2 \approx 3 \cdot 10^{-30} \text{ m}^2$$

Consideriamo invece uno scontro tra p e π :



⇒ stimo che la superficie del π sia circa $2/3$ di quella del protone ⇒

$$\frac{\sigma_{p\pi}}{\sigma_{pp}} \approx \frac{2}{3}$$

Se invece:



$$\sigma_{pp}/\sigma_{pn} = 1$$

Gli esperimenti danno $\sigma_{pp} \approx \sigma_{pn} \approx 4.5 \cdot 10^{-30} \text{ m}^2$

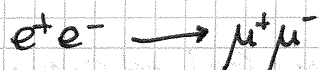
Con la nostra approssimazione avevamo sbagliato del 50%.

Sempre sperimentalmente, $\sigma_{p\pi} \approx 2.5 \cdot 10^{-30} \text{ m}^2$

($\sigma_{p\pi}/\sigma_{pp} > 1/2$).

Non faremo il calcolo di queste sezioni d'urto di interazione forte, perché il metodo perturbativo non funziona.

Consideriamo ora un processo e.m. ⇒ Ci aspettiamo σ più piccole.



(L'esistenza delle antiparticelle è predetta dalle teorie di campo quantistiche).

$$m_e \approx 0.5 \text{ MeV}$$

$$m_\mu \approx 105 \text{ MeV}$$

$$\hbar = c = 1 \Rightarrow \sigma = \left[\frac{1}{E^2} \right]$$

Il processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ è dominato dall'interazione e.m., ed è a soglia (energia nel c.m. $\geq 2m_\mu$).

Supponiamo di avere energia a sufficienza, e di voler calcolare la sezione d'urto.

$$\sigma = \alpha^x f(m_e, m_\mu, s)$$

$$S \equiv (P_+ + P_-)^2 \quad (\text{impulsi di } e^- \text{ ed } e^+)$$

Studiamo questo processo in due casi limite.

$$\textcircled{1} \quad S \ll m_\mu^2 + E$$

$$\textcircled{2} \quad S \gg m_\mu^2$$

Prendiamo il caso $\textcircled{2}$:

$$\sigma = \left[\frac{1}{E^2} \right] \Rightarrow \sigma \equiv \frac{\alpha^x}{S} \cdot [\text{roba adimensionale}]$$

$$\Rightarrow \sigma \equiv \frac{\alpha^x}{S} \cdot g\left(\frac{m_e^2}{S}, \frac{m_\mu^2}{S}\right)$$

$$S \gg m_\mu^2 \Rightarrow \frac{m_\mu^2}{S} \rightarrow 0, \frac{m_e^2}{S} \rightarrow 0 \quad (S \rightarrow \infty) \Rightarrow \sigma \equiv \frac{\alpha^x}{S} g(0,0)$$

$g(0,0)$ è un numero, ragionevolmente $\sim O(1)$

Ci aspettiamo $\alpha^x \rightarrow \alpha^2$, purché l'elemento di matrice che dona contributo sia \propto all' H di interazione al quadrato ($|\langle \dots \rangle|^2 \propto e^4$).

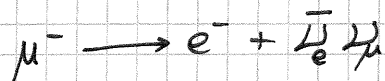
Il calcolo porterà a: $\sigma = \frac{4}{3} \pi \frac{\alpha^2}{S}$

Vediamo il caso $\textcircled{1}$.

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{m_\mu^2} g\left(\frac{m_e}{m_\mu}, \frac{m_\mu^2}{S}\right) \sim \frac{\alpha^2}{m_\mu^2} g\left(0, \frac{1}{4}\right)$$

Non dipenderà dall'energia...

Vediamo un esempio di processo debole.



Il neutrino non interagisce e.m. \Rightarrow questo è un processo debole. Vogliamo calcolare la Lunghezza di decadimento Γ : $\tau \sim \frac{1}{\Gamma}$.

Il tipico elemento di matrice di una teoria debole è $\propto G_F \Rightarrow \Gamma \propto |G_F|^2$

$$\Gamma = G_F^2 f(m_e, m_\mu) \equiv G_F^2 m_\mu^x g\left(\frac{m_e}{m_\mu}, 1\right)$$

28 Per ragioni dimensionali:

$$\Gamma = G_F^2 m_\mu^5 g\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right) \rightarrow \Gamma = G_F^2 m_\mu^5 g(0)$$

Consideriamo invece il processo:

$$\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

in realtà c'è un fattore $\frac{1}{192\pi^3}$ davanti -

Qual è il rapporto tra l'incidenza di questi due decadimenti?

$$\frac{\Gamma_{\mu \rightarrow e \nu \nu}}{\Gamma_{\tau \rightarrow e \mu \nu}} \approx \frac{m_\mu^5}{m_\tau^5}$$

11/10/11

l'elettrodinamica è una teoria di campo classica.
Vogliamo riderlo in un modo diverso -

Il campo e.m. è descritto da: \vec{E}, \vec{B} (6 oggetti).

Sappiamo che è utile introdurre dei potenziali: φ, \vec{A} (4 oggetti)

$$\Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

Vogliamo studiare i comportamenti dei campi in presenza di cariche \rightarrow introduciamo ρ, \vec{J} (densità di carica e corrente) -

Troveremo:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho$$

Usiamo un formalismo covariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz per derivare queste equazioni - Useremo un approccio variazionale.

S chi è la variabile dinamica? $\rightarrow \varphi, \vec{A}$

funzionale delle variabili dinamiche

ρ, \vec{J} non sono variabili dinamiche, ma "termini noti" -

$$\delta S \equiv 0$$

In ogni teoria di campo la variabile dinamica è una funzione dello spazio -

φ, \vec{A} sono 4 oggetti \Rightarrow definiamo un vettore A^μ
 ρ, \vec{J} " " " " " " " " J^μ

Le componenti 0 di un vettore, risp. a rotazioni, si comportano come scalari \Rightarrow usiamo φ e ρ

$$A^\mu = (\varphi, \vec{A})$$

$$J^\mu = (\rho, \vec{J})$$

Sappiamo che (equazione di continuita = le cariche non si creano):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

↓

$\partial_\mu J^\mu = 0$

} Sono la stessa equazione.

$\Rightarrow J^\mu$ è una corrente a quadridivergenza nulla.

Dobbiamo definire il funzionale - azione S . Sono un integrale definito sullo spaziotempo. $S \equiv \int L(A) d\Omega$

Condizioni: conosco il campo a due "ipersuperfici"
 V_1, t_1 e V_2, t_2 dello spaziotempo.

Devo imporre nulla la variazione δS rispetto alla variazione δA .

(Integro su uno spaziotempo racchiuso da una ipersuperficie dentro la quale la variazione è nulla \Leftarrow ~~è~~ campi all'infinito ne cose strane simili).

Una funzione scalare di un quadrivettore, variata rispetto ad un quadrivettore, produce un'equazione covariante.

\int = termine che descrive il campo + termine che descrive le interazioni del campo con l'esterno.

Dobbiamo sfruttare le invarianze di gauge. $J^\mu A_\mu$
ci aspettiamo una dipendenza lineare.

$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \varphi$ $\varphi \rightarrow \varphi + \partial_t \varphi$
deve essere uno scalare perché S sia scalare
 $A^\mu \rightarrow \partial^\mu \varphi$ ← ma non è ancora un invariante.

Possiamo ammettere che S vari per trasformazioni di gauge, purché sia una variazione di superficie: $\int S^\mu n_\mu d\Omega + \int S^\mu \partial_\mu \varphi d\Omega$

$$\int J^\mu \partial_\mu f = \int \partial_\mu (f J^\mu) - \int \partial_\mu J^\mu f \quad (\text{per parti})$$

quadrivergenza di
un oggetto $B^\mu \equiv f J^\mu$

Usa il teorema di Gauss quadrimensionale:

$$\int \partial_\mu B^\mu dS = \int B_\mu dS^\mu \Rightarrow \text{è un integrale di superficie}$$

Ma noi non abbiamo variazione sulla superficie, possiamo aggiungere tanti termini di superficie quanti ne vogliamo.

$$\boxed{F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu} \quad (\text{tensore antisimmetrico})$$

- Se A^μ è un vettore, $F_{\mu\nu}$ è un tensore
- $F_{\mu\nu}$ è invariante di gauge
- antisimmetrico \Rightarrow la diagonale è 0 \Rightarrow 16-4 oggetti
ma a 2 a 2 sono opposti \Rightarrow 6 oggetti

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_y & E_z \\ 0 & -B_z & B_y \\ (-) & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Se cambiamo sistema di riferimento: $F'_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu F_{\alpha\beta}$

Quindi, ci serve un oggetto che sia uno scalare e che sia un invariante di gauge. Deve valere il principio di sovrapposizione \Rightarrow ci serve una equazione lineare nei campi. A noi serve $\frac{d}{dx} f(x)$ lineare $\Rightarrow f \propto x^2$

Possibili invarianti quadratici costruiti con $F_{\mu\nu}$:

$$c \cdot F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + b \cdot \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$$

Dimostriamo che questo termine è un divergenza totale, che ha solo effetti di superficie.

13/10/11

In trattazione covariante l'elettrodinamica ha una trattazione molto piú semplice e compatta \Rightarrow è una teoria dello spazio-tempo.

Ipotesi:

$$\rightarrow A^\mu = (\varphi, \vec{A})$$

$$\rightarrow J^\mu = (\rho, \vec{J}) \Rightarrow \partial_\mu J^\mu = 0 \quad \text{Eq. di continuità}$$

Invarianza di gauge $\Rightarrow A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ è sovrobbonante ($A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi$ non cambia la fisica).

Abbiamo introdotto un principio variazionale (di minima azione).

Scriviamo un'azione S che vogliamo poi minimizzare rispetto alle variazioni

$$S = \int_{\Omega} d\Omega \mathcal{L}(A^\mu, \partial_\mu A^\mu)$$

$\xrightarrow{\text{volume spaziotempo}}$
 $\xrightarrow{\text{ipersuperficie}}$
 \nwarrow dipendente anche dalle prime derivate.

Per \mathcal{L} ci aspettiamo che il termine che descrive le interazioni sia lineare: $\frac{1}{c} J^\mu A_\mu$

(le costanti le misureremo/ricoveremo in seguito)

\mathcal{L} non è una osservabile, non lo misuriamo \Rightarrow possiamo aggiungere termini, a patto che producano variazioni solo sulla superficie dell'iper-volume di integrazione.

F una quantità $F_{\mu\nu}$ a struttura tensoriale antisimmetrica che è formata dalle componenti dei campi E e B .

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Dato che si può scrivere in termini di E e B , quest'oggetto è invariante di gauge.

Dobbiamo scrivere una trasformazione covariante \Rightarrow ci serve uno scalare (la lagrangiana deve

essere un invariante di Lorentz) -

A partire da $F_{\mu\nu}$ possiamo definire 2 invarianti,
ci serve un'ipotesi in più...

⇒ principio di sovrapposizione

che è una proprietà di equazioni differenziali LINEARI -

La variazione tutto gli in ordine di potenza ⇒
L può essere al più quadratica in $F_{\mu\nu}$.

Rimangono poche possibilità:

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{c} J^\mu A_\mu + a F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + b \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$$

Si può dimostrare che:

$$b \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = 4b \partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma)$$

Questa è una 4-divergenza ⇒ agisce solo sull'ipersuperficie
⇒ posso escluderla. (Teorema di Gauss)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{c} J^\mu A_\mu + a F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$S = \int d\Omega (J^\mu A_\mu + a F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}$$

Facciamo la variazione rispetto a δA_μ e cerchiamo $\delta S = 0$.

$$\delta S \equiv 0 = \int d\Omega (J^\mu \delta A_\mu + a 2 \delta F_{\alpha\beta} \delta F_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta})$$

$$\delta F_{\mu\nu} = \delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu$$

$$\delta S = \int d\Omega [J^\mu \delta A_\mu + 2a (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) F^{\mu\nu}]$$

Stiamo saturando due indici antisimmetrici ⇒ $\partial_\mu \delta A_\nu$ e $-\partial_\nu \delta A_\mu$
danno lo stesso contributo:

$$\delta S = \int d\Omega [J^\mu \delta A_\mu - 4a F^{\mu\nu} \partial_\nu A_\mu]$$

$$= \int d\Omega [J^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{4a} \partial_\nu (F^{\mu\nu} \delta A_\mu) + \frac{1}{4a} \partial_\nu (F^{\mu\nu}) \delta A_\mu]$$

$$\delta S = - \frac{1}{4a} \int d\Omega \underbrace{\partial_\nu (F^{\mu\nu} \delta A_\mu)}_{\text{quadriv. divergenza}} + \int d\Omega (J^\mu + \frac{1}{4a} \partial_\nu F^{\mu\nu}) \delta A_\mu$$

$$\delta S = 0 \iff \frac{1}{4a} \partial_\nu F^{\mu\nu} + J^\mu = 0$$

Scambiando indici: (paga un -)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{4a} J^\nu$$

Confrontiamola con le equazioni che conosciamo:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Componente a componente, $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{4a} J^\nu$ corrisponde a queste 4 equazioni (NB: abbiamo 1 scalare e 1 vettore a 3 comp.!).

Le altre 4 equazioni:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

si scrivono in forma compatta come:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$$

Incidentalmente, $a = \frac{1}{4}$.

Questa è tutta l'elettrodinamica.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{c} J^\mu A_\mu + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{Lagrangiana della elettrodinamica classica}$$

Vedremo che l'elettrodinamica quantistica ha la stessa equazione, ma cambiamo le "regole del gioco".

L'approccio variazionale non è fondamentale, ma ci ha permesso di ottenere velocemente un'equazione covariante.

Usiamo le Lagrangiane perché sono scalari.

L'Hamiltoniano è un'energia, che non trasforma come uno scalare sotto trasformazioni di Lorentz.

Teorie di campo classiche
 ↗ elettrodinamica
 ↘ fononi
 ↘

Un campo è una funzione dello spaziotempo e può essere composto da n componenti.

Consideriamo un campo scalare: vediamo che descrive particelle scalari (ad es. π , fononi).

$$\phi(x)$$

La dinamica si dà tramite un principio variazionale:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} d\Omega \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

- Supponiamo quindi che \mathcal{L} non dipenda direttamente dallo spaziotempo, ma solo tramite ϕ .
- Supponiamo $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$ (no derivate oltre il 1° ordine). (= "il sistema è chiuso")

Ad esempio:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (\text{TEORIA SCALARE})$$

Mettendo una derivata seconda in \mathcal{L} , facendo la variazione potrei ottenere equazioni del moto dove compaiono derivate terze, che possono portare a sistemi caotici.

$$\delta S = \int d\Omega \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \partial_\mu \phi \right] =$$

(Le regole per le derivate funzionali sono le stesse delle derivate normali).

$$= \int d\Omega \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta \phi \right] =$$

(tipo integrazione per parti)

$$= \int d\Omega \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi \right) + \int d\Omega \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right] \delta \phi$$

Il primo termine è di superficie, e non va considerato. Le equazioni del moto si ottengono imponendo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Equazioni del moto} \\ \text{(principio variazionale)} \end{array}$$

Ad esempio, con la Lagrangiana di primo:

$$\boxed{m^2 \phi + \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0 \quad \text{eq. di Klein-Gordon}}$$

(NB: $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ sarebbe $g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$)

In trasformata di Fourier questa equazione diventa:

$$(p^2 - m^2) \tilde{\phi} = 0$$

→ legge di dispersione di una particella relativistica: $p^2 = m^2$!

Se abbiamo campi a più componenti, la variazione va fatta componente per componente: avremo tante equazioni del moto quanti campi.

Nel caso del campo elettromagnetico:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 0$$

$$\text{con } \mathcal{L} = J^\mu A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

ESERCIZIO:

dobbiamo ricavare

la stessa equazione di primo.

Definiamo l'impulso coniugato al campo:

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

Questo ci permette di definire un'Hamiltoniana:

$$\boxed{\int d^3x [\pi \dot{\phi} - \mathcal{L}] = H}$$

L'integrando si dice "densità di hamiltoniana".

NB. Stiamo parlando di teorie di campo classiche.

Che conseguenze hanno le simmetrie?

Assumiamo che la nostra teoria obbedisca equazioni del moto invarianti rispetto alla trasformazione infinitesimale

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \varepsilon \delta\phi$$

Esempio: un campo complesso è fatto di due campi reali -
campo reale \rightarrow particella scarica
campo complesso \rightarrow particella carica

$$\varphi \equiv \phi_1 + i\phi_2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - \frac{1}{2} m^2 \phi_1^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_2^2$$

Dimostrare che si può scrivere:

$$\partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi = \mathcal{L} \quad (\text{se } \phi_1 \text{ e } \phi_2 \text{ hanno gli stessi parametri}).$$

Se consideriamo la trasformazione:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = e^{i\theta} \varphi(x)$$

Lo Lagrangiano non cambia \Rightarrow questa è una SIMMETRIA.

Questa teoria descrive una particella carica.

Vedremo che in conseguenza di questa simmetria continua ($\theta \in (0, \pi)$) la carica si conserva.

In forma infinitesimale posso scrivere:

$$\varphi' = (1 + i\theta) \varphi \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi = i\varphi \quad \theta \equiv \varepsilon$$

$$(\varphi'(x) = \varphi(x) + \varepsilon \delta\varphi(x)) \quad \text{chiamiamo } \delta\varphi \rightarrow \Delta\varphi$$

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \partial_\mu \mathcal{J}^\mu \quad (\mathcal{L} \text{ va in se stesso più, al più,}$$

una quadri-divergenza totale).

Trasformiamo formalmente la lagrangiana:

$$\phi \rightarrow \phi'$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \Delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \varepsilon \Delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu (\varepsilon \Delta \phi) = \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \varepsilon \Delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \phi \varepsilon \Delta \phi \right) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \varepsilon \Delta \phi \end{aligned}$$

Il campo ϕ deve soddisfare l'equazione del moto, che è

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = 0$$

Di conseguenza:

$$\varepsilon \partial_\mu J^\mu \equiv \varepsilon \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \Delta \phi \right) \quad (\varepsilon \Delta \mathcal{L} = \varepsilon \partial_\mu J^\mu)$$

definendo: $J^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \Delta \phi - \mathcal{H}^\mu$

l'equazione diventa:

$$\Delta \mathcal{L} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (\text{se c'è una simmetria})$$

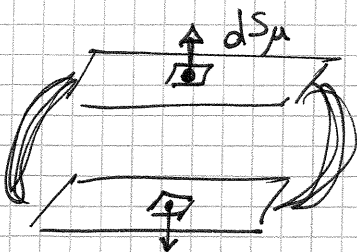
A livello classico, ad una simmetria corrisponde una corrente J^μ ben definita che soddisfa questa equazione di conservazione.

Teorema di Noether

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \Rightarrow Q = \int d^3x J^0 \quad \text{si conserva. Infatti:}$$

$$Q(t_2) - Q(t_1) = \int_{t_2 \square} d^3x J^0 - \int_{t_1 \square} d^3x J^0$$

Ipotezziamo che \mathcal{L} compi di α , e che quindi possiamo considerare di uso lo spaziotempo tra $t_1 \square$ e $t_2 \square$:



$$\Rightarrow Q(t_2) - Q(t_1) = \int_{\square} J^\mu d^3x$$

Teorema di Gauss \Rightarrow

$$= \int d\Omega \partial_\mu J^\mu \quad \text{ma } \partial_\mu J^\mu = 0 \Rightarrow Q(t_2) = Q(t_1)$$

(tutto lo spazio tempo)

14/10/11

Ieri abbiamo considerato una teoria con un solo campo scalare e reale, ϕ , e abbiamo supposto

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

Abbiamo definito il principio variazionale:

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d\Omega$$

e abbiamo fatto la variazione δS risp. a $\delta \phi$ ottenendo l'eq. del moto

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}$$

Se abbiamo i campi, oppure un campo vettoriale, ad es. un quadrivettore, otterremo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu A_\mu} = 0$$

Per il campo e.m. si ottiene $\partial_\mu F^{\nu\mu} \propto J^\mu$ (FARE)

Abbiamo visto l'implicazione di avere una simmetria continua. Per semplicita' operiamo una trasformazione infinitesimale $\phi_i \rightarrow \phi_i + \epsilon \delta \phi_i$

La simmetria implica che \mathcal{L} non cambia o che al piu' cambia di una ϵ -divergenza:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \partial_\mu J^\mu$$

Da questo si ottiene una corrente: $J^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \delta \phi_i - J^\mu$

La simmetria implica la conservazione di J^μ (teorema di Noether): \exists una costante del

modo che e' $Q \equiv \int d^3x J^0$ ($\partial_\mu J^\mu = 0$)

Vediamo alcune applicazioni:

① Abbiamo un campo scalare $\in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2$$

Questa descrive una particella scalare di massa nulla. L'eq. del moto diventa:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0$$

Ci sono simmetrie nel sistema? Quali trasformazioni lasciano invariata \mathcal{L} ? Ad esempio traslazioni del campo: $\phi \rightarrow \phi + a \equiv \phi + \epsilon \Delta\phi$

La corrente corrispondente è $\epsilon = a \Leftrightarrow \Delta\phi = \Delta$

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \Delta\phi - T^\mu = \partial^\mu \phi \cdot 1 - 0 = \partial^\mu \phi$$

② Consideriamo un campo complesso -

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi$$

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2$$

Deriviamo l'equazione del moto - Abbiamo 2

campi \Rightarrow 2 equazioni -

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^*} = 0$$

Possiamo anche usare ϕ e ϕ^* , sono sempre indipendenti -

$$m^2 \phi + \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0$$

In trasf. di Fourier otteniamo la legge di dispersione:

$$(p^2 - m^2) \tilde{\phi} = 0 \quad (\text{particella relativistica})$$

Ci sono simmetrie?

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi \quad \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \quad (\phi^* \rightarrow \phi^* e^{-i\alpha})$$

Questa è una simmetria $U(1)$. Scriviamola in forma infinitesimale per applicare il teorema di Noether.

$$\phi \rightarrow \phi + i\alpha \phi \quad \phi^* \rightarrow \phi^* - i\alpha \phi^*$$

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^*} \Delta\phi^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \Delta\phi = \partial_\mu \phi (-i) \phi^* + \partial_\mu \phi^* i \phi =$$

$$= i(\partial_\mu \phi^* \phi - \phi^* \partial_\mu \phi)$$

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \Rightarrow Q = \int d^3x [i(\partial_\mu \phi^* \phi - \phi^* \partial_\mu \phi)] \text{ si conserva -}$$

J^μ ricorda molto la corrente di probabilità per una funzione d'onda -

Questa \mathcal{L} descrive una particella carica libera, e anche la propagazione del suono tramite fononi - (in 3D+1 anziché 4)

Sul teorema di Noether finiamo qui - Riusciamo a costruire una teoria quantistica a partire da una classica?

Dovremo scrivere una eq. di Schrödinger che sia invariante di Lorentz. Oppure, partiamo da una teoria invariante di Lorentz e cerchiamo di quantizzarla. Questo metodo è migliore, perché ci consente di ottenere teorie non di singola particella.

In relatività spesso si hanno processi per i quali il numero di particelle cambia \Rightarrow ci serve una teoria che sia elastica da questo punto di vista.

Come ultima "applicazione" del t. di Noether vediamo \rightarrow Derivazione tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$. È una quadricorrente, ogni componente è associata ad una invariante.

Invece che una variazione dei campi, consideriamo una traslazione dello spazio.

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - a^\mu \quad (a \text{ piccolo})$$

$$\begin{cases} \phi(x) \rightarrow \phi(x) - a^\mu \partial_\mu \phi \\ \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - a^\alpha \partial_\alpha \mathcal{L} \end{cases}$$

Applichiamo il teorema di Noether a questo set di trasformazioni.

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - a^\alpha \partial_\alpha \mathcal{L} \equiv \mathcal{L} - \underbrace{\partial_\alpha a^\alpha \mathcal{L}}_{\leftarrow \text{divergenza totale}}$$

(a^μ è una costante)

Possiamo vedere 4 simmetrie continue, una \forall indice \Rightarrow 4 correnti associate

$$J_\mu^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi} \partial_\mu \phi - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} \equiv T_\mu^\nu$$

\Rightarrow Ci sono 4 μ -correnti cons. $\forall \mu$ ho 4 correnti conservate (1 4-vettore! $\forall \mu=0 \dots 3$)

Si dimostra quindi che $\boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0}$.

Provare ad utilizzare le eq. del moto per dimostrarlo.

$$\Rightarrow \int d^3x T^{0\nu} \quad \text{è conservato}$$

|||
p^ν

La componente 0 di P^ν è l'energia totale \Rightarrow avrà il ruolo dell'hamiltoniana.

Abbiamo una teoria classica \rightarrow vogliamo renderla quantistica. Non abbiamo più un numero discreto di gradi di libertà come abbiamo visto nelle eq. di Schrödinger del 3° anno, bensì un numero ∞ , oggetti che si estendono su tutto lo spazio \rightarrow teorie "many body".

Prendiamo un campo scalare reale \equiv 1 particella.

part. cella $\rightarrow \phi(x)$ $\begin{matrix} x \\ p \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \text{gradi di libertà} \\ p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \end{matrix} \right.$

Sappiamo che le osservabili sono esprimibili in termini di commutatori - x e p non sono più variabili ma operatori.

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

Al nostro ϕ possiamo definire un impulso coniugato:

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad \left(\sim \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right)$$

Vorremmo definire delle "regole" per "promuovere" queste variabili ad operatori.

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \hat{\phi}(x) \\ \pi &\rightarrow \hat{\pi}(x) \end{aligned} \quad \leftarrow \text{questi sono } \infty \text{ operatori!}$$

Supponiamo $\hat{\phi}, \hat{\pi}$ operatori di Schrödinger (indip. dal tempo)

$$[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] = i\hbar \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

$$H = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \rightarrow \hat{H}$$

Vogliamo ottenere equazioni di questo tipo:

$$i\frac{\partial}{\partial t} \hat{O} = [\hat{O}, \hat{H}]$$

$$\hat{H} \equiv \hat{\pi} \hat{\phi} - \mathcal{L}$$

Possiamo anche definire operatori alla Heisenberg:

$$\phi(x, t) = e^{iHt} \phi(x) e^{-iHt}$$

per recuperare la dipendenza dal tempo.

Avremo, a tempi uguali,

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = i\hbar \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

- Qual è lo spazio di Hilbert dove sono definiti gli stati?
- Il prodotto di due operatori è definito univocamente?

Tutto questo non si sa fare per qualsiasi teoria - faremo alcuni esempi, tutti a livello perturbativo -

Le interazioni saranno descritte perturbativamente -

Riusciremo a quantizzare "esattamente" la teoria di particella libera - Ci sono una teoria \neq tipo di particella libera.

Partiamo dalla particella scalare -

Otterremo la teoria quantistica come limite di una teoria discretizzata - Renderemo discreti i gradi di libertà -

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

Equazione del moto: $(\square + m^2)\phi = 0$

$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ Eq. di Klein-Gordon

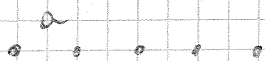
L'impulso coniugato: $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi} = \partial^0 \phi$

\Rightarrow possiamo definire H : $H = \int d^3x (\pi \partial_0 \phi - \mathcal{L}) =$

$$= \int d^3x \frac{1}{2} (\pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2)$$

Discretizzo e poi faccio il limite per il passo che tende a 0 -

Prendiamo un reticolo unidimensionale infinito di passo a .



$$\partial \phi \equiv \frac{\phi(x+a) - \phi(x)}{a}$$

$$H = \frac{1}{2} a \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\pi_n^2 + m^2 \phi_n^2 + \frac{(\phi_n - \phi_{n-1})^2}{a^2} \right]$$

Nel limite per $a \rightarrow 0$ ritroviamo l'integrale di primo.

Quantizziamo questa teoria, che è ancora classica. Siamo in una dimensione, ma la teoria libera è risolvibile in n dimensioni.

Questa teoria rappresenta un set infinito di oscillatori armonici accoppiati - (vediamo ϕ_n come distanza dell'oscillatore n) -

Per risolvere oscillatori accoppiati si cercano i modi propri.

Per quantizzare la teoria promuoviamo ϕ_n e π_n ad operatori.

$$[\phi_n, \pi_m] = i \hbar \delta_{nm} \cdot \frac{1}{a}$$

$$[\phi_n, \phi_m] = 0$$

PRIMA

QUANTIZZAZIONE

\Rightarrow abbiamo l'hamiltoniana. Bisogna risolverla (\equiv trovare lo spettro).

Lo spazio di Hilbert è il prodotto degli spazi di ciascun punto.

17/10/11

Partiamo da una teoria di campo classico:

$$\phi(x) \rightarrow \mathcal{L}(\phi), \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \quad H = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}$$

sapendo che il mondo microscopico segue altre leggi, vogliamo quantizzare questa teoria.

\equiv vogliamo promuovere ad operatori gli oggetti:

$$\phi, \pi \rightarrow \hat{\phi}, \hat{\pi}$$

$$\text{tali che } [\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)] = i \hbar \delta(x-y)$$

e risolvere l'hamiltoniana corrispondente.

Questo non è possibile \forall campo.

Per ora vedremo la Teoria di particella libera.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (\text{campo scalare})$$

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \partial^0 \phi$$

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

Questa è la teoria classica.

$$H = \int d^4x \mathcal{H}$$

Discretizziamo questa hamiltoniana: è l'operazione inversa del limite al continuo con la quale si ottiene l'integrale



$$H = \left[\sum_i \frac{1}{2} \pi_i^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi_i^2 + \frac{1}{2} \frac{(\phi_{i+1} - \phi_i)^2}{a^2} \right] \cdot a$$

Questa è sempre una teoria classica. \forall punto del reticolo abbiamo π_i e ϕ_i . Se interpretiamo ϕ_i come distanza dal punto i -esimo, questa è una H di oscillatori armonici accoppiati ai primi vicini.

Queste sono un numero ∞ ma discreto di variabili, ora vanno tutte promosse ad operatori:-

$$[\phi_i, \pi_j] = i \hbar \delta_{ij}$$

Per risolvere un sistema di osc. accoppiati si cercano i modi propri.

Facciamo un cambiamento di variabile.

$$\phi_n = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dk}{2\pi} e^{ikn} \tilde{\phi}(k) \quad (\text{trasformata di Fourier})$$

↳ questi operatori sono un set continuo
 ↳ questi sono un set discreto.

$$\pi_n = \int \dots \tilde{\pi}(k)$$

Trovo che le nuove regole di commutazione sono:

$$[\tilde{\phi}(k), \tilde{\pi}^+(k')] = \delta(k-k') \quad , \quad \tilde{\pi}^+(k) = \tilde{\pi}(-k)$$

↳ operatore hermitiano

Posso riscrivere l' H iniziale con questi nuovi operatori:

$$H = a \frac{1}{2} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \left[\tilde{\pi}^+(k) \tilde{\pi}(k) + \tilde{\phi}^+(k) \tilde{\phi}(k) (m^2 + 2(1 - \cos ka)) \right] \frac{dk}{2\pi}$$

Siamo passati da una somma su i ad un integrale su k .

Vedi documenti vecchio sito corso: quantizzazione campo scalare.

Qui abbiamo oscillatori a ma disaccoppiati!

$$\omega_k^2 \equiv m^2 + 2(1 - \cos ka)$$

Definiamo:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} (\omega_k \tilde{\phi}(k) + i\tilde{\pi}(k)) \quad (a(k) \rightarrow \text{sono } a \text{ operatori})$$

$$a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} (\omega_k \tilde{\phi}(k) - i\tilde{\pi}(k))$$

Come commutano? Sostituendo:

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta(k - k') \leftarrow \text{vedi singolo oscillatore}$$

Riscriviamo H in funzione di a, a^\dagger :

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{dk}{2\pi} \omega_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger)$$

(calcolo fatto imponendo il passo reticolare $a \equiv 1$).

Possiamo riscrivere anche:

$$\phi_{in} = \int \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega_k}} (a_k e^{ikn} + a_k^\dagger e^{-ikn})$$

Gli operatori a_k e a_k^\dagger si chiamano operatori di costruzione e di distruzione.

Prendiamo un autostato $|E\rangle$ t.c. $H|E\rangle = E|E\rangle$.

Quanto fa $H a_k |E\rangle$? Facendo il calcolo:

$$\begin{aligned} H a_k |E\rangle &= (E - \omega_k) a_k |E\rangle \\ H a_k^\dagger |E\rangle &= (E + \omega_k) a_k^\dagger |E\rangle \end{aligned}$$

L'applicazione di a_k^\dagger corrisponde ad aggiungere al nostro stato una eccitazione, o una particella di energia pari ad ω_k .

Questo ci dice anche come costruire lo spazio di Hilbert.

Definizione di "stato fondamentale":

$$|0\rangle : \forall k \quad a_k |0\rangle = |0\rangle$$

$$\text{Inoltre: } a_k^\dagger |0\rangle \equiv |1\rangle, \dots$$

Così possiamo costruire n stati, ben ordinati.

$$\text{Ad es.: } H a_q^\dagger a_k |0\rangle = (\omega_k + \omega_q) a_q^\dagger a_k |0\rangle$$

Proviamo a fare il limite al continuo degli ω_k .

$$\omega_k = \left(m^2 + \frac{2}{a^2} (1 - \cos ak) \right)^{1/2}$$

$$a \rightarrow 0 \quad (\text{mondo a } 0 \text{ il passo reticolare})$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x \rightarrow 1 - \frac{x^2}{2} \dots$$

$$\omega_k \xrightarrow{a \rightarrow 0} \sqrt{m^2 + k^2} \rightarrow \text{interpreto } k \text{ come un impulso}$$

\Rightarrow questi stati rappresentano particelle relativistiche di massa m e impulso k .

È una descrizione duale: da una parte i campi $\phi_m(x)$:

$$\hat{\phi}_i |i\rangle = \phi_i |i\rangle$$

la cui interpretazione è lo stato di spostamento dall'equilibrio di un oscillatore armonico - (Teorie di campo) -

Dall'altra parte può essere vista come delle eccitazioni, prodotte da a_k e a_k^\dagger : queste sono i fotoni.

\Rightarrow duoismo campo-particella.

Lo spazio di Hilbert è definibile come:

$$\Pi_i a_i a_i^\dagger \dots |0\rangle$$

$|0\rangle$ prende anche il nome di vuoto.

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \langle 0 | \int_{-\pi/0}^{\pi/0} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{2} \omega_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) | 0 \rangle$$

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta(k - k') \Rightarrow (\dots) = a^\dagger a + [a, a^\dagger]$$

$$a^\dagger a |0\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle 0 | H | 0 \rangle = \langle 0 | \int_{-\pi/0}^{\pi/0} \frac{1}{2} \omega_k \delta(0) | 0 \rangle \quad \text{Questo diverge.}$$

\Rightarrow qualcosa non va bene.

\Rightarrow un numero ∞ di oscillatori ad energia $\frac{\omega}{2}$ ($|0\rangle$) hanno ovviamente energia ∞ .

18/10/11

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad \text{teoria classica}$$

ϕ reale, scalare.

Quantizzazione: discretizzazione, soluzione, limite al continuo -

$$H = \int d^d x [\pi \dot{\phi} - \mathcal{L}] \quad (d \text{ dimensioni})$$

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\pi_i^2 + m^2 \phi_i^2 + (\phi_{i+1} - \phi_i)^2 \right] \quad \infty \text{ oscillatori con frequenza propria } m^2, \text{ accoppiati}$$

Posso quantizzare: $[\phi_i, \pi_j] = i\hbar \delta_{ij}$

Introducendo gli operatori di creazione e distruzione possiamo scrivere:

$$\phi_m = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left[a(k) e^{ikm} + a^\dagger(k) e^{-ikm} \right]$$

L'hamiltoniano si scrive poi in questa forma:

$$H = \int \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{2} \omega(k) \left[a(k) a(k) + a(k) a^\dagger(k) \right]$$

(Avevo usato: $[a(k), a^\dagger(k')] = \delta(k-k')$)

Gli $\omega(k)$ sono gli autovalori del sistema:

$$\omega(k) = \sqrt{m^2 + 2(1 - \cos k)}$$

Reinserendo a ($\neq 1$) e facendo il limite al continuo si ottiene la relazione di Einstein: $\omega \equiv E = \sqrt{m^2 + k^2}$, $k \in \mathbb{R}$

Il numero ∞ di oscillatori completa la definizione dello spazio di Hilbert.

$|0\rangle$

$a^\dagger(k)|0\rangle \rightarrow$ autovalore $\omega(k)$

Applicando un numero qualunque di oscillazioni si ottengono tutti i possibili stati di questo spazio - lo stato fondamentale è definito da:

$$a(k)|0\rangle = 0 \quad \forall k$$

Questa teoria può contenere un numero ∞ di stati (\equiv particelle) -

Se tutto ha senso, lo spettro deve essere finito. Ma dobbiamo visto che:

$$\rightarrow = a^\dagger a + [a, a^\dagger]$$

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \langle 0 | \int \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{2} \omega_k [a^\dagger(k) a(k) + a(k) a^\dagger(k)] | 0 \rangle \delta(0) \text{ (non ben definita)}$$

Una $\delta(0)$ non è un oggetto ben definito, immerso in un integrale può divergere. Ma sappiamo che $E_n = (n + 1/2) \hbar \omega$.

L'energia dello stato fondamentale è l'energia che è stata impiegata per portare tutte le particelle al loro posto.

Ma a noi interessa il comportamento dinamico del sistema, non quello statico. \Rightarrow Ci servono solo i δE tra gli stati.

Definisco: $\bar{H} \equiv H - \langle 0 | H | 0 \rangle$ (Ordinamento alla Wick)
(Butto via il termine $[a, a^\dagger]$)

$$\bar{H} \equiv H = \int \frac{dk}{2\pi} \omega_k a^\dagger(k) a(k)$$

Se non ci chiediamo quant'è l'energia dello stato fondamentale (= energia del vuoto), tutto funziona.

\Rightarrow NON funziona con la gravità, che accoppia le energie, e ha bisogno di misurare anche l'energia del vuoto.

Risolto il sistema, torniamo al continuo ($a \rightarrow 0$).

$$\phi(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [a(k) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a^\dagger(k) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}]$$

Questo è un campo (operatore) di Schrödinger.

$$\omega(k) = \sqrt{m^2 + 2a^2(1 - \cos ak)} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \sqrt{m^2 + k^2}$$

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \omega(k) a^\dagger(k) a(k)$$

In un approccio alla Heisenberg (con una dipendenza esplicita dal tempo):

$$\phi \rightarrow e^{-iHt} \phi e^{iHt}$$

$$H = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [a(k) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega(k)t} + a^\dagger(k) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega(k)t}]$$

$$k^\mu \equiv (\omega_k, \vec{k})$$

Cosa descrivono questi stati?

Oltre alle particelle classiche, \exists bosoni (statistica simmetrica) e fermioni (statistica antisimmetrica).
Che statistiche soddisfano questi stati?

$a^\dagger(k_1)|0\rangle$ stato a 1 particella

$a^\dagger(k_2)a^\dagger(k_1)|0\rangle$ stato a 2 particelle

Se fossero 2 particelle classiche, non ci sarebbe alcuna simmetria: è l'indistinguibilità che introduce la simmetria.

Dalle regole di commutazione, per $k_1 = k_2$, sappiamo che

$$a^\dagger(k_2)a^\dagger(k_1)|0\rangle = a^\dagger(k_1)a^\dagger(k_2)|0\rangle$$

\Rightarrow Sono bosoni.

$a^\dagger(k)|0\rangle$ non è uno stato normalizzato: è un'onda piana ad impulso fisso.

Per costruire uno stato normalizzato (pacchetto d'onda) si fa: $\int dk f(k) a^\dagger(k)|0\rangle$, $f(k)$ appropriato.

CAUSALITÀ Se due osservabili (misure) hanno una distanza di tipo spazio, \nexists causalità tra di esse. \Rightarrow commutano.

$$[\phi(x, t), \pi(y, t)] = i\hbar \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{a tempi uguali})$$

(verificare \nexists usando a^\dagger ed a)

$$[\phi(x, t), \phi(x', t')] = [\phi(x^\mu), \phi(x'^\mu)] = \begin{cases} \text{se } (x^\mu - x'^\mu)^2 < 0, & = 0 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Questo è un sistema che descrive un numero qualunque di bosoni \rightarrow possiamo fare la termodinamica.

Occorre introdurre l'operatore "numero di particelle":

$$\hat{N} = \int \frac{dk}{(2\pi)} a^\dagger(k) a(k)$$

Infatti: $N a^\dagger(k)|0\rangle = a^\dagger(k)|0\rangle$

$$N a^\dagger(k_1) a^\dagger(k_2)|0\rangle = 2 a^\dagger(k_1) a^\dagger(k_2)|0\rangle$$

$$[N, H] = 0$$

Come si costruisce la termodinamica? Introduciamo un potenziale chimico e una funzione di partizione del grand canonico.

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H + \beta \mu N}$$

↑
potenziale chimico

$$\Omega = pV = \ln Z$$

21/10/11

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \Rightarrow \text{discretizzazione del sistema} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} [\phi(x, t), \pi(y, t)] &= i \delta^3(x-y) \hbar \\ H &= \int d^d x \omega_k(\dots) \end{aligned} \right. \begin{array}{l} \text{oscillatori accoppiati} \Rightarrow \text{limite} \\ \text{del continuo} \end{array}$$

Per arrivare a questo abbiamo definito operatori di creazione e distruzione.

$$\hat{\phi} = \int \left(a_k e^{-ik_\mu x^\mu} + a_k^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} \right) \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{ con } k_\mu = (k_0, \vec{k}), k_0 = \sqrt{m^2 + k^2}$$

Utilizzando le regole $[a(k), a^\dagger(k')] = \delta(k-k')$ si riesce a scrivere: Avevamo anche definito un "vuoto": $a|0\rangle = 0$

$$H = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k^0 a_k^\dagger a_k$$

Può essere conveniente usare una normalizzazione un po' diversa. Avevamo dimostrato che $\int d^3 k$ non è un invariante. Lo è invece $\int \frac{d^3 k}{k_0}$, perché lo Jacobiano fa 0.

$$\hat{\phi}(x^\mu) \equiv \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0} \left[a(k) e^{-ik_\mu x^\mu} + a^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right]$$

$$[a(k), a^\dagger(k')] = (2\pi)^3 \delta(k-k') 2k^0$$

Per semplicità definiamo: $\frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k^0} \equiv d\tilde{k}$

Avevamo anche visto che \tilde{N} un operatore, che commuta con H , che conta il numero di particelle:

$$N = \int d\tilde{k} a^\dagger a$$

Tutto questo risolve questa teoria di campo. Ciascuno stato soddisfa una legge di dispersione di particella relativistica.

⇒ questa teoria descrive un insieme di bosoni scalari (\equiv a spin 0), in numero qualunque, reali -

vedere calcoli termodinamico dispense online -

Per quantizzazione le prossime teorie non discretizzeremo più lo spazio -
C'è un'altra teoria semplice, quella scalare complessa -

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (\text{si prende sempre } \phi \text{ reale})$$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \Rightarrow \mathcal{L} \propto \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2)$$

⇒ prendere un campo complesso equivale a prenderne due reali uguali - Usiamo lo stesso metodo di prima -

$$\hat{\phi}(x^\mu) = \int d\tilde{k} \left[a(k) e^{-ik_\mu x^\mu} + b^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right]$$
$$\hat{\phi}^*(x^\mu) = \int d\tilde{k} \left[a^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} + b(k) e^{-ik_\mu x^\mu} \right]$$

$$a = (a_1 + ia_2) \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$b = (a_1 - ia_2) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a_1, a_2 operatori di creazione/distruzione per i campi ϕ_1 e ϕ_2 -

NB.: campo scalare reale $\Rightarrow \hat{\phi}$ hermitiano ($\hat{\phi}^\dagger = \hat{\phi}$)
campo scalare complesso $\Rightarrow \hat{\phi}^\dagger \neq \hat{\phi}$ -

Se fissiamo k , \forall stato c'è una degenerazione: posso costruire due tipi di eccitazione:
 $a^\dagger(k)|0\rangle$ e $b^\dagger(k)|0\rangle$

Dal punto di vista fisico: particella + antiparticella -
A teoria per particella canonica, sia quantistica che relativistica, che non prevede l'antiparticella -

Qui non abbiamo nessun campo elettromagnetico in gioco, ma avremmo visto che \mathbb{F} corrente conservata per questa teoria -

Ogni volta che \mathbb{F} una degenerazione, tipicamente c'è un operatore che commuta con H che lo risolve -

Nel caso $\in \mathbb{R}$ abbiamo visto che \mathcal{L} ha una simmetria

$$U(1): \phi \rightarrow \phi e^{i\alpha} \quad \text{Esisteva una corrente}$$
$$J^\mu = i [\phi^* \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^* \phi] \quad \text{tale che } \partial_\mu J^\mu = 0$$

$$\Rightarrow \text{costante del moto } Q = \int d^3k J^0$$

Torniamo al campo complesso -

l'hamiltoniana diventa:

$$H = \int d\tilde{k} k^0 (a^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2) = \int d\tilde{k} k^0 [a^\dagger a + b^\dagger b]$$

$$N = \int d\tilde{k} (a^\dagger a + b^\dagger b)$$

N tratta in maniera uguale a e b \Rightarrow non è questo l'operatore che risolve la degenerazione - Sugerimento: riutilizziamo

J^M quantizzando - Ordinamento normale: a sinistra quelli che
gli op. di costruzione e a destra quelli di distruzione -

Trasliamo: $Q = \int d\tilde{k} (a^\dagger a - b^\dagger b)$

Quest'oggetto è una costante del moto ($[Q, H] = 0$),
e tratta in maniera diversa stati a e stati b -

$$Q a^\dagger(k) |0\rangle = a^\dagger(k) |0\rangle$$

$$Q b^\dagger(k) |0\rangle = -a^\dagger(k) |0\rangle$$

Quando accenderemo il campo elettromagnetico, vedremo
che Q è la carica - Osserviamo che i due tipi di
particella sono in tutto e per tutto identici

tranne che per la carica.

Nel campo hermitiano, la particella era anche la propria
antiparticella -

Teoria di campo libera: i campi di interazione non sono
ancora definiti, le particelle non interagiscono -

Abbandoniamo i campi scalari, per costruire oggetti che si
comportano in modo diverso sotto rotazione -

Partiamo da una lagrangiana invariante di Lorentz
ed applichiamo il principio variazionale -

Una rotazione ci porta da x^μ ad x'^μ :

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Lo scalare si comporta così:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(\Lambda^{-1} x')$$

Il quadrivettore:

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1} x')$$

Partendo da 2 invarianti di Lorentz siamo arrivati
a scrivere equazioni covarianti -

Ad esempio: $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0$
 $\partial_\mu F^{\mu\nu} \propto J^\nu$

Vogliamo generalizzare questo procedimento.

Immaginiamo di avere un oggetto ad n componenti che sotto trasformazioni di Lorentz faccia:

$$\phi_a(x) \rightarrow \phi'_a(x') = \underbrace{M_{ab}(\Lambda)}_1 \phi_b(\Lambda^{-1}x'), \quad a=1 \dots n$$

Per analogia: $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \underline{1} \phi(\Lambda^{-1}x')$
 $A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \underline{\Lambda^\mu_\nu} A^\nu(\Lambda^{-1}x')$

Ad esempio il campo elettromagnetico:

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} = \underline{\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta} F^{\alpha\beta}(\Lambda^{-1}x')$$

$M_{ab}(\Lambda' \Lambda'') = M(\Lambda') M(\Lambda'')$ Queste matrici sono una rappresentazione in un gruppo di trasformazioni continue di una certa trasformazione.

Tra tutte queste rappresentazioni vogliamo identificarne una che abbia spin $1/2 \Rightarrow$ campo fermionico.

Esempio di gruppo continuo: momento angolare (rotazioni). Il concetto di rappresentazione ∇ \forall tipo di gruppo.

I generatori delle rotazioni sono:

$$O(3) \quad s=0 \quad \text{scalare}$$

$$s=1/2 \quad \text{fermione}$$

$$\hookrightarrow \text{degenerazione } (2j+1)$$

Gli spinori si mescolano tramite gli operatori

$$e^{\frac{i}{2} \sigma_i \theta_i} \rightarrow \text{angoli di Eulero}$$

\hookrightarrow matrici di Pauli

$$[\sigma_i, \sigma_j] = i \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Che spin ha un vettore? \perp (3 componenti $\sim 2j+1$)

$$\vec{A} =$$

Generatori dei vettori: hanno le stesse regole di commutazione del momento angolare $(\vec{x} \times \vec{p})$.

Prendiamo un oggetto fatto di 2 spinori (bi-spinore):

$$\begin{pmatrix} (-) \\ (-) \\ (-) \\ (-) \end{pmatrix}$$

Questo genera uno spazio a 4 component. - Le rotazioni agiscono indipendentemente sui due sottospazi

⇒ rappresentazione riducibile -
rotazione

Se una mescola necessariamente tutto, allora la rappresentazione si dice irriducibile -

Per rappresentazione dobbiamo definire J_1, J_2 e J_3

tali che $[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k$

⇒ abbiamo i generatori - li esponenziamo e abbiamo la nuova rappresentazione:

$$O(\theta_i) = e^{i J_i \theta_i}$$

Supponiamo di voler costruire una rappresentazione a 2 componenti con spin 1/2 -

$$\begin{pmatrix} (-) \\ (-) \end{pmatrix}$$

Le matrici di Pauli agiscono su spazi di dimensione 2 e seguono le regole di

commutazione del momento angolare -

Per 3, ... n dimensioni procediamo allo stesso modo.

Vogliamo fare tutto questo nel gruppo di Lorentz -

• Metodo 1 - estensione del momento angolare

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$$
 Quando c'è un prodotto vettoriale, c'è un

tensor anti-simmetrico - $\vec{J} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = \epsilon_{ijk} x_j p_k$

$$J_{JK} \equiv (x_J p_K - x_K p_J) \quad (\text{vedi pseudovettori})$$

Estendiamo questa operazione: individuiamo la quarta componente -

$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$$

I generatori devono essere tanti quanti i parametri liberi del gruppo - In questo caso, sono 6 - $J_{\mu\nu}$ è anti-simmetrico ⇒ ha 6 componenti ⇒ è l'oggetto giusto -

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho})$$

Metodo 2

Le trasformazioni di Lorentz sono definite da:

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

I vettori trasformano così: $A^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$

In particolare per una trasformazione infinitesimale:

$$A^\alpha \rightarrow \left[\delta^\alpha_\beta - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (B^{\mu\nu})^\alpha_\beta \right] A^\beta$$

3 angoli di Eulero

3 parametri temporali

è una matrice di indici α, β
 e coppia di indici (μ, ν)

Se svolgiamo il calcolo troviamo le stesse regole di commutazione.

Esponenziando, troviamo tutti i possibili operatori del gruppo: $e^{i\omega_{\mu\nu} B^{\mu\nu}}$

24/10/11

Vogliamo quantizzare una teoria con campi che non siano quello scalare e vettoriale che abbiamo già visto; ma che trasformino allo stesso modo sotto trasf. di Lorentz.

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \text{Trasformazione di Lorentz}$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(\Lambda^{-1}(x')) \quad (\text{scalare}) \quad \sim \text{spin } 0$$

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}(x')) \quad (\text{vettore}) \quad \sim \text{spin } 1$$

Se troviamo $M_{ab}(\Lambda)$ t.c.

$$\varphi_a(x) \rightarrow \varphi'_a(x') = M_{ab}(\Lambda) \varphi_b(\Lambda^{-1}(x'))$$

esse sono rappresentative del gruppo associato a questa trasformazione.

Per le rotazioni sappiamo che i generatori sono dati da trasf. infinitesime:

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k \quad e^{i\theta \cdot J}$$

(3 gradi di libertà)

Il gruppo di Lorentz ha 6 d.o.f. (3 rotazioni, 3 boosts):

$$6 \text{ d.o.f.} \rightarrow [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho})$$

(i generatori sono rappresentati da tensori antisimmetrici).

Costruiremo poi: $e^{i\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}} = M(\Lambda)$ **TEORIA DEI GRUPPI CONTINUI**

La soluzione, che ci porterà all'eq. di Dirac, è:

- vogliamo costruire una rappresentazione nel gruppo di Lorentz che corrisponda ad un fermione (spin $1/2$)
- costruiamo 4 matrici:

γ_{ab}^{μ} di dimensione $n \times n$, anti-commutanti come:

$$[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]_{+} = \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu} I_{n \times n}$$

(oltre ad indici spazio-tempo ora dovremmo tener conto anche di indici spinoriali)

- Se troviamo queste matrici, e costruiamo:

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \quad \text{dove } S^{\mu\nu} = S_{ab}^{\mu\nu}, \text{ e } [\dots] \text{ è un commutatore (non anti-)}$$

\Rightarrow quest'oggetto soddisfa le stesse regole di commutazione del gruppo di Lorentz.

n non è fissato: possiamo costruire rappresentazioni di varie dimensioni.

NB.: il commutatore $[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$ è per costruzione un oggetto antisimmetrico.

$$U(1) \equiv e^{i \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}}$$

Usiamo questo teorema per costruire una rappresentazione per il fermione. Le particelle elementari sono rappresentazioni del gruppo di Poincaré.

Devo costruire le matrici γ .

$$n \equiv 4 \Rightarrow 4 \text{ matrici } 4 \times 4$$

Scriviamo le matrici a blocchi 2×2 :

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } \sigma^i \text{ = matrici di Pauli}$$

Se definiamo: $\bar{\sigma}^{\mu} \equiv (I, \sigma^i)$; $\underline{\sigma}^{\mu} \equiv (I, -\sigma^i)$

$$\Rightarrow \gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^{\mu} \\ \underline{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix}$$

Queste matrici soddisfano $[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]_{+} = 2g^{\mu\nu} I_{n \times n}$

Teo 1
54
⇒ soddisfanno le ipotesi del teorema ⇒ definiamo

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

Un bi-spinore è un oggetto a 4 componenti:

$$\Psi_a(x) \quad a = 1 \dots 4$$

che trasforma in questo modo:

$$\Psi_a(x) \xrightarrow{\Lambda} \Psi'_a(x') = e^{i\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}}_{ab} \Psi_b(\Lambda^{-1}x)$$

Le matrici γ^μ che abbiamo definite si dicono rappresentazione chirale del gruppo di Lorentz. Qualsiasi altra rappresentazione è equivalente, a meno di una trasformazione unitaria.

Per vedere che spin è rappresentato da questa rappresentazione dobbiamo vedere come si comporta sotto rotazione.

$$\Psi_i \quad i=1,2 \quad \Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\theta_i \sigma_i} \Psi \quad \text{SPINORE}$$

Abbiamo 6 generatori. La matrice è antisimmetrica ⇒ possiamo dividerli in:

$$S^{0i} = -\frac{i}{2} \left(\begin{array}{c|c} \sigma_i & \\ \hline & -\sigma_i \end{array} \right)$$

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \left(\begin{array}{c|c} \sigma_k & 0 \\ \hline 0 & \sigma_k \end{array} \right)$$

Se introduco una matrice diagonale a blocchi Σ_k :

$$\Sigma_k \equiv \left(\begin{array}{cc} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{array} \right) \Rightarrow S^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Sigma_k$$

Vediamo come trasforma il bi-spinore:

$$\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{i\theta_k \sigma_k} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_k \sigma_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix}$$

⇒ rappresenta l'unione di 2 oggetti di spin $1/2$ (si comporta

Come uno spinore formato da due sotto-oggetti -

$$\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix} \rightarrow e^{i\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e^{\frac{i\theta}{2} \sigma^1 \cdot \frac{\sigma^i}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\theta}{2} \sigma^3 - \eta_i \frac{\sigma^i}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} - \\ - \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} - \\ - \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Ci sono due parti che trasformano indipendentemente -
Spesso chiamiamo:

$$\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}$$

Per la particella scalare avevamo la Klein-Gordon:

$$(\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi) = 0$$

Vogliamo delle simili equazioni covarianti per i bi-spinori -

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Psi_a = 0 \quad \text{Questa è una buona eq., ma non è l'unica -}$$

Mescolando indici spinoriali ed indici spaziotemporali riusciamo a costruirne un'altra:

EQUAZIONE DI DIRAC

$$\boxed{(i \gamma_{ab}^\mu \partial_\mu - m I_{ab}) \Psi_b = 0}$$

nb.: è sottintesa la somma sull'indice μ : $\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i}$
A differenza dell'equazione di Klein-Gordon, che è quadratica, l'equazione di Dirac è lineare
 \Rightarrow è derivabile.

25/10/11

Abbiamo introdotto i bi-spinori:

$$\Psi(x) \xrightarrow{x' = \Lambda^\mu_\nu x^\nu} \Psi'(x') = \Lambda_{1/2} \Psi(\Lambda^{-1} x)$$

$$\Lambda_{1/2} \equiv e^{i\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} \quad \text{con } S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

Il bi-spinore è due rappresentazioni dello spazio di Lorentz attaccate.

Dall'equazione di Dirac discendiamo, derivando:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \psi(x) = 0 \quad \text{Klein-Gordon}$$

che è trasversale rispetto agli indici spaziali.

Ma deriviamo anche:

$$\left(i \gamma_{ab}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m I_{ab} \right) \psi_b(x) = 0$$

Adesso gli indici si mescolano. Anche questa equazione è covariante.

γ^μ sono 4 matrici. È sottintesa la somma su μ .

Come vediamo che questa equazione è covariante?

$$\Lambda_{1/2}^{-1} \gamma_{ab}^\mu \Lambda_{1/2} = \Lambda_{\nu}^\mu \gamma_{ab}^\nu$$

($\Lambda_{1/2}$ deriva dal fatto che parliamo di due rappresentazioni $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$ dello sp. di L. unite)

⇒ γ^μ trasformo come un vettore al cambiamento del sistema di riferimento. È un "4-vettore di matrici".

Cambiamo s.d.r.: $x' = \Lambda x$

Voglio dimostrare che se $(i \gamma_{ab}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m I) \psi(x) = 0$ è vera in x , allora è vero anche in x' .

$$(i \gamma_{ab}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m I) \psi'(x') = (i \gamma_{ab}^\mu (\Lambda^{-1})_{\nu}^\mu \frac{\partial}{\partial (\Lambda^{-1} x^\nu)} - m) \Lambda_{bc}^{1/2} \psi(\Lambda^{-1} x')$$

Moltiplichiamo per $\Lambda_{1/2} \Lambda_{1/2}^{-1}$ il secondo termine:

$$= \Lambda_{1/2} \Lambda_{1/2}^{-1} (i \gamma_{ab}^\mu \Lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial (\Lambda^{-1} x^\nu)} - m) \Lambda_{bc}^{1/2} \psi(\Lambda^{-1} x') =$$

$$= \Lambda_{1/2} (i \Lambda_{1/2}^{-1} \gamma_{ab}^\mu \Lambda_{1/2} \Lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial x^\nu} - m \Lambda_{1/2}^{-1} \Lambda_{1/2}) \psi(x) =$$

$$= \Lambda_{1/2} (i \Lambda_{1/2}^{-1} \gamma_{ab}^\mu \Lambda_{1/2} (\Lambda^{-1})_{\nu}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - m) \psi(x) =$$

$$= \Lambda_{1/2} (i \delta_{\nu}^a \gamma^a \frac{\partial}{\partial x^\nu} - m) \psi(x) = 0$$

$$\Rightarrow (i \gamma_{\nu}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - m) \psi(x) = 0 \quad \text{c.v.d.}$$

Dimostriamo anche che questa eq. si può derivare da una L.

NB: nei libri troviamo $\not{x} \equiv \gamma^\mu x_\mu \Rightarrow \not{\partial} = \partial_\mu \gamma^\mu$

Inoltre: $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\not{\partial} - m) \Psi$$

Ψ e $\bar{\Psi}$ sono campi indipendenti -

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\Psi}} = 0 \quad \text{da questa equazione del moto}$$

discende infatti l'equazione
di Dirac.

$$(i\not{\partial} - m) \Psi = 0$$

$$(i\not{\partial} - m) \Psi = 0 \Rightarrow \underbrace{(i\not{\partial} + m)}_{\gamma^\mu \partial_\mu} \underbrace{(i\not{\partial} - m)}_{\gamma^\alpha \partial_\alpha} \Psi = 0$$

Sostituendo: $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Psi = 0$

L'equazione di Dirac implica la Klein-Gordon,
ma non vale il viceversa -

Anche nell'eq. di Dirac sta scritto che $p^2 = m^2$.

Quali sono le soluzioni dell'equazione?

L'equazione di Dirac, non essendo trasparente allo spin, descriverà l'interazione di Pauli e

l'interazione spin-orbita -

Andiamo in trasformata di Fourier.

$$\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu \quad \begin{cases} (i\not{\partial} - m) \Psi = 0 \\ (\not{\partial} - m) \tilde{\Psi} = 0 \end{cases}$$

Problems!

Per definire il bispinore abbiamo preso due
rappresentazioni irriducibili e le ho attaccate.

Perché non usare una singola rappresentazione?

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}$$

questi operatori non mescolano Ψ_L
e Ψ_R .

L'eq. di Dirac invece sì:

$$\left(\begin{array}{c|c} -m & i(\not{\partial}_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \\ \hline i(\not{\partial}_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) & -m \end{array} \right) \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}$$

$$-m \Psi_L + i(\not{\partial}_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \Psi_R = 0 \quad \Psi_L \text{ e } \Psi_R \text{ vengono mescolate.}$$

NB: si mescolano solo per $m \neq 0$!

In seguito vedremo che il bispinore diventa irriducibile se oltre al gruppo di Lorentz consideriamo anche il gruppo delle parità.

Le soluzioni in onda piana saranno della forma: $\Psi(x) = U(p) e^{-i p_\mu x^\mu}$

$$i(\gamma^0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i - m) \Psi = 0$$

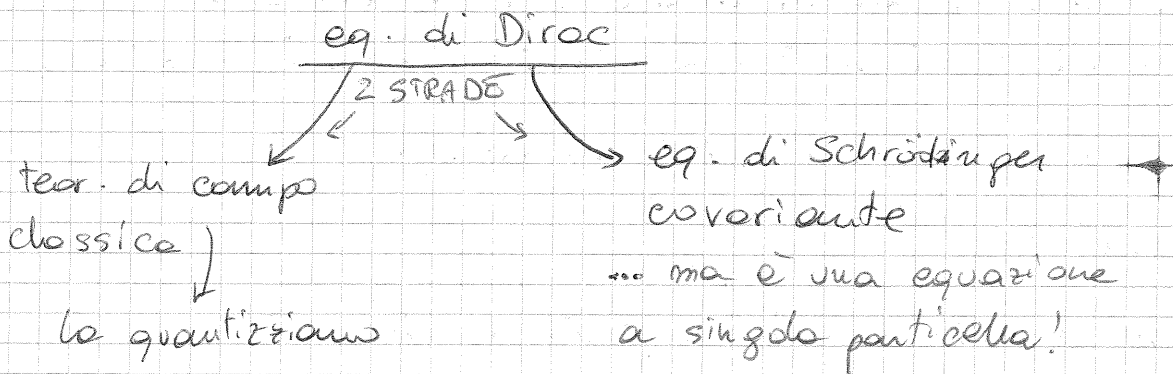
Conosciamo forse altre eq. lineari?

$$(i \partial_0 + i \gamma^0 \gamma^i \partial_i - \gamma^0 m) \Psi = 0$$

$$H \equiv \gamma^0 m - i \gamma^0 \gamma^i \partial_i$$

$$i \partial_0 \Psi = H \Psi \quad \text{equazione di Schrödinger}$$

Questa equazione è anche covariante \Rightarrow meccanica quantistica relativistica.



27/10/11

$$(i \not{\partial} - m) \Psi = 0 \quad \text{Equazione di Dirac}$$

(sfrutta le proprietà del bispinore per essere covariante)

La soluzione generale si può scrivere come sovrapposizione di elementi della base.

$$\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$$

Ci aspettiamo che le onde piane formino una base per lo spazio delle soluzioni:-

$$u_a(p) e^{-i p_\mu x^\mu} \equiv \Psi_a(x) \quad (p_\mu p^\mu = m^2)$$

L'eq. di Dirac \Rightarrow la Klein-Gordon $\Rightarrow p^2 = m^2$.

u_a è ciò che dà la forma bispinoriale. \exists anche soluzioni del tipo: $\Psi_a(x) = v_a(p) e^{i p_\mu x^\mu}$

Storicamente si considera quest'ultima come soluzione ad energia negativa.

Sostituendo:

$$(\not{p} - m) u_\alpha(p) e^{-i p_\mu x^\mu} = 0 \Rightarrow (\not{p} - m) u_\alpha(p) = 0$$

NB: $\not{p} - m$ sarebbe in realtà $\not{p}_{ab} - m I_{ab}$ (indici spinoriali).

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^\mu = (\mathbf{I}, \hat{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{I}, -\hat{\sigma})$$

Cerchiamo la soluzione nel s.d.r. dove le componenti spaziali di p^μ sono nulle. $u_\alpha(p)$ \sim polarizzazione.

$$\vec{p} = 0 \Rightarrow (p^0 \gamma_0 - m) u = 0$$

$$m(\gamma_0 - 1) u = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \right] u = 0$$

La soluzione è del tipo:

$$u = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \quad (u \text{ composto da 2 spinori uguali})$$

Il conto dei gradi di libertà non dipende dal sistema di riferimento - 2 gradi di libertà (1 spinore).

$\vec{p} \neq 0 \Rightarrow$ applico un operatore di boost.

$$u_\alpha(p) = e^{i \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$$

Un modo compatto per scrivere questa soluzione è:

$$u_\alpha(p) = \begin{bmatrix} (p_\mu \sigma^\mu)^{1/2} \xi \\ (p_\mu \bar{\sigma}^\mu)^{1/2} \xi \end{bmatrix}$$

Scegliamo ad esempio: $p^\mu = (p^0, 0, 0, p^z)$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{p^0 - p^z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sqrt{p^0 + p^z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sqrt{p^0 + p^z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sqrt{p^0 - p^z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Allo stesso modo si trattano le soluzioni "a en. negativa":

$$(\not{p} + m) v = 0$$

La soluzione è analoga.

Se assumiamo che lo spinore sia normalizzato a 1 ($\xi^\dagger \xi = 1$), si ha:

$$\bar{u} u = 2m \qquad \bar{v} v = -2m$$

$$(u_a^\dagger \delta_{ab}^0 u_b = \bar{u} u)$$

Altra relazione che si ottiene:

$$\bar{u}^{(r)} u^{(s)} = 2m \delta_{rs} \qquad (\text{Sono le 2 sol. ottenute con } \xi = 0 \text{ e } \xi = 1)$$

$$\bar{v}^{(r)} v^{(s)} = -2m \delta_{rs}$$

$$\sum_s u_a^{(s)}(p) \bar{u}_b^{(s)}(p) = \not{p}_{ab} + m I_{ab}$$

$$\sum_s v_a^{(s)}(p) \bar{v}_b^{(s)}(p) = \not{p}_{ab} - m I_{ab}$$

Le due soluzioni dell'equazione di Dirac formano un set completo \Rightarrow la soluzione generale sarà una sovrapposizione delle due.

Finora abbiamo considerato l'eq. di Dirac come una equazione classica. Ci si può anche associare una \mathcal{L} . Ma posso anche riscrivere l'eq. nella forma:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi \qquad H = \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + \gamma^0 m$$

Questa assomiglia molto ad una eq. di Schrödinger, per un fermione di spin $1/2$ - È anche covariante. Questa è una meccanica quantistica relativistica. È sempre la stessa equazione \Rightarrow le soluzioni sono quelle scritte prima.

$$\begin{cases} \psi_a^\dagger(x) = u_a e^{-i p_\mu x^\mu} \\ \psi_a(x) = v_a e^{+i p_\mu x^\mu} \end{cases}$$

Il primo set ha autovalore $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, il secondo $p^0 = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Per ora consideriamo solo le soluzioni ad energia positiva. Resta il problema che questa è una teoria di singolo partucello.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{N.B.: solut. ad } E < 0 \rightarrow \text{particelle che viaggiano} \\ \text{all'indietro nel tempo } (t \rightarrow -t \Rightarrow p^0 > 0) \end{array} \right\}$

Proviamo ad occidere l'interazione e.m. -

(finché parliamo di particelle libere non riusciamo a distinguere la Dirac dalla Klein-Gordon per mezzo degli esperimenti.)

lunedì prox → no lezione

ACCOPIAMENTO MINIMALE $p \rightarrow p - eA$

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad \text{in un campo esterno:} \quad H = \frac{(p - eA)^2}{2m} + e\varphi$$

Per applicare l'accoppiamento minimale all'eq. di Dirac:

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0 \rightarrow (i\not{\partial} - eA - m)\psi = 0$$

Un e^- in un campo magnetico gira → irradia fotoni.

Ma questa equazione prevede una singola particella
⇒ vedremo che non potrà descrivere questi fenomeni.

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = [\gamma^0 \gamma^i (p^i - iA^i) + \gamma^0 m + eA^0]\psi$$

Se la velocità dell'elettrone è sufficientemente bassa,
l'accoppiamento è piccolo ($\frac{1}{c^3} \sim \text{rad. di dipolo}$).

Posso quindi considerare i primi due ordini dello sviluppo
non relativistico ($\frac{1}{c}$ e $\frac{1}{c^2}$): vedremo che questi
hanno senso.

→ limite non relativistico

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} A^0$$

Torniamo alla rappresentazione delle matrici γ , che non è
unica. Ci occorre:

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}$$

La rappresentazione chirale è $\gamma^\mu = (\vec{\sigma}, \sigma^\mu)$
ma nel limite non relativistico è più utile la
rappresentazione standard:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

Entrambe soddisfano le regole di commutazione.

$$\text{ropp. chirale: } \mathcal{M}_d = \begin{pmatrix} S \\ M \end{pmatrix}$$

$$\text{ropp. standard: } \mathcal{M}_d = \begin{pmatrix} d \\ \rho \end{pmatrix}$$

Tra una rappresentazione e l'altra c'è solo un cambiamento di base:

$$\alpha = \frac{\sigma_3 + \frac{m}{2}}{2} \quad \beta = \frac{\sigma_3 - \frac{m}{2}}{2}$$

$$(i\partial - m)\psi = 0$$

$$(\not{\partial} - m)\psi = 0$$

$$m(\sigma^0 - 1)\psi = 0$$

$$\sigma^0 - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2I \end{pmatrix}$$

⇒ le soluzioni sono del tipo

$$\begin{pmatrix} \text{qualcosa} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nella rappresentazione standard "sopravvive" un solo spinore -
 (le prime due componenti sono > seconde due)

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

Ridefiniamo il campo, togliendo l'evoluzione temporale dovuta solo alla massa: nel limite non relativistico questo contributo è banale.

$$\psi(x, t) \equiv \psi' e^{-imc^2 t}$$

Quindi riscriviamo l'equazione:

$$i\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad \text{Voglio riscriverlo } 2 \times 2.$$

$$(i\frac{\partial}{\partial t} - eA^0)\varphi = e\vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A})\chi$$

$$(i\frac{\partial}{\partial t} - eA^0 + 2mc^2)\chi = e\vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A})\varphi$$

Abbiamo già usato ψ' al posto di ψ , ma non abbiamo fatto nessuna altra approssimazione.

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \text{en. cinetica} \ll m$$

$$eA \ll m$$

⇒ nella seconda equazione trascuriamo $i\frac{\partial}{\partial t} - eA^0$.

$$\chi \approx \frac{1}{2mc} \vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A})\varphi$$

lo sostituisco nella prima, ottenendo:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \frac{1}{2m} [\vec{\nabla}(\rho - e\vec{A})]^2 \varphi + eA^0 \varphi$$

Questa è una eq. di Schrödinger per una particella (uno spinore).

Sopprimiamo che l'eq. di una particella in un campo e.m. è:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} \varphi + e\varphi$$

C'è una matrice $\vec{\sigma}$ di differenza.

Sapendo che

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

si dimostra che la nostra eq. diventa:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \frac{1}{2m} \left[(\vec{p} - e\vec{A})^2 - \frac{e}{c} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right] \varphi + eA^0 \varphi, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Cosa rappresenta il termine $-\frac{e}{c} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$? È l'interazione di Pauli.

Sappiamo infatti che, se c'è una particella con momento angolare L in un campo B , c'è una interazione

$\frac{ge}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B}$. Sperimentalmente, si verifica che questo è sbagliato di un fattore 2.

$\vec{L} = \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$ La nostra equazione lo prevede.

Nel limite non relativistico, all'ordine $1/c$, l'equazione di Dirac trattata come eq. di S. per singola particella, prevede in maniera esatta l'interazione spin-orbita.

Possiamo anche spingerci fino all'ordine $1/c^2$.

Prendiamo un atomo di idrogeno in un campo elettrico centrale: $\vec{A} = 0$ $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$

Si ottiene:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi = H \varphi \quad \text{con} \quad H = \frac{p^2}{2m} + e\varphi - \frac{p^4}{8m^3c^2} - \frac{e\hbar}{4m^2c^2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p}) - \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

(a ordine $1/c$ l'accoppiamento è solo col campo magnetico)

In relatività ristretta l'energia è $\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$. Noi abbiamo

tolto la massa: $\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - mc^2$

→ Sviluppo di Taylor di questa quantità fornisce il termine $\frac{p^4}{8m^3c^2}$.

Secondo termine. $\vec{E} = -\nabla \frac{d\varphi}{dr}$
 (il campo centrale è quello del protone!)

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$$

Il secondo termine aggiuntivo corrisponde a:

$$\frac{\hbar^2}{2m^2 c^2 r} \frac{d\varphi}{dr} \vec{L} \cdot \vec{S}$$

Ultimo termine: $\nabla \cdot \vec{E}$ è la distribuzione di carica. Per il nucleo d'idrogeno è $\delta(r)$.
 Questo termine corrisponde alle interazioni di onda s. Sono sperimentalmente osservate anche queste.

28/10/11

Questa descrizione non può descrivere fenomeni che coinvolgono più particelle. Torniamo a vedere la eq. di Dirac come una teoria di campo classico, e poi quantizzandola, per ottenere qualcosa che descriva n particelle.

Per il campo fermionico procediamo esistivamente, seguendo quello che abbiamo fatto nel campo scalare.

elettrone \rightarrow bispinore complesso

Nel caso del campo scalare, siamo partiti dallo

$$\mathcal{L} \equiv \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 |\phi|^2$$

Poi abbiamo definito gli operatori:

$$\pi, \psi$$

e abbiamo promosso ϕ ad operatore:

$$[\phi(x, t), \pi(y, t)] = i \delta^3(x-y)$$

$$\phi(x^\mu) = \int d\vec{k} [a(k) e^{-ik_\mu x^\mu} + b^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu}]$$

con le regole di commutazione iudotte

$$[a(k), a^\dagger(k')] = 2k^0 (2\pi)^3 \delta(k-k')$$

Usando l'ordinamento normale:

$$H = \int d\vec{k} k^0 [a^\dagger a + b^\dagger b]$$

NB: come sono fatte le sol. dell'eq. di K-G che si ricava da questo \mathcal{L} ? \rightarrow soluzioni d'onda piana

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi = 0 \Rightarrow \phi = e^{-ik_\mu x^\mu}$$

$$\phi = e^{ik_\mu x^\mu} \quad (k^2 = m^2)$$

Qualunque soluzione si ottiene come sovrapposizione di queste. N.B.: queste non hanno struttura tensoriale: è un campo scalare.

Questa procedura funziona, proviamo ad applicarla al fermione.

L'equazione che vogliamo usare è quella di Dirac:

$$(i\partial - m)\Psi = 0$$

Esso può discendere da una Lagrangiana, che non è unica. Ad esempio:

$$\bar{\Psi}_a = \Psi_b^\dagger \gamma_{ba}^0$$

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\Psi} \not{\partial} \Psi - \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi] - m \bar{\Psi} \Psi$$

Ma anche:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\partial - m) \Psi$$

Le equazioni del moto saranno:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\Psi}} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi} = 0$$

che risultano uguali per queste due forme.

Usiamo la prima, che è simmetrica rispetto a Ψ e $\bar{\Psi}$.

Scriviamo l'Hamiltoniana -

Usando una "specie di" teorema di Noether avevamo introdotto il tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$, la cui prima componente è una densità d'energia \Rightarrow

$$H = \int d^3x T^{00}$$

Per una teoria di campo generica avevamo derivato:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\nu \bar{\Psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\Psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi} \partial^\nu \Psi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Usando la prima forma della \mathcal{L} che abbiamo scritto, otteniamo:

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial^\nu \Psi - \partial^\nu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi)$$

Questa è la teoria classica. Dato che abbiamo a disposizione $T^{\mu\nu}$, possiamo saltare il passaggio dell'impulso coniugato.

La procedura suggerisce di promuovere Ψ e $\bar{\Psi}$ ad operatori riscrivendoli in termini di operatori di costruzione e distruzione.

$$\Psi_a = \int d\tilde{k} \left[a^{(s)}(k) u_a^{(s)}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} + b^{(s)\dagger}(k) \bar{u}_a^{(s)}(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right]$$

dove a è l'indice di bispinore ed $s=1,2$ (NB.: c'erano due soluzioni all'eq. di Dirac).

$a^{(s)}(k)$ operatore di creazione $b^{(s)\dagger}(k)$ di distruzione.

$$\bar{\Psi}_a = \Psi^\dagger \gamma^0 = \int d\tilde{k} \left[a^{(s)\dagger}(k) \bar{u}_a^{(s)}(k) e^{ik_\mu x^\mu} + b^{(s)}(k) \bar{v}_a^{(s)}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} \right]$$

Per derivare l'hamiltoniana, all'oggetto classico sostituiamo l'operatore. Si ottiene, senza utilizzare l'ordinamento normale,

$$H = \int d\tilde{k} k^0 \left[a^{(s)\dagger}(k) a^{(s)}(k) - b^{(s)}(k) b^{(s)\dagger}(k) \right]$$

nota bene: è sottintesa la somma sull'indice ripetuto s .

Non abbiamo ancora stabilito le regole di commutazione di a e b . Proiamo ad utilizzare lo stesso algebro che abbiamo usato per il campo scalare. Dobbiamo ancora "curare" l'hamiltoniana con il prodotto normale.

$$H = \int d\tilde{k} k^0 [a^\dagger a - b b^\dagger] = \int d\tilde{k} k^0 [a^\dagger a - [b, b^\dagger] - b^\dagger b]$$

definiamo $|0\rangle$ tale che $a, b |0\rangle = 0 \Rightarrow$

$$H = \int d\tilde{k} k^0 [a^\dagger a - b^\dagger b]$$

Ma questa H ha un altro problema. Non è limitata inferiormente! Più particelle di tipo b aggiungo al sistema, e più abbasso l'energia! C'è una inconsistenza, $|0\rangle$ non è lo stato ad energia più bassa.

Come posso sostituire quel $-$ con un $+$? Usando gli anticommutatori:

$$H = \int d\tilde{k} k^0 [a^\dagger a - [b, b^\dagger] + b^\dagger b]$$

Verifichiamo se questo scelto porta ad una teoria accettabile. Basiamo la nostra algebro sugli anticommutatori anziché sui commutatori.

$$[a^{(r)}(k), a^{(s)\dagger}(k')]_+ = (2\pi)^2 \delta(k-k') 2k^0 \delta^{rs}$$

Le stesse regole valgono per b . Si ricava poi:

$$[\Psi_a(\vec{x}, t), \Psi_b^+(\vec{y}, t)]_+ = \delta_{ab} \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

Queste assomigliano alle regole di commutazione canoniche, ma sono anti-commutatori. Rispetto agli anti-commutatori, l'impulso coniugato a Ψ è proprio Ψ^+ . Vediamo ora come è fatto lo spettro.

Il prodotto normale di prodotti fermionici si fa:

- portando tutti gli operatori di distruzione a destra
- mettendo un "-" ad ogni scambio.

Otteniamo lo stato fondamentale con:

$$a, b |0\rangle = 0$$

Gli altri stati si costruiscono con:

$$a^{(s)\dagger}(k) |0\rangle$$

(stato di impulso k e spin s) - Prendiamo uno stato a 2 particelle:

$$a^{(s_1)\dagger}(k_1) a^{(s_2)\dagger}(k_2) |0\rangle$$

È simmetrico rispetto allo scambio? Le regole del gioco sono anti-commutatori, e invertiamo l'ordine degli operatori, dobbiamo porre un segno -!

$$a^{(s_1)\dagger}(k_1) a^{(s_2)\dagger}(k_2) |0\rangle = - a^{(s_2)\dagger}(k_2) a^{(s_1)\dagger}(k_1) |0\rangle$$

L'utilizzo dell'anti-commutatore mi porta ad uno spettro antisimmetrico. Questo è il teorema di Spin-Statistica:

spin interi \rightarrow statistiche di Bose spin semi-interi \rightarrow statistiche di Fermi
--

Dobbiamo verificare un punto importante: la causalità.

Gli operatori associati alle misure devono commutare.

$$\Delta t^2 - \Delta s^2 < 0 \Rightarrow [O_1(\vec{x}', t'), O_2(\vec{x}, t)] = 0$$

In particolare: $[O_1(\vec{x}, t), O_2(\vec{y}, t)] = 0$ se $\vec{x} \neq \vec{y}$.

Abbiamo ottenuto una teoria che permette questo? Abbiamo garantito l'anti-commutatore, ma non il commutatore.

Per rappresentare le misure si usano i commutatori.

Soluzione: $\Psi, \bar{\Psi}$ non sono osservabili. Il campo fermionico non è un osservabile.

Ad esempio la corrente e.m. non è lineare in Ψ , è invece $\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$.

Si dimostra che due anti-commutatori producono un commutatore \Rightarrow qualsiasi osservabile sarà almeno bilineare in Ψ .

\Rightarrow La nostra teoria è consistente.

Torniamo indietro alla teoria classica:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) - m \bar{\Psi} \Psi$$

Ci sono simmetrie? Sì: $\Psi \rightarrow e^{-i\alpha} \Psi$

Applicando il teorema di Noether troviamo la corrente associata:

$$J^\mu = \bar{\Psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\Psi}}$$

con qui c'è qualche fattore i che si semplifica

$$= \frac{i}{2} [\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi] = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$$

Questa corrente, che sarà un'osservabile, è un bilineare in Ψ .

Come si ottiene dall'operatore classico quello quantistico?

Come sempre, ma dobbiamo usare il prodotto normale.

$$J^\mu = : \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi :$$

La quantità classica conservata era: $Q = \int d^3x T^0$

che quantisticamente diventa:

$$Q = \int d^3k [a^\dagger a - b^\dagger b]$$

Questo operatore commuta con H , e ci dice che le particelle di tipo a e di tipo b hanno cariche opposte!

Questo operatore infatti è in grado di distinguere gli stati:

$$a^\dagger |0\rangle$$

$$b^\dagger |0\rangle$$

L' J dell'anti-particella discende semplicemente dal fatto che abbiamo deciso di lavorare in un framework di teoria di campo quantistico.

Nota: l'introduzione di Q risolve solo parzialmente la degenerazione: i due stati

$$a^{(1)\dagger}(\mathbf{k})|0\rangle$$

$$a^{(2)\dagger}(\mathbf{k})|0\rangle$$

hanno la stessa energia. Dovremo introdurre operatori in grado di distinguere lo spin, ad esempio l'elicità (spin lungo la direzione di volo), che è un invariante di Lorentz: $L = \vec{S} \cdot \vec{p}$ (è invariante solo per oggetti di massa 0).

NB.: se invece di introdurre l'anti-commutatore avessimo insistito con i commutatori, avremmo ottenuto una teoria che non soddisfaceva la causalità.

NB.: grazie al teor. di spin-statistica, possiamo usare questa teoria per fare la termodinamica. La funzione di partizione grand canonica del sistema è:

$$Z = \text{tr} \left\{ e^{-\hat{H}/T + \mu \hat{N}/T} \right\}$$

Il grand potenziale:

$$\Omega = -T \ln Z = VT \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} 4 \ln(1 + e^{-\beta(\omega_k - \mu)})$$

$$\text{con } \omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$$

Si deriva anche la distribuzione di Fermi:

$$\bar{n}_{k,\mu} = \frac{1}{1 + e^{\beta(\omega_k - \mu)}}$$

Quantizziamo il campo e.m.
 La Lagrangiana canonica è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

La variabile è A_μ , che vogliamo promuovere ad operatore. Sempre a livello classico andiamo a cercare il campo coniugato:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A_\mu}$$

Implementiamo poi le regole di commutazione canoniche (a tempi uguali):

$$[A_\mu(\vec{x}), \pi^\rho(\vec{y})] = i \delta_\mu^\rho \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

Primo problema: $\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A_0} = 0$

Il tensore in \mathcal{L} è infatti completamente antisimmetrico (non ha elem. in diagonale).

Ma la descrizione in termini di A_μ è sovrabbondante, \exists 2 polarizzazioni indipendenti e non 4.

2 strade:

Riduco: gradi di libertà
 \Rightarrow perdo la covarianza

o mantengo la covarianza (mantenendo anche i gradi di lib. non fisici)

Scegliamo la 2^a strada.

Dobbiamo combinare la Lagrangiana per risolvere il problema di π^0 .

$$\mathcal{L} \equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2$$

Nel gauge di Lorentz il termine aggiuntivo risulta nullo. Con questa \mathcal{L} le eq. del moto sono:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A_\mu - (1-\lambda) \partial_\mu \partial_\nu A^\nu = 0$$

e π_0 non è più nullo:

$$\pi^\rho = F^{\rho 0} - \lambda g^{\rho 0} \partial_\mu A^\mu$$

Possiamo ora scrivere esplicitamente i campi.

La teoria di portenza è classica e il campo $\vec{E} \in \mathbb{R}$
 \Rightarrow gli corrisponderà un campo auto-hermitiano.

$$A_\mu(x) \equiv \int d\tilde{k} \left[\sum_{\lambda=1}^3 \left(a^{(\lambda)}(k) \epsilon_\mu^{(\lambda)} e^{-ik_\mu x^\mu} + a^{+(\lambda)}(k) \epsilon_\mu^{+(\lambda)} e^{ik_\mu x^\mu} \right) \right]$$

(sviluppo in onde piane). C'è

una somma sui possibili stati di polarizzazione.

Questo serve per mantenere quadrivettori gli E_μ , ma abbassare il num. di gradi di libertà.

Le polarizzazioni fisiche $E_\mu^{(1)}, E_\mu^{(2)}$ devono essere:

- $\perp \hat{n} = (n, 0, 0, 0)$
- $\perp k \parallel \hat{z}$ (no spin lungo l'impulso)

Scelgo: $E_\mu^{(0)} \equiv \hat{n}$ $E_\mu^{(3)} \equiv (0, 0, 0, 1)$
 $E_\mu^{(1)} = (0, 1, 0, 0)$ $E_\mu^{(2)} = (0, 0, 1, 0)$

Con questa scelta le regole di commutazione risultano:

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')}(k')] = -2k^0 (2\pi)^3 \delta^3(k-k') g^{\lambda\lambda'}$$

Che implementano per A_μ, π^μ le regole di commutazione canoniche.

Come è fatto lo spazio di Fock? Avremo un vuoto definito

da $a^{(\lambda)}(k) |0\rangle = 0 \quad \forall \lambda \quad \forall k$

Problema 2: posso costruire diversi stati, anche non fisici: ad esempio $a^{0+} |0\rangle, a^{3+} |0\rangle$.

Non a tutti gli stati dello spazio di Fock corrisponderò stati fisici (a norma positiva). Qui ci sono anche stati a norma < 0 .

Costruisco uno stato a una particella:

$|1\rangle = \int d\tilde{k} f(k) a^{0+}(k) |0\rangle$ con $f(k)$ tale che lo stato sia normalizzato (modulazione).

$\langle 1|1\rangle = \int d\tilde{k} d\tilde{k}' f(k') f(k) \langle 0| [a^{0+}(k'), a^{0+}(k)] |0\rangle = -a^+ a$
ho aggiunto una parte che applicata a $|0\rangle$ fa 0;
tooglie un integrale
 $= -\langle 0|0\rangle \int d\tilde{k} |f(k)|^2$

\Rightarrow lo spazio di Fock non ha norma ben definita

NB.: abbiamo visto $a^{\dagger}|0\rangle$. Invece $a^3|0\rangle$ ha norma positiva.

Definisco stato fisico $|\Psi\rangle$ uno stato t.c. il valore d'aspettazione di $\partial_{\mu}A^{\mu}$ è nullo:

$$|\Psi\rangle : \langle \Psi | \partial_{\mu}A^{\mu} | \Psi \rangle = 0$$

Questo assomiglia molto al gauge di Lorentz: $\partial_{\mu}A^{\mu} \equiv 0$ (qui consideriamo invece $\langle | \partial_{\mu}A^{\mu} | \rangle$).

Questo corrisponde a dire che

$$\int d\tilde{k} k^0 (a^0 - a^3) e^{-ik_{\mu}x^{\mu}} |\Psi\rangle = 0$$

Questa rappresentazione è ancora sovrabbondante. Posso fattorizzare:

$$|\Psi\rangle \equiv |\Psi_T\rangle |\phi\rangle$$

↳ fotoni trasversi

$$\partial_{\mu}A^{\mu} = \int d\tilde{k} \left[\sum_{\lambda=0}^3 a^{\lambda}(k) \underset{\text{(1)}}{k^{\lambda} \epsilon_{\lambda}} e^{-ik_{\mu}x^{\mu}} - a^{\lambda\dagger}(k) \underset{\text{(2)}}{k^{\lambda} \epsilon_{\lambda}^*} e^{ik_{\mu}x^{\mu}} \right]$$
$$2 = 1 + \quad \partial_{\mu}A^{\mu(2)} = [\partial_{\mu}A^{\mu(1)}]^{\dagger}$$
$$\langle \Psi | (\partial_{\mu}A^{\mu(1)} + \partial_{\mu}A^{\mu(2)}) | \Psi \rangle = 0$$
$$\iff 0 = \langle \Psi | \partial_{\mu}A^{\mu(2)} = \partial_{\mu}A^{\mu(1)} | \Psi \rangle$$

Fissare il gauge di Lorentz mi fa passare da 4 componenti a 3 - c'è ancora sovrabbondanza.

Misurando ad esempio l'energia ci aspettiamo che contribuiscano solo i fotoni "veri": $|\Psi_T\rangle$

$$H = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda} k^0 a^{\lambda\dagger}(k) a^{\lambda}(k) \equiv H_T + H_{\phi}$$

↳ $\lambda=1,2$ ↳ $\lambda=0,3$

Verificare che si ottiene:

$$\frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = \frac{\langle \Psi_T | H_T | \Psi_T \rangle}{\langle \Psi_T | \Psi_T \rangle}$$

⇒ il termine $|\phi\rangle$ è innocuo -

Si dimostra che questi problemi derivano dal fatto che il

fotone ha massa nulla \Rightarrow presenta 2 polarizzazioni.
 $w \neq z^0$ ne avranno 3. La 0 (scalare) non ce l'ha
 nessuno di questi: hanno tutti spin ± 1 .

SIMMETRIE

Un operatore è una simmetria sse
 commuta con H .

$$P: x^\mu \longrightarrow \tilde{x}^\mu = (x^0, -x^i)$$

$$T: x^\mu \longrightarrow \tilde{x}^\mu = (-x^0, x^i)$$

$$C: \text{particella} \rightarrow \text{antiparticella}$$

Queste sono simmetrie discrete.

Gruppo di Lorentz:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Le Λ^μ_ν sono tali che: $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu$
 le cose che abbiamo fatto

finora hanno senso solo per trasformazioni connesse
 all'identità (esponentiale infinitesimi ecc.) -

Ma esistono anche di non connesse: ad esempio le
 discrete C, P e T .

Quadruplicando, le trasformazioni diventano operatori unitari,
 che agiscono sull'operatore campo come:

$$U(\Lambda) \Psi(x) U^{-1}(\Lambda) = S(\Lambda^{-1}) \Psi(\Lambda^{-1}x) \quad (\text{tranz. continue})$$

Prendiamo una teoria scalare: 3 P:

$$P \varphi(x) P^\dagger = \varphi(\tilde{x})$$

$$P a(k) P^\dagger = a(k_\mu) \eta_\mu \quad \text{force}$$

L'operatore di parità è tale che $P^2 = 1 \Rightarrow \eta = \pm 1$
 Aver definito P su tutti gli $a(k)$ lo definisce in maniera
 completa.

$$[P, H] = 0$$

Per una teoria scalare è facile costruire quest'oggetto.

Se passiamo a una teoria fermionica (di Dirac)
 abbiamo anche un grado di libertà di spin.

La parità deve lasciare invariato lo spin.

$$P a^{(s)}(k^0, \vec{k}) P^\dagger = \eta a^{(s)}(k^0, -\vec{k})$$

$$P b^{(s)}(k^0, \vec{k}) P^\dagger = \bar{\eta} b^{(s)}(k^0, -\vec{k})$$

$$[P, H] = 0 \quad P \psi(x) P^\dagger = \eta \gamma^0 \psi(\tilde{x})$$

E' possibile costruire questo operatore.

Si verifica che se ψ soddisfa l'eq. di Dirac

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0$$

si dimostra che $\gamma^0 \psi$ soddisfa $P(i\not{\partial} - m)P^\dagger \gamma^0 \psi(\tilde{x}) = 0$

$$(P \partial_\mu P^\dagger = \partial^\mu, \quad \gamma^0 \delta^\mu \gamma^0 = \delta^\mu).$$

$$P A^\mu(x) P = A_\mu(\tilde{x})$$

Vedremo che $\eta = \pm 1$ distinguerà le particelle scalari da quelle pseudoscalari.

Nel caso dei bispinori, P mescola ψ_L e ψ_R .

$(P \psi_L \rightarrow \psi_R) \Rightarrow$ lo spinore doppio forma ad essere una rappresentazione irriducibile.

T è un operatore antiunitario, ovvero:

$$T^\dagger T = 1 \quad Tc = c^* T$$

$$\langle T\psi | T\phi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^* = \langle \phi | \psi \rangle$$

Assumiamo di saper costruire T antiunitario tale che:

$$[H, T] = 0$$

$$T \text{ antiunitario} \Rightarrow e^{-iHt} T = T e^{iHt}$$

$\langle f | e^{-iH(t_f - t_i)} | i \rangle$ probabilità di trovare $|f\rangle$ dopo un certo tempo a partire da $|i\rangle$.

Una simmetria significa:

$$\langle f | e^{-iH(t_f - t_i)} | i \rangle = \langle T i | e^{-iH(t_f - t_i)} | T f \rangle$$

Immaginate per inversione temporale

Perché questo sia vero occorre T antiunitario.

$$\langle f | T^\dagger T e^{-iH(t_f - t_i)} T^\dagger T | i \rangle =$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle T\psi | T e^{-iH(t_f - t_i)} T^\dagger | \psi_i \rangle^* = \\
 &= \langle T\psi | e^{iH(t_f - t_i)} | \psi_i \rangle^* = \langle \psi_i | e^{-iH(t_f - t_i)} | T\psi \rangle
 \end{aligned}$$

C.V.D.

04/11/2011

Trasformazioni discrete su sistemi che descrivono particelle libere.

P \equiv invertire gli assi spaziali

$$x^\mu \rightarrow x_\mu$$

T \equiv invertire il segno del tempo

$$x^\mu \rightarrow -x_\mu$$

C \equiv invertire il segno della carica
particella \rightarrow antiparticella

I operatori unitari che implementano queste transf.

Ad esempio:

$$[P, H] = 0 \quad (\vec{k}, s) \xrightarrow{P} (-\vec{k}, s)$$

Su un campo fermionico.

$$\hat{P} \hat{\psi}(x) \hat{P}^\dagger = \eta \gamma^0 \hat{\psi}(\vec{x})$$

$$P a^s(k) P^\dagger = \eta a^s(-k)$$

$$P b^s(k) P^\dagger = \eta^* b^s(-k)$$

P \exists anche per i campi scalari.

La parità applicata 2 volte è l'identità $\Rightarrow \eta^2 = \pm 1$

\hookrightarrow applicata ad un'osservabile! Il campo fermionico non è un'osservabile; un'osservabile è bilineare nel campo fermionico.

La parità agisce sui bispinori moltiplicando un γ^0 .
Nella rapp. chirole, $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \\ & \mathbf{I} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \gamma^0 \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}$$

\Rightarrow la rappresentazione bispinoriale è irriducibile.

L'operatore T agisce sull'operatore quantistico di evoluzione temporale.

TED 1 79

Per conservare la consistenza è necessario che T sia anti-unitario. Come agisce sugli stati? Dobbiamo vedere come agisce sugli operatori a e a^\dagger .

Prendiamo un campo fermionico:

$$T a^{(s)}(k) T^\dagger = \eta_a a^{(-s)}(-k)$$

$$T b^{(s)}(k) T^\dagger = \eta_b b^{(-s)}(-k)$$

In generale questo T esiste ed implementa la trasformazione:

$$[T, H] = 0$$

$$T \hat{\psi}(x^\mu) T^\dagger = -\gamma^1 \gamma^3 \hat{\psi}(-x_\mu)$$

(questa scrittura corrisponde a fissare $\eta_a = +$ ed $\eta_b = -$).

Ci si chiama coniugazione di carica e scambio part. con part.

$$C a^s(k) C^\dagger = \eta b^s(k)$$

$$C b^s(k) C^\dagger = \eta a^s(k)$$

Questo operatore C si definisce con:

$$C \hat{\psi}(x) C^\dagger = \eta [-i \gamma^2 \hat{\psi}^*(x)]$$

Come agisce sul fotone (A^μ)? Il fotone non ha carica - lo stato deve rimanere lo stesso, al max può prendere una fase. Vedremo che la fase sarà -1 .

$$C A^\mu(x) C^\dagger = -A^\mu(x)$$

(A^μ è autostato di C con autovalore -1).

In sintesi:

	P	T	C	
$\varphi(x_\mu)$	$\varphi(x_\mu)$	$\varphi(-x_\mu)$	$\varphi^*(x_\mu)$	campo scalare $\in \mathbb{C}$
$\Psi(x_\mu)$	$\gamma^0 \Psi(x_\mu)$	$\gamma^3 \gamma^0 \Psi(-x_\mu)$	$-i \gamma^2 \Psi^*(x_\mu)$	campo fermionico
$A^\mu(x_\mu)$	$A_\mu(x_\mu)$	$A_\mu(-x_\mu)$	$-A^\mu(x_\mu)$	campo fotonico

Abbiamo considerato le teorie:

- $|\partial_\mu \varphi|^2 - m^2 |\varphi|^2$ teoria scalare complessa
 - $\bar{\Psi} (i \partial - m) \Psi$ teoria fermionica
 - $-\frac{i}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ teoria fotonica
- } teorie libere

Alcune teorie invece rompono P, T e/o C -

Teorema CPT

\forall teoria, CPT non è violata

Abbiamo visto che il campo fermionico non è direttamente una osservabile. Lo è invece, ad esempio,

$$\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$$

Quanti sono i possibili bilineari che posso costruire? Il più generale è della forma:

$$\bar{\Psi}_a \Gamma_{ab} \Psi_b \quad (\text{combinazione lineare di 16 oggetti})$$

Vedremo che gli elementi di questa base hanno comportamenti particolari rispetto alle transf. di Lorentz. Ad esempio, $\Psi_a \gamma^\mu \Psi_b$ è la corrente di Noether.

In rapp. chirale:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^\mu = (\mathbf{I}, \sigma^i) \quad \sigma_\mu = (\mathbf{I}, -\sigma^i)$$

Un'altra rappresentazione interessante è:

$$\gamma^5 \equiv -\frac{i}{4!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma = \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

↳ è il tensore antisimm. a 4 indici

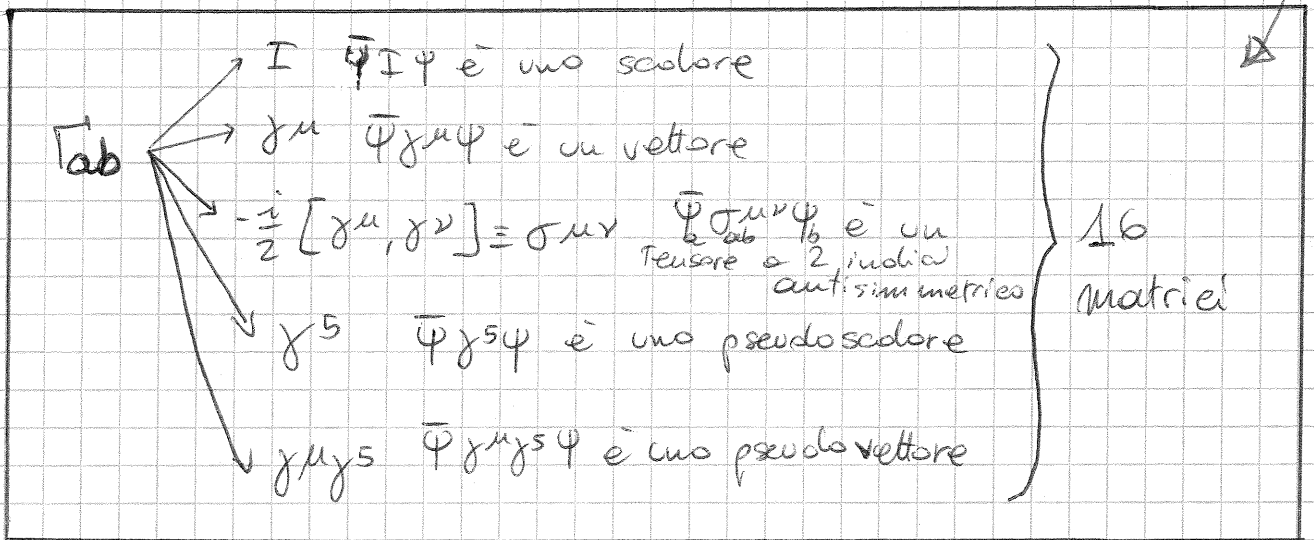
NB: $\psi^\dagger \psi$ non è uno scalare.

$\bar{\psi} \psi$ lo è.

$$\psi^\dagger \psi = \psi^\dagger \gamma_0 \gamma_0 \psi = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \mathcal{J}^0$$

(componente 0 della corrente)

Comportamento
sotto trasformazioni
di Lorentz



Teorema

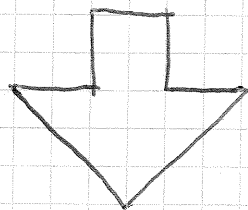
Questi 16 elementi formano una base per lo spazio dei Γ_{ab} .

$$\bar{\psi} \Gamma_{ab} \psi = \sum_{k=1}^{16} c_k \bar{\psi} \Gamma_k \psi, \quad \Gamma_k \text{ è uno dei 16 oggetti}$$

Da questo discende il teorema CPT.

Teorema CPT

- 1) La \mathcal{L} che descrive le interazioni è locale
 $\mathcal{L}_I \equiv e \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) A_\mu(x)$
- 2) La \mathcal{L} è invariante di Lorentz
- 3) \mathcal{L} è hermitiana
 $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$
- 4) Il teorema di spin-statistica è rispettato



CPT (in questo ordine) non è mai violata.

Da questo discendono località (= causalità),
 invarianza di Lorentz ed unitarietà delle
 teorie di campo.

Per dimostrare il teorema dobbiamo considerare
 tutte le possibili combinazioni di P, T, C sui
 campi (scalari, spin 1, bilineari fermionici) che
 rispettano l'invarianza di Lorentz.

Se applichiamo $\Theta \equiv CPT$ al generico termine
 d'interazione si ottiene:

$$\Theta \mathcal{L}_I(x) \Theta^\dagger = \mathcal{L}_I^\dagger(-x) = \mathcal{L}_I(x)$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathcal{L} \text{ hermitiana} \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger - \\ \mathcal{L} \text{ integrato su tutto lo spazio} \Rightarrow \int \mathcal{L}(x) = \int \mathcal{L}(-x) - \end{array} \right)$$

Questa teoria prevede l'esistenza delle antiparticelle.

NB: Le leggi di trasformazione le abbiamo tutte derivate per teorie libere! Questo Trucco di dimostrazione non è rigoroso, associa teorie interagenti a campi liberi.

La teoria di campo quantistica definisce le interazioni solo in via perturbativa, ma è altamente predittiva.

FINE TEORIE LIBERE

Urti in MQR \rightarrow non è più possibile dare una descrizione in termini di funzione d'onda.

$$\Delta x \Delta p = 1$$

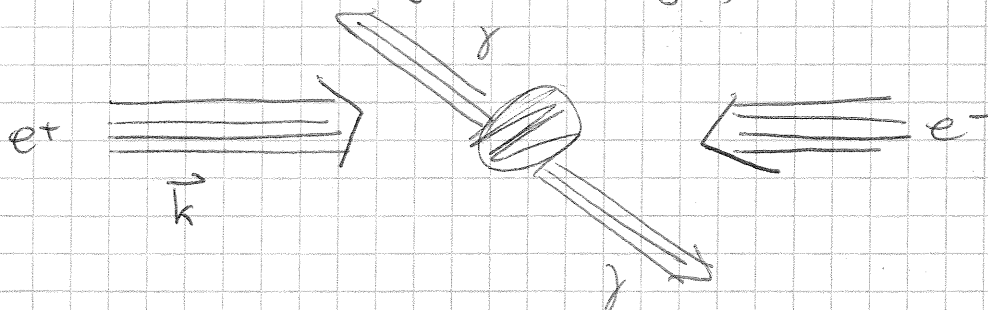
In MQ per avere $\Delta x = 0$ "basta" mandare $\Delta p \rightarrow \infty$.

Ma in MQR se dà un $\Delta p \gtrsim m$ ho la possibilità di creare coppie particella - antiparticella \rightarrow non posso localizzare la particella al meglio di $1/m$ (Compton).

Non ha quindi senso una funzione d'onda; l'unica che conserva un po' di senso è l'onda piana.

Lunghezza d'onda Compton = $1/m$

Prendiamo un fascio ad impulso ben definito (quindi un fascio largo):

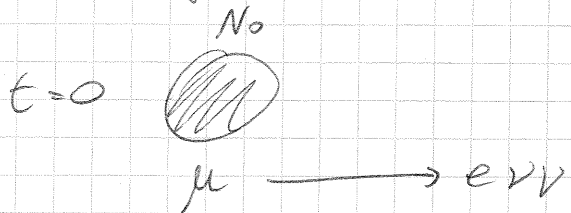


Cercheremo di stimare la probabilità di

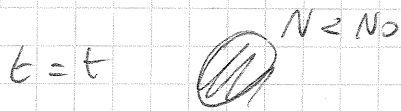
osservare lo stato finale a grande distanza,
dato lo stato iniziale.

Altro processo tipico: decodimento.

Supponiamo di poter prendere un tot di
particelle ferme:



Calcoleremo
la lunghezza di
decodimento e la
vita media, conside-
rando stato iniziale



e stato iniziale come stati di particella
libera, e trattando l'interazione come una
perturbazione.

Torniamo all'urto.

Lo stato iniziale è dato da due fasci
(\equiv particelle) non autointeragenti, molto
distanti.

Immaginiamo che il loro stato dall'interazione
sia descrivibile tramite un operatore S .

La probabilità di osservare $|f\rangle$ è allora
data da:

$$|\langle f | S | i \rangle|^2 = P_{if}$$

Lo stato finale sarà dato da una combinazione

$$\sum_{|f\rangle} |f\rangle \langle f | S | i \rangle = |f\rangle$$

Come dev'essere fatto S ?

Dato uno stato iniziale, la probabilità di

85
andare in un qualunque stato finale f e I
(unitarietà) - Questo impone la condizione:

$$P = \sum_{|i\rangle \rightarrow \text{qualsiasi}} |\langle f|S|i\rangle|^2 = 1$$

$$\Rightarrow S \text{ unitario } (SS^\dagger = 1)$$

$$S \equiv I + iT$$

$$\langle f|S|i\rangle = S_{fi} = \delta_{fi} + iT_{fi}$$

Adesso dobbiamo imporre la cinematica: si conserva
il quadrimpulso - C'è quindi la condizione:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i[(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) T_{fi}]$$

La probabilità w_{fi} di passare dallo stato iniziale
allo stato finale (se S esiste!) è data
da:

$$w_{fi} = |S_{fi}|^2$$

Supponiamo $|f\rangle \neq |i\rangle$. In questa ipotesi,

$$w_{fi} = |S_{fi}|^2 = |(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) T_{fi}|^2$$

28

$$= \int_V \int_{t_i}^{t_f} \delta^4(P_f - P_i)$$

tutto il volume
tutto il tempo

(Era un integrale su tutto lo spazio-tempo: allo fine, tempo e volume si semplificheranno.)

Lavorando con pacchetti d'onda anziché onde piane si ottiene la stessa formula che otterremo con questo metodo.

La probabilità del processo diventa dunque:

$$w_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 VT$$

Inserendo lo spazio delle fasi:

$$dw = |T_{fi}|^2 VT (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) V \frac{d^3P_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3P_2}{(2\pi)^3}$$

(abbiamo supposto 1f) fatto da 2 particelle con impulsi P_1 e P_2).

Se abbiamo a che fare con un fermione lo stato s ,

scrive:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2p^0V}} u e^{-iP_\mu x^\mu}$$

(è un bispinore). Con questa normalizzazione, ad esempio, la corrente si scrive: $J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \frac{1}{V} (1, \vec{p}/p_0)$.

Lo stato che ha 1 fotone nel volume V

si scrive invece: $A^\mu = \frac{\sqrt{4\pi} \epsilon_\mu e^{-iP_\mu x^\mu}}{\sqrt{2p^0V}}$. ($T^{00} = \frac{1p^0}{V}$)

Questo è stato fatto per poter considerare 1i) ed 1f) come stati di particelle libere.

Siamo interessati ad una informazione indipendente dal tempo \Rightarrow probabilità per unità di tempo. Ridefiniamo:

$$dw = |T_{fi}|^2 V \cancel{VT} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) V \frac{d^3P_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3P_2}{(2\pi)^3}$$

$$T_{fi} \equiv \frac{M_{fi}}{(2P_1^0 V \dots)^{1/2}}$$

prodotto di $2P_i^0 V$ \forall particella (entrante o uscente)

Con queste ridefinizioni:

$$dw = \frac{1}{4k_1^0 k_2^0} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \frac{d^3P_1}{(2\pi)^3 2P_1^0} \frac{d^3P_2}{(2\pi)^3 2P_2^0}$$

Avevo chiamato k_i gli impulsi delle particelle iniziali.

N.B.: sono spinti quasi tutti i fattori V . dw è una probabilità per unità di tempo. Per ottenere una sezione d'urto normalizzata ad 1 dobbiamo dividere per il flusso iniziale.

$$d\sigma = \frac{dw}{I/k_1^0 k_2^0} \quad \text{con } I = [(k_1 k_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}$$

Ottendiamo:

$$d\sigma = \frac{1}{4I} |M_{fi}|^2 d\phi^{(2)}$$

Sezione d'urto invariante

con $d\phi^{(2)}$ spazio delle fasi a 2 particelle:

$$d\phi^{(2)} = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0}$$

Scritto in questo modo, $d\phi^{(2)}$ è un invariante di Lorentz (è prodotto di invarianti) $\Rightarrow d\sigma$ è invariante.

Doiremo ora calcolare M_{fi} , che è il termine che conterra la dinamica del processo (fin qui abbiamo usato solo cinematica).

Utilizzeremo i diagrammi di Feynman per implementare un algoritmo perturbativo che ci permetta di calcolarlo.

Per i decadimenti il procedimento è equivalente, dovremo solo estendere lo spazio delle fasi:

$$d\phi^{(2)} \rightarrow d\phi^{(n)} \quad (n \text{ corpi})$$

Si definisce vita media $\tau = \left(\frac{dP}{dt}\right)^{-1}$ è per definizione un concetto probabilistico.

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau} \quad (\text{è un processo memoryless}).$$

Per calcolare la vita media devo calcolare la probabilità di decadimento per unità di tempo. L'espressione che si ottiene è fatta così:

$$dw = \frac{1}{2\kappa^0} |\Pi_{fi}|^2 d\phi^{(m)} \quad \text{probabilità di decadimento a } m \text{ corpi}$$

In generale la vita media dipende dal sistema di riferimento. Di solito, τ ed $1/\tau = \int \Gamma$ sono calcolate nel s.d.r. a riposo.

$$d\Gamma = \frac{1}{2M} |\Pi_{fi}|^2 d\phi^{(m)} \quad (M \text{ mosso iniziale})$$

$$d\Gamma \propto \frac{1}{\tau} = \frac{dP}{dt} \propto |\langle f | S | i \rangle|^2 \quad (\text{PROCEDIMENTO})$$

$$S \equiv I + iT \equiv I' + i(2\pi)^4 \delta^4(P_i - \sum_f P_f) T_{fi}$$

$$T_{fi} \rightarrow T_{fi} (M_{fi}) \quad [\dots]$$

Il fattore γ che fa cambiare dw al variare del sistema di riferimento viene dal fattore $1/\kappa^0$.

08/11/2011

DATE PER GLI SCRITTI:

- 1 - la prima settimana dopo le vacanze (10-12 gen)
 - 2 - a distanza di 3-4 settimane (1°-2° sett. di febbraio)
- Ci saranno 2 appelli a gennaio-febbraio, 2 d'estate e 1 a settembre.

Una conseguenza dell'unitarietà della matrice S è il teorema ottico.

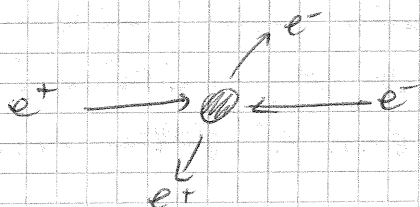
Se esplicitiamo l'equazione $SS^\dagger = 1$ e calcoliamo gli elementi di matrice SS^\dagger_{fi} otteniamo:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) T_{fi}; \quad SS^\dagger_{fi} = \delta_{fi} \Rightarrow$$

$$T_{fi} - T_{fi}^* = i \left[(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_m) T_{fm} T_{ip}^* \right], \quad P_f \equiv P_i$$

$$\text{Infatti: } (SS^\dagger)_{fi} = [\delta_{fm} + i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_m) T_{fm}] [\delta_{mi} - i(2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_m) T_{mi}^*] = \delta_{fi}$$

Qui stiamo considerando elementi di matrice "m" su stadi intermedi. Se consideriamo un processo elastico, ad esempio:



trascurando l'elicità, gli stati intermedi saranno caratterizzati dagli impulsi che possono assumere e^+ ed e^- :

$$|m\rangle = |P_+ P_- \rangle$$

Di conseguenza, tenendo presente che $\Delta x \Delta p \sim 1$

$$T_{fi} - T_{if}^* = i \int T_{fn} T_{in}^* (2\pi)^4 \delta^4(\dots) \frac{d^3P_f}{(2\pi)^3} \frac{d^3P_i}{(2\pi)^3} V^2$$

$$M_{fi} - M_{if}^* = i \int M_{fn} M_{in}^* d\phi^{(2)}$$

Quando $|i\rangle = |f\rangle$ questo integrale è scrivibile in termini di cose note. In questo limite:

$$M_{fi} - M_{if}^* = 2i \Im M_{ii} = i \int |M_{in}|^2 d\phi^{(2)}$$

Avevamo scritto ieri che: $d\sigma = \frac{1}{4I} |M|^2 d\phi^{(2)}$

\Rightarrow Teorema ottico
 $\Im M_{ii} = 4I \sigma_T$ con σ_T sezione d'urto totale

Il teorema ottico discende semplicemente dalla richiesta di consistenza $S S^\dagger = 1$.

Questo chiude la relazione tra matrice S e sezione d'urto. Ora occorre stabilire una relazione tra la matrice S e la teoria.

Otterremo un' espressione perturbativa di S .

L'idea è simile all'approssimazione di Born.

La teoria che useremo si dice teoria delle perturbazioni invariante (di Lorentz).

$$H \equiv H_0 + H_I$$

$$\Phi = \sum C_n \phi_n^{(0)}$$

con $\phi_n^{(0)}$ autostati di H_0 .

$$\phi_n^{(0)} = e^{-i \epsilon_n^{(0)} t} \underbrace{\phi_n^{(0)}}_{\text{parte indep. del tempo}} \quad i \frac{\partial \phi_n^{(0)}}{\partial t} = H_0 \phi_n^{(0)}$$

C_n devono dipendere dal tempo - (altrimenti H_I banale)

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = (H_0 + H_I) \phi$$

Sostituendo l'espressione di ϕ :

$$\sum_n i \frac{\partial c_n \phi_n^0}{\partial t} = (H_0 + H_I) \sum_{c_n} c_n \phi_n^0$$

$$\frac{\partial [c_n \phi_n^0]}{\partial t} = \frac{\partial c_n}{\partial t} \phi_n^0 + c_n \frac{\partial \phi_n^0}{\partial t}$$

$$\sum_n \left[i \frac{\partial c_n}{\partial t} \phi_n^0 + i c_n \frac{\partial \phi_n^0}{\partial t} \right] = \sum_n \left[H_0 c_n \phi_n^0 + H_I c_n \phi_n^0 \right]$$

Moltiplico a sinistra e a destra per ϕ_m^{*0} :

$$i \dot{c}_m = \sum_n c_n H_{Imn}$$

$$H_{Imn} = \langle \phi_m^0 | H_I | \phi_n^0 \rangle = e^{i(\epsilon_m^0 - \epsilon_n^0)t} \langle \bar{\phi}_m^0 | H_I | \bar{\phi}_n^0 \rangle$$

(H_I è indipendente dal tempo).

Introduciamo:

$$\Psi \equiv e^{iH_0 t} \phi = \sum c_n \bar{\phi}_n^0$$

$$H_I(t) \equiv e^{iH_0 t} H_I e^{-iH_0 t} \quad \text{stessa evoluzione temporale dei campi liberi}$$

Possiamo riscrivere l'equazione precedente nella forma:

$$\dot{\Psi} = H_I(t) \Psi \quad \Leftrightarrow \quad i \dot{c}_m = \sum_n c_n H_{Imn}$$

Se H_I fosse nulla, saremmo semplicemente passati dalla rapp. di Schrödinger a quella di Heisenberg.

$H_I \neq 0 \Rightarrow$ abbiamo "tdto" alla rapp. di S. l'evoluzione di particella libera, che sarebbe dominante.

Questo si dice rappresentazione di interazione.

La soluzione all'equazione è della forma:

$$\Psi(t_f) = \underbrace{T \left[e^{-i \int_{t_i}^{t_f} H_I(t) dt} \right]}_{\text{T-prodotto}} \Psi(t_i)$$

$$1 - i \int_{t_i}^{t_f} H_I(t) dt - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt_1 dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \dots$$

Qw: c'è un problema di ordinamento: a tempi diversi H_I non commutano \Rightarrow si introduce il

$$T\text{-prodotto: } T(\phi(t_1)\phi(t_2)) = \Theta(t_1 - t_2)\phi(t_1)\phi(t_2) + \Theta(t_2 - t_1)\phi(t_2)\phi(t_1)$$

dove Θ è la funzione di Heaviside. Ciò corrisponde al mettere i tempi più grandi a sinistra.

$$T\left[e^{-i\int \dots}\right] \equiv S(t_f, t_i)$$

$$\Psi(t_f) = S(t_f, t_i)\Psi(t_i)$$

Nei casi a grande distanza, il nostro operatore di evoluzione S è semplicemente:

$$S = S(\infty, -\infty) = T e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} H_I(t) dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots dt_k T[H_I(t_1) \dots H_I(t_k)]$$

S va sempre inteso in termini di sviluppo perturbativo, o la serie è non convergente.

Si dimostra che in rapp. delle interazioni la lagrangiana d'interazione $\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu$ si può scrivere in termini di campi liberi, sostituendo ad A_μ il suo sviluppo.

10/11/2011

Abbiamo costruito un approccio perturbativo in rappresentazione delle interazioni.

$$S = T\left[\exp\left(-i\int_{-\infty}^{+\infty} H_I(t) dt\right)\right]$$

La ragione per cui c'è dipendenza dal tempo è che H_I non commuta con H_0 :

$$H_I(t) = e^{iH_0 t} H_I e^{-iH_0 t}$$

Il T-prodotto serve nell'ottica dello sviluppo dell'esponenziale:

$$S \approx 1 - i \int_{-\infty}^{+\infty} H_I(t) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 T[H_I(t_1) H_I(t_2)] \dots$$

A cosa serve S? Se abbiamo una condizione iniziale $|i\rangle$ a $t = -\infty$, $|\langle f|S|i\rangle|^2$ dà la probabilità che esso evolva in uno stato finale $|f\rangle$.

Ad es. per un urto:

$|i\rangle = 2$ particelle "libere"

urto = confinato in uno spazio piccolo ($\Rightarrow \Delta t$ piccolo)

$|f\rangle =$ particelle libere, estratte quindi dallo stesso spazio di Fock di $|i\rangle$.

Vedremo che questa definizione di S porterà ad una teoria delle perturbazioni invariante di Lorentz: H_I è ovviamente invariante, ma $H_I(t)$ poteva non esserlo se era definita diversamente.

Vogliamo ora costruire la QED.

La teoria classica si descrive attraverso la Lagrangiana invariante

$$L = L_e + L_\gamma + L_I$$

fermione libero
campo fotoneico
interazione

$$L_\gamma = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad L_I = J_\mu A^\mu$$

Limitiamoci inizialmente alla teoria libera:

$$L_e = \bar{\Psi} (i\not{D} - m) \Psi \quad \text{Teoria di Dirac}$$

Poi, in teoria di campo quantistica occorre aggiungere un termine ad L_γ per ottenere una quantizzazione covariante:

$$L_\gamma = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2$$

Questo è tutto per le particelle libere. Per il termine d'interazione si ha (e questo è un risultato generale):

$$L_I = -H_I$$

Andiamo ora in MQ.

$$J_\mu A^\mu = e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu$$

(dal teorema di Noether). Dobbiamo sostituire i campi con operatori:

$$H_I = : e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu :$$

Scriviamo H_I in termini di campi liberi perché la sua evoluzione temporale (H_0) è la stessa dei campi liberi.

N.B.: \forall particella fondamentale in gioco dovremo aggiungere il suo termine di particella libera alla lagrangiana.

Per scrivere H_I si è usato l'accoppiamento minimale. Verifichiamo che questo schema ci porta ad una teoria invariante:

$$S = T \left[\exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d^3x \underbrace{: \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi : A_\mu}_{\text{densità di } \mathcal{L}_I} \right) \right]$$

$$dt d^3x = d\Omega = d^4x$$

$$= T \left[\exp \left(-ie \int d\Omega \underbrace{: \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi :}_{\text{invariante}} : A_\mu \right) \right]$$

INVARIANTE?

Vedremo che anche il T-prodotto è invariante dal punto di vista dell'invarianza di Lorentz.

Sviluppo al 2° ordine:

$$\frac{1}{2} (e^2) \int d^4x_1 d^4x_2 T [J^\mu(x_1) A_\mu(x_1) J^\nu(x_2) A_\nu(x_2)]$$

la potenza di e peserà l'ordine della perturbazione

N.B.: Se non ci fosse il T-prodotto, avremmo scritto semplicemente il prodotto di 2 integrali.

Ci sono 2 casi:

- 1) $(x_1 - x_2)^2 < 0$ (genere SPAZIO)
- 2) $(x_1 - x_2)^2 > 0$ (genere TEMPO)

Nel caso 1 l'ordinamento dipenderebbe dal sistema di riferimento. Ma sappiamo che in questo caso la causalità implica che questi operatori commutino \Rightarrow possiamo ordinarli come vogliamo. Nel caso 2 il concetto di prima e dopo diventa assoluto, non

dipende dal s.d.r. \Rightarrow è invariante.

Il T-prodotto non causa quindi problemi di invarianza.

Poi, se $\#I$ hermitiano $\Rightarrow S$ unitaria

Questo definisce la QED. Esso risulta invariante anche oltre il 2° ordine: il ragionamento precedente è del tutto generale.

\mathcal{L}_I

$$S = T \exp \left[-ie \int d^4x : \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu : \right]$$

In rapp. di interazione: campi possono essere scritti in termini di campi liberi:

$$\Psi(x) = \int d\tilde{k} \left(a^{(r)} u e^{-ikx} + b^{(r)} v e^{ikx} \right) \left. \begin{array}{l} \text{campi} \\ \text{fermionici} \\ \text{liberi} \end{array} \right\}$$
$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$$

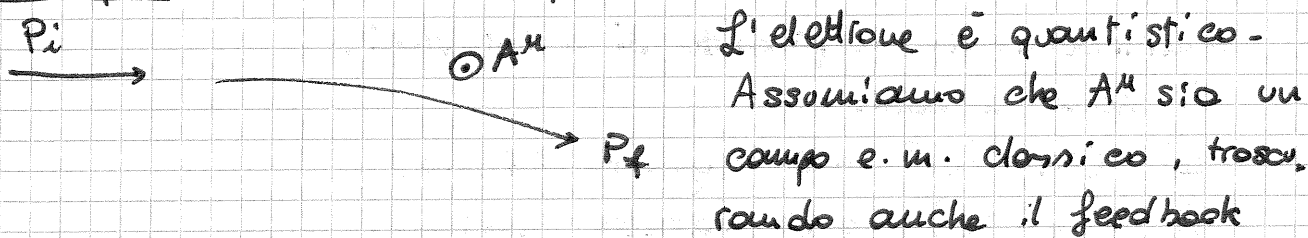
$$A^\mu = \int d\tilde{k} \left(c^{(\lambda)} \epsilon^\mu e^{-ikx} + c^{(\lambda)*} \epsilon^\mu e^{ikx} \right) \left. \begin{array}{l} \text{campo} \\ \text{e.m.} \end{array} \right\}$$

La differenza tra A^μ e Ψ è che A^μ è hermitiano \Rightarrow è autostato di C con |a.v. \perp \Rightarrow il fotone è l'anti-particella di se stesso.

Sostituiamo: campi liberi ed andiamo a calcolare gli elementi di matrice.

$$|i\rangle \equiv |e^+(p_1), e^-(p_2)\rangle = b^\dagger(p_1) a^\dagger(p_2) |0\rangle \quad (\text{esempio})$$

Esempio: e^- in un campo esterno ($\equiv e^-$ contro atomo):



tra e^- e campo magnetico (irraggiamento).

$\Rightarrow A^\mu$ non è un operatore ma una funzione data.

$$\tilde{A}^\mu(q) = \int d^4x A^\mu(x) e^{-iq_\mu x^\mu} \quad \text{trasformato di Fourier}$$

Supponiamo che il campo e.m. non dipende dal tempo

(sia statico): in questo caso la trasformata sarà

$$\tilde{A}(q) = \delta(q_0) \tilde{A}(\vec{q}) = \delta(q_0) \int d^3x A^\mu(\vec{x}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}$$

Vogliamo calcolare la sezione d'urto.

$$\langle P_f, \lambda_f | S | P_i, \lambda_i \rangle$$

polarizzazioni

stato iniziale e finale sono elettroni:

Se non ci fosse interazione,

$$= \langle 0 | a^{(\lambda)}(P_f) S a^{(\lambda)}(P_i) | 0 \rangle$$

questo termine sarebbe nullo -

Questo calcolo si fa utilizzando le regole di commutazione di questa algebra.

questo è classico, non quantistico

$$S = I - i \int \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu +$$

1° ordine

$$+ \frac{i^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) T[\bar{\psi} \gamma^\mu \psi(x_1) \bar{\psi} \gamma^\nu \psi(x_2)]$$

2° ordine

In questo corso calcoleremo sempre il primo ordine non banale. Qualunque sia. Come si decide qual è il primo non banale? Vedremo che in questo caso, se supponiamo $P_f \neq P_i$, l'ordine 0 (l'identità) non contribuisce, ed il primo sarà quello $\propto e$.

$$\langle P_f, \lambda_f | S | P_i, \lambda_i \rangle = \langle 0 | a(P_f) [-i e \int d^4x : \int d\tilde{k}_1 (a^\dagger(k_1) \bar{u} e^{+ik_1x} + b \bar{v} e^{-ik_1x}) \gamma^\mu \int d\tilde{k}_2 (a(k_2) u e^{-ik_2x} + b^\dagger v e^{+ik_2x}) :] a^\dagger(P_i) | 0 \rangle \int d^4q \tilde{A}(q) e^{-iqx}$$

è una funzione, non un operatore \Rightarrow può stare fuori

L'algebra da implementare è:

$$[a(k), a^\dagger(k')]_+ = (2\pi)^3 \delta^3(k-k') 2k^0$$

$$[a(k), a(k')]_+ = 0$$

I termini con b e b⁺, per il prodotto normale, sono sempre in questo ordine: b⁺ b. Inoltre:

b|0> = 0. Gli stati iniziali e finali non contengono

Se $P_f \neq k_1, \neq k_2, \neq P_i$:
 $\langle 0 | a(P_f) a^\dagger(k_1) a(k_2) a^\dagger(P_i) | 0 \rangle = - \langle 0 | a^\dagger(k_1) a(k_2) a^\dagger(P_i) a(P_f) | 0 \rangle = 0$
Se due impulsi sono =, c'è da aggiungere un anti-commutatore \Rightarrow condizione NECESSARIA per avere un risultato non nullo è che ci siano un a ed un a⁺ con lo stesso argomento.
In questo caso, essi sono forniti dallo sviluppo di $\bar{\psi}$ e ψ , che sono \int su tutti i possibili impulsi.

positroni \Rightarrow gli operatori b e b^\dagger non contribuiscono.

Otengo:

$$\int d^4x (-ie) \langle 0 | a(p_f) \left[\int d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2 \bar{u}_{k_1} \gamma^\mu u_{k_2} a^\dagger(k_1) a(k_2) e^{-i(k_2 - k_1)x} \right] a^\dagger(p_i) | 0 \rangle \int d^4q \tilde{A}(q) e^{-iqx}$$

Se faccio uno scambio:

questo è una funzione

$$a(k_2) a^\dagger(p_i) = -a^\dagger(p_i) a(k_2) + \frac{1}{(2\pi)^3 \delta^3(k_2 - p_i) 2E_{p_i}^0}$$

\hookrightarrow applicato a $|0\rangle$ fa 0

Facciamo lo stesso anche a sinistra - Rimane:

$$-ie \int d^4x \int d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2 d^4q \bar{u}(k_1) \gamma^\mu u(k_2) \tilde{A}(q) e^{-i(k_2 - k_1 + q)x}$$

$d\tilde{k}_1 = \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2E_{k_1}^0}$ $d\tilde{k}_2 = \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2E_{k_2}^0}$

$$\cdot \frac{1}{(2\pi)^3 \delta^3(k_2 - p_i) 2E_{p_i}^0} \frac{1}{(2\pi)^3 \delta^3(k_1 - p_f) 2E_{p_f}^0} \langle 0 | 0 \rangle$$

I commutatori sono funzioni, non operatori.

Dalle delta: $k_1 = p_f$, $k_2 = p_i$. Otengo:

$$-ie \int d^4x \int d^4q \bar{u}(p_f) \gamma^\mu u(p_i) \tilde{A}_\mu(q) e^{-i(p_i - p_f + q)x} \langle 0 | 0 \rangle$$

Il vuoto è normalizzato a 1 $\Rightarrow \langle 0 | 0 \rangle = 1$

N.B.: le mosse delle particelle sono fissate.

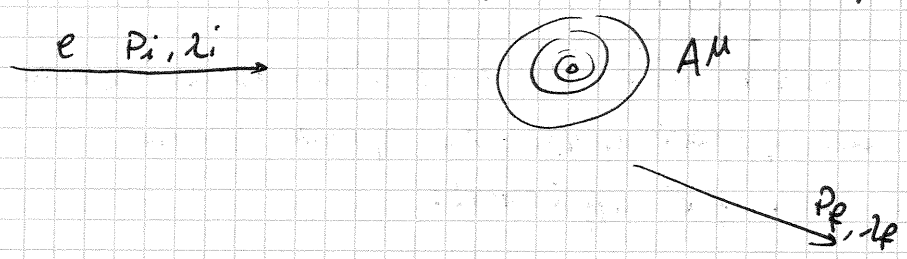
L'integrale in d^4x porta giù una δ .

$$-ie \int d^4q \bar{u}(p_f) \gamma^\mu u(p_i) \tilde{A}_\mu(q) (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f + q)$$

$$= -ie \bar{u}(p_f) \gamma^\mu u(p_i) \tilde{A}_\mu(q)$$

M/M/M

Scattering di un e- da parte di un campo e.m.



N.B.: questo è uno stato quantistico, calcoliamo la PROBABILITÀ di misurare p_f nello stato finale.

$$\langle f | S | i \rangle$$

$$S = T \left[e^{-i \int d^4x \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \cdot A_\mu} \right]$$

$$|i\rangle = a^{(x_i)^+}(p_i) |0\rangle \quad |f\rangle = a^{(x_f)^+}(p_f) |0\rangle$$

A^μ classico

Tutto si scrive in termini di operatori di creazione e distruzione. Per fare i calcoli basta implementare l'algebra

$$[a_k, a_{k'}^+] = (2\pi)^3 \delta^3(k - k') 2k^0$$

I diagrammi di Feynman forniscono lo strumento per arrivare al risultato senza dover fare tutti i calcoli di ieri.

Assumendo $|f\rangle \neq |i\rangle$:

$$\langle f | S | i \rangle = \int (-ie) d^4q \delta^4(p_f - p_i - q) \tilde{A}^\mu(q) \bar{u}(p_f) \gamma^\mu u(p_i)$$

$$\tilde{A}^\mu(q) = \delta(q^0) \tilde{A}_\mu(\vec{q}) \quad [\text{il campo è supposto statico}]$$

C'è un campo esterno \Rightarrow il 4 impulso non si conserva. Ma il campo è statico \Rightarrow ci aspettiamo che l'energia sia conservata ($p_f^0 = p_i^0$).

Dalle due δ segue: $\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$ $q^0 = p_f^0 - p_i^0 \wedge q^0 = p_f^0 - p_i^0$

Ottengo: \nearrow c'è sempre un 2π (prima era stato trascurato)

$$\langle f | S | i \rangle = -ie (2\pi) \delta(p_f^0 - p_i^0) \tilde{A}_\mu(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \bar{u}(p_f) \gamma^\mu u(p_i)$$

È emersa in modo naturale la conservazione dell'energia -

In questa derivazione non siamo stati attenti alla normalizzazione degli stati: questo elemento è M_{fi} o T_{fi} ? È M_{fi} .

Quando abbiamo scritto S in via teorica avevamo usato la conservazione del quadriimpulso: in questo caso quella derivazione non può applicarsi!

Dobbiamo vedere come si relaziona S alla sezione d'urto.

$$S_{fi} = \delta_{fi} + 2\pi i e \delta(p_f^0 - p_i^0) T_{fi}$$

$$|S_{fi}|^2_{|f \neq i\rangle} = 2\pi \delta(p_f^0 - p_i^0) |T_{fi}|^2 \text{ (T)}$$

è lo stesso trucco dell'altra volta: abbiamo fatto diventare una delle 2 δ uno spazio-tempo (in questo caso in tempo)

$$T_{fi} = \frac{M_{fi}}{(2p_i^0 V)^{1/2}}$$

$$\begin{aligned} \omega_f &= (2\pi) \delta(p_f^0 - p_i^0) |T_{fi}|^2 = \\ &= (2\pi) \delta(p_f^0 - p_i^0) |M_{fi}|^2 \frac{1}{2p_i^0 V} \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2p_f^0} \end{aligned}$$

Per ottenere la sezione d'urto devo dividere questo per il flusso (v/V):

$$\frac{d\sigma}{d^3 p_f} = \frac{1}{2|\vec{p}_i|} |M_{fi}|^2 2\pi \delta(p_f^0 - p_i^0) \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2p_f^0}$$

Per una singola particella entrante $\vec{v}_i = \frac{\vec{p}_i}{p_i^0}$.

Riconosciamo M_{fi} come $-ie \tilde{A}_\mu(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \bar{u}(p_f) \gamma^\mu u(p_i)$ (= S_{fi} esclusa la δ e il 2π).

Abbiamo ancora un'integrazione in $d^3 p$ e una delta:

$$p_0^2 = \vec{p}^2 + m^2 \Rightarrow p_0 dp_0 = |\vec{p}| dp$$

$$d^3 p = \overset{\text{coordinate sferiche}}{r^2 dr d\Omega} \underset{= p_0 dp_0}{}$$

$$\text{Si ottiene: } d\sigma = \frac{1}{2|\vec{p}_i|} |M_{fi}|^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{p_f p_f}{2 p_f^0} d\Omega$$

[stiamo considerando quantità che poi verranno integrate \Rightarrow possiamo lavorare sulle δ]

L'elemento di matrice è dato da:

$$M_{fi} = -ie \bar{u}_a^{(\lambda_f)}(P_f) \gamma^\mu u_b^{(\lambda_i)}(P_i) \tilde{A}_\mu(\vec{q}), \quad \vec{q} = \vec{P}_f - \vec{P}_i$$

È α ed e . In queste unità, $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$

Dobbiamo calcolare il modulo quadro di M_{fi} .

$$|M_{fi}|^2 = e^2 A_\mu(q) \bar{u}_a^{(\lambda_f)}(P_f) \gamma^\mu u_b^{(\lambda_i)}(P_i) \tilde{A}_\nu(q) \left[\bar{u}_c^{(\lambda_f)}(P_f) \gamma^\nu u_d^{(\lambda_i)}(P_i) \right]^*$$

PARENTESI

$(\bar{u}_a^{(\lambda_f)} \gamma_{ab} u_i^{(\lambda_i)})^*$ γ generica matrice 4×4

||

$u_b^{(\lambda_i)*} \gamma_{ab}^* \gamma^0 u_a^{(\lambda_f)} = u_b^{(\lambda_i)*} \gamma^0 \gamma_{ab}^* \gamma^0 u_a^{(\lambda_f)} =$

$= \bar{u}_b^{(\lambda_i)} \gamma_{bc}^0 \gamma_{ca}^* \gamma_{ae}^0 u_e^{(\lambda_f)} = \bar{u}_b^{(\lambda_i)} \gamma^0 \gamma^+ \gamma^0 u_a^{(\lambda_f)}$

Applichiamolo:

$$[\dots]^* = \bar{u}^{(\lambda_i)}(P_i) \gamma^0 \gamma_{\nu}^+ \gamma^0 u^{(\lambda_f)}(P_f)$$

Es: sta una relazione generale tra le matrici γ :

$\gamma^0 \gamma_\nu^+ \gamma^0 = \gamma^\nu$

$$|M_{fi}|^2 = e^2 A_\mu(q) A_\nu(q) \bar{u}_a^{(\lambda_f)}(P_f) \gamma^\mu u_b^{(\lambda_i)}(P_i) \bar{u}_c^{(\lambda_i)}(P_i) \gamma^\nu u_d^{(\lambda_f)}(P_f)$$

NOTE:

- l'e- iniziale non è polarizzato: è uno stato non quantistico puro, è uno stato misto. C'è probabilità $1/2$ di trovare uno stato con polarizzazione $+$ e probabilità $1/2$ di trovare polarizzazione $-$.

Ad ogni modo, se non facciamo misure di polarizzazione, occorre sommare sugli stati finali di polarizzazione.

Per lo stato $|i\rangle$ non si somma: si media tra i due possibili casi.

non mischiato (i) non polarizzato

$$|M_{fi}|^2 \xrightarrow{\delta_{\lambda\lambda'}} \sum_{\lambda\lambda'} |M_{fi}|^2 \xrightarrow{\delta} \frac{1}{2} \sum_{\lambda_i} \sum_{\lambda_f} |M_{fi}|^2$$

La somma su λ_f entra su soli due termini, e anche la somma su λ_i .

N.B.: abbiamo esplicitato gli indici spinoriali: possiamo, tenendone traccia, rimescolare i termini come vogliamo.

$$\frac{1}{2} e^2 A_\mu(q) A_\nu(q) \left[\sum_{\lambda_f} u_d^{(\lambda_f)}(p_f) \bar{u}_a^{(\lambda_f)}(p_f) \right] \gamma_{ab}^\mu \left[\sum_{\lambda_i} u_b^{(\lambda_i)}(p_i) \bar{u}_c^{(\lambda_i)}(p_i) \right] \gamma_{cd}^\nu$$

Si somma sulle matrici quando sommiamo contributi dello stesso stato finale, ma si somma sui moduli quadri quando sommiamo contributi relativi a stati diversi, indipendenti.

$$\sum_{\lambda} u_a^{(\lambda)}(p) \bar{u}_b^{(\lambda)}(p) = \not{p} + m$$

Questo è un risultato algebrico generale.

$$(\not{p} + m)_{ab} = p^\mu \gamma_{\mu ab} + m \delta_{ab}$$

⇓

$$\left[\sum_{\lambda_f} \dots \right] = (\not{p}_f + m)_{da}$$

$$\left[\sum_{\lambda_i} \dots \right] = (\not{p}_i + m)_{bc}$$

Gli indici sono ciclici: $(d) a b c (d)$

Poi: $(\not{p}_f + m)_{da} \gamma_{ab}^\mu (\not{p}_i + m)_{bc} \gamma_{cd}^\nu = \text{Tr} \left[\underbrace{(\not{p}_f + m)}_{\not{p}_f \gamma^\beta} \gamma_{ab}^\mu \underbrace{(\not{p}_i + m)}_{\not{p}_i \gamma^\alpha} \gamma_{cd}^\nu \right]$

$|M_{fi}|^2$ si riduce al calcolo di una traccia di matrici γ .

- $\text{Tr}(\text{numero dispari di matrici } \gamma) = 0$
- $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4 g^{\mu\nu}$
- $\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = 4 (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma})$

A seconda di quanto il processo si complica sono possibile trovare tracce di più matrici γ (6, 8, ...).

Dobbiamo calcolare:

$$\text{Tr} \left[\left(p_{\beta} \gamma^{\beta} + m \right) \gamma^{\mu} \left(p_{\alpha} \gamma^{\alpha} + m \right) \gamma^{\nu} \right] =$$

(ci sono altri 2 termini a traccia nulla)

$$= p_{\beta} p_{\alpha} \text{Tr} \left[\gamma^{\beta} \gamma^{\mu} \gamma^{\alpha} \gamma^{\nu} \right] + m^2 \text{Tr} \left[\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \right]$$

coriche termine non fanno
campi magnetici

Si ottiene: (avendo scelto A^{μ} campo elettrico statico
con gauge tale da avere solo la componente 0)

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} |M_{fi}|^2 = \left(4 p_0^2 - \vec{q}^2 \right) |\tilde{A}_0|^2$$

$$d\sigma = e^2 |\tilde{A}_0(q)|^2 \frac{1}{4\pi^2} p_0^2 \left(1 - \frac{\vec{q}^2}{4p_0^2} \right) d\Omega$$

Se abbiamo una distribuzione di carica $\rho(r)$: $\tilde{A}_0(\vec{q}) = \frac{4\pi \tilde{\rho}(q)}{\vec{q}^2}$

Il limite di questa trattazione è che stiamo considerando un campo classico, trascurando fenomeni quantistici.

Uno stato puro è una combinazione di elementi di una base:

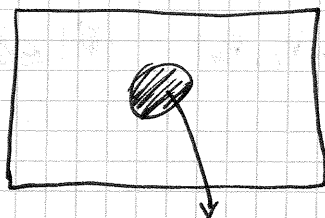
$$|\Psi_m\rangle = \sum_i |i\rangle \langle i | \Psi_m \rangle \quad \Leftrightarrow \sum_i |i\rangle \langle i| = 1$$

$$\langle \Psi_m | Q | \Psi_m \rangle = \sum_{i,j} \langle \Psi_m | i \rangle \langle i | Q | j \rangle \langle j | \Psi_m \rangle$$

Questa è una misura di Q su stati puri.

Immaginiamo di avere un sistema con un certo volume. Esso è uno stato puro quantistico.

Vogliamo fare misure solo su un sottosistema. In generale si dimostra che il sottosistema non è scrivibile in termini di stati puri.



Per descriverlo si introduce la matrice di densità.

sottosistema interagente.

Il risultato della misura è una sovrapposizione:

$$\sum w_m \langle m | \rho | m \rangle \quad (\text{non piú } \langle \psi_m | \rho | \psi_n \rangle)$$

Questo è una via di mezzo tra una descrizione quantistica e una statistica, ed estende la MQ a sistemi piú complicati.

$$\sum w_m \langle m | \rho | m \rangle = \sum w_m \langle m | i \rangle \langle i | \rho | j \rangle \langle j | m \rangle$$

Definiamo:

$$\rho_{ij} = \sum_m \langle j | m \rangle w_m \langle m | i \rangle$$

MATRICE DENSITÀ

Gli stati $|m\rangle$ sono quelli che diagonalizzano la matrice densità.

$$\sum w_m \langle m | \rho | m \rangle = \text{Tr}(\rho \rho)$$

Questa descrizione contiene anche quella in termini di stati puri: ovvero

descriz. stati puri $\Leftrightarrow \begin{cases} w_u = 1 & u = u' \\ w_u = 0 & u \neq u' \end{cases}$

La matrice ρ deve essere hermitiana: $\rho = \rho^\dagger$

Inoltre: $\text{Tr} \rho = \sum_n w_n = 1$ \rightarrow è una somma di probabilità

Come si vede se uno stato è puro o no? $w_n \in [0,1]$

$$\text{Tr} \rho^2 = \sum_n w_n^2 \leq \sum_n w_n \Rightarrow \text{Tr} \rho^2 \leq 1$$

$$\text{Tr} \rho^2 = 1 \Leftrightarrow \text{stato puro} \Leftrightarrow \rho^2 = \rho \Rightarrow \rho \text{ agisce da proiettore.}$$

Applichiamo la matrice densità su un sistema a 2 livelli (ad es. 2 stati di spin): $\uparrow \downarrow$

$$\rho_{2 \times 2} = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma} \right) \quad \text{dove } \vec{P} = (P_x, P_y, P_z), \quad |\vec{P}| \leq 1$$

FOURIERIZZAZIONE \uparrow ha traccia nulla

Per uno stato puro, $|\vec{P}| = 1$.

14/11/11

105

Matrice densità per uno spinore: è la più generale matrice hermitiana a traccia 1 (gli elem. della diagonale hanno significato di probabilità).

spin $\uparrow \downarrow$ (-)

$$\rho = \rho^\dagger \quad \text{tr} \rho = 1$$

$$\rho = \frac{1}{2} (1 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})$$

matrice densità per un oggetto a 2 stati (2×2)

$$\sigma^2 = 1 \quad \text{tr} \sigma = 0 \quad \Rightarrow \text{tr}(\rho \frac{\sigma_i}{2}) = \vec{p}/2$$

\vec{p} ha il significato di polarizzazione - $|\vec{p}| \leq 1$

Stato non polarizzato: $\vec{p} = 0$

$\vec{p} = 1 \Rightarrow$ stato puro ($\rho = \rho^2$ e diventa un proiettore).

N.B.: Quando vogliamo calcolare il valore di aspettazione di una osservabile:

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{tr}(\rho \hat{O})$$

In questo caso, "stato non polarizzato" \equiv prob. $1/2$ di trovare \uparrow e prob. $1/2$ di trovare \downarrow .

Vogliamo ora costruire un oggetto che descriva la polarizzazione in ambito covariante:

spinore \rightarrow bispinore.

Quanto segue vale per particelle massive, per le quali è possibile definire un frame a riposo.

(=) \approx rappresentazione standard $\begin{pmatrix} = \\ 8 \end{pmatrix}$

\Rightarrow la matrice (stavolta 4×4) ce la spezziamo del tipo:

$$\left(\begin{array}{c|c} P_{2 \times 2} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

Im ropp. standard:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho \equiv \frac{1 + \gamma^0}{2} \left(\frac{1 - \gamma^5 \vec{\gamma} \cdot \vec{n}}{2} \right) \rightarrow \text{polarizzazione}$$

$$\begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa espressione si riferisce al sistema di riferimento solidale alla particella - In un sistema generico si dimostra che ρ è scrivibile

nella forma:

$$\rho = \frac{\not{p} + m}{2m} \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{a}}{2} \right)$$

con $a_\mu a^\mu = -1$ e, nel s.d.r. solidale, $a^\mu = (0, \vec{n})$ -

Nel sistema generico:

$$a^\mu = \left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{p}}{m}, \frac{\vec{n} + \vec{p}(\vec{p} \cdot \vec{n})}{m(m + p^0)} \right)$$

N.B.: $|\vec{n}| = 1 \Rightarrow \rho$ descrive stati puri
 $a^\mu a_\mu = -1$ è la stessa condizione ma "rilassata": ammette anche stati non puri.

Spesso utilizzeremo il limite $a_\mu a^\mu = 0$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\not{p} + m}{2m} \right) \quad \text{con} \quad \frac{1}{2} \sum_\lambda \not{a}^{(\lambda)} \not{a}^{(\lambda)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\not{p} + m}{2m} \right)$$

Invece nel limite ultrarelativistico possiamo descrivere gli stati di elicità ($\vec{n} \parallel \vec{p}$). Esistono 2 stati di elicità puri: $\vec{n} = \pm \hat{p}$

Sostituendo $\vec{n} = \pm \hat{p}$ nell'espressione di ρ e facendo il limite per $p^0 \gg m$:

$$\rho = \not{p} \left(\frac{1 - \lambda \gamma^5}{2} \right) \quad \text{con } \lambda \text{ tale che: } \vec{n} = \lambda \hat{p} \text{ (}\lambda \text{ autoval. di elicità)}$$

Questo è uno stato puro: $\rho = \text{proiettore} = |\psi\rangle\langle\psi|$
 $[\lambda = \pm]$

In fatti: il proiettore risulta essere:

$$u^{(\lambda)} \bar{u}^{(\lambda)} \underset{m \rightarrow 0}{=} \not{x} (1 - \lambda \gamma^5) \frac{1}{2}$$

Nel caso delle anti-particelle:

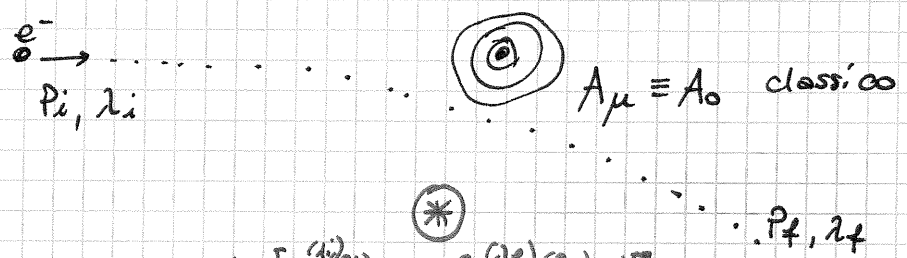
$$v^{(\lambda)} \bar{v}^{(\lambda)} \underset{m \rightarrow 0}{=} \not{x} (1 + \lambda \gamma^5) \frac{1}{2}$$

$m \rightarrow 0 \equiv$ limite ultrarelativistico

Dell'espressione di ρ in termini di matrici γ ci interessano solo 2 limiti:

- non polarizzazione ($a=0$) $\sum_{\lambda} u^{(\lambda)} \bar{u}^{(\lambda)} = 4m \not{x}$
- stato puro autostato di elicità $\sum_{\lambda} u^{(\lambda)} \bar{u}^{(\lambda)} = \frac{2}{1-\lambda \gamma^5} \not{x}$

Come applicazione, torniamo al caso dell'e⁻ scatterato dal campo elettrico.



$$|M_{fi}|^2 \propto \text{tr} \left[\not{p}_i \gamma^\mu \not{p}_f \gamma^\nu \right] \underbrace{u_\alpha^{(\lambda_i)}(p_i) \bar{u}_\beta^{(\lambda_i)}(p_i)}_{\text{initial}} \gamma_\beta^\mu u_\gamma^{(\lambda_f)}(p_f) \bar{u}_\delta^{(\lambda_f)}(p_f) \gamma_\alpha^\nu$$

Assumo ora che lo stato iniziale sia a elicità definita, e che lo stato finale abbia anch'esso elicità definita. Qual è la probabilità che durante l'interazione s'inverta l'elicità?

$$\lambda_i = \pm \quad \lambda_f = \pm$$

Supponiamo $\lambda_i \equiv +$, e supponiamo di essere nel limite ultrarelativistico ($E_{e^-} \gg 10 \text{ MeV}$).

$$\textcircled{*} \text{tr} \left[\not{p}_i \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) \gamma^\mu \not{p}_f \left(\frac{1+\gamma^5}{2} \right) \gamma^\nu \right]$$

Notiamo che: $[\gamma^5, \gamma^\mu]_{\pm} = 0$ (γ^5 anti-commuta con le γ^μ)

$$\text{tr} \left[\not{p}_i \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) \left(\frac{1+\gamma^5}{2} \right) \gamma^\mu \not{p}_f \gamma^\nu \right]$$

Inoltre: $(\gamma^5)^2 = I \Rightarrow$ di conseguenza:

$$\left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) \propto 1 - \gamma_5^2 = 0 \quad \left(\text{Sono due proiettori: diversi, si annullano} \right)$$

Nel limite ultra relativistico la probabilità che l'e- "flippi" l'elicità è nulla.

Si verifica che in questo caso $\frac{1-\gamma_5}{2}$ è un proiettore.

Inoltre: $\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5] \propto \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ $(-4i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma})$

caso $\lambda_i = \lambda_f$

Per calcolare questa probabilità non abbiamo avuto bisogno di calcolare la sezione d'urto.

La probabilità di andare da $+$ a $+$ o da $-$ a $-$ è pari all'elicità stessa.

15/11/2011

PROPAGATORI

un propagatore è il valore d'aspettazione sul vuoto

di: $G \equiv \langle 0 | T[\psi(x) \bar{\psi}(y)] | 0 \rangle$ quando non ci sono indici, si intendono aperti, non saturati.

dove ψ è un campo fermionico $\Rightarrow \psi$ e $\bar{\psi}$ anticommutano

$y = x'$ ↑ propagatore fermionico

$$\langle 0 | T[\psi(x) \bar{\psi}(x')] | 0 \rangle = \langle 0 | [\theta(t-t') \psi(x) \bar{\psi}(x') + \theta(t'-t) \bar{\psi}(x') \psi(x)] | 0 \rangle$$

C'è invarianza per traslazione \Rightarrow il propagatore sono funzione solo della differenza $x-x'$.

$$G = G(x-x')$$

Dimostriamo che dal punto di vista matematico il propagatore è una funzione di Green dell'equazione di Dirac:

$$(i\not{D} - m)G(x) = i\delta^4(x)$$

(Dato che il campo ψ soddisfa l'equazione: $(i\not{D} - m)\psi = 0$)

Se non ci fosse il T-prodotto la dim. sarebbe immediata: *Questo non dimostra che è una sol. di Green, dimostra solo che è una sol. di Dirac.*

$$(i\partial - m)\psi = 0 \Rightarrow \langle 0 | (i\partial - m)\psi \bar{\psi} | 0 \rangle = 0$$

Ma c'è il T. La derivata temporale è quella critica - Per semplicità poniamo $x' = 0$.

$$i\frac{\partial}{\partial t} G = \langle 0 | T [i\frac{\partial}{\partial t} \psi \bar{\psi}] | 0 \rangle +$$

Ma devo anche far agire la derivata sulle θ
 \Rightarrow produco due δ

$$+ i\delta(t) [\psi(x), \bar{\psi}(0)]_+ \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\gamma^0 \delta^3(\vec{x})} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\gamma^0 i\delta^4(x)}$$

$$i\frac{\partial G}{\partial t} = \langle 0 | T [i\frac{\partial}{\partial t} \psi \bar{\psi}] | 0 \rangle + i\delta(t) \gamma^0 \delta^3(\vec{x})$$

$$\begin{aligned} (i\partial - m)G &= (i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - m)G = \\ &= \langle 0 | T [(i\partial - m)\psi \bar{\psi}] | 0 \rangle + i\delta^4(x-y) \end{aligned}$$

Data questa equazione, ricaviamo G in trasf. di Fourier.

$$G = \int \tilde{G}(p) e^{-ip_\mu x^\mu} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

$$(p\!\!\!/ - m)\tilde{G} = i \quad (\text{la trasf. di } \delta^4 \text{ è } 1)$$

$$\tilde{G} = \frac{i}{(p\!\!\!/ - m)} = i \frac{p\!\!\!/ + m}{p\!\!\!/ + m} \frac{1}{p\!\!\!/ - m} = i \frac{p\!\!\!/ + m}{p^2 - m^2}$$

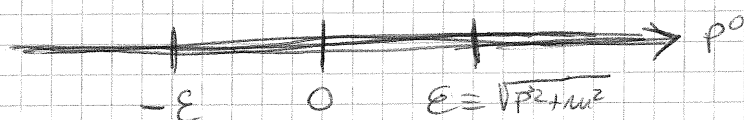
ora non abbiamo matrici al denominatore

Questo è il propagatore nella forma che tipicamente usiamo.

Si può annullarsi al denominatore: bisogna fare attenzione nella ricostruzione di G .

$$G = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{e^{i\vec{p}\vec{x}}}{p^{02} - (\vec{p}^2 + m^2)} e^{-ip^0 t}$$

Ci sono singolarità \Rightarrow dobbiamo aggirare i poli.



Ogni polo può essere aggirato da 2 lati \Rightarrow abbiamo 4 possibilità. Qual è quella giusta? Abbiamo introdotto un'ambiguità.

Se non fossimo entrati in trasformata di Fourier avremmo avuto un risultato univoco.

Il modo "giusto" di aggirare i poli è:



Ci sono 2 tipi di f. di Green. In particolare, quella ritardata (causale) è definita nulla per $t < 0$.

Facciamo il calcolo.

$t > 0 \Rightarrow$ per chiudere il piano complesso p^0 deve avere parte imm. $< 0 \Rightarrow$ chiudo sotto \Rightarrow ha contribuito solo da $+\epsilon$.

$$t > 0 \quad (\dots) e^{-i\epsilon t}$$

$$t < 0 \quad e^{i\epsilon t} \quad (\text{chiudo sopra})$$

\Rightarrow questa funzione di Green ha contributi anche per

$t < 0 \Rightarrow$ non è causale. L'interpretazione è quella delle antiparticelle all'indietro nel tempo (fisicamente non ha senso).

Tutto questo era per il fermione. Si può definire anche per altri campi.

Per un campo scalare:

$$G_{SCAL} = \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) G_{SCAL} = i \delta^4(x-y) \quad (\text{eq. di K.G.})$$

$$\tilde{G} = \frac{i}{p^2 - m^2}$$

Per ricordarci come aggirare i poli:

$$\tilde{G} \equiv \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{x + i\epsilon} = P\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi \delta(x)$$

↑
principale

Propagatore fotonicco:

$$\langle 0 | T[A_\mu(x) A_\nu(x')] | 0 \rangle = D_{\mu\nu}(x-x')$$

questo è un tensore sim. in μ e $\nu \Rightarrow$ si può scrivere nella forma

$$D_{\mu\nu}(x-x') = g_{\mu\nu} D(x-x') + \partial_\mu \partial_\nu \bar{D}(x-x')$$

con D, \bar{D} scalari. In trasformata:

$$\tilde{D}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \tilde{D}(p^2) - p_\mu p_\nu \tilde{\bar{D}}(p^2) \quad \begin{array}{l} \text{per essere scalari} \\ \text{deve essere funzione} \\ \text{di scalari} \end{array}$$

questo non è l'impulso di una particella! $p^2 \neq m^2$

Come conseguenza dell'invarianza di Gauge,

Teorema

i termini longitudinali ($p_\mu p_\nu \tilde{\bar{D}}$) non contribuiscono mai (a nessun ordine perturbativo)

Proviamo:

$$\tilde{D}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \frac{i}{p^2} \quad \left(\text{l'altro termine sarebbe: } -(\lambda-1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^4} \right)$$

$$\square D(x) = i\delta^4(x)$$

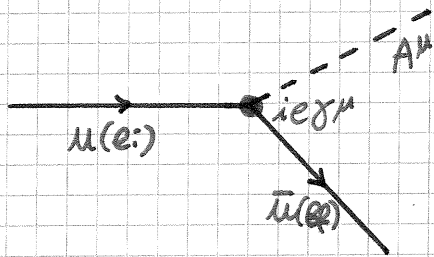
ovvero:

$$p^2 \tilde{D}(p) = i$$

17/11/2011

Scattering e^- da A^μ :

$$M_{fi} = ie \bar{u}(e_f) \gamma^\mu u(e_i) A_\mu$$



Questo è il diagramma di Feynman corrispondente al processo di scattering di $u e^-$ da parte di un campo elettrico.

Vediamo ora un altro processo.

$$e^- e^- \longrightarrow e^- e^- \quad (\text{urto elastico})$$

Siamo sempre nel campo dell'elettrodinamica quantistica:

$$S = T \left[\exp(i e \int d^4x J_\mu A^\mu) \right] \quad J_\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$$

Condizioni iniziali: k_1, k_2

Condizioni finali: p_1, p_2

N.B.: Adesso A^μ è un campo quantistico, non più classico.

Trascuriamo la polarizzazione.

S ha significato perturbativo \Rightarrow per calcolarne gli elementi di matrice ne facciamo lo sviluppo.

$$\langle p_1 p_2 | \left(I - ie \int J_\mu A^\mu - \frac{e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 T [J_\mu(x_1) A^\mu(x_1) J_\nu(x_2) A^\nu(x_2)] \right) | k_1 k_2 \rangle$$

$$d\sigma = \frac{1}{4I} |M_{fi}|^2 d\phi^{(2)} \quad \left(\frac{1}{2} \right) \quad I = \sqrt{(k_1 \cdot k_2)^2 - m^2}$$

\hookrightarrow le particelle sono identiche

$|M_{fi}|^2$ è legato ad $\langle f | S | i \rangle$.

Vediamo quali termini contribuiscono all'elemento di matrice. Scartiamo l'identità per selezionare stati finali \neq stati iniziali.

$$|p_1 p_2\rangle = a^\dagger(p_1) a^\dagger(p_2) |0\rangle \quad \text{stato finale}$$

$$|k_1 k_2\rangle = a^\dagger(k_1) a^\dagger(k_2) |0\rangle \quad \text{stato iniziale}$$

Il primo termine si scrive:

$$\langle 0 | a(p_1) a(p_2) \left(-ie \int J_\mu A^\mu \right) a^\dagger(k_1) a^\dagger(k_2) |0\rangle$$

Una condizione necessaria perché questo elem. di matrice sia $\neq 0$ è che ogni $a^{(\dagger)}(p_i - k_i)$ abbia un partner all'interno di $(-ie) \dots$, altrimenti passa attraverso tutto e va ad annihilare un vuoto $\Leftrightarrow -ie \int J_\mu A^\mu$ deve essere quartico nei campi fermionici.

NB.: questo termine è lineare nel campo fotonico \Rightarrow c'è un solo operatore di costruzione c^\dagger o di distruzione c del campo fotonico, che commuta con quelli fermionici e va ad annihilare il vuoto.

$J_\mu A^\mu \rightarrow$ bilineare fermionico, lineare fotonico

\Rightarrow il primo termine (ordine e) non contribuisce: non ci sono fotoni nello stato finale.

Vediamo il secondo termine: deve avere una struttura quantica. Ho 2 correnti, ciascuna è bilineare \Rightarrow ok. ($p_1 \neq k_1, p_2 \neq k_2$). Abbiamo 2 $A^\mu \Rightarrow$ non occorre avere fotoni nello stato $|i\rangle$ o $|f\rangle$.

Questo termine è un buon candidato.

$$-\frac{e^2}{2} \langle 0 | a(p_1) a(p_2) \left[\int d^4x_1 d^4x_2 T \left(J_\mu(x_1) A^\mu(x_1) J_\nu(x_2) A^\nu(x_2) \right) \right] a^\dagger(k_1) a^\dagger(k_2) |0\rangle$$

$$= -\frac{e^2}{2} \langle 0 | a_{p_1} a_{p_2} \int d^4x_1 d^4x_2 T \left(J_\mu(x_1) J_\nu(x_2) \right) T \left(A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \right) a^\dagger_{k_1} a^\dagger_{k_2} |0\rangle$$

Lo spazio di Hilbert è il prodotto di uno spazio di Hilbert fermionico ed uno fotonico \Rightarrow l'elemento di matrice è fattorizzabile in:

$$-\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0_F | a_{p_1} a_{p_2} T(J_\mu(x_1) J_\nu(x_2)) a^\dagger_{k_1} a^\dagger_{k_2} | 0_F \rangle$$

$$\cdot \langle 0_F | T(A^\mu(x_1) A^\nu(x_2)) | 0_F \rangle$$

dove $|0_F\rangle$ è il vuoto fermionico e $|0_S\rangle$ è il vuoto fotonico. Il secondo fattore è il propagatore del fotone.

$$\langle 0_S | \dots | 0_S \rangle = \int e^{-iq(x_1-x_2)} \tilde{D}^{\mu\nu}(q^2) d^4q \frac{1}{(2\pi)^4}$$

$$\text{con } \tilde{D}^{\mu\nu}(q^2) = i \frac{g^{\mu\nu}}{q^2}$$

Rimane da calcolare il fattore fermionico.

$$\langle 0_F | a(p_1) a(p_2) : \bar{\Psi}(x_1) \gamma_\mu \Psi(x_1) : : \bar{\Psi}(x_2) \gamma_\nu \Psi(x_2) a^\dagger(k_1) a^\dagger(k_2) | 0_F \rangle$$

In questo caso vedremo che il T-prodotto non cambia il risultato.

$$\Psi(x) = \int d\tilde{k} (a u e^{-ikx} + b^\dagger v e^{ikx})$$

N.B.: ci sono 4 integrali sugli impulsi ($\Psi(x)$).

- Ogni a^\dagger deve trovare il suo compagno: Ogni campo Ψ contiene tutti i possibili impulsi.

$$\begin{array}{ll} \Psi(x_2) \leftrightarrow a^\dagger(k_1) & \Psi(x_1) \leftrightarrow a^\dagger(k_2) \\ a(p_1) \leftrightarrow \bar{\Psi}(x_1) & a(p_2) \leftrightarrow \bar{\Psi}(x_2) \end{array} \quad \begin{array}{l} a \in \Psi \\ a^\dagger \in \bar{\Psi} \end{array}$$

$$\int d\hat{p} a(\hat{p}) a^\dagger(k_1) = \int dP \left[\underbrace{a^\dagger(k_1) a(\hat{p})}_{\text{NON CONTRIBUISCE}} + 2\pi^3 \delta^3(k_1 - \hat{p}) 2k_1^0 \right]$$

Lo stesso si fa \forall coppia di operatori. $\mathbb{R} a|0\rangle = 0$

In questo modo tutto ciò che rimane in forma di operatore va ad anni chilire il voto e non contribuisce.

Abbiamo scelto solo una delle possibili combinazioni di coppie $a - \Psi$. In questo caso ci sono 4 possibili combinazioni \Rightarrow vanno sommate algebricamente.

Si può dimostrare che le 4 combinazioni sono a 2 a 2 diverse (sono identiche solo sotto lo scambio $x_1 \leftrightarrow x_2$).

Si ottiene da queste contrazioni:

$$-\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \int e^{-iq(x_1-x_2)} \tilde{D}^{\mu\nu}(q^2) \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \cdot 2 \left[\bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(k_1) \bar{u}(p_2) \gamma^\nu u(k_2) e^{-i(p_1-k_1)x_1 - i(p_2-k_2)x_2} - \bar{u}(p_2) \gamma^\mu u(k_1) \bar{u}(p_1) \gamma^\nu u(k_2) e^{-i(p_2-k_1)x_1 - i(p_1-k_2)x_2} \right]$$

NB.: Il secondo termine $\bar{u} =$ al primo, ma $p_1 \rightarrow p_2$ (da qui deriva il "-": ogni volta che scambiamo 2 fermioni: esce un "-").

Integrando otteniamo delle δ : $\int dx e^{ipx} = 2\pi \delta(p)$

$$-e^2 \left[\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{D}(q^2) \bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(k_1) \bar{u}(p_2) \gamma^\nu u(k_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - k_1 + q) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - k_2 - q) \right]$$

Uso le δ per integrare in q :

$$-e^2 \left[\tilde{D}_{\mu\nu}((k_1 - p_1)^2) \bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(k_1) \bar{u}(p_2) \gamma^\nu u(k_2) (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \right]$$

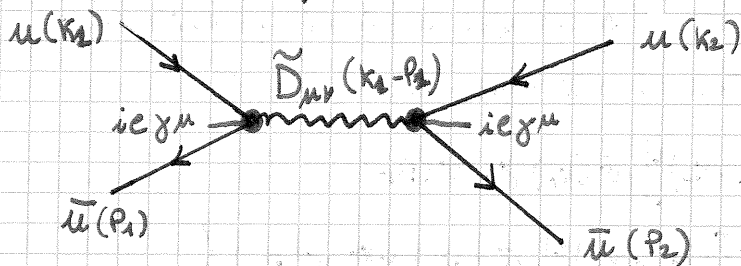
Questo è il primo termine, il secondo è analogo.

Legge di conservazione che lega k_i a p_i

Otterremo:

$$M_{fi} = e^2 \left\{ \bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(k_1) \tilde{D}_{\mu\nu}[(k_1 - p_1)^2] \bar{u}(p_2) \gamma^\nu u(k_2) - \left[\bar{u}(p_2) \gamma^\mu u(k_1) \tilde{D}_{\mu\nu}[(k_1 - p_2)^2] \bar{u}(p_1) \gamma^\nu u(k_2) \right] \right\}$$

C'è una corrispondenza con i diagrammi di Feynman: non è una corrispondenza con ciò che succede fisicamente, ma con l'espressione che abbiamo scritto.

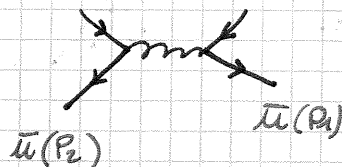


- linee intere \equiv fermioni
- linee uscenti $\rightarrow \bar{u}$

\rightarrow \equiv prima parte del primo termine

\leftarrow \equiv seconda " " " "

Il secondo termine si ottiene da: (\bar{u} scambiati in impulso)



Le frecce entranti e uscenti ci diranno come gestire gli indici spinoriali (scambiando particella e antiparticella cambiano verso) -

Vediamo un altro processo.

$$e^+_{k_+} e^-_{k_-} \longrightarrow e^+_{p_+} e^-_{p_-} \quad (\text{sempre scattering elastico})$$

$$\langle 0 | a(p_-) b(p_+) S a^+(k_-) b^+(k_+) | 0 \rangle$$

Assumendo impulsi iniziali e finali diversi, I non contrib., né contribuisce $e^2 \dots$ (vedi sopra).

\Rightarrow il primo ordine non banale è il secondo

$$= \langle 0 | a(p_-) b(p_+) \int d^4x_1 d^4x_2 T [J_\mu(x_1) J_\nu(x_2)] T [A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)] b^+(k_+) a^+(k_-) | 0 \rangle$$

fattorizzando lo spazio di Fock:

$$= -\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0_F | a(p_-) b(p_+) T [J_\mu(x_1) J_\nu(x_2)] b^+(k_+) a^+(k_-) | 0_F \rangle \cdot \langle 0_F | T [A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)] | 0_F \rangle$$

$$J_\mu(x_1) J_\nu(x_2) = \psi(x_1) \delta_\mu \bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) \delta_\nu \bar{\psi}(x_2)$$

\uparrow
 $b^+(k_+)$

\uparrow
 $b(p_+)$

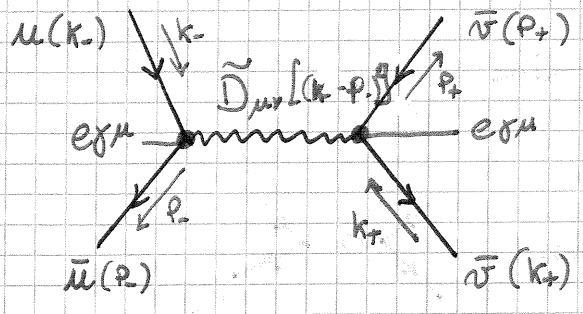
\uparrow
 $a(p_-)$

\uparrow
 $a^+(k_-)$

Come prima, ci sono varie combinazioni possibili -
L'elemento di matrice che si ottiene è:

$$-e^2 \left\{ \bar{u}(p_-) \delta_\mu u(k_-) \tilde{D}^{\mu\nu} [(p_- - k_-)^2] \bar{v}(k_+) \delta_\nu v(p_+) - \bar{v}(k_+) \delta_\mu u(k_-) \tilde{D}^{\mu\nu} [(k_+ + k_-)^2] \bar{u}(p_-) \delta_\nu v(p_+) \right\}$$

il primo termine si schematizza:



Possiamo associare ad ogni vertice una legge di conservazione.

$$(K - P_-) + k_+ - p_+ = 0 \quad (\text{la } \delta \text{ finale dove } P_{\text{tot } i} = P_{\text{tot } f})$$

l'altro termine si ottiene scambiando $\vec{u}(p_-)$ con $\vec{v}(k_+)$

18/11/2011

Vediamo un altro processo e.m.: l'effetto Compton.

$$e \gamma \rightarrow e \gamma$$

p. k_i p. k_f

$c - c^\dagger \equiv$ op. di distruzione e costruzione γ

$$\langle 0 | a(p_f) c(k_f) S c^\dagger(k_i) a^\dagger(p_i) | 0 \rangle$$

Trascuriamo nuovamente la polarizzazione.

$$S = I + \int JA (ie) - e^2 \left(\frac{1}{2}\right) \int T(JAJA) \dots$$

Anche in questo caso e^2 è il primo ordine non banale -
(il termine in ie è trilineare in $c: c(k_i), c^\dagger(k_f), A_\mu$)

$$S_{fi} = \langle 0 | a(p_f) c(k_f) \int d^4x_1 d^4x_2 T [J_\mu(x_1) A^\mu(x_1) J_\nu(x_2) A^\nu(x_2)] c^\dagger(k_i) a^\dagger(p_i) | 0 \rangle$$

$$= \langle 0_f | a(p_f) \int d^4x_1 d^4x_2 T [J_\mu(x_1) J_\nu(x_2)] a^\dagger(p_i) | 0_f \rangle$$
$$\langle 0_r | c(k_f) \int d^4x_1 d^4x_2 T [A^\mu(x_1) A^\nu(x_2)] c^\dagger(k_i) | 0_r \rangle$$

$$A^\mu(x) = \int d\tilde{k} \left[c^{(\lambda)} \epsilon^\mu e^{-ikx} + c^{(\lambda)\dagger} \epsilon^\mu e^{ikx} \right]$$

Deriviamo alcune formule:

$$[a^{(\lambda)}(k), \Psi(x)]_+ = ?$$

$$\Psi(x) = \int d\tilde{k} \left(u a^{(\lambda)}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} + b^{(\lambda)\dagger}(k) v e^{ik_\mu x^\mu} \right)$$

a anticommute sia con u che con $b \Rightarrow$

$$[a^{(\lambda)}(k), \Psi(x)]_+ = 0$$

$$[a^{(\lambda)}(p), \psi(x)]_+ = u e^{i p \cdot x - i P_\mu x^\mu} \quad \text{verificare}$$

$$[c^{(\lambda)}(k), A^\mu(x)] = \left[c^{(\lambda)}(k), \int d\tilde{k} \left(c^{(\lambda)} \epsilon^\mu e^{-ikx} + c^{+(\lambda)} \epsilon^{+\mu} e^{ikx} \right) \right] =$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2k^0)(2\pi)^3} \epsilon^\mu e^{ikx} (2k^0)(2\pi)^3 \delta^3(p-k) \delta_{\lambda\lambda'} =$$

$$= e^{ikx} \epsilon_\mu^{*(\lambda)}$$

Calcoliamo:

il T-prodotto non darà contributo

$$\langle 0 | c(k_f) A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) c^+(k_i) | 0 \rangle =$$

$$= \langle 0 | c(k_f) \int d\tilde{k} \left(c \epsilon^\mu e^{-ikx_1} + c^+ \epsilon^{*\mu} e^{ikx_1} \right) \int d\tilde{k} \left(c \epsilon^\nu e^{-ikx_2} + c^+ \epsilon^{*\nu} e^{ikx_2} \right) c^+(k_i) | 0 \rangle$$

Utilizziamo: $[c^{(\lambda)}(k), A_\mu(x)] = \epsilon_\mu^{(\lambda)*} e^{ikx}$

$$[c^{+(\lambda)}(k), A_\mu(x)] = -\epsilon_\mu^{(\lambda)} e^{-ikx}$$

Non occorre esplicitare A:

$$= \langle 0 | \left(A_\mu(x_1) c(k) + \epsilon_\mu^{(\lambda)*} e^{ikx} \right) \left(c^+(k) A_\nu(x_2) + \epsilon_\nu^{(\lambda)} e^{-ikx} \right) | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | \left(A_\mu(x_1) c(k_f) c^+(k_i) A_\nu(x_2) + \cancel{A_\mu(x) c(k_i) \epsilon_\nu^{(\lambda)} e^{-ikx}} + \right.$$

$$\left. + \epsilon^{(\lambda)\nu} e^{ikx} \cancel{c^+(k_i) A_\mu(x)} + \epsilon_\mu^{(\lambda)*} \epsilon_\nu^{(\lambda)} e^{ikx_1} e^{-ik_2x_2} \right) | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | (c^+ A + [J]) + (A c + [J]) | 0 \rangle =$$

$$= \epsilon_\mu^{*(\lambda_f)} \epsilon_\nu^{(\lambda_i)} e^{-ik_f x_1 + ik_i x_2} + \epsilon^{*\nu(\lambda_f)} \epsilon^\mu(\lambda_i) e^{-ik_f x_2 + ik_i x_1}$$

Calcoliamo ora la parte fermionica. Per il T-prodotto

fisso $t_1 > t_2$:

$$\langle 0_f | \overbrace{a(p_f) \bar{\psi} \gamma_\mu \psi(x_1)}^{\text{secondo termine}} \overbrace{\bar{\psi} \gamma_\nu \psi(x_2) a^\dagger(p_i)}^{\text{primo termine}} | 0_f \rangle =$$

$$= \langle 0_f | \bar{\phi}_{p_f}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \phi_{p_i}(x_2) | 0_f \rangle$$

$$- \langle 0_f | \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \phi_{p_i}(x_1) \bar{\phi}_{p_f}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) | 0_f \rangle$$

con: $\phi_p(x) = u e^{-ipx}$ $\bar{\phi}_p(x) = \bar{u} e^{ipx}$

l'espressione di partenza era "realivone" nei compi.
NB.: le ψ sono quaterni, le ϕ funzioni.

Se $t_2 > t_1$:

$$\langle 0 | \left[-\psi(x_2) \gamma^\nu \phi_{p_2}(x_2) \bar{\phi}_{p_1}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) + \bar{\phi}_{p_2}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \phi_{p_1}(x_1) \right] | 0 \rangle$$

I due risultati possono essere combinati con:

$$\bar{\phi}_{p_2}(x_1) \gamma^\mu \langle 0 | T[\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)] | 0 \rangle \gamma^\nu \phi_{p_1}(x_2) + \bar{\phi}_{p_2}(x_2) \gamma^\nu \langle 0 | T[\psi(x_2) \bar{\psi}(x_1)] | 0 \rangle \gamma^\mu \phi_{p_1}(x_1)$$

È uscito il propagatore fermionico.

$$\langle 0 | T[\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)] | 0 \rangle =$$

$$= \int d^4q i \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2} e^{-iq(x_1 - x_2)}$$

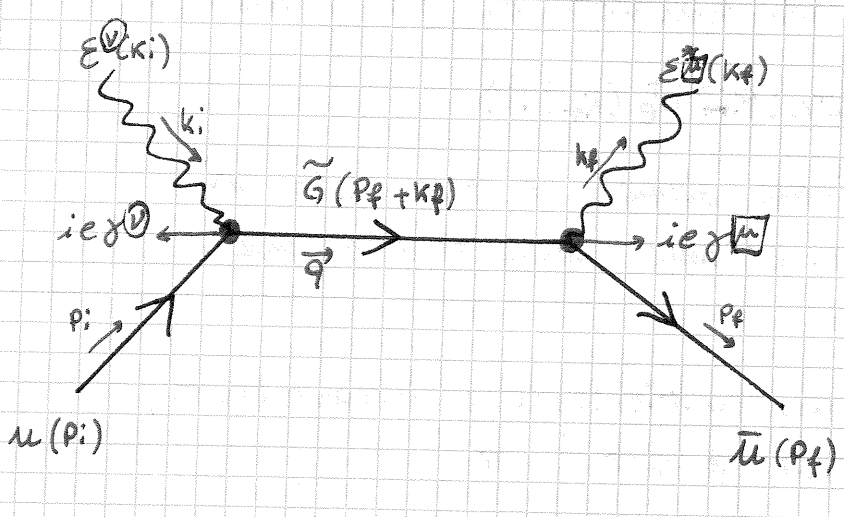
PROPAGATORE

FERMIONICO

Fare il calcolo integrando...

Risultata: (escono 2 δ , ma + la conservazione del z_1 - im polso)

$$M_{fi} = e^2 \left[\bar{u}(p_f) \gamma^\mu G_{\not{p}_f + \not{k}_f} \gamma^\nu u(p_i) \epsilon_\mu^*(k_f) \epsilon_\nu(k_i) + \bar{u}(p_f) \gamma^\mu G_{\not{p}_f - \not{k}_i} \gamma^\nu u(p_i) \epsilon_\mu(k_i) \epsilon_\nu^*(k_f) \right]$$



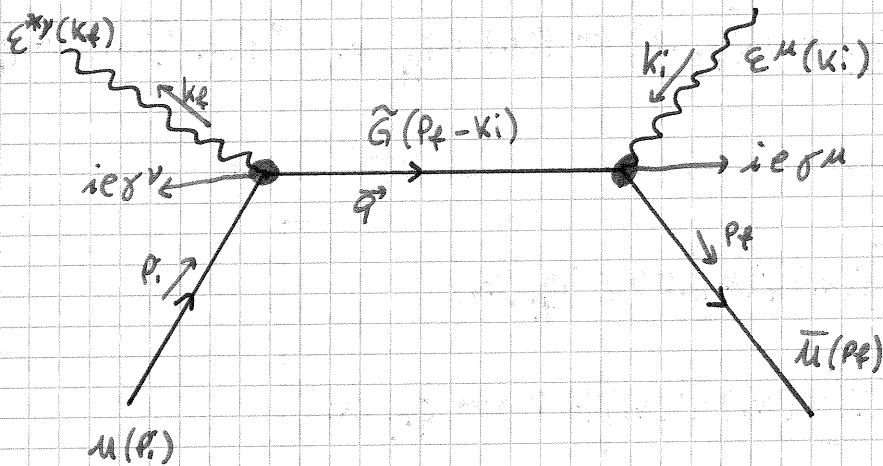
• ogni linea "interna" corrisponde a una particella iniziale o finale.

110 Per la conservazione del quadrimpulso:

$$p_i + k_i = (p_f + k_f) (-1)$$

$$\Rightarrow q = p_f + k_f$$

Al secondo termine associamo il diagramma:



(Sono stati scambiati: due fotoni, e $p_i - k_f = k_i - p_f$)

$$e^+ e^- \xrightarrow{k^+ k^-} \mu^+ \mu^-$$

$$m_\mu \approx 10^2 \text{ MeV} \approx 200 m_e$$

La lagrangiana libera corrispondente contiene termini elettronici e muonici:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_e (i\not{\partial} - m_e) \Psi_e + \bar{\Psi}_\mu (i\not{\partial} - m_\mu) \Psi_\mu + \left(-\frac{1}{2} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}\right) + \left(-\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab}\right)$$

$$\mathcal{L}_I = e \bar{\Psi}_e \gamma^\nu \Psi_e A_\nu + e \bar{\Psi}_\mu \gamma^\rho \Psi_\mu A_\rho$$

$$S = T \left[\exp \left\{ ie \int d^4x \bar{\Psi}_e \gamma^\rho \Psi_e A_\rho + \bar{\Psi}_\mu \gamma^\sigma \Psi_\mu A_\sigma \right\} \right]$$

Avremo due tipi diversi di operatori di costr./distr. .

$$\langle 0 | a_\mu(p_-) b_\mu(p_+) S a_e^+(k_-) b_e^+(k_+) | 0 \rangle$$

N.B.: qui abbiamo particelle diverse \Rightarrow \exists energia di soglia $= 2 m_\mu \Rightarrow$ ciascuna e^- deve avere $E \approx 200 m_e$ (nel centro di massa) -

Il termine al 1° ordine non contribuisce: è lineare in A , ma negli stati $|i\rangle$ e $|f\rangle$ \exists fotoni -

$$S_{fi} = -\frac{e^2}{2} \langle 0 | a_\mu(p_-) b_\mu(p_+) \int d^4x_1 d^4x_2 T \left[\frac{(J_e A + J_\mu A)(J_e A + J_\mu A)}{a_e^+(k_-) b_e^+(k_+) | 0 \rangle} \right]$$

contribuiscono solo i termini misti $J_e A J_\mu A$

Risultato:

$$e^2 \left[\bar{u}_\mu(p_-) \gamma^\mu \bar{v}_\mu(p_+) \tilde{D}_{\mu\nu}(p_- + p_+) \bar{v}(k_+) \gamma^\nu u(k_-) \right] = M_{fi}$$

Verificare -

21/11/11

1° ordine teoria delle perturbazioni → strutture ad albero dei diagrammi di Feynman, che emerge dalle algebre degli operatori di creazione e distruzione.

In teoria delle perturbazioni il calcolo da fare è:

$$\langle f | S^{(m)} | i \rangle \quad \left[\begin{array}{l} \text{struttura ad albero} \equiv \text{non ci sono} \\ \text{loop chiusi.} \end{array} \right]$$

dove m è l'ordine dello sviluppo dove S inizia a contribuire.

In generale avremo:

$$\langle f | S^{(m)} | i \rangle = \langle 0 | a \dots b \dots c \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_m T \left[\overset{\text{prodotto normale}}{\circlearrowleft} \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_{\mu_1} \dots \dots \bar{\Psi} \gamma^{\mu_m} \Psi A_{\mu_m} \dots \right] \dots c^+ \dots b^+ \dots a^+ | 0 \rangle$$

(operatori di creazione a sinistra, di distruzione a destra)

(questo esempio vale per l'elettrodinamica, dove $\mathcal{L}_I = \bar{\Psi} \gamma \Psi A$). Vogliamo vedere come ricostruire quest'oggetto in termini di diagrammi di Feynman.

- c → fotone
- b → positrone
- a → elettrone
- g → particella scalare

Calcoliamo:

$$\langle 0 | \overbrace{gg^+}^{\text{a}} \overbrace{gg^+}^{\text{b}} | 0 \rangle = \langle 0 | gg^+ | 0 \rangle \langle 0 | gg^+ | 0 \rangle + \langle 0 | g^+ g | 0 \rangle \langle 0 | gg^+ | 0 \rangle + \langle 0 | gg | 0 \rangle \langle 0 | g^+ g^+ | 0 \rangle$$

Dobbiamo dividere l'operatore in coppie di operatori di costruzione e distruzione, in tutti i possibili modi. Il valore d'aspettazione è la somma dei prodotti dei valori d'aspettazione delle singole coppie. Esempio:

$$\langle 0 | a a^\dagger a a^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | a a^\dagger | 0 \rangle^2$$

$$\langle 0 | \overbrace{g g g^\dagger g^\dagger} | 0 \rangle = \langle 0 | g g^\dagger | 0 \rangle^2 + \langle 0 | g g^\dagger | 0 \rangle^2$$

$$\langle 0 | a a a^\dagger a^\dagger | 0 \rangle =$$

N.B.: impulso e polarizzazione sono fissati. Stiamo provando a costruire due fermioni con lo stesso stato.

Applicando il teorema di Wick:

$$= \langle 0 | a a^\dagger | 0 \rangle^2 - \langle 0 | a a^\dagger | 0 \rangle^2 = 0$$

Imposti dalle regole di commutazione segue che ad ogni scambio di operatori esce un "-".

Il teorema di Wick si estende anche a combinazioni di operatori diversi. Ad esempio, un campo scalare:

$$\langle 0 | T [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle$$

$$T [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] = : \phi(x_1) \dots \phi(x_n) : + \text{le possibili contrazioni.}$$

Ad es. per 4 campi:

$$T [\phi(x_1) \dots \phi(x_4)] = : \prod_{i=1}^4 \phi(x_i) : + \left\{ \langle 0 | T [\phi(x_1) \phi(x_2)] | 0 \rangle : \phi(x_3) \phi(x_4) : \right\}$$

+	"	x_1	x_3	"	x_2	x_4
+	"	x_1	x_4	"	x_2	x_3
+	"	x_2	x_4	"	x_1	x_3
+	"	x_2	x_3	"	x_1	x_4

Esempio pratico per 2 campi scalari:

$$T [\phi(x_1) \phi(x_2)] = : \phi(x_1) \phi(x_2) : + G(x_1, x_2)$$

$$G(x_1, x_2) = \langle 0 | T (\phi(x_1) \phi(x_2)) | 0 \rangle = \text{propagatore}$$

$$T \left[\prod_{i=1}^4 \phi(x_i) \right] = : \prod_{i=1}^4 \phi(x_i) : + \left[G(x_i, x_j) : \phi_k \phi_l : + : \phi_i \phi_j : G(x_k, x_l) \right] + \left[G(x_i, x_j) G(x_k, x_l) \right]$$

\rightarrow 6 termini di questo tipo
 \rightarrow 3 termini di questo tipo

Sul vuoto, i prodotti normali hanno valore d'aspettazione nullo - Restano solo i propagatori:

$$\langle 0 | T \left[\prod_{i=1}^M \phi_i \right] | 0 \rangle = \sum_{\text{possibili coppie}} G_{ij} G_{kl}$$

Tutto questo prende il nome di teorema di Wick.

Vediamo come applicarlo al problema di pertinenza -

Consideriamo un oggetto fatto così:

$$T \left[: ABC :_{x_1} : EDF :_{x_2} \right] \left(\begin{array}{l} \text{T-prodotto di due prodotti normali} \\ \text{fatti in punti diversi dello spazio-tempo} \end{array} \right)$$

A, B, C, D, E, F operatori generici.

Come esplicito:

$$T \left[: \bar{\Psi} \delta^\mu \Psi A_\mu(x) : : \bar{\Psi} \delta^\nu \Psi A_\nu(y) : \right]$$

Posso calcolarlo come se non ci fossero i ::, basta NON CONSIDERARE le coppie "interne" allo stesso ::

ad es.: ~~(\Psi(x), A_\mu(x))~~ -

$$\langle e \delta | T \left(: \bar{\Psi} \delta^\mu \Psi A_\mu(x_1) : : \bar{\Psi} \delta^\nu \Psi A_\nu(x_2) : \right) | e \delta \rangle =$$

$$\langle 0 | \underbrace{a_f^\dagger c_f^\dagger}_{(\dots)} T \left(: \bar{\Psi} \delta^\mu \Psi A_\mu(x_1) : : \bar{\Psi} \delta^\nu \Psi A_\nu(x_2) : \right) c_i^\dagger a_i^\dagger | 0 \rangle$$

Prendiamo ogni coppia e sostituiamo il suo valore d'asp. nel vuoto.

$$= \langle 0 | a_f \bar{\Psi}(x_1) | 0 \rangle \langle 0 | T \left(\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \right) | 0 \rangle \langle 0 | c_f A_\mu(x_1) | 0 \rangle \langle A_\nu c_i^\dagger \rangle \langle \Psi a_i^\dagger \rangle$$

(abbiamo trascorso le matrici δ)

$$= \left(\cancel{\bar{\Psi} a} + \underbrace{[a, \bar{\Psi}]_+}_{= \bar{u} e^{ikx}} \right) \left(D(x_1, x_2) \right) \left(\cancel{A c} + \underbrace{[c, A]_+}_{= \epsilon_\mu^* e^{-ikx}} \right) \dots$$

\downarrow
 annichita il vuoto

Ma questa ha solo UNA delle possibili partizioni: o coppie. Dobbiamo considerare tutte quelle non vuote, e sommarle.

22/11/2011

$$\langle \Psi | S^{(n)} | i \rangle$$

$$\downarrow$$
$$T \left[\exp \int d^4x \frac{\mathcal{L}_I}{\hbar} \right]$$

e $\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu$ nel caso dell'elettrodinamica

$$\langle 0 | a \dots b \dots c \dots \int dx_1 \dots dx_n (:\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu(x_1) : \dots (x_n) :) a^\dagger b^\dagger c^\dagger | 0 \rangle$$

Questi sono integrali di polinomi di operatori di costruzione e distruzione.

Teorema di Wick per calcolare questi oggetti si prende una somma di prodotti di valori d'aspettazione di coppie di questi operatori.

eccezione: vanno evitate le coppie che stanno all'interno di un prodotto normale di operatori insistenti sullo stesso x_i .

La scelta delle coppie si associa al diagramma di Feynman corrispondente.

Esempio: effetto Compton - $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$

$$\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | a(p) c(k_f) T [\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu(x_1) \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi A_\nu(x_2)] a^\dagger(k_i) a^\dagger(p_i) | 0 \rangle$$

Per applicare Wick è conveniente conoscere i valori d'aspettazione di tutte le coppie. Troveremo termini:

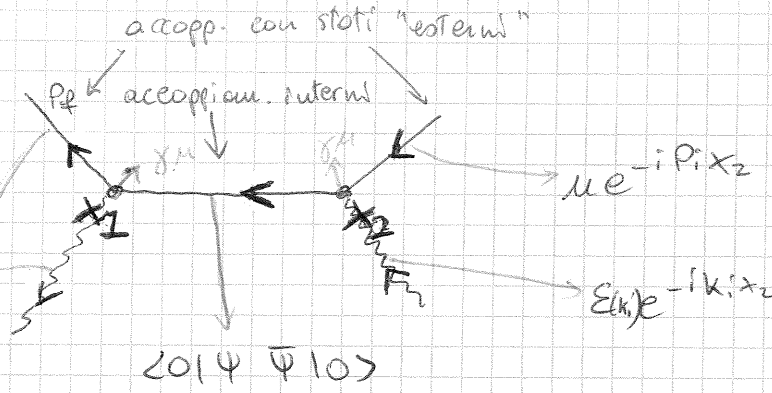
$$\langle 0 | T(\Psi \Psi) | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | a \bar{\Psi} | 0 \rangle = \langle 0 | [a, \bar{\Psi}]_+ | 0 \rangle = \bar{u} e^{ipx}$$

$$\langle 0 | c A | 0 \rangle = \langle 0 | [c, A] | 0 \rangle = \epsilon^* e^{ik_f x}$$

Facciamo la divisione a coppie.

$$a_{\mathbb{P}} \rightarrow \bar{\Psi}_{x_1} \quad c_{k_f} \rightarrow A_{\mu, x_1} \quad \Psi_{x_1} \rightarrow \bar{\Psi}_{x_2} \quad \Psi_{x_2} \rightarrow a^\dagger_{p_i} \quad A_{\nu, x_2} \rightarrow c^\dagger_{k_i}$$



$\langle 0 | \Psi \bar{\Psi} | 0 \rangle$
 $\langle 0 | a(p_f) \bar{\Psi} | 0 \rangle = \bar{u} e^{i p_f x_1}$

$\langle 0 | [c, A] | 0 \rangle = \epsilon^{\mu\nu}(k_f) e^{i k_f x_1}$

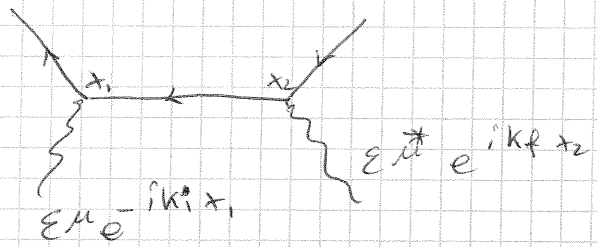
L'espressione corrispondente a questo diagramma sarà:

$2 (\bar{u}(p_f) e^{i p_f x_1}) \gamma_\mu G(x_1, -x_2) \gamma_\nu u e^{-i p_1 x_2} \epsilon^{\mu\nu}(k_f) e^{i k_f x_1} \epsilon^\nu e^{-i k_1 x_2}$

Questo è solo uno dei contributi - ce n'è un altro dovuto allo scambio di x_1 con x_2 , ma stiamo integrando su tutto x_1 e tutto $x_2 \Rightarrow$ c'è un fattore 2.

Altra possibile scelta di coppie:

$a(p_+) \rightarrow a^+(p_-) \quad \psi_{x_1} \rightarrow c^{\dagger}_{k_1} \quad \text{"} \quad \text{"}$



L'unico cambiamento è lo scambio delle due linee fotoniche.

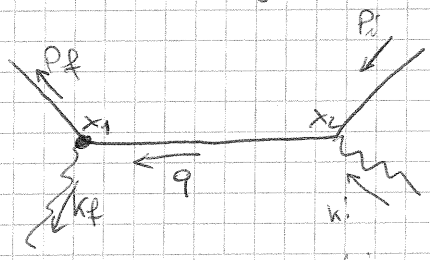
Queste due sono le uniche combinazioni topologicamente differenti - Poi ce ne sono altre due corrispondenti a queste scambiando x_1 e x_2 .

Se lavoro nello spazio delle x ho espressioni piene di esponenziali - Voglio lavorare nello spazio degli

impulsi, dato che $|i\rangle$ ed $|f\rangle$ hanno impulso fissato.

In trasformata di Fourier:

$$G(x_1 - x_2) \rightarrow \int d^4q e^{-i(x_1 - x_2)q} \tilde{G}(q) = \langle 0 | \bar{\Psi} \Psi | 0 \rangle$$



Integrando in x_1 otteniamo una $\delta(q - p_f - k_f)$ -

(i termini in x_1 sono quelli associati alle linee che insistono sul vertice x_1) -

Integrazione in $x_1 \Rightarrow$ conservazione del 4 impulso sul vertice x_1

Su x_2 troviamo: $\delta(k_i + p_i - q)$

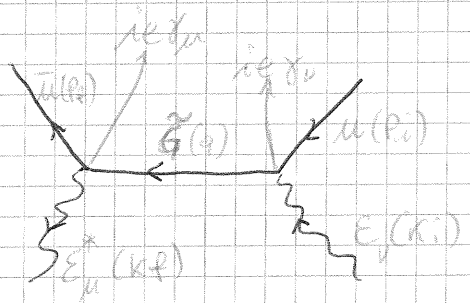
formalmente possiamo scrivere in trasformata di Fourier l'intero vertice:

$$\int d^4x \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu \text{ diventa:}$$

$$\int d^4x \left[\int dk_1 \bar{\Psi}(k_1) e^{ik_1 x} \right] \gamma^\mu \left[\int dk_2 \Psi(k_2) e^{-ik_2 x} \right] \int d^4q A_\mu(q) e^{-iqx} =$$

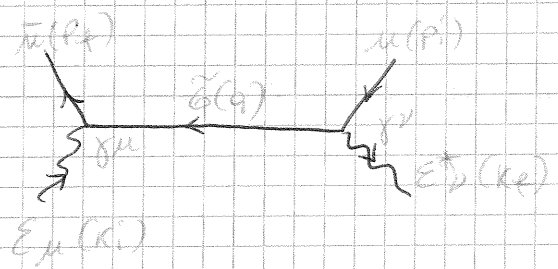
$$= \int d^4k_1 d^4k_2 d^4q \delta^4(k_1 - k_2 - q) \bar{\Psi}(k_1) \gamma^\mu \Psi(k_2) A_\mu(q)$$

Risulta:



con $p_f + k_f = q$

L'altro termine:



con $q = p_f - k_i$

24/11/2011

$$(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) M_{fi}$$

Vogliamo usare i diagrammi di Feynman per calcolare M_{fi} .

— Regole per la QED —

Abbiamo campi elettronici ψ e fotonici A .

- Bisogna disegnare tutti i diagrammi di Feynman compatibili: quelli che hanno un numero di linee esterne (che non connettono vertici tra loro) pari al numero di particelle iniziali e finali.

Ad es.: scattering $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$: 4 linee esterne.

- I diagrammi devono essere connessi: diagrammi del tipo



ci portano ad un elem. di matrice che è il prodotto di altri due elementi di matrice, che fisicamente rappresentano eventi scorrelati (fenomeno di clustering).

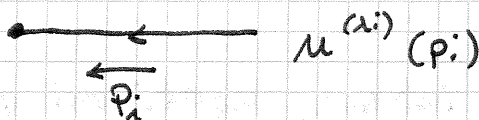
- Se abbiamo un elettrone uscente con un impulso \vec{P}_f :



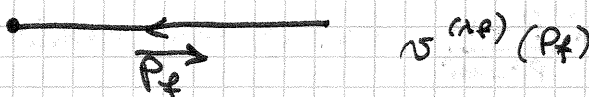
associamo a questa riga esterna la quantità

$$u^{(\lambda_f)}(P_f) \quad \lambda_f = \text{polarizzazione}$$

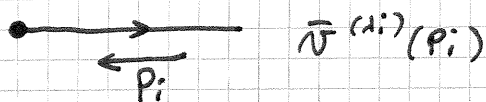
Immaginiamo di avere un e^- nello stato iniziale: lo immaginiamo entrante



Il positrone uscente prende la freccia entrante:



Il positrone entrante:



Le linee fotoniche sono ondulate. Se nel nostro processo avessimo un fotone uscente:



Un eventuale fotone entrante:



Queste sono le linee esterne.

Vediamo quelle interne.

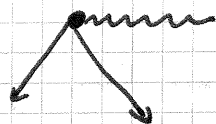
A ciascun ordine della teoria delle perturbazioni corrisponde un numero finito (crescente con l'ordine) di diagrammi di Feynman.

All' m -esimo ordine: $\int dx_1 \dots dx_n \underbrace{\bar{\Psi} \gamma_{\mu} \Psi A_{\mu}}_{m \text{ volte}} \dots$

Ad ogni blocco $\bar{\Psi} \gamma_{\mu} \Psi A_{\mu}$ corrisponde un vertice:

il diagramma generico all'ordine m avrà m vertici.

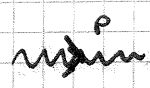
- Da ciascun vertice dev'essere partire una linea associata ad A , una a Ψ ed una a $\bar{\Psi}$.




- Ad ogni vertice corrisponde una δ che implementa la conservazione del P^{μ} , ed un fattore $(-ie\gamma_{\mu})$.

N.B.: γ^{μ} è una matrice: ha degli indici spinoriali che vanno saturati.

Abbiamo due tipi di linee interne, legati ai propagatori:

 $\tilde{D}^{\mu\nu}(P) = i \frac{g^{\mu\nu}}{P^2}$ Propagatore fotonico

 $\langle T(\Psi \bar{\Psi}) \rangle = i \frac{P + m}{P^2 - m^2}$ Propagatore fermionico $\equiv \tilde{G}(P)$

VERTICE

Ad ogni linea ~~interna~~ corrisponde un'integrazione.

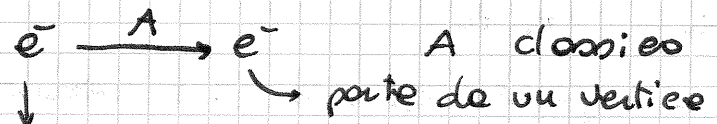
Dobbiamo disegnare tutti i diagrammi che sono topologicamente diversi.

I campi classici sono descritti da:

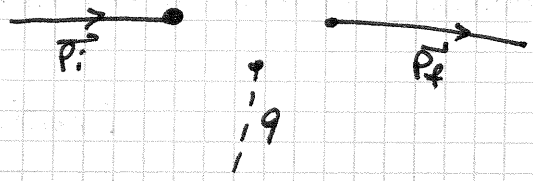
$\tilde{A}_\mu(p) \leftarrow$ trasformata di Fourier (linea esterna)

Ridefiniamo tutti gli elem. di matrice che abbiamo già visto.

Δ

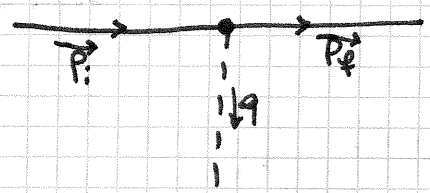


e- entrante: una linea che incide su un vertice.



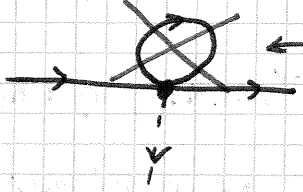
Il campo A classico e- una linea esterna.

Il primo ordine che contribuisce e' il primo non banale: quello lineare -> 1 vertice



Con un solo vertice non ci sono altri diagrammi possibili.

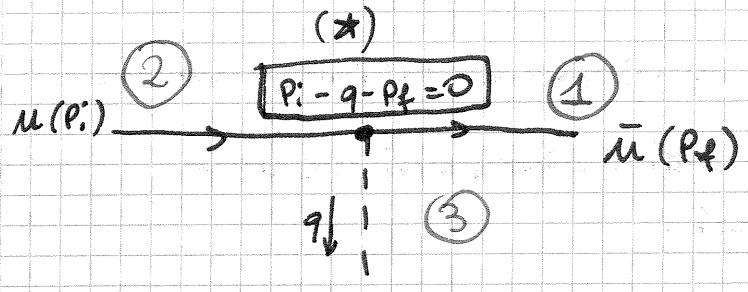
Teorema di Wick => non prendiamo coppie di elementi che incidono sullo stesso vertice => non possiamo disegnare linee del tipo



esce ed entra nello stesso vertice.

Scriviamo l'elem. di matrice seguendo queste regole.

Partiamo da dove esce la freccia spinoriale.



* \bar{u} ed u provengono già da una scrittura in trasformata di Fourier, da cui poi sono stati estratti gli anti-commutatori.

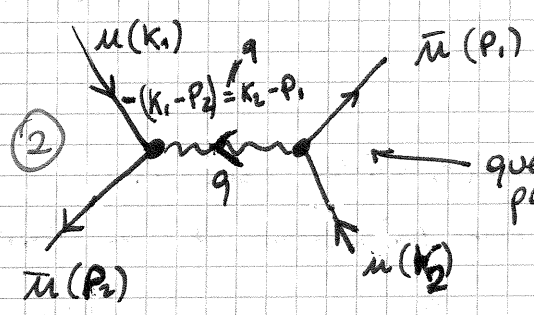
① → vertice → ② ③
 $\bar{u}(p_f) (-ie\gamma^\mu) u(p_i) \tilde{A}(q)$ *

Imponiamo la legge di conservazione: $q = p_i - p_f$ (*)

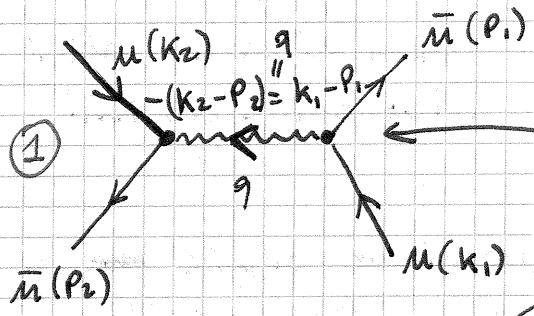
2 Scattering $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$
 $k_1, k_2 \quad p_1, p_2$

- tutti i diagrammi a 4 gambe esterne (2 e^- entranti, 2 e^- uscenti)

4 part. celle \Rightarrow almeno 2 vertici (ognuno è del tipo $\begin{matrix} e \\ \nearrow \\ k_2 \end{matrix}$)



i vertici conservano la carica
 questo contribuisce 2 volte: posso scambiare i vertici. Questo fattore compensa il fattore $\frac{1}{(n=2)!}$ che viene dallo sviluppo dell'esponenziale.



M_p è uno scalare \Rightarrow gli indici spinoriali si saturano in $\bar{u}\gamma^\mu u$, e quelli di Lorentz in $\dots \gamma^\mu \dots D_{\mu\nu} \dots \gamma^\nu$.

① $-e^2 \bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(k_1) \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \bar{u}(p_2) \gamma^\nu u(k_2)$, $q = k_1 - p_1 = p_2 - k_2$
 ← Teorema di Spin-Statistica

② $+e^2 \bar{u}(p_2) \gamma^\mu u(k_2) \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \bar{u}(p_1) \gamma^\nu u(k_1)$, $q = k_2 - p_1 = p_2 - k_1$

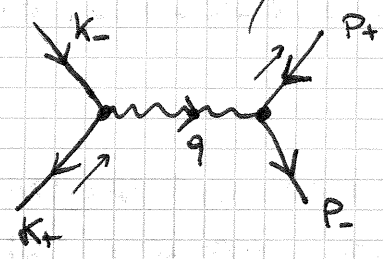
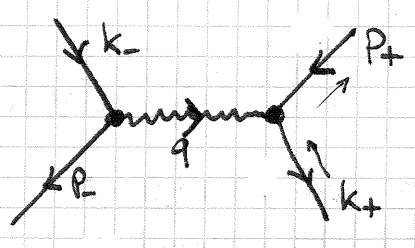
Quando abbiamo 2 diagrammi che sono diversi solo per uno scambio di linee fermioniche, il segno "relativo" è -. Quando scambiamo 2 linee fotoniche il segno relativo è +. La fase globale è ininfluente: bisognerà fare il modulo quadro.

3

Scattering $e^- e^+$

$$e^- e^+ \longrightarrow e^- e^+$$

$$k_- k_+ \quad P_- P_+$$



Per le antiparticelle la direzione dell'impulso è opposta a quella che indica gli indici spinoriali.

$$\left. \begin{aligned} k_- - P_- - q &= 0 \\ q - P_+ + k_+ &= 0 \end{aligned} \right\} *$$

$$\left. \begin{aligned} k_- + k_+ - q &= 0 \\ q - P_+ - P_- &= 0 \end{aligned} \right\} *$$

per le leggi di conservazione devo usare le frecce degli impulsi, non quelle spinoriali.

$$-e^2 \underbrace{\bar{u}(P_-)}_{\text{elettrone uscente}} \delta^{\mu\nu} u(k_-) \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \underbrace{\bar{v}(k_+)}_{\text{positrone entrante}} \delta^{\nu\lambda} v(P_+), *$$

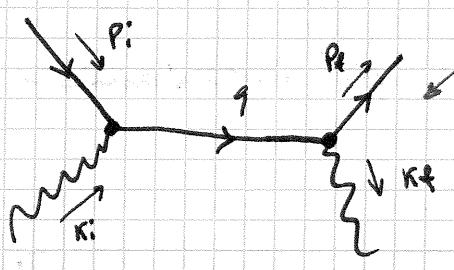
$$+ \bar{v}(k_+) \delta^{\mu\nu} u(k_-) \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \bar{u}(P_-) \delta^{\nu\lambda} v(P_+), *$$

4

$$e^- \gamma \longrightarrow e^- \gamma$$

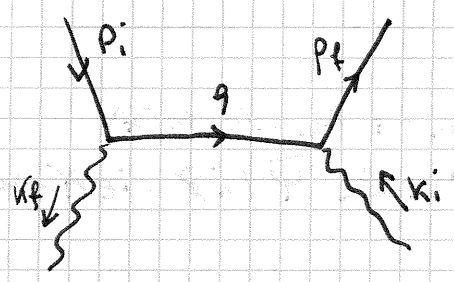
$$p_i k_i \quad p_f k_f$$

La linea fotonica è già saturata dal γ esterno \Rightarrow propagatore fermionico.



il fattore che compensa $\frac{1}{2}$ è il 2 dovuto al fatto che posso invertire tutte le frecce fermioniche.

$$-e^2 \bar{u}(p_f) \delta^{\mu\nu} G(q) \delta^{\nu\lambda} u(p_i) \epsilon_\mu^*(k_f) \epsilon_\nu(k_i)$$



incidono sullo stesso vertice

$$-e^2 \bar{u}(p_f) \delta^{\mu\nu} \tilde{G}(q) \delta^{\nu\lambda} u(p_i) \epsilon_\mu^*(k_i) \epsilon_\nu^*(k_f)$$

Non ha indici di Lorentz: ha indici spinoriali e satura quelli di u e \bar{u} .

va sul fotone uscente

≠ osservabili in grado di distinguere tra i diversi diagrammi offerti: a un processo: i singoli diagrammi non sono invariati di Gauge.

25/11/2011

Come conseguenza dell'invarianza di Gauge il propagatore fotonicco si scrive nella forma

$$\tilde{D}_{\mu\nu} = i \left[\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} - (\lambda-1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \right]$$

perché il secondo termine non contribuisce mai al calcolo

↓
= termine longitudinale

$$\text{Invariante di Gauge} \Rightarrow E_\mu \longrightarrow E_\mu + cK_\mu$$

Vediamo un esempio:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\not{\partial} - m) \Psi \quad (\text{teoria classica da cui si ricava l'eq. di Dirac})$$

elektrodinamica

Questa \mathcal{L} ha una simmetria $U(1)$: se $\Psi \rightarrow e^{i\alpha} \Psi$ la \mathcal{L} non cambia. Teor. di Noether: $J^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$: $\partial_\mu J^\mu = 0$
 $\Rightarrow Q = \int d^3x J^0$ è conservato.

Questa è una invarianza $U(1)$ Globale

Cosa succede invece se: $\Psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Psi$?

(è una transf. LOCALE)

A causa delle derivate, \mathcal{L} non è più invariante.

$$\partial_x e^{i\alpha(x)} \Psi = i\partial_x \alpha(x) \Psi e^{i\alpha(x)} + e^{i\alpha(x)} \partial_x \Psi$$

Si aggiunge un termine.

Trasformazioni locali = trasformazioni di gauge
(principio di gauge)

Se operiamo una trasformazione: $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha(x)$
e costruiamo l'accoppiamento minimale $\bar{\Psi} (i\not{\partial} - ie\not{A} - m) \Psi$
sotto la coppia di trasformazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha(x) \\ \Psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Psi \end{array} \right. \Rightarrow \mathcal{L} \text{ è invariante}$$

-TRASFORMAZ. DI GAUGE

$$\mathcal{L}_{ED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi} (i\not{\partial} - m) \Psi - e A_{\mu} \bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Psi$$

Questa teoria è invariante di gauge, ovvero è invariante rispetto alla coppia di trasformazioni:

$$\begin{cases} \Psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Psi \\ A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} - \partial_{\mu} \alpha(x) \end{cases}$$

Quando abbiamo fatto la quantizzazione abbiamo dovuto aggiungere un termine per preservare la covarianza:

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{ED} + \frac{\lambda}{2} (\partial_{\mu} A^{\mu})^2$$

Questo termine non è più invariante e costringe a scegliere un λ .

Per il principio di gauge, tutte le osservabili non devono dipendere da λ . Dimostriamo che è così. N.B.: $\lambda = 1 =$ gauge di Feynman.

L'invariante di gauge comporta un certo numero di identità.

Anche la QCD si ricava dal principio di gauge, ma non dal gruppo $U(1)$: da $SU(3)$ ^{int. forti} _{int. deboli} _{int. e.m.}
 Idem per il modello standard: si parte da $SU(2) \otimes U(1)$

Conseguenza dell'invarianza di gauge è che la matrice S e tutte le quantità fisiche non hanno dipendenza da λ . Dimostriamo.

Utilizziamo la conservazione della corrente elettronica:

$$J^{\mu} = i \bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Psi \Rightarrow \partial_{\mu} J^{\mu} = 0 \Rightarrow \exists Q = \int d^3x J^0 \text{ e.c. } [Q, H] = 0.$$

$$\langle f | S^{(n)} | i \rangle = \langle f | \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n T [J_{\mu_1} A^{\mu_1} \dots J_{\mu_n} A^{\mu_n}] | i \rangle$$

Lo spazio di Fock delle particelle libere è =
 spazio Fock fermioni: \otimes spazio Fock fotoni

$$\Rightarrow S_f^{(n)} = \int d^4x_1 \dots d^4x_n \langle f | T [A^{\mu_1}(x_1) \dots A^{\mu_n}(x_n)] | i \rangle \cdot \langle f | T [J_{\mu_1}(x_1) \dots J_{\mu_n}(x_n)] | i \rangle$$

Vediamo la parte fotonica $\langle f_0 | \dots | i_0 \rangle$:

$$\langle 0 | c_1 \dots c_m T[A^{\mu_1}(x_1) \dots A^{\mu_m}(x_m)] c_1^\dagger \dots | 0 \rangle$$

Posso calcolare questo termine con il teorema di Wick.

Ad esempio, la coppia $c_m A^{\mu_1}(x_m)$ produce $\epsilon^{\mu_1 \nu} e^{-ik_1 x}$

poi ci saranno un tot di propagatori: $\int d^4 q e^{-iq(x_i - x_j)} \tilde{D}_{\mu_i \nu_j}(q)$, e poi i termini dati da

operatori associati agli stati esterni danno altri termini $\epsilon^{\mu\nu} e^{-ik_\nu x}$

Prendere tutte le coppie si giustifica "simmetrizzare" tutti gli indici del termine generico.

Si ricava che $S_{fi}^{(m)}$ si può scrivere nella forma:

$$\int d^4 q_1 \dots d^4 q_m \tilde{D}_{\mu_1 \nu_1}(q_1) \tilde{D}_{\mu_2 \nu_2}(q_2) \epsilon_{\rho_1}^*(k_1) \epsilon_{\rho_2}^*(k_2) \dots$$

$$\cdot M^{\mu_1 \mu_2 \dots}(q_1, q_2, \dots)$$

$$M^{\mu_1 \dots} = \int d^4 x_1 \dots d^4 x_m e^{-iq_1 x_1} \dots \langle f_0 | T[J^{\mu_1}(x_1) \dots J^{\mu_m}(x_m)] | i_0 \rangle$$

M ha tutti gli indici di Lorentz che servono a saturare quelli dei propagatori. \tilde{D} è completamente simmetrico.

Se operiamo una sostituzione $D_{\mu\nu}(q) \rightarrow D_{\mu\nu}(q) + C_1 g_{\mu\nu} F + C_2 \epsilon_{\mu\nu} q_\nu$

con F, E funzioni di q (sono termini longitudinali, e proporzionali all'impulso), S_{fi} non cambia.

S_{fi} non cambia nemmeno sotto la trasformazione

$$\epsilon^\mu(k) \rightarrow \epsilon^\mu(k) + c k^\mu$$

Dimostriamo infatti che $q_\mu M^\mu(c) = 0$: siccome M è completamente simmetrico, basta fare la dimostrazione per un solo indice.

$$q_2^\mu M_\mu = \int d^4 x_1 \dots e^{-i \dots} \partial_{x_1} \langle f_0 | \dots | i_0 \rangle$$

in transf. di Fourier la q è una derivata.

Voglio dimostrare che $\partial_{x_1} \langle f_\psi | \dots | i_\psi \rangle = 0$

$$\partial_\mu \langle f_\psi | T [J^\mu(x_1) J^\mu(x_2) \dots] | i_\psi \rangle$$

Consideriamo il caso dove ci sono solo 2 correnti:

$$\partial_\mu \langle f | T [J^\mu(x) J^\nu(y)] | i \rangle$$

Se non ci fosse il T-prodotto:

$$= \langle f | \partial_\mu J^\mu J^\nu | i \rangle$$

$$= 0 \Rightarrow \langle \dots \rangle = 0$$

Tenendo conto del T-prodotto:

$$= \partial_\mu \langle f | [\theta(x^0 - y^0) J^\mu(x) J^\nu(y) + \theta(y^0 - x^0) J^\mu(y) J^\nu(x)] | i \rangle$$

$$= \underbrace{\langle f | \partial_\mu J^\mu J^\nu | i \rangle}_{=0} + \delta(x^0 - y^0) \langle f | [J^0(x), J^\nu(y)] | i \rangle$$

derivato della θ ?

Quando deriviamo $\theta J^\mu J^\nu$ risp. al tempo otteniamo $\delta(x^0 - y^0) J^0(x) J^\nu(y)$, quando deriviamo $\theta J^\nu J^\mu$ $-\delta(x^0 - y^0) J^\nu(y) J^0(x) \Rightarrow$ esce un commutatore.

Dobbiamo ora dimostrare che $[J^0, J]$ è nullo.

$$J^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi \quad J^\nu = \bar{\psi} \gamma^\nu \psi$$

$$[\text{fare i calcoli}] \Rightarrow [J^0(x), J^\nu(y)] = 0$$

Si dimostra che per il generico termine a n correnti abbiamo n commutatori tutti nulli.

Utilità pratiche:

- ① nei calcoli di elementi di matrice fisici, cioè calcolati in teor. delle perturbazioni, possiamo sempre escludere il secondo termine ed usare:

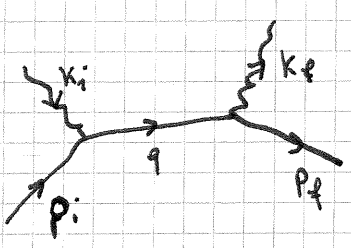
$$\tilde{D}_{\mu\nu}(q) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$$

- ② possiamo sempre sommare termini longitudinali alla polarizzazione \Rightarrow \exists una utile formula:

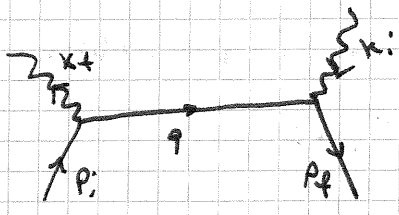
$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)*} \epsilon_{\nu}^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu}$$

Vediamo in dettaglio il processo Compton.

$$e \gamma \rightarrow e \gamma$$



$$q = p_i + k_i$$



$$q = p_i - k_f$$

Questi sono i due diagrammi che contribuiscono. Ne risultava:

$$\bar{u}(p_f) \gamma^{\mu} G(p_i + k_i) \gamma^{\nu} u(p_i) \epsilon_{\mu}^{*}(k_f) \epsilon_{\nu}(k_i) +$$

$$+ \bar{u}(p_f) \gamma^{\nu} G(p_i - k_f) \gamma^{\mu} u(p_i) \epsilon_{\nu}(k_i) \epsilon_{\mu}^{*}(k_f)$$

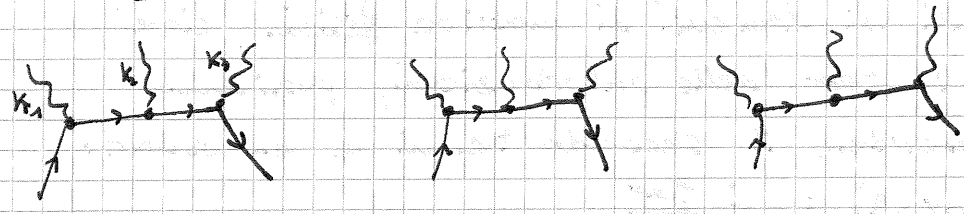
Gli indici μ e ν sono saturati. Entrambi i termini sono del tipo $\epsilon_{\nu}(k_i) \cdot M^{\nu}(\dots)$.

Se sostituiamo $\epsilon_{\nu}(k_i) \rightarrow \epsilon_{\nu}(k_i) + c k_{i\nu}$, verificare algebricamente che $k_{i\nu} M^{\nu} = 0$ e quindi non cambia il risultato.

Questo vale \forall linea fotonica, anche interna.

N.B.: questo è vero ordine per ordine, non vale per il singolo diagramma. Soltanto la somma degli n diagrammi che contribuiscono all'ordine n è invariante di gauge.

N.B.: tipica domanda d'orale: $e \gamma \rightarrow e \gamma$
 Richiede almeno 3 vertici.



(3 diagrammi possibili)

I diagrammi di Feynman permettono di scrivere l'elemento di matrice - Poi ne va fatto il modulo quadro, poi eventualmente fare ipotesi sulle polarizzazioni, inserirlo nella sezione d'urto ecc.

Come si fa?

Torniamo ad esempio al processo $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$.

Ci sono 2 diagrammi:



$$e^2 \left[\bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(k_1) D_{\mu\nu}(k_1 - p_1) \bar{u}(p_2) \gamma^\nu u(k_2) - \bar{u}(p_2) \gamma^\mu u(k_1) D_{\mu\nu}(k_1 - p_2) \bar{u}(p_1) \gamma^\nu u(k_2) \right]$$

Ci sono 2 modi per procedere: al computer, $\bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(k_1)$, $D_{\mu\nu}$, $\bar{u} \dots$ sono 3 numeri \Rightarrow è facile fare il modulo quadro.

Poi si sommano $| \dots |^2$ di tutte le polarizzazioni finali, poi si media su quelle iniziali ecc.

A mano: $|A+B|^2 = |A|^2 + |B|^2 + \text{Re}(2AB)$

Prendiamo il 1° termine: $|\bar{u}_p \gamma^\mu u_{k_1} D_{\mu\nu} \bar{u}_{p_2} \gamma^\nu u_{k_2}|^2 =$

$$= D_{\mu\nu}(q) D_{\alpha\beta}^*(q) \left[\bar{u}_{p_1}^{(s_1)} \gamma^\mu u_{k_1}^{(s_1)} \left(\bar{u}_{p_1}^{(s_2)} \gamma^\alpha u_{k_1}^{(s_1)} \right)^* \bar{u}_{p_2}^{(s_2)} \gamma^\nu u_{k_2}^{(s_2)} \left(\bar{u}_{p_2}^{(s_1)} \gamma^\beta u_{k_2}^{(s_2)} \right)^* \right]$$

$(a+b)^* = a^* + b^*$

$$\rightarrow = \bar{u}^{(s_1)}(k_1) \gamma^\alpha u^{(s_1)}(p_1) \quad \boxed{\gamma_0 \gamma^\alpha \gamma_0 = \gamma^\alpha}$$

Dobbiamo sommare sulle polarizzazioni finali:

$$\bar{u}_\alpha^{(s_1)}(p_1) \gamma_\alpha^\mu u_\mu^{(s_1)}(k_1) \bar{u}_\nu^{(s_2)}(k_2) \gamma_\nu^\beta u_\beta^{(s_2)}(p_2)$$

$$\sum_\lambda u^{(\lambda)}(k) \bar{u}^{(\lambda)}(k) = \not{k} + m$$

Mediamo anche sulle polarizzazioni iniziali -
 Otteniamo:

$$= \frac{1}{2} (\not{p}_1 + m)_{\alpha\beta} \gamma^{\mu}_{\alpha\beta} (\not{k}_1 + m)_{\beta\gamma} \gamma^{\alpha}_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (\not{p}_1 + m) \gamma^{\mu} (\not{k}_1 + m) \gamma^{\alpha} \}$$

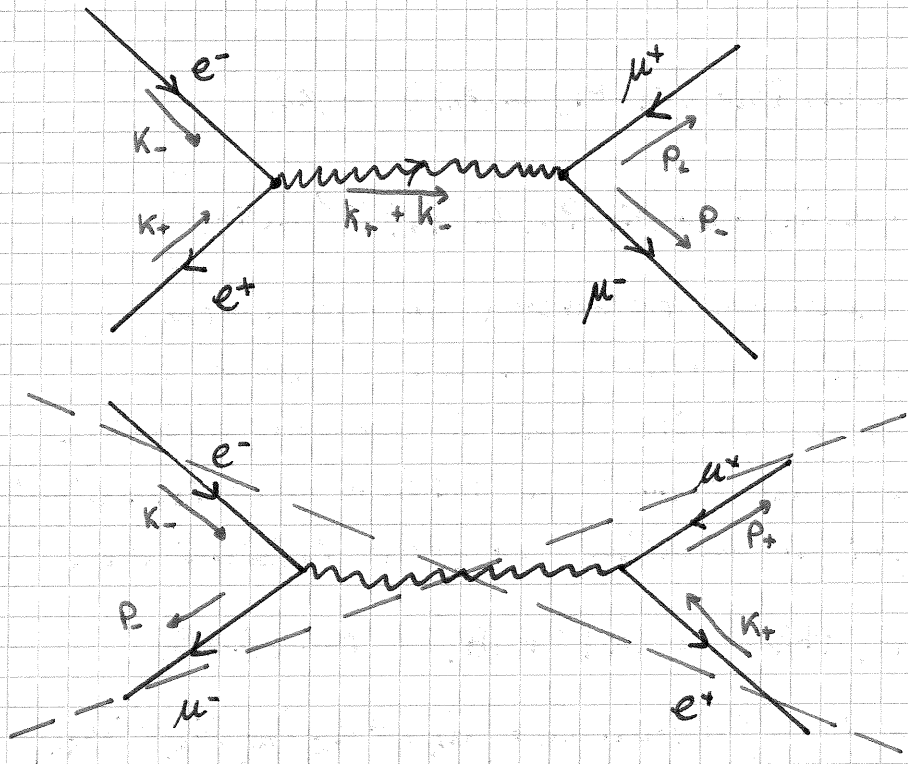
Questo tensore a 2 indici si satura con lo stesso termine che deriva dallo scambio di k_1 e k_2 .

In generale ci troveremo sempre davanti tracce di matrici γ .

Finire il calcolo.

28/11/2011

$$e^+ e^- \longrightarrow \mu^+ \mu^-$$



∇ vertici che accoppiano direttamente elettrone e muone: sono due particelle diverse.

I due termini della lagrangiana di interazione danno origine ai due vertici diversi elettronico e muonico.

$$\mathcal{L}_I = J_e^{\alpha} A_{\alpha} + J_{\mu}^{\beta} A_{\beta} \quad J^{\sigma} = \bar{\Psi} \gamma^{\sigma} \Psi$$

N.B.: stiamo considerando solo la QED: per questo i vertici non attaccano linee elettroniche a linee muoniche (∇ termine nella lagrangiana che

mescdi e e μ)-

L'elemento di matrice che ne risulta è:

$$-ie \left[\bar{v}_e(k_+) \gamma^\alpha u_e(k_-) \tilde{D}_{\alpha\beta}(k_+ + k_-) \bar{u}_\mu(p_-) \gamma^\beta v_\mu(p_+) \right]$$

Per calcolare la sezione d'urto supponiamo che la polarizzazione finale non sia misurata (sommiamo) e supponiamo che la polarizzazione iniziale sia una "non polarizzazione" (mediamo).

$$d\sigma = \frac{1}{4I} |M_{fi}|^2 \overset{(2)}{d\Omega} \underbrace{\frac{d^3 p_+}{(2\pi)^3 2E_+} \frac{d^3 p_-}{(2\pi)^3 2E_-}}_{(2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f)}$$

Per fare il modulo quadro dividiamo l'elemento di matrice in blocchi scalar:-

$$\left[\bar{v}_e(k_+) \gamma^\mu u_e(k_-) \right]^* = \bar{u}_e(k_-) \gamma^\alpha v(k_+)$$

$$\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma^\mu \quad \leftarrow \text{Questo è solo un pezzettino!!}$$

$$\left| \bar{v}_e(k_+) \gamma^\mu u_e(k_-) \right|^2 = \bar{v}_e^{\lambda_+}(k_+) \gamma^\mu_{\alpha\beta} u_e^{\lambda_-}(k_-) \bar{u}_e^{\lambda_-}(k_-) \gamma^\alpha_{\delta\delta} v_e^{\lambda_+}(k_+)$$

(Poi ci sarà un altro pezzo della forma $B_\mu B_\alpha^*$ -)

Positroni non polarizzato $\rightarrow \frac{1}{2} \sum_{\lambda_+} (\dots)$

e- " " " $\frac{1}{2} \sum_{\lambda_-} (\dots)$

Utilizziamo:

positrone $\sum_{\lambda_+} v(k) \bar{v}(k) = \not{k} - m$

elettrone $\sum_{\lambda_-} u \bar{u} = \not{k} + m$

Ottengo: $(\not{k}_+ - m)_{\alpha\beta} \gamma^\mu_{\alpha\beta} (\not{k}_- + m)_{\delta\delta} \gamma^\alpha_{\delta\delta} B B^*$
 $= \frac{1}{4} \text{Tr} \{ (\not{k}_+ - m) \gamma^\mu (\not{k}_- + m) \gamma^\alpha \} (\dots)$

Lo spazio delle fasi diventa:

$$\delta(p_i^0 - p_f^0) \frac{d^3p}{(2\pi)^3 4 p_i^0 p_f^0} \rightarrow |\vec{p}|^2 d|\vec{p}| d\Omega$$

Per una singola particella vale: $|\vec{p}| d|\vec{p}| = p^0 dp^0$

Avevamo visto che la sezione d'urto di un processo elettrodinamico deve essere della forma:

$$\sigma = \alpha^x f(S, m_e, m_\mu)$$

\downarrow $\frac{1}{137}$ \downarrow energia totale nel centro di massa

Una funzione è scalare se è funzione di scalari.
 $[\sigma] = [L^2] \Rightarrow$

$$\sigma = \frac{\alpha^x}{S} f\left(\frac{m_e^2}{S}, \frac{m_\mu^2}{S}\right)$$

(S ha le dimensioni: $[E^2]$)

Ad energie molto grandi: $\frac{m_e^2}{S} \rightarrow 0$ $\frac{m_\mu^2}{S} \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{alta}} = C \frac{\alpha^x}{S}$$

Adesso possiamo stimare gli ordini dei diagrammi di Feynman: 2 vertici $\Rightarrow x = 2$

Ma noi stiamo calcolando solo il primo ordine perturbativo. In realtà ce ne sono altri:

$$\sigma = C \frac{\alpha^x}{S} (1 + \dots)$$

Dobbiamo imparare a stimare l'incertezza che commettiamo calcolando solo il 1° ordine.

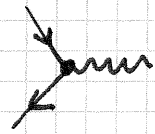
$$\text{Errore} \sim \frac{\sigma - \sigma^{(n)}}{\sigma} = O(\alpha^y)$$

(σ_n sezione d'urto calcolata all'ordine n)

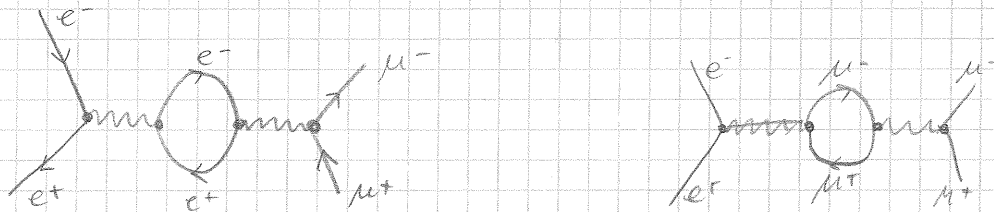
Per fare questa stima occorre disegnare i diagrammi di Feynman degli ordini successivi, o almeno il primo di essi.

Per il nostro processo, a che ordine sono i diagrammi successivi?

1° ordine dominante dopo il 1° \equiv sub-leading -
I vertici che abbiamo a disposizione sono sempre gli stessi.



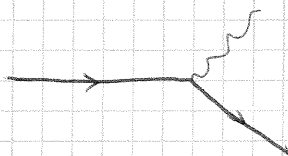
$$\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \bar{\Psi} \delta \Psi A(x_1) \bar{\Psi} \delta \Psi A(x_2) \bar{\Psi} \delta \Psi A(x_3) d^4x_4 \bar{\Psi} \delta \Psi A(x_4)$$



29/11/2011

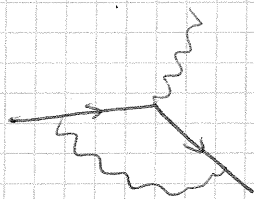
Qual è il problema del calcolo agli ordini successivi?

Scattering e^- - campo esterno



$$e \bar{u} \gamma^\mu u \tilde{A}_\mu$$

All'ordine successivo dobbiamo ad esempio



Questo diagramma non è più ad albero, ma a loop. In questo tipo di diagrammi compaiono integrali divergenti!

Grado di divergenza superficiale di un integrale:
ad esempio

$$D_0 \left(\int d^d x x^{-\alpha} \right) = d - \alpha$$

$d - \alpha \geq 0 \Rightarrow \int$ è divergente, se $d - \alpha < 0 \Rightarrow \int$ è convergente.

In particolare ci interessa il comportamento a grande x :

$$\int d^d x f(x) \quad |x| \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \bar{x}^{-\alpha} \quad D_0 \equiv d - \alpha$$

Una linea interna ^{topologica} associamo un'integrazione sul 4-impulso diviso p^2 :

$$\frac{g_{\mu\nu}/p^2}{\text{linea}}$$

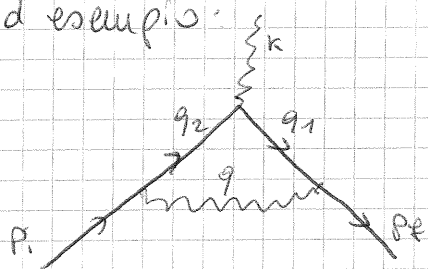
$$\frac{p-m}{\text{linea}} \quad \frac{d^4 p}{p}$$

A vertice abbiamo una δ^4 , che riduce il grado di divergenza dell'integrale - Ma devo togliere una δ^4 che andrà ad indicare la conservazione di P_x .

$$D_G = 2 B_i + 3 F_i - 4(V-1)$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 numero numero numero
 bosoni fermioni
 interni interni vertici

Ad esempio:



$$\bar{u}(p_f) \gamma^\mu \tilde{G}(q_1) \gamma^\alpha \tilde{G}(q_2) \gamma^\nu u(p_i) A_{\mu\nu}(q)$$

Legg. di conservazione:

$$\begin{cases} p_f = q_1 + q \\ k = q_2 - q_1 \\ p_i = q - q_2 \end{cases} \Rightarrow \text{un'impulso non e' definito}$$

$$D_G = 2 + 6 - 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow \text{diverge}$$

Il fatto che ogni vertice sia del tipo $\gamma_{\mu\nu}$ e i do delle relazioni topologiche:

$$\begin{aligned} 2 F_i + F_e &= 2V \\ 2 B_i + B_e &= V \end{aligned}$$

F_e = numero fermioni esterni
 B_e = numero bosoni esterni

Di conseguenza:

$$D_0 = 2B_i + 3F_i - 4(V-1) = 4 - \frac{3}{2}F_e - B_e$$

(più gambe esterne abbiamo, meglio è) -

Le teorie che presentano questa proprietà si dicono **RINORMALIZZABILI**, ovvero è possibile "curare" le divergenze -

Nei diagrammi ad albero le δ definiscono tutti gli impulsi e non abbiamo integrali da fare -

Diagramma ad albero = diagramma senza loops -

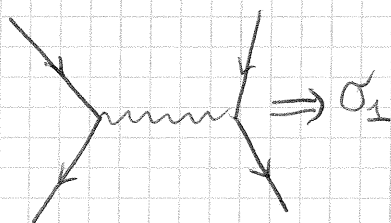
$$e^+ e^- \longrightarrow \mu^+ \mu^-$$

$k_+, k_- \qquad p_+, p_-$

$$S = (P_+ + P_-)^2 \gg 4m_\mu^2$$

(\exists energia di soglia)

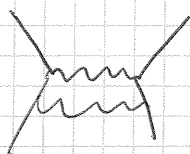
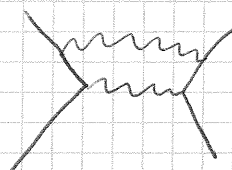
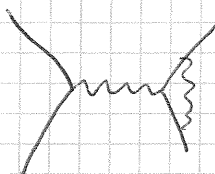
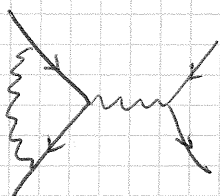
Che errore si commette usando solo il 1° ordine?



$$\frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma_1} = O(\alpha^2)$$

$\alpha = 10^{-2} \Rightarrow$ possiamo stimare l'errore se conosciamo α -

Gli ordini successivi si costruiscono con un maggior numero di vertici -



(eccetera)

NB: dato il tipo di vertici che abbiamo a disposizione

(solo QED: μ), il primo ordine

sub-leading possibile è quello con 4 vertici (per questo processo) -

L'elemento di matrice adesso sarà:

$$M = M_0 + M_1 \quad (\text{ogni vertice contribuisce con } e)$$

Ogni vertice contribuisce con $\sqrt{\alpha}$:

$$M = \alpha M_0 + \alpha^2 M_1$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0} = O(\alpha^2) \rightarrow \text{non è 2}$$

In fatti:

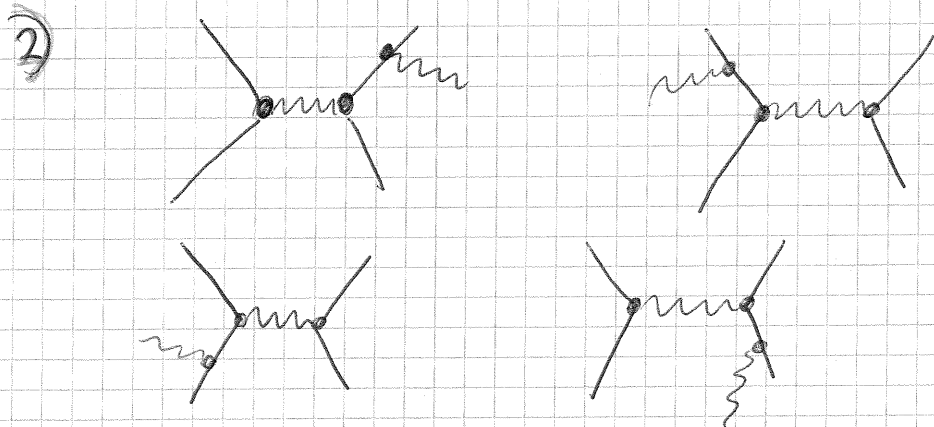
$$\sigma \propto |M|^2$$

$$\frac{|\alpha M_0 + \alpha^2 M_1|^2 - |\alpha M_0|^2}{|\alpha M_0|^2} = O(\alpha) \quad *$$

—————

- È possibile osservare un processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \gamma$?
- Se sì, quali sono i diagrammi di Feynman?
- Stimare se è più probabile questo processo $\rightarrow \mu^+\mu^-$
 $\left(\frac{\sigma_{\mu\mu\gamma}}{\sigma_{\mu\mu}} = O(\alpha^x), x = ? \right)$

1) È possibile? Cinematicamente sì.



3) $x = 1$. In fatti: $\sigma_{\mu\mu\gamma} \sim |e^3|^2 = \alpha^3$

$$\sigma_{\mu\mu} \sim \alpha^2$$

$$\frac{\alpha^3}{\alpha^2} = \alpha^1$$

N.B.: $\sigma(\mu+\mu + \text{eventualmente altro})$ si ottiene sommando le σ , cioè i $|M|^2$ - Se

invece abbiamo canali diversi per lo stesso processo, devo sommare gli M .

*

$$\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0} \propto \frac{\overset{\sigma}{|\alpha M_0 + \alpha^2 M_1|^2} - \overset{\sigma_0}{|\alpha M_0|^2}}{\underset{\sigma_0}{|\alpha M_0|^2}} =$$

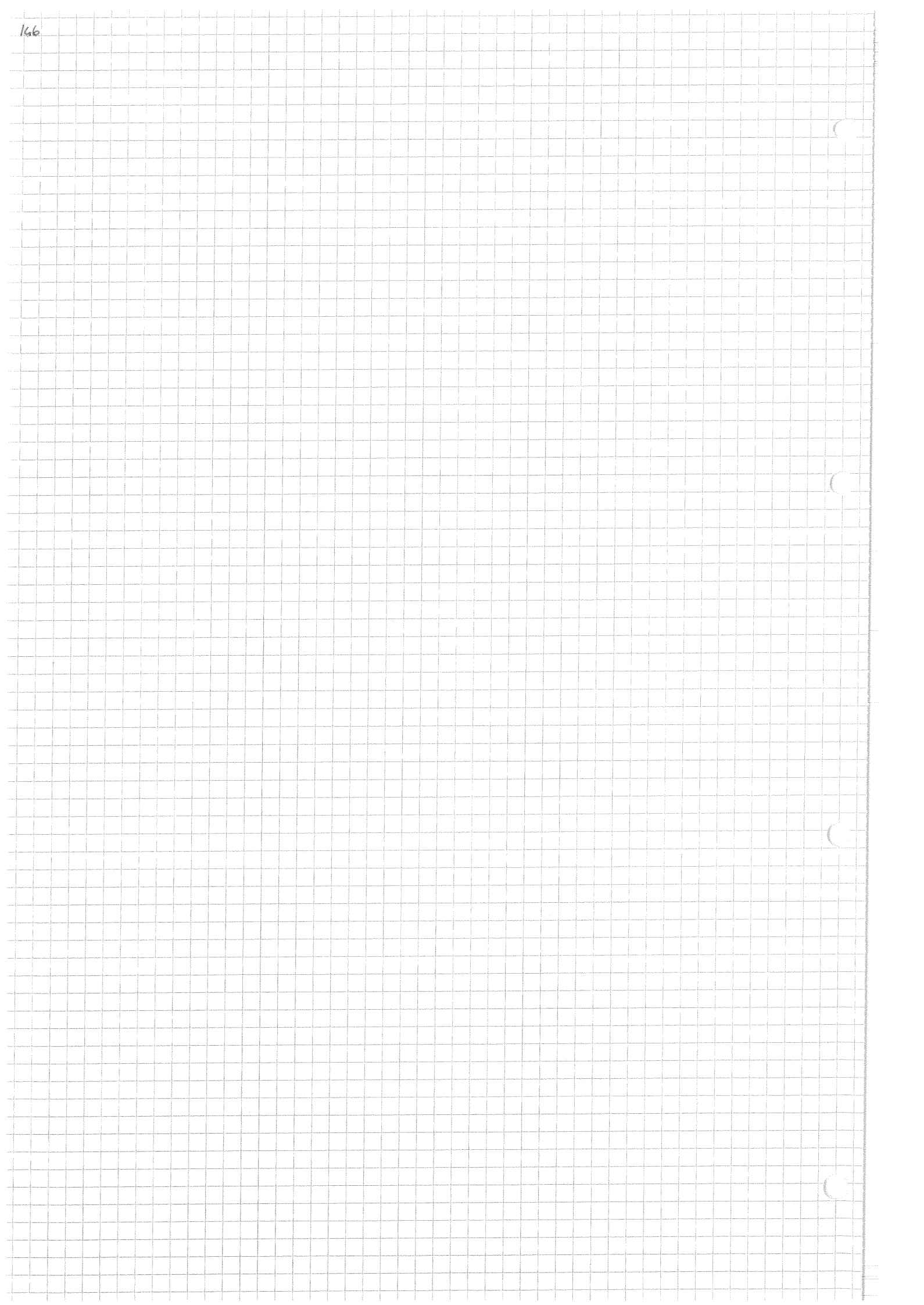
$$= \frac{\alpha^2 M_0^2 + \alpha^4 M_1^2 + 2\alpha^3 M_0 M_1 - \alpha^2 M_0^2}{\alpha^2 M_0^2} =$$

$$= \underset{\uparrow}{\alpha^2} \frac{M_1^2}{M_0^2} + \underset{\uparrow}{2\alpha} \frac{M_1}{M_0}$$

\uparrow 10^{-4} \uparrow 10^{-2}

$\Rightarrow \alpha$ è dominante su α^2

$\Rightarrow \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0} = \mathcal{O}(\alpha)$



01/12/2011

MODELLO STANDARD

- 3 bosoni di gauge Simmetria di gauge locale \Rightarrow 3 bosoni.
 $SU(2) \otimes U(1) \Rightarrow$ 3 bosoni.

A_μ	Z_μ	W_μ
	91 GeV	80 GeV

Z_μ è un bosone vettoriale $\in \mathbb{R}$ (\Rightarrow hermitiano, come A_μ).
 W_μ è carico \Rightarrow è un campo complesso.

- Fermioni N.B.: stiamo considerando solo le particelle fondamentali.

e	μ	τ
0.5 MeV	105 MeV	1077 MeV

ν_e ν_μ ν_τ
 Nel MS: neutrini avrebbero massa nulla. Gli esperimenti danno evidenza di masse con un limite superiore di qualche frazione di eV.

- 6 tipi di quarks

u c t d s b
 Non sono osservabili isolati (\equiv come stati asintotici).
 Il gruppo di gauge associato alle int. forti è $SU(3) \Rightarrow$ 8 gluoni. Gli stati asintotici saranno stati legati di quarks e gluoni.
 I quarks hanno accoppiamenti diversi e masse diverse.
 \sim MeV \sim GeV 170 GeV \sim MeV \sim 100 MeV \sim 5 GeV

- A queste particelle si aggiungerebbe il Higgs H, che è l'unica particella scalare del MS. Se \exists , ha massa $110 \div 120$ GeV.

Tutte le altre particelle sono oggetti non fondamentali, sono stati legati dei quarks.

Per costruire il MS avremo bisogno di 2 libere ψ particelle.

Tralasciando i problemi di gauge-fixing di quantizzazione...

$$F_{\mu\nu}^z \equiv \partial_\mu z_\nu - \partial_\nu z_\mu$$

Lo z ha anche una massa: $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + M_z^2 z^\mu z_\mu$

Il propagatore di z si può leggere dalla teoria libera:

$$\langle 0 | T(z_\mu z_\nu) | 0 \rangle = -i \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_z^2}}{k^2 - M_z^2}$$

in generale questo è il propagatore per una particella massiva di spin 1

Versione del propagatore nel gauge unitario.

$$\mathcal{L}_z = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^z F^{\mu\nu z} - M_z^2 z^\mu z_\mu$$

Il W è una particella carica:

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{W+} F^{\mu\nu W-} - M_W^2 W_\nu^+ W^\nu$$

il propagatore è come quello dello z.

La fermione c'è una \mathcal{L} del tipo: $\bar{\Psi}_\# (i\not{D} - M_\#) \Psi_\#$ (12 campi diversi: leptoni + quark).

Per i quarks: ogni quark in realtà appare in 3 colori diversi (QCD).

Non c'è ancora evidenza sperimentale dell'Higgs.

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - \frac{1}{2} M_H^2 H^2$$

ed il propagatore è $-i \frac{1}{k^2 - M_H^2}$

Il gauge unitario è il gauge "fisico", cioè tiene conto solo delle particelle effettive.

Ora dobbiamo aggiungere le lagrangiane d'interazione.

Per ora consideriamo solo le interazioni tra fermioni.

La bosone Z \mathcal{L} d'interazione coi fermioni.

$A_\mu \leftrightarrow e \mu \tau \Rightarrow$ elettrodinamica.

Costruiamo un vettore a 6 componenti:
(un "supercampo" leptonico):

$$\Psi_e = \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \\ \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$

Costruiamo anche un campo di quarks:

$$\Psi_q = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \\ d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

interazione fotone - fermione

$$\mathcal{L}_I = -e A_\mu J_\mu$$

$$J_\mu = q \bar{\Psi}_\# \gamma^\mu \Psi_\#$$

↳ carica della particella #

Possiamo scrivere:

$$J_\mu = \bar{\Psi}_e \gamma^\mu Q_{ee'} \Psi_{e'} \leftarrow \text{indice leptonico}$$

$$Q_{ee'} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ 0 & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

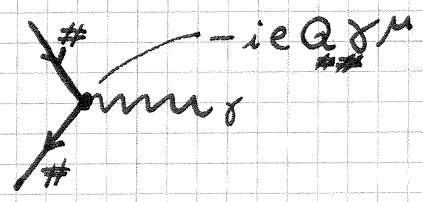
Sommiamo il termine dei quarks:

$$J_\mu = \bar{\Psi}_e \gamma^\mu Q_{ee'} \Psi_{e'} + \bar{\Psi}_q \gamma^\mu Q_{qq'} \Psi_{q'}$$

$$Q_{qq'} = \begin{pmatrix} 2/3 & & & & & \\ & 2/3 & & & & \\ & & 2/3 & & & \\ & & & 0 & & \\ 0 & & & & -1/3 & \\ & & & & & -1/3 \end{pmatrix}$$

Per ora non si osservano interazioni fuori diagonale.
(siamo trascurando l'Int. forte)

Il campo abbiamo in elettrodinamica in vertice del tipo:



$Q(\text{neutrino}) = 0 \Rightarrow \nu$ non accoppia con A_μ .

Queste sono le interazioni e.m. \Rightarrow hanno accoppiamento $\alpha = 1/137$.

$$\mathcal{L}_W = g_W (W_\mu J_W^\mu + \text{hermitiano coniugato})$$

accoppiamento (in QED è e)

Ci saranno ancora una corrente leptonica ed una per i quark.

$$J_{W_e}^\mu = \bar{\Psi}_e \gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) C_{ee'} \Psi_{e'}$$

corrente leptonica

proiettore di chiralità ("chiralità")

W accoppia il leptone ed suo neutrino.

$$C_{ee'} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

l'interazione è la somma sulle famiglie leptoniche, del tipo:

$$J_W^\mu = \sum_e \bar{\Psi}_{\nu_e} \gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \Psi_e$$

La parte per i quarks è un po' più complicata:

$$J_{W_q}^\mu = \bar{\Psi}_q \gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) C_{qq'} \Psi_{q'}$$

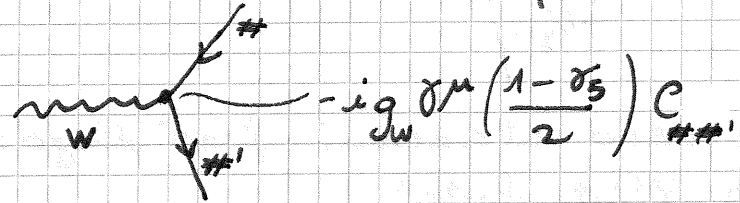
$$C_{qq'} = \begin{pmatrix} & A \\ \hline & \end{pmatrix}$$

$$J_W^\mu = J_{W_q}^\mu + J_{W_e}^\mu$$

questa è una matrice piena (di parametri liberi)

Vediamo l'interazione con Z .

N.B.: i vertici sono del tipo:



Ad esempio, per i leptoni: su un vertice devono esistere una

linea leptomica ed un neutrino.

$$\mathcal{L}_Z = g_Z Z_\mu J_Z^\mu$$

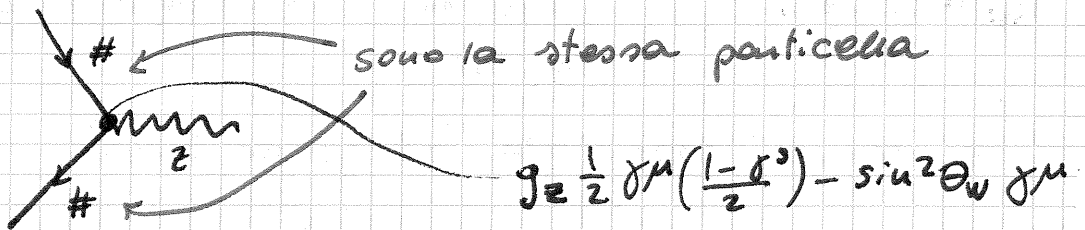
$$J_{Z, e}^\mu = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_e \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) C_{Zee} \Psi_e - \sin^2 \theta_W J_{A, e}^\mu$$

$$C_{Zee} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \\ & 0 & & -1 \\ & & & -1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

angolo di Weinberg

corrente e.m. associata al leptone e.

Questo accoppiamento è **DIAGONALE**:



$Z \in \mathbb{R} \Rightarrow J^\mu$ è hermitiano.

Scriviamo ad esempio l'interazione $Z - e^-$:

$$J_{Ze}^\mu = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_e \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) \Psi_e - \sin^2 \theta_W \bar{\Psi}_e \gamma^\mu \Psi_e$$

Per un neutrino abbiamo invece:

$$J_{Z\nu}^\mu = -\frac{1}{2} \bar{\Psi}_\nu \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) \Psi_\nu \quad \left(\begin{array}{l} \text{il neutrino è scarico} \\ \Rightarrow \text{non corrente } J_{A, \nu}^\mu \end{array} \right)$$

Esistono anche vertici bosonici a 3 e a 4, vertici Higgs-fermioni e Higgs-bosoni:

$$J_{Z, q}^\mu = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_q \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) C_{Zqq} \Psi_q - \sin^2 \theta_W J_{A, q}^\mu \quad \begin{array}{l} \text{Interazione} \\ Z - \text{quarks} \end{array}$$

$$C_{Zqq} = C_{Zee}$$

Vediamo quali sono i parametri liberi del modello standard.

- una massa \forall fermione (12)
 - leptoni e quarks

m_W, m_Z, M_H (questi sono parametri + le particelle libere)

Per le interazioni:

abbiamo introdotto altri parametri:

$$e, g_W, g_Z, \sin \theta_W$$

Esistono le relazioni:

$$e = g \sin \theta_W$$

$$g_W = g \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta_W = \frac{M_W}{M_Z}$$

$$g_Z = g \frac{1}{\cos \theta_W}$$

$$G_F = \frac{\sqrt{2} g^2}{8 M_W^2}$$

I parametri indipendenti sono 4: ad esempio e, g, M_Z, M_W .

g è la carica associata al gruppo $SU(2)$.

N.B.: e, g_W, g_Z sono accoppiamenti dello stesso ordine: questo non spiega la differenza di ordine fra le interazioni.

Il meccanismo per quale l'interazione debole è più "debole" di quella e.m. dipende dalla massa di W e Z . La costante d'accoppiamento dell'interazione debole è infatti:

$$G_F \sim \frac{g^2}{M_W^2} \sim \frac{\alpha}{M_W^2} \Rightarrow \text{se i processi "deboli" che osserviamo avvengono ad energie}^2 \text{ piccole rispetto a } (80:90 \text{ GeV})^2 \text{ l'accoppiamento}$$

è molto più piccolo di quello e.m..

2/12/2011

$Z, M_Z = 90 \text{ GeV}, \Gamma \approx 3 \text{ GeV}$ (larghezza di decadimento)

Vogliamo calcolare il decadimento.

$$J_{e, \mu, Z}^\mu = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_e \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \Psi_e - \sin^2 \theta_W \bar{\Psi}_e \gamma^\mu \Psi_e$$

$$J_{\nu, \mu, Z}^\mu = -\frac{1}{2} \bar{\Psi}_\nu \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \Psi_\nu$$

$$\mathcal{L}_I = g_Z Z_\mu J^\mu$$

Vogliamo capire se sono possibili i processi:

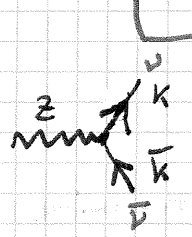
1. $Z \rightarrow e^- e^+$
2. $Z \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e$

Per prima cosa scriviamo i diagrammi di Feynman -

$$\mathcal{L}_{I_1} = g_Z Z_\mu \left[\bar{\Psi}_e \gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} \Psi_e - \sin^2 \theta_w \bar{\Psi}_e \gamma^\mu \Psi_e \right] \frac{1}{2}$$

Prendiamo il 2. La lunghezza di decadimento si scrive:

$$d\Gamma_2 = \frac{1}{2M_Z} |M_{fi}|^2 d\phi^{(2)}$$



$$M_{fi} = \bar{u}(k) \left(-\frac{1}{2} \right) \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) v(\bar{k}) g_Z \epsilon_\mu^Z$$

è un proiettore: seleziona l'elicità del neutrino ($\nu_L, \bar{\nu}_R$).

$$|M_{fi}|^2 = \epsilon_\mu \epsilon_\nu^* \bar{u}(k) \frac{g_Z^2}{4} \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) v(\bar{k}) \bar{v}(\bar{k}) \gamma^\nu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right)^+ u(k)$$

$$\gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^5$$

$$\gamma^\nu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\nu$$

γ^5 è andato a dx di $\gamma^\nu \Rightarrow$ prende un "1"

$$= \frac{g_Z^2}{4} \epsilon_\mu \epsilon_\nu^* \bar{u}(k) \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) v(\bar{k}) \bar{v}(\bar{k}) \gamma^\nu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) u(k)$$

matrice densità di $\bar{\nu}$

$$= \frac{g_Z^2}{4} \epsilon_\mu \epsilon_\nu^* \text{Tr} \left[\not{k} \left(\frac{1+\gamma^5}{2} \right) \gamma^\nu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) \not{\bar{k}} \left(\frac{1+\gamma^5}{2} \right) \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) \right]$$

ν e $\bar{\nu}$ hanno elicità fissata \Rightarrow sono uno stato puro. Avevamo già visto la matrice densità + uno stato puro di elicità λ .

NB.: $\frac{1-\gamma^5}{2}$ è un proiettore $\Rightarrow \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right)^2 = \frac{1-\gamma^5}{2}$

rimane quindi solo:

$$\frac{g_Z^2}{4} \epsilon_\mu \epsilon_\nu^* \text{Tr} \left[\not{k} \gamma^\nu \not{\bar{k}} \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) \right]$$

NB.: tracce di un numero dispari di matrici γ sono nulle.

Domanda: come dipende Γ dallo spin iniziale?

(= come dipende Γ dallo spin iniziale?)

Non ci dipende: possiamo vederlo sperimentalmente.

La distribuzione angolare dei prodotti di decadimento dipende dallo spin iniziale. Solo se $s_i = 0$ \nexists direzioni privilegiate.

Noi poi vogliamo $\Gamma = \int d\Omega d\Omega' \Rightarrow \Gamma$ non dipende dallo spin.

Posso mediane sugli spin iniziali, tanto non cambia il risultato (sto supponendo (z) non polarizzato).

Sommando sulle polarizzazioni semplifico la formula:

si dimostra che:

$$\sum_s \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

Si dimostra anche che in questo caso il 2o termine non contribuisce. ^{invariante di gauge} Rimane: **DIMOSTRARLO**

$$- \frac{g^2}{4} g_{\mu\nu} \text{Tr} \left[\bar{K} \gamma^\nu K \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) \right] \cdot \frac{1}{3} \leftarrow \text{media}$$

Utilizziamo anche:

$$g_{\mu\nu} \gamma^\nu K \gamma^\mu = -2K$$

$$- \frac{g^2}{12} \cdot 2 \text{Tr} \left(\bar{K} K \frac{1-\gamma^5}{2} \right)$$

La traccia di 2 matrici γ con γ^5 fa 0. La traccia di 2 matrici γ fa $4 g_{\mu\nu}$:

$$= \frac{g^2}{6 \cdot 2} \cdot 4 \bar{K} \cdot K = \frac{g^2}{3} \frac{1}{2} (\bar{K} + K)^2$$

$$\text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu = 4 g^{\mu\nu}$$

$$\text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 = 0$$

conservazione dell'impulso

posso fare questo perché $k^2 = m_\nu^2 = 0$

$$= \frac{g^2}{6} \overbrace{M_\pm^2} = |M_\pm|^2 \sum_s \frac{1}{3}$$

Per completare il calcolo dobbiamo inserire lo spazio delle fasi a 2 corpi:-

$$(2\pi)^4 \delta^4(p - k - \bar{k}) \underbrace{\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k^0}}_{\text{cons. impulso}} \underbrace{\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k^0}}_{\phi^{(2)}} =$$

Un $d^3\vec{k}$ lo eliminiamo usando la δ sulle 3 componenti spaziali:

$$= \frac{d^3\vec{k}}{4k^0\bar{k}^0} \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(p^0 - k^0 - \bar{k}^0) = \frac{1}{16\pi^2} \delta(p^0 - k^0 - \bar{k}^0) \frac{k^2 dk d\Omega}{k^0 \bar{k}^0}$$

Si può dimostrare che $k dk = k^0 dk^0 = \frac{k^0 \bar{k}^0 d(k^0 + \bar{k}^0)}{k^0 + \bar{k}^0} \left/ \frac{1 d\Omega}{k^0 \bar{k}^0} \right.$
 (utilizzare $k^0 = \bar{k}^0$!)
 ($k^0^2 = m^2 + k^2$)

$$= - \frac{1}{16\pi^2} \delta(M_Z - k^0 - \bar{k}^0) k k^0 \bar{k}^0 \frac{d(k^0 + \bar{k}^0)}{k^0 + \bar{k}^0} \frac{1}{k^0 \bar{k}^0} d\Omega$$

NB.: l'integrazione in $k^0 + \bar{k}^0$ elimina la δ .

$$\int d\Omega = 4\pi$$

Mettendo insieme i pezzi:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{k}{M_Z} \quad k = \frac{M}{2} \Rightarrow \frac{1}{8\pi}$$

$$\Gamma_{Z \rightarrow \nu\nu} = g_Z^2 M_Z \frac{1}{96\pi}$$

$$M_Z \sim 90 \text{ GeV} \quad g_Z^2 \sim \alpha \Rightarrow g_Z^2 M_Z \sim 1 \text{ GeV}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{Z \rightarrow \nu\nu} \sim 0.01 \text{ GeV}$$

$$e = g \sin \theta_w$$

$$g_Z = g \frac{1}{\cos \theta_w} = \frac{e}{\sin \theta_w \cos \theta_w} = \frac{e}{\sin \theta_w \frac{M_W}{M_Z}} = \frac{e}{\sqrt{1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}} \left(\frac{M_W}{M_Z}\right)}$$

La lunghezza totale è la somma di tutte le Γ parziali -

$$\Gamma_{TOT}^Z = 3 \Gamma_{\nu\nu} + \Gamma_{ee} + \dots \approx 2.3 \text{ GeV}$$

(confermato sperimentalmente)

Fare il calcolo Γ_{eet} .

Facciamo una stima dimensionale.

$$M_Z = 80 \text{ GeV} \quad m_e = 0.5 \text{ MeV} \ll M_Z$$

$$\Gamma_{Z \rightarrow e e^+} \propto M_Z$$

$$\Gamma_{Z \rightarrow e e^+} \propto g_Z^2$$

$$\Gamma_{eet} \sim g_Z^2 M_Z \cdot \text{un fattore } C$$

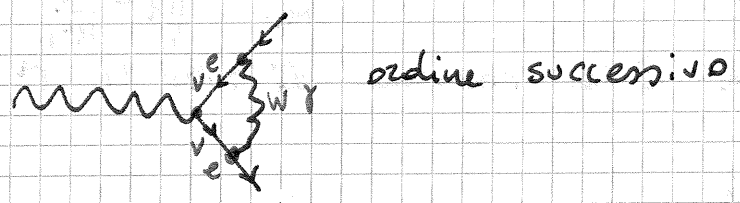
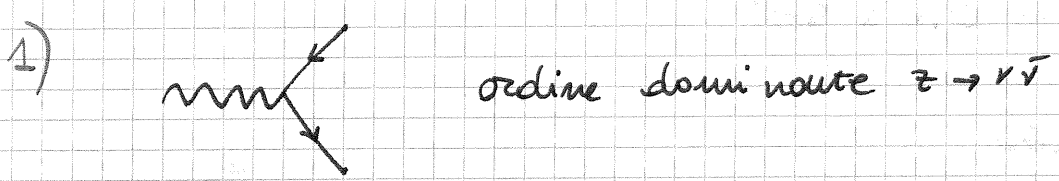
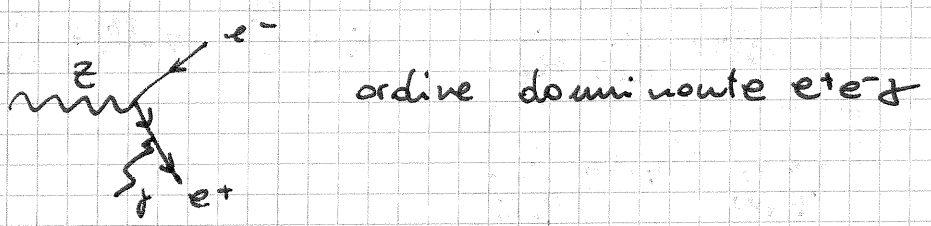
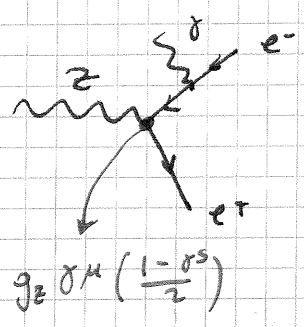
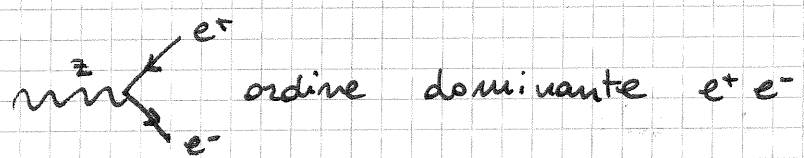
1) Domanda: errore nel trascurare gli ordini successivi al dominante?

$$\frac{\Gamma - \Gamma_0}{\Gamma_0} = O(?)$$

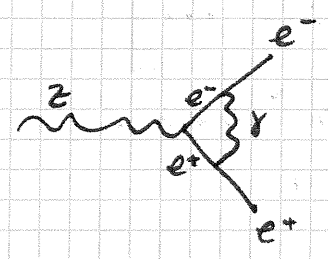
2) Domanda: verificare se $Z \rightarrow e^+ e^- \gamma$ e

stimare: $\frac{\Gamma_{e^+ e^- \gamma}}{\Gamma_{e^+ e^-}}$

Disegnare i diagrammi di F. di $Z \rightarrow e^+ e^- \gamma$ e scrivere il contributo di uno di essi:-



Otteniamo l'ordine di grandezza guardando i vertici -



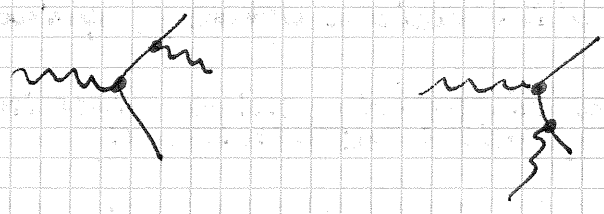
Ogni vertice e dell'ordine di e.

⇒ O(e^3)

Il diagramma principale aveva ordine e ⇒ la correzione all'elem. di matrice e^- ~ α

La correzione a Γ ∝ |M|^2 e' dell'ordine α (domina il doppio prodotto) -

2) Il fotone non ha massa. Supponiamo che abbia energia molto bassa (~ eV) - Come si distingue z → e^+e^- da z → e^+e^-γ in questo caso? Limite in frangoso → non distinguiamo.



∇ vertice che accoppia z e γ: lo z e' scarico.

Scrivere gli elementi di matrice.

Stimare Γ(z → e^+e^-γ) / Γ(z → e^+e^-) con argomenti dimensionali -

Energie in gioco: Mz, Me, Mγ = 0

Γ(z → e^+e^-γ) ~ Mz

Γ() ~ g_z^2 (1° vertice)

Γ() ~ e^2 (2° vertice)

La probabilità di osservare un γ e' soppressa di un ordine α.

3) Stimare la probabilità di dec. dello t in leptoni carichi con una precisione di qualche %. La lunghezza di

decadimento totale $\bar{\tau} = 2.49 \text{ GeV}$.

$$P = \frac{1}{\Gamma_{\text{TOT}}} \left[\Gamma_{e^+e^-} \Gamma_{e^+e^- \gamma} \Gamma_{e^+e^- 2\gamma} \dots \right]$$

Abbiamo a disposizione questo calcolo.

Ordine successivo $e^+e^- \sim 0.01$

$e^+e^- \gamma \sim 0.01$

$e^+e^- \gamma \sim \alpha^2 \sim 0.0001$

\Rightarrow giusti fighiamo la risposta.

Compito = 4 ore

5/12/2011

\sim Decadimento del $\mu \sim$

Il neutrone decade nel canale $\mu \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\mu$ con un branching ratio del 99 %.

Calcoleremo con una precisione al % la vita media del μ :

$$\tau = (\Gamma_{\text{TOT}})^{-1}$$

In generale, $M_{fi} \propto G_F$ (è un'interazione debole), quindi:

$$\Gamma \propto \frac{G_F^2}{M_\mu^5} \leftarrow \text{scala di energia tipica (inserita per questioni dimensionali)}$$

$$\Gamma = \frac{1}{192\pi^3} G_F^2 M_\mu^5 \quad (\Gamma \text{ ha le dimensioni di un'energia})$$

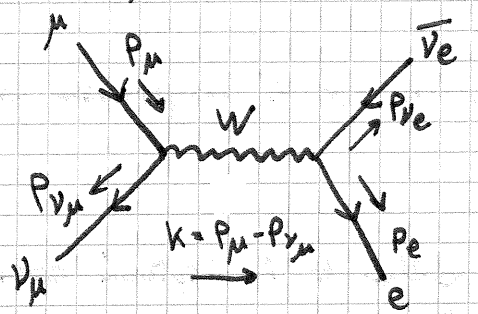
Lagrangiana d'interazione: $\mathcal{L}_I = g_W (W^\mu J_\mu^{(W)} + \text{hermitico coniugato})$

$$+ g_Z Z^\mu J_\mu^{(Z)} + e A_\mu J_\mu^{(e)}$$

La corrente è data da:

$$J_\mu = \bar{\Psi}_e \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \Psi_{\nu_e} + \dots$$

$$J_\mu^{(Z)} = \bar{\Psi}_{e,\mu} \gamma^\mu (a + b\gamma_5) \Psi_{e,\mu}$$



Il numero minimo di vertici si ottiene con un propagatore W . Se Z accoppierebbe μ con $\bar{\nu}_\mu$, non con ν_μ .

l'elemento di matrice è dato da:

$$g_W^2 \bar{u}_\mu \gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) u_\mu \left(\frac{-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu}{k^2 - M_W^2} \right) \bar{u}_e \gamma^\nu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) u_{\bar{\nu}_e}$$

La larghezza di decadimento non dipende dallo stato iniziale di spin \Rightarrow possiamo scegliere lo stato più conveniente per il calcolo: la non polarizzazione (mediando sugli stati di spin iniziali).

Verificare che δ altri diagrammi all'ordine dominante.

Una parte difficile del calcolo coinvolge lo spazio delle fasi.

$$d\Gamma = \frac{1}{2M_\mu} \frac{1}{2} \sum_{\text{pol.}} |M_{fi}|^2 d\phi^{(3)}$$

queste sono 9 variabili d'integrazione a fronte di una sola δ^4 .

In realtà vedremo che il calcolo si semplifica.

$$d\phi^{(3)} \equiv (2\pi)^4 \delta^4(p_\mu - p_e - p_{\bar{\nu}_e} - p_{\nu_\mu}) \frac{d^3p_e}{(2\pi)^3 2E_e} \frac{d^3p_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\nu}_e}} \frac{d^3p_{\nu_\mu}}{(2\pi)^3 2E_{\nu_\mu}}$$

N.B.: queste sono relazioni sotto integrazione.

Utilizziamo la δ spaziale:

$$= \frac{1}{(2\pi)^5} \delta(p_\mu^0 - p_e^0 - p_{\bar{\nu}_e}^0 - p_{\nu_\mu}^0) \frac{d^3p_e}{8p_e^0} \frac{d^3p_{\bar{\nu}_e}}{p_{\bar{\nu}_e}^0} \frac{d^3p_{\nu_\mu}}{p_{\nu_\mu}^0}$$

Teniamo conto che il neutrino non ha massa:

$$p_{\nu_\mu}^0 = \sqrt{\vec{p}_{\nu_\mu}^2} \equiv \sqrt{(\vec{p}_\mu - \vec{p}_e - \vec{p}_{\bar{\nu}_e})^2}$$

\hookrightarrow usando la δ

Mi restano 5 variabili - Utilizziamo considerazioni di simmetria: la distribuzione angolare è isotropa \Rightarrow posso scegliere come asse z es. l'impulso dell'elettrone ed integrarci sopra \Rightarrow la parte angolare contribuisce 4π e x ne va.

$$p_e^2 dp_e \underbrace{d\Omega_e}_{\equiv 4\pi} p_{\bar{\nu}_e}^2 dp_{\bar{\nu}_e} d\Omega_{\bar{\nu}_e} = d^3p_e d^3p_{\bar{\nu}_e}$$

Uno stato finale non polarizzato non è in grado di distinguere le direzioni: la distribuzione è equi-probabile \Rightarrow posso integrarci sopra.

Adesso non posso fare lo stesso ragionamento per il neutrino: le direzioni di e e $\bar{\nu}_e$ saranno correlate. Ma la dipendenza sarà solo dall'angolo relativo: ce n'è un altro che non influenza.

$$4\pi p_e^2 dp_e p_{\bar{\nu}_e}^2 dp_{\bar{\nu}_e} d\cos\theta_{e\bar{\nu}_e} d\phi_{e\bar{\nu}_e} = 2\pi$$

Rimane solo:

$$8\pi^2 p_e^2 p_{\bar{\nu}_e}^2 dp_e dp_{\bar{\nu}_e} d\cos\theta_{e\bar{\nu}_e}$$

↙ angolo relativo tra
elettrone ed anti-neutrino
elettronico

N.B.: questo non è un risultato generale, vale solo in questo caso perché discende da considerazioni specifiche.

Rimettendo insieme i pezzi:

$$d\phi^{(2)} = \frac{1}{4\pi^3} \delta(M_\mu - p_e^0 - p_{\bar{\nu}_e}^0 - \sqrt{(\vec{p}_\mu - \vec{p}_e - \vec{p}_{\bar{\nu}_e})^2}) \frac{1}{8} \frac{p_e^2 p_{\bar{\nu}_e}^2}{p_e^0 p_{\bar{\nu}_e}^0 p_{\mu}^0} dp_e dp_{\bar{\nu}_e} d\cos\theta_{e\bar{\nu}_e}$$

Abbiamo dipendenza da $\cos\theta_{e\bar{\nu}_e}$ anche nel termine sotto radice della δ .

N.B.: $\vec{p}_\mu = \vec{0}$.

$$(\vec{p}_\mu - \vec{p}_e - \vec{p}_{\bar{\nu}_e})^2 = (\vec{p}_e + \vec{p}_{\bar{\nu}_e})^2 = \vec{p}_e^2 + \vec{p}_{\bar{\nu}_e}^2 + 2\vec{p}_e \cdot \vec{p}_{\bar{\nu}_e} = p_e^2 + p_{\bar{\nu}_e}^2 + 2p_e p_{\bar{\nu}_e} \cos\theta_{e\bar{\nu}_e}$$

Fineando il calcolo, otteniamo:

$$d\phi^{(3)} = \frac{dp_e^0 dp_{\bar{\nu}_e}^0}{32\pi^3}$$

(abbiamo usato la δ per eliminare la dipendenza da $\cos\theta_{e\bar{\nu}_e}$)

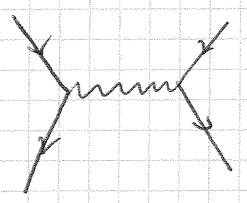
Verificare. N.B.: metterci lo jacobiano!!

A questo punto ci scriviamo $d\Gamma$ in termini di p_e^0 e $p_{\bar{\nu}_e}^0$ e facciamo il calcolo.

Il calcolo di $|M_{fi}|^2$ è fattibile: possiamo trascurare il termine $k_\mu k_\nu$ che in questo caso non contribuisce (nel propagatore, infatti $M_W \gg m_e$).

$$\begin{matrix}
 p_\mu & & p_e & k_e & k_\mu \\
 \mu & \rightarrow & e & \nu_e & \nu_\mu
 \end{matrix}$$

6/12/2011



L'elemento di matrice è:

$$g_W^2 \bar{u}(k_\mu) \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) u(p_\mu) \frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2}}{q^2 - M_W^2} \bar{u}(p_e) \gamma^\nu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) u(k_e)$$

Voglio usare questo processo per confrontare la teoria del modello Standard con la teoria usata precedentemente (la teoria di Fermi).

Costante di Fermi

$$G_F = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{g_W^2}{4M_W^2}$$

La teoria di Fermi era caratterizzata da questo accoppiamento.

La teoria di campo di Fermi non contiene bosoni vettoriali: le prime evidenze di interazioni deboli (decadimento β ecc.) avvenivano ad energie molto minori di M_Z, M_W .

Questa teoria conteneva SOLO campi fermionici. All'ordine 0 (campi liberi):

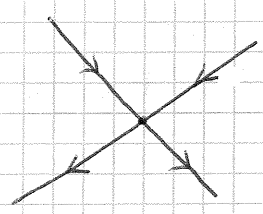
$$L_0 = \bar{\Psi} (i\not{D} - m) \Psi$$

La differenza sta nella lagrangiana d'interazione:

$$L_I = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^{(e)} J^{\mu (W)} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{\Psi}_e \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) \Psi_{\nu_e} + \bar{\Psi}_\mu \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) \Psi_{\nu_\mu} \right)$$

Questo processo in particolare nel modello standard rappresenta lo stesso termine di corrente: $\frac{L_I}{M^2} = g_W W^\mu J_\mu^{(W)}$

Nella teoria di Fermi la corrente accoppia con se stessa, L_I è quadratica nei campi. Un ipotetico diagramma di Feynman sarebbe del tipo:



(ci fermiamo al primo ordine, perché la teoria di Fermi è non rinormalizzabile a meno della ridefinizione di un numero ∞ di parametri)

⇒ verrà sempre utilizzata a livelli di diagrammi ad

albino).

Questo diagramma è estremamente complesso: per calcolare S_F è più conveniente utilizzare le coppie di Wick.

$$S_F i = \langle 0 | a_\mu \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{J}_\mu^+ J_\mu^- a_\nu^\dagger b_{\nu e}^- | 0 \rangle$$

Una volta fatta la derivazione otteniamo:

$$M_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(k_\mu) \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) u(p_\mu) \bar{u}(p_e) \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) v(k_e)$$

La differenza tra i due M_{fi} sta nel termine centrale

$$\frac{q_\mu q_\nu - M_W^2}{q^2 - M_W^2}$$

che ha $q = p_\mu - k_\mu$, che non è un valore fisso (è un decadimento a 3 corpi).

Proviamo a stimare il rapporto q^2/M_W^2 :

$$\frac{q^2}{M_W^2} \approx \frac{M_\mu^2}{M_W^2} \sim 10^{-6}$$

Il termine $q_\mu q_\nu / M_W^2$ è soppresso ad un ordine 10^{-6} (salvo poi che facendo il calcolo fa 0).

Possiamo scrivere il denominatore come:

$$q^2 - M_W^2 = -M_W^2 \left(1 - \frac{q^2}{M_W^2} \right) \approx -M_W^2$$

(Stiamo commettendo un errore di 10^{-6} a fronte di un errore $\sim 10^{-2}$ commesso trascurando gli ordini successivi).

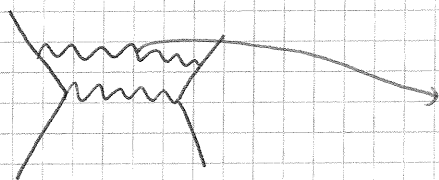
Resta $g_{\mu\nu}$, che ha solo lo scopo di rendere uguali gli indici di Lorentz a destra e a sinistra.

Se scriviamo:

$$\text{fattore imprecisato} \leftarrow \frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_W^2}{M_W^2} \Rightarrow \text{È una relazione a patto di fermarci ad Energie basse, le due teorie sono identiche.}$$

Teoria di Fermi \rightarrow anni '50, non fondamentale ma "effettiva" -

1) Dobbiamo aggiungere linee interne:



può essere un W, uno Z
o un γ .

Un propagatore W o Z è molto più piccolo rispetto al propagatore fotonicco ($\frac{1}{M_Z^2}$): per stimare l'errore è conveniente considerare il contributo più grande, quindi aggiungiamo una linea fotonicca. Abbiamo aggiunto 2 vertici elettromagnetici:

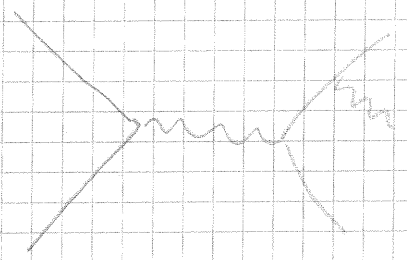
$$M_{(1)} \sim M_{(0)} \cdot \alpha$$

Quindi: $\frac{\Gamma - \Gamma_0}{\Gamma_0} = O(\alpha)$ (vedi fig. cane)

NB. se avessimo aggiunto una linea W avremmo avuto: $M_{(1)} \sim M_{(0)} \cdot \alpha \frac{M_\mu^2}{M_W^2}$, differenza importante a bassa energia.

2) L'altro canale possibile sarebbe $\mu \rightarrow e \nu \bar{\nu} \gamma$.

Stimare $\frac{\Gamma(e \nu \bar{\nu} \gamma)}{\Gamma(e \nu \bar{\nu})}$.



Alcuni processi possono essere descritti da teorie "ad hoc", non fondamentali. Possiamo "inventarci" la Lagrangiana di interazione a partire dalle simmetrie e dalla fisica del problema.

Facciamo finta che il π^\pm (particella scalare carica) sia fondamentale. Cerchiamo di costruire una teoria per processi del tipo:

$$\pi^- e^- \rightarrow \pi^- e^-$$

$$e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$$

Mettiamoci a scale di energia dove la forza debole è soppressa rispetto alla forza e.m. ($E \leq 1 \text{ GeV}$).

π è uno stato legato di quark \rightarrow non si può associare a campi fondamentali. Costruiremo una \mathcal{L}_I elettrodinamica "effettiva" che avrà come contenuto di campi il contenuto di particelle del processo.

$\psi, \phi \leftarrow$ complesso (π^\pm è carico), hermitiano (π^\pm è scalare)

Ad energie basse rispetto alla QCD ($50 \div 100 \text{ MeV}$) possiamo fingere che π sia fondamentale.

La teoria dovrà quindi contenere: ψ, ϕ, A_μ

Come accoppia un campo scalare ad un campo e.m.?

Elettrodinamica scalare

- Accoppiamento minimale:

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ie A_\mu = D_\mu$$

Sostituiamo alla derivata un termine covariante.

- Partiamo dalla Lagrangiana libera e sostituiamo ∂ con D . Ad es. per il fermione si partiva da: $\bar{\psi}(i\partial - m)\psi$.

Teoria libera scalare: $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$

È di interesse fisico aggiungere un termine di interazione, che coinvolge solo il campo scalare:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^* \phi + \frac{\lambda}{4!} (\phi^* \phi)^2$$

Questo è un primo modello della teoria di Higgs. È una teoria rinormalizzabile, e se proiettata in 2, 3 dimensioni spiega le transizioni di fase (ad es. superfluidi ecc.) -

Vogliamo ora calcolare ad esempio la sezione d'urto

$$\sigma(\phi^+ \phi^+ \longrightarrow \phi^+ \phi^+)$$

Per semplificare il calcolo consideriamo una \mathcal{L} di campo singolo, $\in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}_R = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

$$d\sigma = \frac{1}{4\mathcal{I}} |M_{fi}|^2 d\Omega^{(2)} \cdot \frac{1}{2} \leftarrow \text{Le } \phi \text{ sono indistinguibili.}$$

$$\mathcal{I} = \sqrt{(p_{1i} p_{2i})^2 - m^4}$$

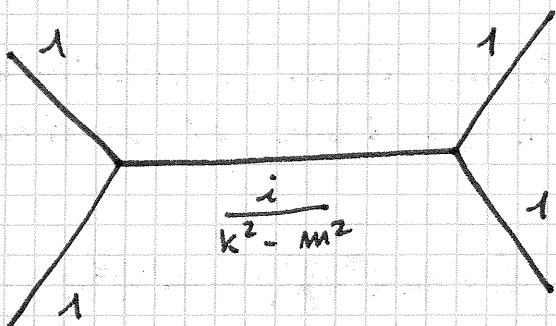
Propagatore scalare: $\tilde{G}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}$

$$S = T \left(\exp \left\{ i \frac{\lambda}{4!} \int d\Omega : \phi^4 : \right\} \right)$$

Qual è il primo ordine non banale che contribuisce a questo termine?

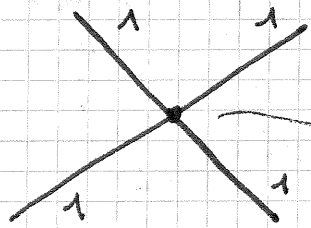
$$\langle 0 | a a i \frac{\lambda}{4!} \int \phi^4 : a^+ a^+ | 0 \rangle \rightarrow \text{ordine } \lambda$$

Dobbiamo costruire i diagrammi di Feynman.



Alle gambe esterne associamo un fattore 1: un campo scalare non ha fattori di polarizzazione.

Ricostruiamo quindi un vertice a 4:



$$4! \left(\frac{\mu}{4!} \right) i$$

viene dalla simmetrizzazione sulle 4 linee incidenti -

Al vertice corrisponde una δ di conservazione dell'impulso.

$$M_{fi} = i \mu$$

(μ è l'accoppiamento di questa interazione)

è la \mathcal{L}_I che ci dice come sono fatti i vertici:

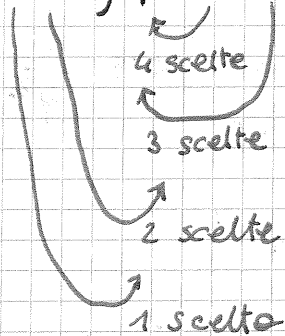
$\mathcal{L}_I|_{\psi\psi} \propto \psi\psi A_\mu \rightarrow$ 2 linee fermioniche e una fotonica;
 $\mathcal{L}_I \propto \phi^4 \rightarrow$ 4 linee scalari

$$\phi = \int d\tilde{k} [a e^{ikx} + a^\dagger e^{-ikx}] = \int d\tilde{k} [\underbrace{1}_{\psi} a e^{ikx} + \underbrace{1}_{\psi} a^\dagger e^{-ikx}]$$

questi sono i fattori che associamo alle linee esterne.

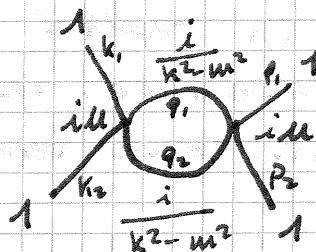
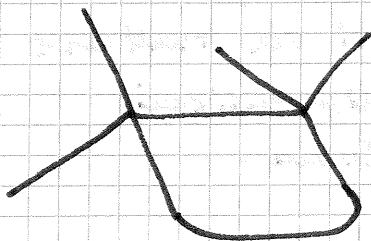
$$[\psi, a^\dagger] = \dots$$

$$\langle 0 | a a \rangle \phi^4 a^\dagger a^\dagger | 0 \rangle$$



$$\Rightarrow \text{fattore } 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$$

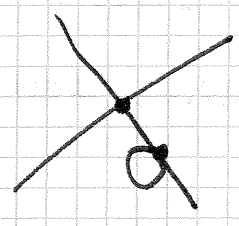
Stimiamo l'ordine successivo - $\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0} = ?$



$$M_{fi} = + i \mu^2 \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}$$

$$\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0} \propto \frac{|M_{fi}|^2 - |M_{fi}^0|^2}{|M_{fi}^0|^2} \propto \frac{|u + u^2|^2 - u^2}{u^2} \sim \frac{u u^2}{u^2} = u$$

A parte gli scambi di linee, altri diagrammi possibili sono del tipo:



Ma questi non entrano nel calcolo della sezione d'urto.

Derivazione buona:

$$u^2 \left(\frac{1}{q_1^2 - m^2} \right) \left(\frac{1}{q_2^2 - m^2} \right) \delta(q_1 - k_1 - k_2) \delta(q_2 + k_1 + k_2) \delta(q_1 + q_2 + p_2 + p_1)$$

Una delle δ può essere riscritta come δ "globale", e andrà poi a contribuire a $\beta^{(2)}$.

Ad esempio: 1^a delta $\Rightarrow q_1 + q_2 = k_1 + k_2$
 2^a delta $\equiv \delta(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$

Rimane:

$$M_{fi} = u^2 \left(\frac{1}{q_1^2 - m^2} \right) \left(\frac{1}{q_2^2 - m^2} \right) \int d^4 q_1 \delta(q_1 + q_2 - k_1 - k_2)$$

$$\int d^4 q_1 \left\{ u^2 \left(\frac{1}{q_1^2 - m^2} \right) \frac{1}{(q_1 - k_1 - k_2)^2 - m^2} \right\} \underset{q \rightarrow \infty}{\sim} \int d^4 q \frac{1}{q^4} \sim \infty$$

Supponiamo allora di imporre un q_{MAX} :

l'integrale andrà come $\ln \Lambda$

\Rightarrow si potrà applicare la rinormalizzazione.

Abbiamo trattato questa teoria (" ϕ^4 ")

perturbativamente. In realtà la si sa trattare come teoria fondamentale. In 4 dimensioni tende a comportarsi come teoria libera.

Torniamo ora alla teoria per il campo complesso.

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi + \frac{v}{4!} (\phi^\dagger \phi)^2$$

Questa teoria ha una simmetria $U(1)$: possiamo moltiplicare una fase.

$\Rightarrow \exists$ corrente di Noether $J_\mu^{\phi|_{U(1)}} = \phi^\dagger \partial_\mu \phi - \partial^\mu \phi^\dagger \phi$

Ad un campo complesso sappiamo associare una carica elettrica \Rightarrow interazione con A_μ .

Utilizziamo la "ricetta" dell'elettrodinamica scalare trattata con l'accoppiamento minimale:

$$\mathcal{L} = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi + \frac{v}{4!} (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2$$

(Abbiamo aggiunto il termine libero di A_μ).

Ipotesi: questa è la teoria più semplice? che:

- soddisfi i vincoli (trasf. di Lorentz)
- sia espressa in termini di campi adeguati (il minor numero di campi, e che trasformino nel modo giusto).

L'accoppiamento con il campo e.m. introduce nuovi vertici nello sviluppo perturbativo.

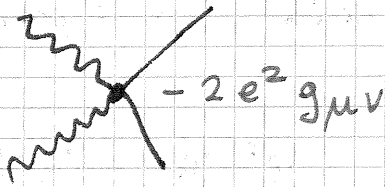
Esplaciamo il termine con l'accoppiamento minimale:

$$\begin{aligned}
 (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi &= (\partial_\mu - i \frac{e}{\hbar c} A_\mu) \phi^\dagger (\partial^\mu + i \frac{e}{\hbar c} A^\mu) \phi = \\
 &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - i e A_\mu J_\mu^\phi - A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi e^2
 \end{aligned}$$

Nell'elettrodinamica scalare compare un termine quadratico in A , essenziale per rendere il tutto invariante di gauge.

I vertici corrispondenti sono:

$$-e^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi$$



(il 2 deriva dalle combinazioni del teor. di Wick).

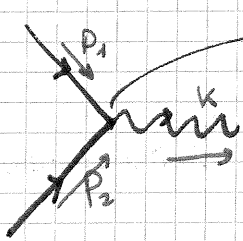
Questo diagramma non entrerà nel processo che stiamo considerando.

$$-ie A_\mu J_\mu^\phi = -ie A_\mu (\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^\dagger \phi) \equiv \mathcal{L}_I$$

Andiamo in trasformata di Fourier per estrarre tutto ciò che non è un campo \rightarrow quel termine sarà il contributo del vertice.

$$\tilde{\mathcal{L}}_I = \frac{1}{2\pi} \int \mathcal{L}_I e^{-ipx} \quad \phi(x) = \int d\tilde{k} (a e^{ikx} + a^\dagger e^{-ikx})$$

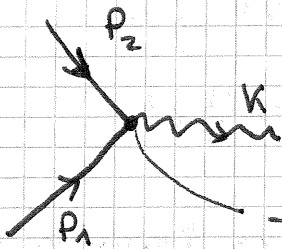
$$-ie A_\mu \left[\int d\tilde{k}_1 (a^\dagger e^{-ik_1x} + a e^{ik_1x}) \partial^\mu \int d\tilde{k}_2 (a e^{ik_2x} + a^\dagger e^{-ik_2x}) - \partial^\mu \int d\tilde{k}_1 (a^\dagger e^{-ik_1x} + a e^{ik_1x}) \int d\tilde{k}_2 (a e^{ik_2x} + a^\dagger e^{-ik_2x}) \right]$$



$$ie(p_1 - p_2)^\mu \quad (\dots)$$

$$\phi(x) = \int e^{ip_1x} \tilde{\phi}(p_1)$$

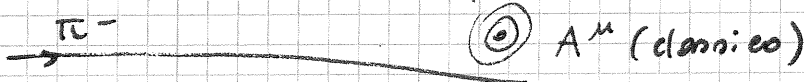
Il risultato è:



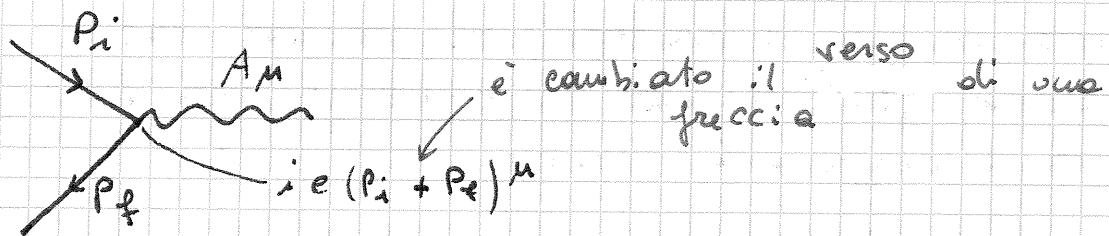
$$-ie(p_1^\mu - p_2^\mu) \quad \text{il segno relativo è importante}$$

È un modo per capire se il "-" è il segno relativo giusto? Questa è una teoria di gauge: esistono delle relazioni dovute a questo.

Per esempio, se abbiamo un processo del tipo:



l'elem. di matrice sarà dato dal diagramma:



$$M_f = +ie(p_i + p_f)_\mu \tilde{A}_\mu$$

Usiamo l'identità di W.:

$$ie(p_i + p_f)_\mu (p_i - p_f)_\mu \equiv 0$$

$$\begin{cases} ie(p_i + p_f)_\mu (p_i - p_f)_\mu = m^2 - m^2 = 0 \\ ie(p_i - p_f)_\mu (p_i - p_f)_\mu \neq 0 \end{cases}$$

⇒ Nel caso del campo semiclassico il segno giusto è "+" -

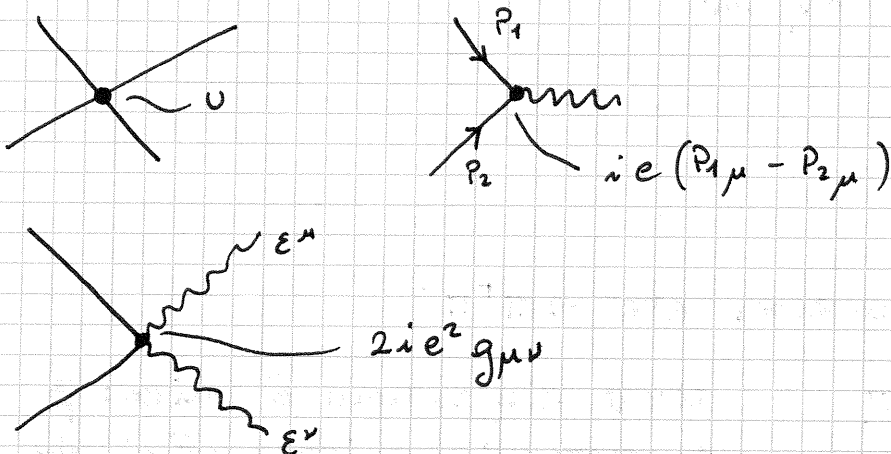
N.B.: La cinematica non consente questo processo.

12/12/2011

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\mu}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2$$

con $D_\mu = \partial_\mu + ie A_\mu$ - Elettrodinamica scalare

Abbiamo visto i vertici per questa teoria:



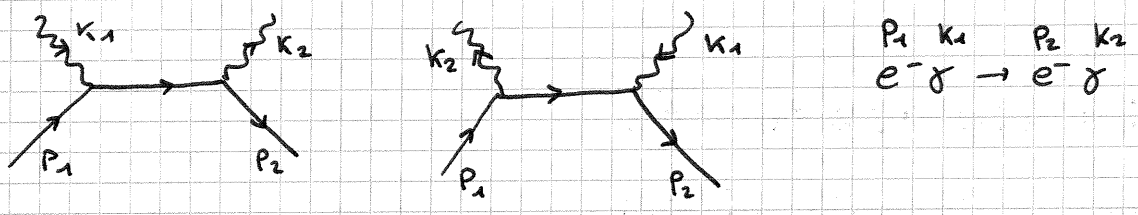
Tutto questo ci serve per costruire una teoria effettiva per la trattazione del π^\pm .

Studiamo il processo: $\pi^- \gamma \rightarrow \pi^- \gamma$

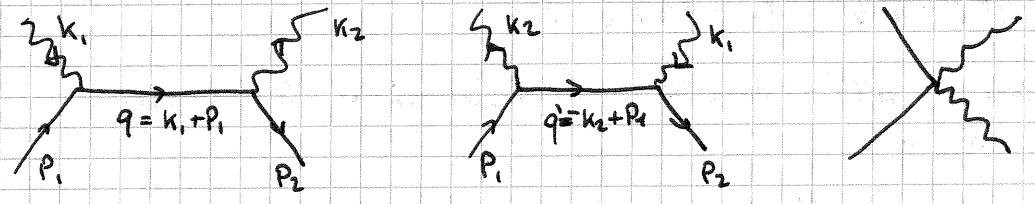
122

$$d\sigma = \frac{1}{4I} |M_{fi}|^2 d\phi^{(2)}$$

Questo processo è "analogo" al processo che abbiamo già studiato $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$, per il quale i diagrammi erano:



Torniamo al processo $\pi^- \gamma \rightarrow \pi^- \gamma$ e proviamo a disegnare i diagrammi, utilizzando l'elettrodinamica scalare.



Il primo diagramma dà un contributo:

$$\epsilon^{\mu*}(k_2) i e (k_1 + p_1 + p_2)_\mu \frac{1}{q^2 - m^2} i e (p_1 + k_1 + p_1)_\nu \epsilon^\nu(k_1) (2p_1 + k_1)_\nu$$

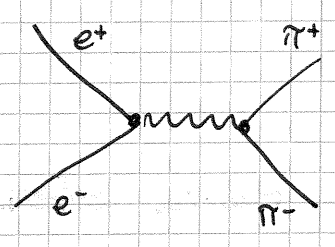
Il secondo:

$$\epsilon^{\mu*}(k_1) i e (p_1 - k_2 + p_2)_\mu \frac{1}{q'^2 - m^2} i e (p_1 + p_1 - k_2)_\nu \epsilon^\nu(k_2)$$

Il terzo:

$$2i e^2 \epsilon_\mu^*(k_1) \epsilon^\mu(k_2)$$

Studiamo ora il processo: $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$



Questo diagramma è unico: \nexists in elettrodinamica vertici che accoppiano particelle diverse (e e π).

sempre all'interno dell'elettrodinamica, vediamo un processo diverso. Sperimentalmente si osserva:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$$

Cerchiamo di costruire una teoria (effettiva, non fondamentale) che descriva questo processo.

Vorremmo una \mathcal{L}_I invariante di gauge, perché, dato la presenza di fotoni, questo processo è elettrodinamico.

\mathcal{L}_I deve contenere due campi A per i γ ed un campo scalare reale (π^0 è scarico) per il pione.

$$\mathcal{L}_I \sim \phi A A$$

- \mathcal{L}_I deve essere invariante di Lorentz $\Rightarrow \mathcal{L}_I$ deve essere scalare.
- \mathcal{L}_I deve essere invariante di gauge \Rightarrow costruiamola a partire da oggetti che sono già invariante di gauge. Ad es.: $F_{\mu\nu}$
- Costruiamo la \mathcal{L}_I più semplice, ovvero quello con le derivate all'ordine più basso possibile.

Candidato: $\phi \overbrace{F F}^{\curvearrowright}$ ϕ è già uno scalare

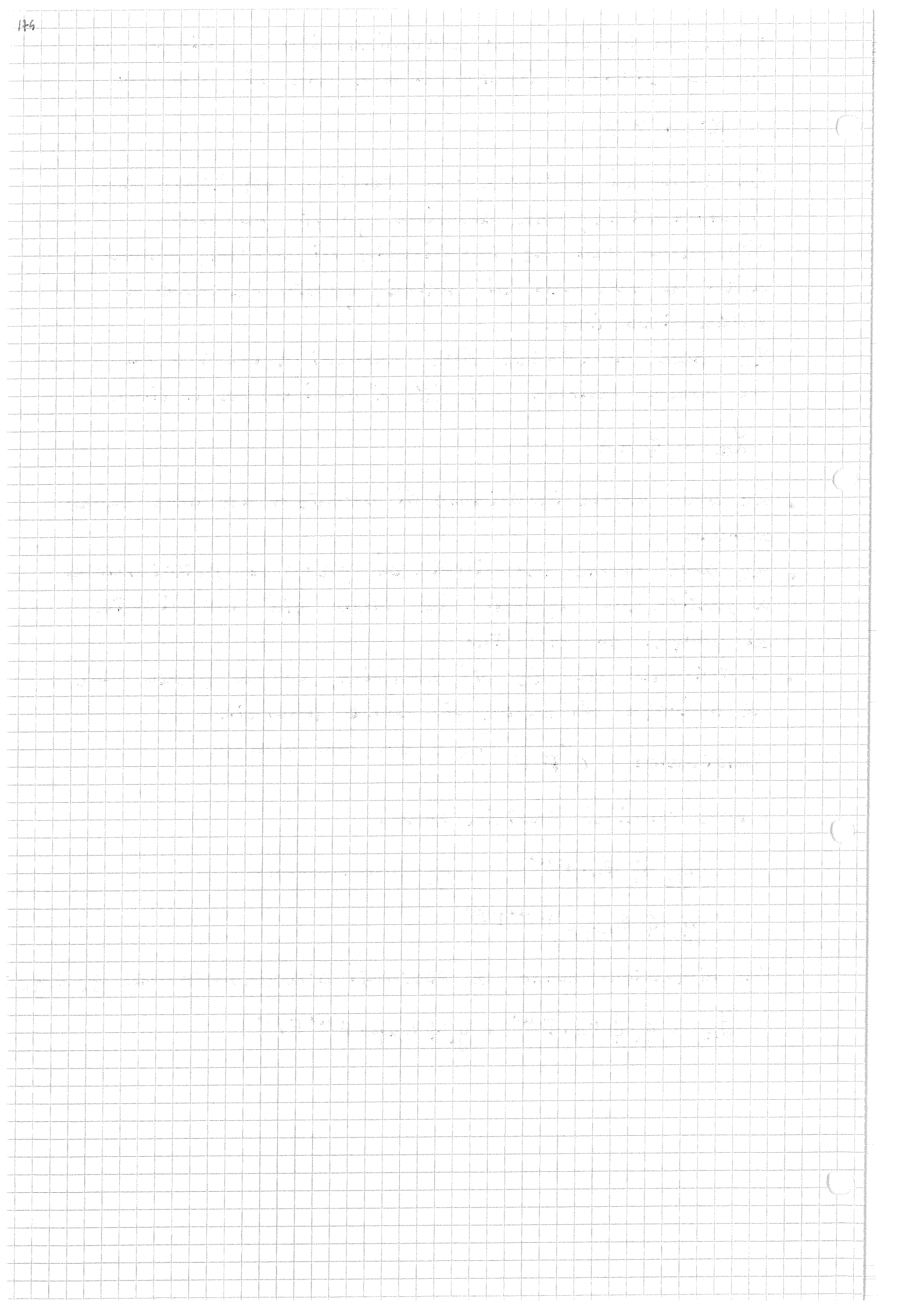
I due termini possibili sono:

$$g_1 \phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (g_1 = \text{accoppiamento})$$

$$g_2 \phi \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$$

Che dimensioni hanno le costanti d'accoppiamento g_1 e g_2 ?

$$\mathcal{L}_I = g_1 \phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + g_2 \phi \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$$



13/12/11

Il rate di decadimento del $\pi^0 \rightarrow e^+ e^-$ $\tau = 10^{-6} \text{ s}$.

Branching ratio:

$$\boxed{2\gamma} \quad 98.8\%$$

$$\boxed{e^+ e^- \gamma} \quad 1.2\%$$

$$\boxed{e^+ e^- e^+ e^-} \quad 3 \cdot 10^{-5}\%$$

Vogliamo spiegare tutto questo con una teoria effettiva.

L'idea è costruire una \mathcal{L}_I che contenga il numero minimo di campi che servono: un campo scalare e due campi fotonicci.Ad esempio $\mathcal{L}_I \sim \phi A A$ ha elementi di matrice del tipo $\langle \gamma\gamma | S | \pi^0 \rangle$. S è costruito a partire dallo sviluppo di \mathcal{L}_I : $\Pi_i \sim \langle \gamma\gamma | \int \mathcal{L}_I | \pi^0 \rangle$.

Richieste:

1) Invarianza di Lorentz

2) Invarianza di gauge

Lo \mathcal{L}_I che cerchiamo è quello che ha minore dimensione in energia (derivate all'ordine minore).

Conviene usare un termine del tipo

$$g_S \phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

e/o uno del tipo

$$g_P \phi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$$

$$\text{con } \tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

Determiniamo per prima cosa le dimensioni delle costanti d'accoppiamento.

Ad es. per l'elettrodinamica, nelle opportune unità

 $(\hbar = 1)$:

$$\frac{e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu}{E^4}$$

In fatti l'azione = $\int d^4 x \mathcal{L}_I$ deve essere adimensionale (in unità $\hbar \neq 1$ sarebbe

E.t)

$$[\phi, \partial_0 \phi] \propto \delta^3(\dots)$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ E & E & E \end{matrix} \quad \downarrow \frac{1}{\sqrt{V}} = E^3 \text{ (in units } \hbar = 1)$$

$$[\psi, \psi^\dagger]_+ \propto \delta^3$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ E^{3/2} & E^{3/2} \end{matrix} \quad \downarrow \frac{1}{\sqrt{V}} = E^3 \text{ (i due } \psi \text{ devono spartirsi un' } E^3)$$

$$[A^\mu, \partial_\mu A^\nu] \propto \delta^3$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ E & E & E \end{matrix}$$

↑ è una lunghezza alla -1 = un'energia ($\hbar = c = 1$)

⇒ l'accoppiamento e non ha dimensioni (questa è una proprietà delle teorie rinormalizzabili).

Fino a ora abbiamo sempre trovato accoppiamenti adimensionali o al più positivi in energia.

e è adimensionale perché già i campi portano \mathcal{L} alla dimensione giusta.

$$g_s \phi F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + g_p \phi F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ E^{-1} & E & E^4 & E^{-1} & E & E^4 \end{matrix}$$

È quindi una buona idea esprimere gli accoppiamenti come g_s/ϵ e g_p/ϵ . Scala di energia in gioco? M_π .

$$g_s = \frac{C_s}{M_\pi} \quad g_p = \frac{C_p}{M_\pi}$$

$$\mathcal{L}_I = \frac{C_s}{M_\pi} \phi F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{C_p}{M_\pi} \phi F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$$

Aggiungere derivate significa aggiungere energie: ad esempio

$$\frac{C_3}{M_\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\mu\nu}$$

Ci limitiamo al caso $\propto \frac{1}{M_\pi}$ per semplicità.

L'elettrodinamica conserva tutte le simmetrie (C, P, T).

Sappiamo che π^0 è uno pseudoscalare: sotto inversione di parità cambia segno.

$$P F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$$

$$P \phi = -\phi \text{ (pseudoscalare)}$$

Dobbiamo quindi scartare il 1° termine affinché la \mathcal{L}_I (che è elettrodinamica) soddisfi la parità.

Quindi:

$$\mathcal{L}_I = \frac{C_P}{M_\pi} \phi \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$$

Come fissiamo l'accoppiamento C_P ? Calcolo Γ formalmente con questa teoria, lo confronto con i dati sperimentali e così determino C_P .

$$\Gamma = \frac{1}{2M_\pi} |M_{fi}|^2 \left(\frac{1}{2}\right) d\phi^{(2)}$$

↳ abbiamo 2 γ , cioè due particelle identiche, nello stato finale.

Calcolare $|M_{fi}|^2$ e Γ .

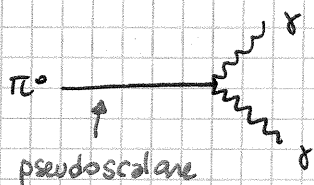
Il risultato è:

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi} M_\pi C_P^2$$

⇒ possiamo calcolare C_P . Anche d , e furono derivate sperimentalmente.

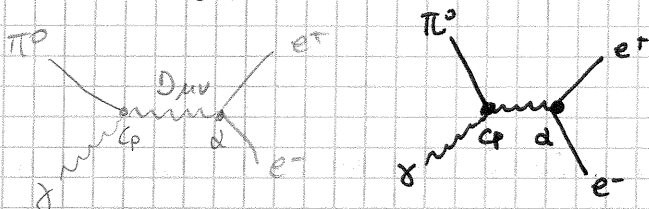
Adesso abbiamo la teoria. Come possiamo verificare che la teoria funzioni? Possiamo provare ad usarla per spiegare che $BR(\pi^0 \rightarrow e^+e^-\gamma) = 1.2\%$.

Il vertice associato a questa \mathcal{L}_I contiene una linea per π^0 e due linee fotoniche:



Proviamo a disegnare, con l'aiuto anche dei vertici "normali" elettrodinamici, il diagramma del processo $\pi^0 \rightarrow e^+e^-\gamma$.

$\pi^0 \rightarrow e^+e^-\gamma$



Questo processo ha un vertice in più, di accoppiamento d . Infatti:

$$\frac{\Gamma_{e^+e^-\gamma}}{\Gamma_{\gamma\gamma}} = 0(10^{-2}) = 0(d)$$

Questa teoria prevede anche che i 2 γ di decadimento non possono avere la stessa polarizzazione.

15/12/2011

13 Gennaio
06 Febbraio Aula DI

Decadimenti leptonicici dei pioni carichi

$$\pi^+ \quad M_{\pi^+} \approx 140 \text{ MeV}$$

Un processo che si osserva è:



Un altro decadimento che è stato osservato è:



Cerchiamo di costruire una teoria che descriva questi fenomeni.

NB.: Essendo μ^+ ed e^+ quasi equivalenti, come mai il decadimento in $e^+ \nu_e$ è soppresso? La massa dell'elettrone è piccola, quindi il suo spazio delle fasi è addirittura più grande.

$$\mathcal{L}_I^{(e)} = g_w W_{\mu}^+ J_W^{\mu} \quad J_W^{\mu} = \frac{1}{2} \sum_l \bar{\Psi}_l \gamma^{\mu} \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \Psi_{\nu l}$$

Ad \mathcal{L}_I va aggiunto anche un termine adronico:

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_I^{(e)} + \mathcal{L}_I^{(a)} \quad \mathcal{L}_I^{(a)} = g_w W_{\mu}^+ J_W^{\mu}$$

Vogliamo scrivere una \mathcal{L}_I effettiva che contiene un numero di campi pari al numero di particelle del processo.

Averemo un campo scalare complesso per π^{\pm} , non più reale.

$$\mathcal{L}_I \equiv f(\pi, \mu, \nu_{\mu})$$

Vogliamo la \mathcal{L}_I con dimensioni minori, e che sia invariante di Lorentz.

Gli accoppiamenti dei leptoni e, μ e τ sono identici \Rightarrow la \mathcal{L}_I dovrà spiegare i decadimenti del π in ogni leptone.

$$\mathcal{L}_I = f(\pi, l, \nu_l)$$

Nel M.S. i leptoni ed i neutrini entrano accoppiati

al W nella forma:

$$J_{W,e}^\mu = \frac{1}{2} \sum_e \bar{\Psi}_e \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) \Psi_{Ve}$$

E' naturale che la nostra teoria effettiva, se e' buona, prodorra' un elemento di matrice analogo:

$$\mathcal{L}_I \equiv f(\pi, J_{W,e}^\mu)$$

Completiamo ora questa espressione in modo da renderla invariante di Lorentz.

In questo range di energie possiamo considerare il π come una particella elementare.

$$\pi \longrightarrow \phi_\pi$$

Per ottenere l'invarianza di Lorentz:

$$f \partial_\mu \phi_\pi J_{W,e}^\mu$$

con f costante d'accoppiamento. Che dimensioni ha?

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow E^{3/2} & \phi &\rightarrow E^1 & \partial_\mu &\rightarrow E^1 \\ \Rightarrow \partial_\mu \phi J^\mu &\rightarrow E^5 & \Rightarrow f &\equiv E^{-4} \end{aligned}$$

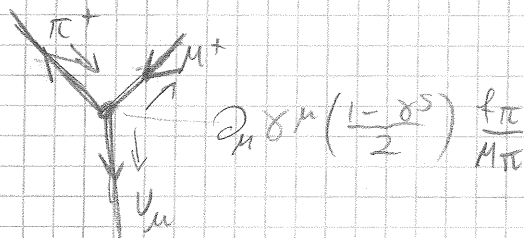
Scrivo quindi:

$$f \equiv f_\pi (M_\pi)^{-4} \cdot G \rightarrow \text{costante di Fermi, accop. debole}$$

$$\mathcal{L}_I = \frac{f_\pi}{M_\pi} \left(\partial_\mu \phi J_{W,e}^\mu + \text{hermitiano coniugato} \right) \cdot G$$

Possiamo calcolare $\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)$ e confrontarlo con i dati sperimentali, e misurare f_π .

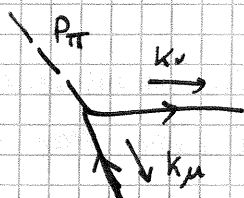
Calcolare f_π (tipico domanda d'esame).



$$\begin{aligned} & \left| \partial_\mu \bar{u}(p_\mu) \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) v(p_{\mu^+}) \right|^2 = \\ & \left[\partial_\mu \bar{u}(p_\mu) \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) v(p_\mu) \right] \left[\bar{v}(p_\mu) \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) \gamma^\mu u(p_\nu) \partial_\nu \right] \end{aligned}$$

A parte una fase, l'elemento di matrice e':

viene dalla derivata



$$\frac{f_\pi}{M_\pi} \bar{u}(k_\nu) \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) v(k_\mu) (P_\pi)_\mu$$

Il vertice si costruisce mettendo, in trasformata di Fourier, tutto ciò che non è campo.

$$M_{fi} = \langle 0 | b_{\mu}(k_{\mu}) a_{\nu}(k_{\nu}) \int d^4x : \mathcal{L}_I : c^{\dagger}(P_{\pi}) | 0 \rangle$$

N.B.: il termine hermitiano coniugato della \mathcal{L}_I restituisce l'elemento di matrice di $\pi^{-} \rightarrow \mu^{-} \bar{\nu}_{\mu}$.
Dobbiamo sempre usare uno sdo dei due termini coniugati, a seconda del processo considerato.

$$\overline{(\partial_{\mu} \phi_{\pi})} = (P_{\pi})_{\mu}$$

Tenendo conto della conservazione del 4 impulso:

$$P_{\pi\mu} = (k_{\nu} + k_{\mu})_{\mu}$$

Calcoliamo il modulo quadro:

$$\left| \frac{f}{M_{\pi}} \bar{u}_{\nu}(k_{\nu}) (k_{\nu} + k_{\mu}) \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) v_{\mu}(k_{\mu}) \right|^2$$

dove si è usato $\not{k} = \gamma^{\mu} k_{\mu}$.

$$\not{k}_{\mu} v_{\mu}(k_{\mu}) = -m_{\mu} v_{\mu}(k_{\mu}) \quad (\text{eq. di Dirac})$$

Sfruttando le soluzioni dell'equazione di Dirac,

M_{fi} si scrive:

$$M_{fi} = \frac{f}{M_{\pi}} m_{\mu} \bar{u}_{\nu}(k_{\nu}) \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) v_{\mu}(k_{\mu})$$

La parte del neutrino non contribuisce perché $m_{\nu} = 0$.

Per l'ipotesi dell'universalità $e - \mu - \tau$, quello che abbiamo scritto deve valere anche per le coppie $e - \bar{\nu}_e$ e $\tau - \bar{\nu}_{\tau}$. L'unica differenza è la massa del leptone corrispondente:

$$M_{fi}(\pi^{+} \rightarrow e^{+} \nu_e) = \frac{f}{M_{\pi}} m_e \bar{u}_{\nu}(k_{\nu}) \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) v_e(k_e)$$

Questo ci suggerisce che:

$$\frac{\Gamma_{\mu^{+} \nu_{\mu}}}{\Gamma_{e^{+} \nu_e}} \propto \frac{|M_{fi}|_{\mu^{+} \nu}^2}{|M_{fi}|_{e^{+} \nu}^2} = \frac{m_{\mu}^2}{m_e^2} = 10^4$$

Questo spiega come mai il decadimento in elettrone e neutrino è soppresso. Addirittura, nel limite $m_e \rightarrow 0$

il π non potrebbe decadere in $e\nu$ -

Dobbiamo ora fissare il fattore f -

$$\Gamma_{\mu\mu} = \int \frac{1}{2M_\pi} |M_{fi}|^2 d\phi^{(2)}$$

Riguardo alle polarizzazioni finali, possiamo anche sommarci sopra, ma $\frac{1-\gamma^5}{2}$ selezionerà solo una particolare elicità del neutrone.

Calcolare Γ -

$$M_{fi}^* = \frac{f}{M_\pi} \bar{u}_\mu(k_\mu) \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) u_\nu(k_\nu) m_\mu$$

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 &= \frac{f^2}{m_\mu^2} m_\mu^2 \bar{u}_\mu(k_\mu) \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) u_\nu(k_\nu) \bar{u}_\nu(k_\nu) \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) u_\mu(k_\mu) \\ &= \frac{f^2}{m_\mu^2} m_\mu^2 (k_\nu)_{bc} (k_\mu - m_\mu)_{da} \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right)_{ab} \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right)_{cd} \\ &= f^2 \frac{m_\mu^2}{m_\mu^2} \text{Tr} \left\{ (k_\mu - m_\mu) \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) (k_\nu) \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) \right\} = \\ &= f^2 \frac{m_\mu^2}{m_\mu^2} \text{Tr} \left\{ \right\} \end{aligned}$$

NB: lo spazio delle fasi a 2 corpi, una volta usata l'opportuna conservazione dell'impulso, si scrive come:

$$d\phi^{(2)} = \frac{d\Omega}{32\pi^2} \left(1 - \frac{m^2}{M_\pi^2} \right)$$

ma possiamo sostituire subito $\int d\Omega = 4\pi$ -

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ k_\mu k_\nu \right\} &= \text{Tr} \left\{ k_\mu \gamma^5 k_\nu \right\} = \text{Tr} \left\{ k_\mu k_\nu \gamma^5 \right\} + \text{Tr} \left\{ k_\mu \gamma^5 k_\nu \gamma^5 \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ m_\mu k_\nu \right\} + \text{Tr} \left\{ m_\mu \gamma^5 k_\nu \right\} + \text{Tr} \left\{ m_\mu k_\nu \gamma^5 \right\} - \text{Tr} \left\{ m_\mu \gamma^5 k_\nu \right\} \\ &= k_\mu k_\nu \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu \gamma^\nu \right\} = k_\mu k_\nu 4 g^{\mu\nu} = 4 (k_\mu \cdot k_\nu) \end{aligned}$$

$$|M_{fi}|^2 = 6f \frac{m_\mu^2}{m_\mu^2} 4 (k_\mu \cdot k_\nu)$$

Supponiamo di aver finito il calcolo e calcolato f -

Vogliamo spiegare come mai anche il processo

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu \gamma$$

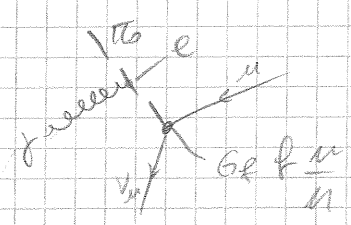
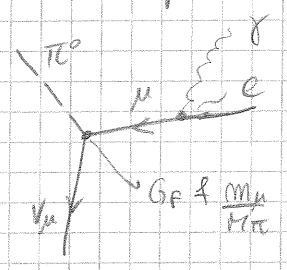
è soppresso -

Ipotesi minimale: a questa \mathcal{L}_I dobbiamo aggiungere la \mathcal{L}_E elettrodinamica -

$$\mathcal{L}'_I = \mathcal{L}_I + e A^\mu \sum_e \bar{\Psi}_e \gamma_\mu \Psi_e$$

Già sappiamo che potremmo aggiungere l'interazione tra un campo e.m. ed una particella scalare carica, della forma: $(\phi^* \partial_\mu \phi - \partial_\mu \phi^* \phi) + e A^\mu J_{\pi\mu}$

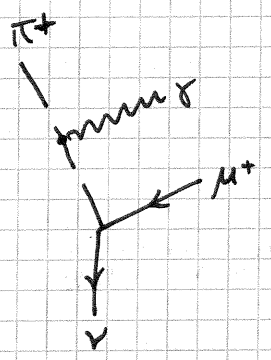
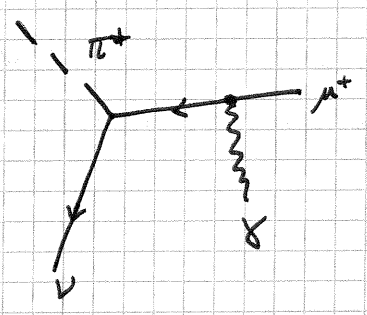
Disegnare i diagrammi relativi a $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu \gamma$, tutti quelli compatibili con queste teorie.



$$|e|^2 = |\pi_{\gamma}|^2$$

$$\frac{\Gamma - \Gamma_0}{\Gamma_0} \propto \frac{|\pi_{\gamma}|^2 - |\pi_{\gamma}^0|^2}{|\pi_{\gamma}^0|^2} \propto \frac{(Ge)^2 - G^2}{G^2} = e^2 - 1 = O(\alpha)$$

I due diagrammi possibili sono:



$$\frac{\Gamma_{\mu\nu\gamma}}{\Gamma_{\mu\nu}} = O(?)$$

Sono due processi diversi \rightarrow si confrontano direttamente i moduli quadri $\Rightarrow \frac{\Gamma_{\mu\nu\gamma}}{\Gamma_{\mu\nu}} = O(\alpha)$

Il rimanente fattore 10^{-2} deriva dallo spazio delle fasi a 3 corpi.

Per la costruzione delle teorie effettive c'è anche un altro modo di ragionare.

Nel modello standard:

$$\mathcal{L}_I = g_w W (J_w^\mu + J_w^\mu)$$

↑
componente adronica

Nei processi a basse energie possiamo trascurare il termine in q^2 nel propagatore del W .
Questo equivale a:

$$\text{Diagram with wavy line} \xrightarrow{q^2 \ll M_W^2} \text{Diagram with cross} g^{\mu\nu}$$

Questa sarebbe la teoria di Fermi corrispondente al trascurare la dipendenza da q della linea interna.

$$\mathcal{L}_F \equiv G_F (J_{W_e}^\mu + J_{W_\mu}^\mu)^\dagger (J_{W_e}^\mu + J_{W_\mu}^\mu)$$

16/12/2011

Abbiamo costruito una \mathcal{L}_I effettiva che descrive l'interazione tra un campo scalare e dei fermioni:

$$\mathcal{L}_I = (G f m_\pi) \partial_\mu \phi J_{W,e}^\mu$$

Possiamo ricavare lo stesso risultato partendo da una teoria, più fondamentale, di Fermi.

$$\mathcal{L}_I = g_W W_\mu (J_{W,e}^\mu + J_{W,q}^\mu)$$

$$J_{W,e}^\mu = \sum_e \left(\frac{1}{2}\right) \bar{\Psi}_e \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) \Psi_{Ve}$$

$$J_{W,q}^\mu = \sum_{qq'} \bar{\Psi}_q \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) A_{qq'} \Psi_{q'}$$

A = matrice di Cabibbo-Maskawa

Possiamo trascurare q^2 rispetto ad M_W^2 :

$$\text{Diagram with wavy line} \approx \text{Diagram with cross} + O\left(\frac{q^2}{M^2}\right)$$

Facendo questa approssimazione ritroviamo la teoria di Fermi: accoppiamenti quantici nei campi.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{libera} + G (J_{W,e}^\mu + J_{W,q}^\mu)^\dagger (J_{W,e}^\mu + J_{W,q}^\mu)$$

La teoria di Fermi è la teoria che era in uso prima del modello standard.

Vogliamo ora usare questa teoria per evitare di approssimare il pione come una particella fondamentale.

Utilizziamo un approccio perturbativo. $\pi^+ \rightarrow l^+ \nu_l$

$$S_{fi} = \langle l^+ \nu_l | T \left[\exp(i \int d^4x \mathcal{L}_I) \right] | \pi^+ \rangle$$

Il primo termine non banale è il 1° ordine.

$$= \langle l^+ \nu_l | i \int d^4x \mathcal{L}_I | \pi^+ \rangle =$$

$$= i \int d^4x \langle l^+ \nu_l | G \underbrace{J_W^{\mu+}} J_{\mu W} | \pi^+ \rangle$$

↓
somma delle due correnti

Sappiamo che le interazioni leptoniche e adroniche sono "disaccoppiate".

$$= i \int d^4x G \langle l^+ \nu_l | J_{W,l}^{\mu+} | 0 \rangle \langle 0 | J_{W,q}^{\mu} | \pi^+ \rangle$$

Abbiamo separato gli spazi di Hilbert e scritto solo i termini che non annichilano lo stato finale e lo stato iniziale.

Per semplicità consideriamo il decadimento del π^- :

$$\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$$

$$S_{fi} = i G \int d^4x \underbrace{\langle l^- \bar{\nu}_l | J_{W,l}^{\mu+} | 0 \rangle}_{\bar{l} \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) N_D} \langle 0 | J_{W,q}^{\mu} | \pi^- \rangle$$

Sappiamo già trattare il primo fattore, ma non il secondo.

Gli operatori di costruzione e distruzione dei quarks non corrispondono al π , che è uno stato legato.

La QCD non è una teoria perturbativa. Possiamo però parametrizzare il fattore tenendo conto che ha una struttura di Lorentz (un quadrivettore).

Abbiamo solo un campo scalare $\pi \rightarrow$ l'unica quantità in gioco è l'impulso del π .

$$\langle 0 | J_{W,q}^\mu | \pi \rangle \equiv f P_\pi^\mu$$

Anche in questo caso ci resta un unico parametro da determinare sperimentalmente: f .

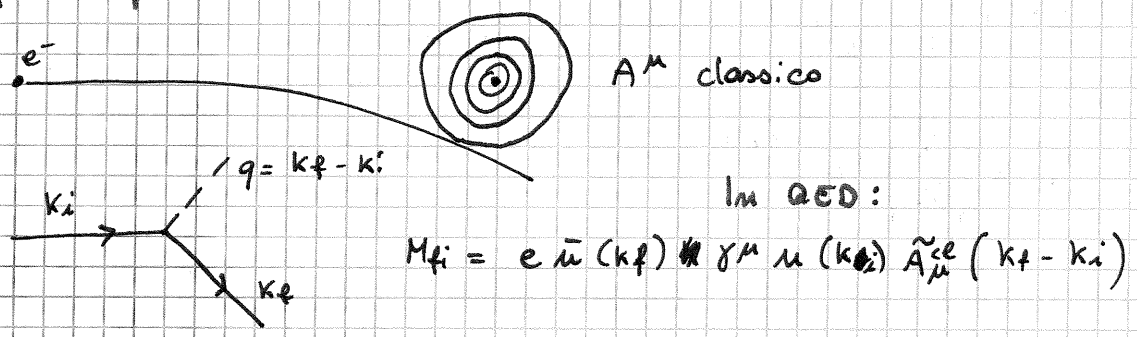
L'elemento di matrice risulta identico a quello che abbiamo calcolato ieri. Questo approccio è però, apponatamente, un po' più fondamentale.

L'utilizzo delle L_I effettive invarianti di Lorentz porta a scrivere i più generali elementi di matrice (anche invarianti di gauge) (vedi Weinberg) -

Questa costante f prende il nome di f_π .

Fattori di forma elettromagnetici

Il primo processo che abbiamo trattato è:



Abbiamo anche visto che l'equazione di Dirac in un campo esterno classico:

$$(\not{P} - \not{A} - m) \Psi = 0$$

formisce una predizione per il momento magnetico dell'elettrone:

$\mu \vec{S} \cdot \vec{B}$ Accoppiamento di Pauli:

$$\mu = 2 e / m$$

Questo fattore 2 si osserva sperimentalmente, e l'unica teoria che lo predice è l'equazione di Dirac nel limite non relativistico.

Questa teoria può non predice, ad esempio, l'irraggiamento. Quest'ultimo va come e^{-3}
 \Rightarrow l'eq. di Dirac è buona solo ai primi ordini in e .

Una teoria più fondamentale è l'elettrodinamica

quantistica - l'interazione di Pauli deve essere derivabile anche in questo approccio.

Mi aspetto di poter ricavare un elemento di matrice del tipo $\langle f | \vec{S} \cdot \vec{B} | i \rangle$, nel limite non relativistico.

Dobbiamo quindi fare il limite non relativistico di $\bar{u}(k_f) \gamma^\mu u(k_i) \tilde{A}_\mu^d(q)$.

L'equazione di Dirac è $(\not{P} - m)\Psi = 0$.

$$\Psi = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix} e^{-ipx}$$

Nel limite non relativistico conviene usare la rappresentazione standard delle matrici γ :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-ipx}$$

Approssimazione non relativistica \Rightarrow le particelle devono essere non relativistiche.

Conviene ridefinire: $\Psi' = \Psi e^{imc^2 t}$

(togliamo l'evoluzione temporale dovuta alla massa).

Ripetendo come abbiamo già fatto per l'equazione di Dirac, si ottiene:

$$u \approx \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{1}{2mc} \sigma \cdot p \varphi \end{pmatrix}$$

questa è una correzione funzione dell'impulso.

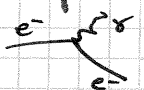
A questo punto possiamo riscrivere M_{fi} , in rappresentazione standard. Il risultato che si ottiene è:

$$M_{fi} = -2me \varphi_f^\dagger \varphi_i A^0 - [(\vec{k}_f + \vec{k}_i) \cdot \vec{A} \cdot \frac{1}{m} \varphi_f^\dagger \varphi_i] + \varphi_f^\dagger \frac{\sigma \cdot B}{2m} \varphi_i \quad (\text{ordine } 1/c)$$

dove $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Il terzo termine è quello di Pauli che ci aspettavamo di trovare: $\sigma/2$ è lo spin.

È un po' più complicato, ma fermandosi all'ordine $1/c^2$ si ritrova anche l'accoppiamento $\vec{L} \cdot \vec{S}$.

N.B.: Studiamo i fattori di forma elettromagnetici in presenza di campi classici: la cinematica vieta il processo  nel vuoto.

Proviamo a generalizzare. Vogliamo scrivere l'elemento di matrice per lo scattering di un e^- da parte di un campo classico.

Ci aspettiamo:

$$M_{fi} = \tilde{A}^\mu(k_f - k_i) J_{\mu fi}$$

include l'accoppiamento e

$$J_{\mu fi}^\mu = \bar{u}(k_f) \Gamma_{fi}^\mu u(k_i)$$

↑ funzione di $k_f - k_i$

Questa è una buona parametrizzazione (confrontare con l'approccio perturbativo al 1° ordine) - Questa espressione pretende però di includere contributi agli eventuali ordini successivi: non stiamo usando alcuna ipotesi perturbativa.

$$M_{fi} = A_{ce}^\mu \bar{u}(k_f) \Gamma_\mu(k_f, k_i) u(k_i)$$

Qual è il Γ_μ più generale? Gli stati asintotici u e \bar{u} sono stati di particella libera.

Si richiede:

- 1) invariante di Lorentz
- 2) parità (sperimentalmente l'effetto di non commutazione conserva la parità)
- 3) invariante di gauge

Γ si può riscrivere come combinazione lineare di termini:

$$1, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5, \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

Dovremmo anche utilizzare le quantità fisiche

in gioco:

$$k_f^\mu, k_i^\mu \longrightarrow \begin{cases} p^\mu = (k_f + k_i)^\mu \\ q^\mu = (k_f - k_i)^\mu \end{cases}$$

Non ci servono altri ingredienti -

Invarianza di Lorentz $\Rightarrow \Gamma_\mu$ deve essere un quadrivettore:

$$\Gamma_\mu = \sum_i f_i(q^2) A_{\mu i}$$

f_i sono funzioni scalari delle quantità scalari in gioco. L'unico scalare indipendente

$$\text{è } q^2 : p^2 = q^2 + \not{p}^2$$

Quali sono i possibili quadrivettori $A_{\mu i}$?

$$A_{\mu i} \equiv B_{\mu i} = \bar{u} \gamma_{\mu} u$$

Tra tutte le combinazioni lineari possibili possiamo escludere i termini che contengono γ^5 , che formerebbero pseudo 4-vettori e non 4-vettori (per la parità) -

$$\bar{u}(k_f) \left[f_1(q^2) \gamma^\mu + f_2(q^2) p^\mu + f_3(q^2) q^\mu + f_4(q^2) \sigma^{\mu\nu} p_\nu + f_5(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(k_i)$$

Questi sono tutti i possibili termini che posso costruire.

Ci rimane da implementare l'invarianza di gauge:

se scrivo

$$q_\mu J_{\not{f}_i}^\mu = 0 \quad (\text{invarianza di } w_i)$$

posso ora cancellare tutti i termini che non danno 0 -

$$\bar{u}(k_f) \left[f_1(q^2) \gamma^\mu + f_2(q^2) p^\mu + f_5(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(k_i)$$

Si può inoltre dimostrare l'identità di Gordon:

$$\bar{u}(k_f) \not{O}^\mu u(k_i) = \bar{u}(k_f) \frac{k_f + m}{2m} \not{O}^\mu \frac{k_i + m}{2m} u(k_i)$$

dove O^μ è un oggetto generico -

Posso riscrivere uno dei 3 termini come funzione degli altri due, sfruttando questa relazione.

Si ricava:

$$T_{\mu}(k_f, k_i) = f(q^2) \gamma^{\mu} - g(q^2) \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2m} q_{\nu}$$

Questo è il più generale oggetto che possiamo scrivere. A qualsiasi ordine perturbativo dobbiamo ritrovare questa struttura, perché gli argomenti che abbiamo usato per costruirla non sono perturbativi.

Ad esempio, all'ordine 0:

$$f(q^2) = e \quad \wedge \quad g(q^2) = 0$$

La carica elettrica dell'elettrone è definita come

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} f(q^2)$$

Si ricava anche il momento magnetico:

$$\mu = \frac{e}{m} \equiv g \frac{e}{2m} \Rightarrow g = 2$$

Sperimentalmente si misura:

$$\frac{g-2}{2} = 1,1596521807(3) \cdot 10^{-3}$$

Da questa teoria, sviluppando in ordini successivi, si ottiene:

$$\frac{g-2}{2} = 0 + \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 1,162 \cdot 10^{-3} + \dots$$

Che, al 4° ordine, spiega tutte le cifre fino a (3) escluso. Sono 8 cifre significative.

